HEI Haute Ecole d'Ingénierie, HES-SO Valais

Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Algèbre Linéaire 2 - Série 3

Matrices II

1. (a) Soit A une matrice inversible. Montrer que $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ et que $(ABA^{-1})^k = AB^kA^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Soit $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ une matrice telle que $A^k = O_{n,n}$ pour un $k \geq 2$.

   (i) Montrer que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + ... + A^{k-1}$. A quelle identité polynomiale cette propriété est-elle similaire ?

   (ii) Calculer $(I_4 - A)^{-1}$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^T$. Calculer $\left(\left(\left(A^T\right)^{-1}\left(B^T\right)^{-1}\right)^T\right)^{-1}$.

2. (a) Montrer que $\det(A^k) = (\det A)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $\det(BAB^{-1}) = \det A$.

   (b) Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & -1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, en utilisant:

   (i) son déterminant.

   (ii) l'algorithme de Gauss-Jordan.

   (b) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, en utilisant:

   (i) un système de 9 équations à 9 inconnues.

   (ii) l'algorithme de Gauss-Jordan.

   (iii) la méthode des cofacteurs.