Mathématiques appliquées 2 - Série 1

1. Déterminer dans $\mathbb{R}^5$ l'intersection de la droite passant par les points $B = (-1, -4, 0, 3, 0)$ et $C = (0, -1, -3, 3, 1)$ avec la sphère de centre $A = (0, -1, 1, 3, -2)$ et de rayon 5.

<u>droite d</u> : $\vec{d} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d : \vec{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Sphère S</u> : $S : (x_1 - 0)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 3)^2 + (x_5 + 2)^2 = 25$

<u>Intersection</u> : $(-1+t)^2 + (-3+3t)^2 + (-3t-1)^2 + 0 + (t+2)^2 = 25$

$\Rightarrow 1 - 2t + t^2 + 9 - 18t + 9t^2 + 9t^2 + 1 + 6t + t^2 + 4t + 4 = 25$

$\Rightarrow 20t^2 - 10t + 15 = 25 \Rightarrow 20t^2 - 10t - 10 = 0 \Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9 \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow t_1 = 1$ et $t_2 = -\frac{1}{2}$

<u>$t_1 = 1$</u> : $\vec{OI_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I_1 = (0, -1, -3, 3, 1) = C$

<u>$t_2 = -\frac{1}{2}$</u> : $\vec{OI_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -11/2 \\ 3/2 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow I_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)$

2. Déterminer l'ensemble des points équidistants des points $A = (1, 0, 2, -1)$ et $B = (0, 1, -1, 1)$.

$d(A, P) = d(B, P)$

$\Rightarrow (p_1 - 1)^2 + (p_2 - 0)^2 + (p_3 - 2)^2 + (p_4 + 1)^2 = (p_1 - 0)^2 + (p_2 - 1)^2 + (p_3 + 1)^2 + (p_4 - 1)^2$

$\Rightarrow -2p_1 + 1 - 4p_3 + 4 + 2p_4 + 1 = -2p_2 + 1 + 2p_3 + 1 + 1 - 2p_4$

$\Rightarrow -2p_1 + 2p_2 - 6p_3 + 4p_4 = -3$ c'est un hyperplan.

3. (a) Déterminer la distance du point $P = (0, 1, -1, 2)$ à l'hyperplan d'équation

$$\mathcal{H}: \quad x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2.$$

(b) Déterminer l'angle entre les hyperplans

$$\mathcal{H}_1: \quad x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \qquad \text{et}$$
$$\mathcal{H}_2: \quad 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -1.$$

a) $\mathrm{dist}(H, P) = \dfrac{|0-1-3+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{12}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \measuredangle(H_1, H_2) = \measuredangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

$\Rightarrow \varphi = \arccos \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \arccos \dfrac{2+6-3-4-2}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}} = \arccos \dfrac{-1}{20} \cong 92.86$

4. (a) Vérifier que

$$\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \frac{1}{\sqrt{266}} \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer la longueur de $3\vec{v_1} - 2\vec{v_2} + 5\vec{v_3}$.

(c) Ecrire $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$.

a) $\|\vec{v}_1\| = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{9+1+4} = 1$ $\quad \|\vec{v}_2\| = \dfrac{1}{\sqrt{19}} \cdot \sqrt{9+1+9} = 1$ $\quad \|\vec{v}_3\| = \dfrac{1}{\sqrt{266}} \cdot \sqrt{121+81+64} = 1$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{19}} \cdot (3+3-6) = 0$ $\quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{266}} \cdot (11-27+16) = 0$

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{19}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{266}} \cdot (33-9-24) = 0 \Rightarrow$ BON de $\mathbb{R}^3$

b) Longueur de $3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$: $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ car BON.
Longueur de $3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3$: $\sqrt{\sqrt{13}^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

c) $\vec{V} = (\vec{V}\cdot\vec{V_1})\cdot\vec{V_1} + (\vec{V}\cdot\vec{V_2})\cdot\vec{V_2} + (\vec{V}\cdot\vec{V_3})\cdot\vec{V_3}$

$= \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{V_1} + \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}\vec{V_2} + \frac{1}{\sqrt{266}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\-9\\8\end{pmatrix}\vec{V_3}$

$= \frac{11}{\sqrt{14}}\cdot\vec{V_1} - \frac{10}{\sqrt{19}}\vec{V_2} - \frac{5}{\sqrt{266}}\vec{V_3}$

5. Déterminer la solution du système

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = 13 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 & = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 & = -3 \end{cases}$$

et décrire celle-ci géométriquement.

