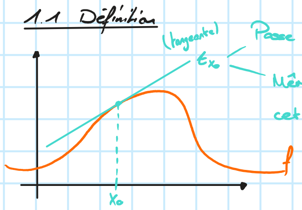
1. Dérivée

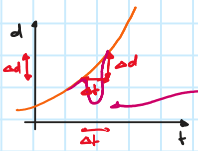
mercredi, 19 février 2025 12:45

1.1 Définition



Passe par $(x_0; f(x_0))$

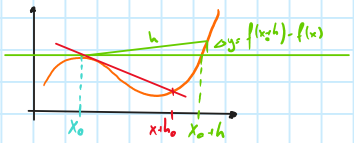
Même pente que f à cet endroit



$\Rightarrow \frac{\Delta d}{\Delta t}$ = vitesse

sauf que $\Rightarrow$ Problème

$\Rightarrow$ idée : Prendre vitesse moyenne entre x_0 et x_0+h



pente $= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

pente $= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Si $h = 0 \Rightarrow$ pente $= \frac{f(x_0+0) - f(x)}{0} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\Rightarrow$ pente $= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h} = f'(x_0)$ (Si la limite existe)

└ Dérivée de f en x

(en gros : dérivé = "vitesse" de f en 1 point)
(pente)

Exemple : 1) $f(x) = ax+b$

$f(x_0+h) = a(x_0+h)+b$

$f(x_0) = ax_0+b$

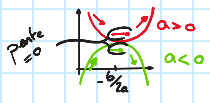
$\Rightarrow$ pente $= \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{ax_0} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax_0} - \cancel{b}}{h}$

$= \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a$ ← Résultat attendu

Ne change pas en fonction de x_0

2) $f(x) = ax^2+bx+c$



$(\dot{f}(x)) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c-(ax_0^2+bx_0+c)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{ax_0^2} + 2ax_0h + ah^2 + \cancel{bx_0} + bh + \cancel{c} - \cancel{ax_0^2} - \cancel{bx_0} - \cancel{c}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(ax_0+ah+b)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} ax_0 + \overset{\to 0}{ah} + b = ax_0+b$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = ax_0+b}$

Si $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2ax+b=0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

		$-\frac{b}{2a}$		
	−	0	+	a > 0
$f'(x)$	+	0	−	a < 0

1.2 : Règles de dérivation

Théorème : 1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

2) $(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$ — α constante

Règle du produit 3) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Règle du quotient 4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Règle de la chaîne 5) $(f(g(x)))' = ((f\circ g)(x))' = f'(g(x))\cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Dérivée interne / intérieure}}$

Règle de l'inverse 6) $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

1.3 : Dérivées des fonctions standards

Théorème :

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
a^x	$a^x\cdot\ln(a)$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln(a)}$

$(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Exemple : 1) $(x^2)' = 2\cdot x^{2-1} = 2\cdot x$

2) $(4x^2+3x)' = (4x^2)'+(3x)' = 4(x^2)'+3(x)'$
$= 8x+3$

3) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \longrightarrow$ Règle 4

simple $\longrightarrow (x^{-1})' = -1\cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

Exemple : 1) $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= f^{-1}(x)$ si $f(x)=\sin(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

$= (f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Preuve de la dérivée

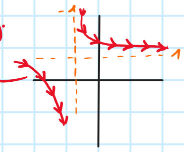
2) $(\ln(x))' = \dfrac{1}{e^{\ln(x)}} = \dfrac{1}{x}$

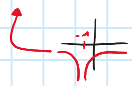
$f^{-1}(x)$ si $f(x)=e^x$

$\Rightarrow f'(x) = e^x$

3) $\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)' = \dfrac{\overbrace{(x+3)'}^{=1}\cdot(x+1) - (x+3)\cdot\overbrace{(x+1)'}^{=1}}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x-3}{(x+1)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$

dérivée tous le temps nég.

