

Algèbre Linéaire 2 - Série 9

Applications linéaires : diagonalisation

1. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Si la matrice est diagonalisable, donner une base dans laquelle la matrice est diagonale, donner cette matrice diagonale, et interpréter géométriquement l'application associée.

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 6 \\ 2 & -7 & -3 \\ -12 & 36 & 16 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -8 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calculer

$$\begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{250}$$

3. On considère deux types d'une même population de bactéries: celles de type S et celles de type T . On suppose que chaque type de bactérie peut donner naissance à des bactéries du même type et à des bactéries de l'autre type.

Plus précisément, on suppose qu'à chaque instant, une bactérie de type S donne naissance à une bactérie de type S et quatre de type T , puis elle meurt. De la même manière, une bactérie de type T donne naissance à une bactérie de type S et une de type T , et elle meurt.

Le but de l'exercice est de trouver une formule pour le nombre de bactéries de chaque type après n étapes.

- (a) On note s_n et t_n le nombre de bactéries de type S et T , respectivement, au temps n . Donner des formules pour s_{n+1} et t_{n+1} en fonction de s_n et t_n .
- (b) On pose $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}$. Donner la matrice A de la transformation, c'est-à-dire la matrice A telle que $A\vec{x}_n = \vec{x}_{n+1}$.
- (c) On suppose qu'au temps $n = 0$, il n'y avait qu'une seule bactérie, de type S . Déterminer la composition de la population de bactéries aux temps $n = 1, 2, 3$ de deux manières:
- (i) En calculant "à la main" chaque étape.
 - (ii) En utilisant (b).
- (d) Etablir une formule pour \vec{x}_n seulement en fonction de n , s_0 et t_0 (c'est-à-dire une formule fermée et pas une formule récursive).