$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 13 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 13 \\ -5x_3 - 5x_4 = 5 \\ x_3 + x_4 = -1 \\ -4x_3 - 4x_4 = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow x_3 + x_4 = -1$

$\Rightarrow x_3 = -1 - x_4 \quad \Rightarrow 3x_1 - 3x_2 \; 1 + x_4 + 2x_4 = 13$

$\Rightarrow 3x_1 - 3x_2 + 3x_4 = 12$

$\Rightarrow x_1 - x_2 + x_4 = 4$

$\Rightarrow x_1 = 4 + x_2 - x_4 \quad \Rightarrow \overset{\alpha}{x_2}$ et $\overset{\beta}{x_4}$ sont des paramètres libres

$\Rightarrow x_1 = 4 + \alpha - \beta$
$x_2 = \alpha$
$x_3 = -1 - \beta$
$x_4 = \beta$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

C'est un plan à 2 dimesion dans $\mathbb{R}^4$

Mathématiques appliquées 2 - Série 2

1. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Déterminer tous les produits possibles $A_i \cdot A_j$, $1 \leq i, j \leq 3$.

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 16 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_1 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 10 & 20 \\ 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad A_3 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}$$

2. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer

(a) A^2	(c) CD, DC	(e) E^2
(b) BC	(d) D^2	(f) FG, FH

et expliciter la différence avec les règles des calculs des nombres réels.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ dans $\mathbb{R}$, $a^2 = a \Rightarrow a = 1$ ou $a = 0$

b) $BC = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

c) $CD = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -12 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$DC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow CD \neq DC$ dans $\mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$

d) $D^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ dans $\mathbb{R}$: $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

e) $E^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$: $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

f) $FG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$: $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$

$FH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices suivantes, si elles existent :

(a) $A - 3D^T$ (c) $3A - 2A^T$ (e) $2AA^T - 4C$ (g) $CD^T - 2A$

(b) $A + B$ (d) BD (f) DB

a) $A - 3D^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 0 & -12 \\ -9 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & -9 \\ -4 & -25 \end{pmatrix}$

b) N'existe pas ! $A : 3 \times 2$, $B : 2 \times 2$

c) N'existe pas ! $A : 3 \times 2$, $A^T : 2 \times 3$

d) $BD = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 24 \\ -7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

e) $2AA^T - 4C = 2\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 13 & 3 & -23 \\ 3 & 10 & -7 \\ -23 & -7 & 41 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 16 \\ -12 & -8 & 0 \\ -24 & +8 & -20 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 22 & 6 & -30 \\ -6 & 12 & -14 \\ -70 & -6 & 62 \end{pmatrix}$

f) N'existe pas $D : 2 \times 3$ $B : 2 \times 2$

g) $CD^T - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -29 \\ -12 & 5 \\ -9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & -6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -10 & -33 \\ -14 & -1 \\ -19 & 29 \end{pmatrix}$

4. (a) Soient A et B des matrices $n \times n$ symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$. (On dit que A et B commutent.)

(b) Que peut-on dire d'une matrice A pour laquelle $A^T = -A$?

a) AB symétrique $\Rightarrow AB = (AB)^T = B^T \cdot A^T = BA$

$AB = BA \Rightarrow A^T B^T = B^T A^T$ (car A et B sont symétriques

$\Rightarrow (BA)^T = (AB)^T \Rightarrow ((BA)^T)^T = ((AB)^T)^T \Rightarrow BA = AB.$

b) A doit être une matrice carrée. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$A^T = -A \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow$ les éléments symétriques sont opposés.

5. On considère $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ comme des matrices $n \times 1$ (vecteurs colonnes). Calculer $\vec{u}^T \vec{v}$, $\vec{u}^T \vec{u}$ et $\vec{v}\vec{v}^T$. Que constatez-vous ?

$\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}^T \vec{v} = (a_1 .. a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \rightarrow$ produit scalaire

$\vec{u}^T \vec{u} = (a_1 \ldots a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \|\vec{u}\|^2$

$\vec{v}\vec{v}^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (b_1 \ldots b_n) = \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \cdots & b_1 b_n \\ b_2 b_1 & b_2^2 \cdots & b_2 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n b_1 & b_n b_2 \cdots & b_n^2 \end{pmatrix}$ matrice symétrique formé des produits $a_i b_j$.