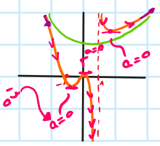




4) $\left(\dfrac{(x+1)x^2}{x-1}\right)'$

$= \dfrac{\overbrace{(3x^2+2x)}^{=(x^3+x^2)'}(x-1) - (x^3+x^2)\cdot\overbrace{1}^{=(x-1)'}}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3-2x^2-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x^2-x-1)}{(x-1)^2} = 0$ si $x=0$ ou $x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$: $\dfrac{1+\sqrt5}{2}\approx 1.6$, $\dfrac{1-\sqrt5}{2}\approx -0.6$

trouver zéro



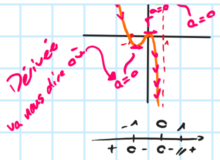
Dérivée dire où

As. :

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2 & x-1 \\ \hline -(x^3-x^2) & x^2+2x+2 \\ \quad 2x^2 & \\ -(2x^2-2x) & \\ \quad 2x & \\ -(2x-2) & \end{array}$$

$\rightsquigarrow \underbrace{x^2+2x+2}_{\text{Asymptote}} + \dfrac{2}{x-1}$

x		$\frac{1-\sqrt5}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt5}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$//$	$-$	0	$+$



$$
\begin{array}{l|l}
-(x^3-x^2) & x^2+2x+2 \\
\quad 2x^2 & \\
-(2x^2-2x) & \\
\quad 2x & \\
-(2x-2) & \\
\quad 2 &
\end{array}
\rightsquigarrow \underbrace{x^2+2x+2}_{\text{Asymptote}} + \frac{2}{x-1}
$$

$\frac{1}{}$: $-$ // $+$

x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	//	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\underbrace{\overrightarrow{(m)}}$	$\nearrow$	$\underbrace{\overrightarrow{(M)}}$	$\searrow$	$\underbrace{\overrightarrow{(m)}}$	$\nearrow$	$\underbrace{\overrightarrow{(M)}}$	$\searrow$

Lieu où pente $= 0$

$\Rightarrow$ Maximum (M) et minimum (m)

5) $\big(\underbrace{e^{\overbrace{3x}^{g(x)}}}_{f(x)=e^x,\ x=g(x)}\big)' = e^{3x}\cdot(3x)' = 3e^{3x}$ $\quad e^{g(x)} = e^{3x}$

$\{(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)\}^*$

6) $(e^{x^3})' \overset{*}{=} e^{x^3}\cdot(x^3)' = 3x^2\cdot e^{x^3}$

7) $(e^{\sin(x^2)})' \overset{*}{=} e^{\sin(x^2)}\cdot \overbrace{(\sin(x^2))'}^{*} = e^{\sin(x^2)}\cdot\cos(x^2)\cdot\overbrace{2x}^{(x^2)'}$

8) $\left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)' \overset{*}{=} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} + \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{\underbrace{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{\overbrace{1\cdot(x+1)-1\cdot x}^{1}}{\cancel{(x+1)^2}} = \frac{1}{(x+1)^2+x^2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}$

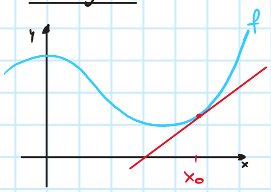
$\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}$ $\quad = \frac{\cancel{(x+1)^2}}{(x+1)^2+x^2}$

2. Application de la dérivée

mercredi, 5 mars 2025 12:54

2. Application de la dérivée

2.1 tangentes



$\leftarrow$ tangente au graph de f en x_0

$\longrightarrow$ On veut t_{x_0} droite : $y = ax + b$

par $(x_0; f(x_0))$ et de pente

$f'(x_0)$: $a = f'(x_0)$

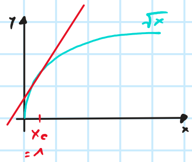
$\longrightarrow$ On veut $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$

$\Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

$\Rightarrow t_{x_0} : \; y = \underbrace{f'(x_0) \cdot x}_{a} + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0}_{b}$

$\Rightarrow \boxed{t_{x_0} : \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