Mathématiques appliquées 2 - Série 3

1. (a) Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$|A| = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(b) Calculer le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

i. en développant suivant la 1ère colonne.

ii. en développant suivant la 1ère ligne.

i) $|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} - 25 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 16$

ii) $|A| = 2 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 16$

(c) Les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ?

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 1 - 8 - 4 - 4 - 4 = -27 \neq 0$ donc les vecteurs sont linéairement indépendants.

(d) Soit

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

i. Montrer que $\det(V) = (b-a)(c-a)(c-b)$.

ii. Pour quelles valeurs de a, b, c le déterminant est-il différent de zéro ?

i) $(b-a)(c-a)(c-b) = (bc - ac - ab + a^2)(c-b)$

$= bc^2 - ac^2 - \cancel{a}bc + a^2c - b^2c + b\cancel{a}c + ab^2 - a^2b$

$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + a^2c + ab^2 - a^2b - b^2c - ac^2$ ✓

ii) $\det(V) \neq 0$ si $b \neq a$, $a \neq c$ et $c \neq b$.

2. Déterminer toutes les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2 - 3)$

$= (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda + \sqrt{3})(\lambda - \sqrt{3})$

$\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = \sqrt{3},\ \lambda_4 = -\sqrt{3}$

10

3. Soit A une matrice inversible. Montrer que

(a) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ (b) $(ABA^{-1})^k = AB^kA^{-1}$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$a)\ (A^k)^{-1} = (A^{k-1}\cdot A)^{-1} = A^{-1}(A^{k-1})^{-1} = A^{-1}(A^{k-2}\cdot A)^{-1} = A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot (A^{k-2})^{-1}$$
$$= \dots = (A^{-1})^k$$

$$b)\ (ABA^{-1})^k = (ABA^{-1})(ABA^{-1})\dots(ABA^{-1}) = (AB^2A^{-1})(ABA^{-1})\dots(ABA^{-1})$$
$$= \dots = AB^kA^{-1}$$

4. Soit A la matrice régulière donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit $B = A^T$.
Calculer $\left(\left(\left(A^T\right)^{-1}\left(B^T\right)^{-1}\right)^T\right)^{-1}$.

$$\left(\left(A^T\right)^{-1}\left(B^T\right)^{-1}\right)^T\right)^{-1} = \left(\left(\left(A^{-1}\right)^T\cdot\left(B^{-1}\right)^T\right)^T\right)^{-1} = \left(\left(\left(B^{-1}A^{-1}\right)^T\right)^T\right)^{-1} = A\cdot B$$
$$= AA^T$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 16 & 14 & 4 \\ 16 & 25 & 14 & 7 \\ 14 & 14 & 21 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (a) Vérifier à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & -1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & -11 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & -7 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2L_2+7L_1 \\ L_3+2L_1 \\ L_4-2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 3 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -3 & & & & \\ & & & & & & & \end{array}\right) \rightarrow \text{Pas inversible}$$

(b) Calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2-3L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3-2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1+L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

6. (a) Ecrire le système

$$\begin{cases} x & = -2 \\ x - y + z - u & = -3 \\ x + y + z + u & = 1 \\ x + 2y + 4z + 8u & = 3 \end{cases}$$

sous forme matricielle et le résoudre en inversant la matrice des coefficients.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \\ L_4 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 - 3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -L_2 \\ \frac{1}{2} L_3 \\ \frac{1}{6} L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \begin{array}{l} 6L_1 \\ 6L_2 \\ 6L_3 \\ 6L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 3 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 + L_3 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{6}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer le polynôme de degré 3,

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

qui passe par les points $(-1, -3)$, $(0, -2)$, $(1, 1)$ et $(2, 3)$.

$p(-1) = -a + b - c + d = -3 \qquad x - y + z - u = -3$

$p(0) = d = -2 \qquad$ et $\qquad x = -2$

$p(1) = a + b + c + d = 1 \qquad x + y + z + u = 1$

$p(2) = 8a + 4b + 2c + d = 3 \qquad x + 2y + 4z + 8u = 3$

$\Rightarrow x = d = -2$

$y = c = \frac{5}{2}$

$z = b = 1 \qquad \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x - 2$

$u = a = -\frac{1}{2}$

Mathématiques appliquées 2 - Série 4

1. Les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont-elles linéaires ?

   (a)
   $$f(x, y) = (-y, -x)$$

   (b)
   $$g(x, y) = (x - 1, y - x)$$

   (c)
   $$h(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \sin(x) + \sin(y)\right)$$

   (d)
   $$i(x, y) = (2x - y, y + 3x)$$

   (e)
   $$p(\vec{x}) = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\right) \vec{a}, \qquad \text{où } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur fixe} \neq \vec{0}.$$

   (f)
   $$r(x, y) = (x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))$$

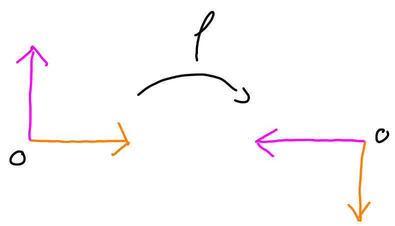
   Si oui, déterminer la matrice A de l'application et esquisser l'image de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$. Interpréter ensuite géométriquement l'application et $\det(A)$.

a) f est linéaire car $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice telle que

$A_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = f(x,y)$

$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_2$

$f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$



$\det(A) = -1$ $\quad$ f est la symétrie par rapport à la droite $y = -x$.
↳ f conserve les longueurs, mais inverse l'orientation.

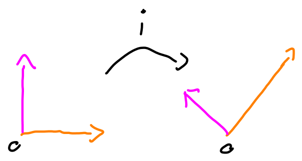
b) $g(0,0) = (-1, 0) \neq (0,0) \Rightarrow g$ n'est pas linéaire.

c) $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sin(1) \end{pmatrix} \neq h\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sin(1) \end{pmatrix}$

d) i est linéaire car $A_i = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice telle que

$$A_i \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + y \end{pmatrix} = i(x, y)$$

$$i(\vec{e}_1) = \binom{2}{3}$$
$$i(\vec{e}_2) = \binom{-1}{1}$$



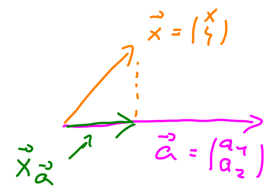
Les sommets du parallélogramme sont $(0,0)$ $(-1,1)$ $(2,3)$ $(1,4)$

Son volume est $|A_i| = 5$

e) p est linéaire car $A_p = \dfrac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ est telle que $A_p \binom{x}{y} = p(x, y)$

avec $p(x,y) = \left(\dfrac{\vec{a}\,\vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right) \vec{a} = \left(\dfrac{a_1 x + a_2 y}{a_1^2 + a_2^2} \right) \binom{a_1}{a_2} = \dfrac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 x + a_1 a_2 y \\ a_1 a_2 x + a_2^2 y \end{pmatrix}$

p est la projection orthogonale de $\vec{x} = \binom{x}{y}$ sur $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$.



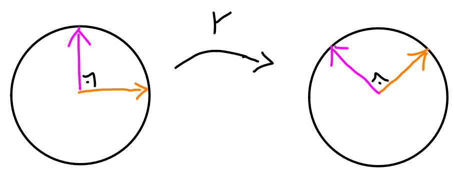
L'image du carré unité est un segment, son air vaut 0.

$\det(A_p) = 0$

f) r est linéaire car $A_r = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ est telle que $A_r \binom{x}{y} = r(x,y)$.

$$A_r \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \\ x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha \end{pmatrix} = r(x,y)$$

$$r(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$r(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



r est la rotation d'angle α autour de l'origine.

$\det(A_r) = \cos^2 + \sin^2 = 1$

2. On considère les applications linéaires suivantes.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{est la symétrie par rapport au plan } yz,$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{est la symétrie par rapport au plan } xz,$$

(a) Déterminer les images par f et g des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déduire de (a) les matrices A_f et A_g de ces applications.

(c) Déterminer les matrices des applications

$$f \circ f, \quad g \circ g, \quad f^{-1}, \quad g^{-1}, \qquad g \circ f \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1}$$

et interpréter géométriquement les résultats.

a) $f(\vec{e_1}) = -\vec{e_1}$ $\qquad g(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$

$f(\vec{e_2}) = \vec{e_2}$ $\qquad g(\vec{e_2}) = -\vec{e_2}$

$f(\vec{e_3}) = \vec{e_3}$ $\qquad g(\vec{e_3}) = \vec{e_3}$

b)

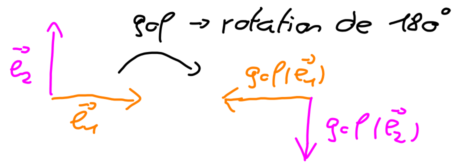
$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) i) $A_{f\circ f} = A_f A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en faisant deux fois la même symétrie, on revient à notre point de départ.

ii) $A_{g\circ g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $f^{-1} = A_f^{-1} = A_f$ car $A_f^2 = I_3$ $\qquad g^{-1} = A_g^{-1} = A_g$ car $A_g^2 = I_3$

iv) $A_{g\circ f} = A_g A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



v) $(A_{g\circ f})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{g\circ f}$ $\quad (g\circ f)^{-1}$ est en fait une rotation de $-180°$ autour de l'axe des z.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(a) Calculer les valeurs propres de A.

(b) On considère les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $f(\overrightarrow{v_1})$ et $f(\overrightarrow{v_2})$ et les écrire comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

Que remarquez-vous ?

(c) On définit la matrice $V = (\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2})$.

Résoudre l'équation $A\,V = V X$, où l'inconnue X est une matrice.

(d) Calculer A^{25}.

a) $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(5-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 4\lambda - 21 = (\lambda-7)(\lambda+3)$

$\chi_A(\lambda) = 0 \iff (\lambda-7)(\lambda+3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = -3$

b) $f(\vec{v_1}) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ 7 et -3 sont les valeurs propres de A

$f(\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $AV = VX \Rightarrow X = V^{-1}AV \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & -14 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -35 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

d) $A^{25} = (VXV^{-1})^{25} = VX^{25}V^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7^{25} & 0 \\ 0 & -3^{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7^{25} & -2\cdot 3^{25} \\ 2\cdot 7^{25} & 3^{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7^{25} + 4\cdot 3^{25} & -2\cdot 7^{25} - 2\cdot 3^{25} \\ -2\cdot 7^{25} - 2\cdot 3^{25} & -4\cdot 7^{25} + 3^{25} \end{pmatrix}$

Epreuve de mathématiques appliquées 2 du 16 avril 2024

1. Déterminer le rayon de la sphère centrée en $C = (1, 0, -1, 1)$ qui est tangente à l'hyperplan

$$H: 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 5$$

ainsi que le point de tangence.

5 points

d : droite passant par C, perpendiculaire à H.

$$d: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Intersection $H \cap d$: $2(1+2t) - (0-t) + (-1+t) - 2(1-2t) = 5 \iff$

$$2 + 4t + t - 1 + t - 2 + 4t = 5 \iff 10t = 6 \iff t = \frac{3}{5}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -1 + \frac{3}{5} \\ 1 - \frac{6}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow P = \left(\frac{11}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right)$$

Rayon : $\|\vec{CP}\| = \left\| \begin{pmatrix} 6/5 \\ -3/5 \\ 3/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{9}{25} + \frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{3}{5}\sqrt{4+1+1+4} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$

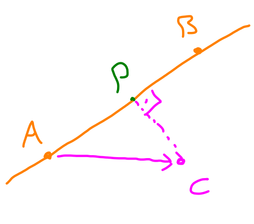
2. Déterminer le point P de la droite d passant par $A = (1, 0, 2, -1)$ et $B = (2, 3, 1, 0)$ qui est le plus proche du point $C = (0, 7, 3, -2)$.

5 points

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$

$= \vec{OA} + \vec{AC}_{\vec{AB}}$



$$\vec{AC}_{\vec{AB}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1+9+1+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{18}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 9/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2, puis A^3.

(b) En déduire A^6 et A^{2024}.

8 points

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$

$A^3 = 2 \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -8 I_2$

b) $A^6 = (A^3)^2 = (-8 I_2) = 64 I_2$

$A^{2024} = A^{6 \cdot 337 + 2} = A^{6 \cdot 337} A^2 = 64^{337} \cdot I_2 \cdot A^2 = 2^{2022} \cdot A^2$

4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation $XA^{-1} = B$, où l'inconnue X est une matrice.

4 points

$XA^{-1} = B \Rightarrow X = BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 13 \\ 16 & 15 & 15 \end{pmatrix}$

5. Soit f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} z \\ 2x-3y \\ x+y \end{pmatrix}$, où $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   (a) f est-elle une application linéaire ? Si oui, donner sa matrice A.

   (b) Déterminer le volume de l'image par f du cube engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5 points

a) f est linéaire avec

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on a bien } A_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(\vec{x})$$

b) $2^3 \cdot \det(A) = 2^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot 5 = 40$

6. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la projection orthogonale g sur le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer la matrice A de l'application g.

   (b) Déterminer A^{2024}.

7 points

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}^2\|^2} \vec{v} = \dfrac{x+y+z}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{2024} = A$ car faire la projection d'une projection ne change plus rien.