Exemple : 1) $f(x) = \sqrt{x}$



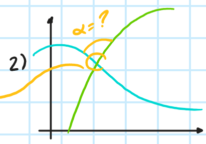
$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = \sqrt{x_0} \\ f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{x_0} : \; y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \sqrt{x_0}$

En $x_0 = 1$: $t_{x_0} : \; y = \frac{1}{2 \cdot 1}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$\left(\Rightarrow \sqrt{1{,}1} \cong \frac{1}{2} \cdot 1{,}1 + \frac{1}{2} = 1{,}05 \approx \right)$

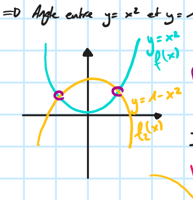
calculette $= 1{,}049$

Intersection ronde



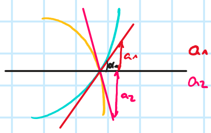
Angle entre 2 courbe = angle tangente à cet endroit

$\Rightarrow$ Angle entre $y = x^2$ et $y = 1 - x^2$



Parité $\Rightarrow$ Regarde que en $x \geq 0$

Intersection : $1 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

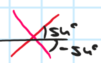


$a_1 = \tan(\alpha_1)$
$a_2 = \tan(\alpha_2)$ } calculer les dérivées

$\Rightarrow f'(x) = 2x$
$f_2'(x) = -2x$
$\Rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} = a_1$
$f_2'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} = a_2$

Rem : $a_2 < 0 \Rightarrow \alpha_2 > 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \arctan(a_1)$, $\alpha_2 = \arctan(-\sqrt{2}) = -\arctan(\sqrt{2})$



$\Rightarrow$ Angle total $= 2 \arctan \sqrt{2} = 108°$ (Obtu)

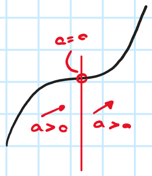
2.2 Croissance et extrema

Théorème : Si $f'(x) > 0$ pour $x \in [a,b]$, alors $f \nearrow$ sur $[a,b]$

croissante

Théorème : Si $f'(x) > 0$ pour $x \in [a,b]$, alors $f \nearrow$ sur $[a,b]$ (croissante)

Si $f'(x) < 0$ — " —, alors $f \searrow$ sur $[a,b]$



Ex : $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \leftarrow = 0$ si $x = 0$

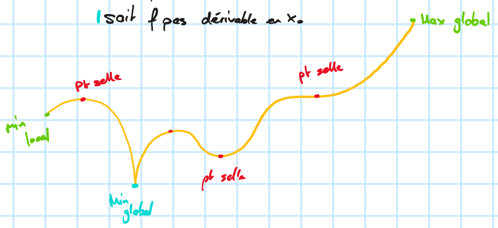
x		0	
$f'(x)$	+	0	+
f	$\nearrow$	pt selle	$\nearrow$

"Def" : max/min locaux = le plus haut/bas localement

max/min globaux = le plus haut/bas sur tout D_f

Théorème : x_0 extremum (local ou global) de f sur $[a,b]$

Alors | soit $x_0 = a$ ou $x_0 = b$
| soit $f'(x_0) = 0$
| soit f pas dérivable en x_0



Etude de fonction

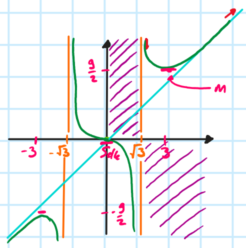
Exemple :

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

$D : \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$ A.V.

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2-3} = -\dfrac{x^3}{x^2-3} = -f(x) \Rightarrow$ impair $\Rightarrow$ symétrie O

$\hookrightarrow$ On ne regarde que $x \geq 0$



- Zéros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\Rightarrow \cap O_y : (0;0)$

$f(0) = \dfrac{0}{-3} = 0$

- Signes :

	0		$\sqrt{3}$	
	0	−	//	+

- Asymptote vert. $\pm\sqrt{3}$

- As. non-vert : Div. Eucl. car fct rationnel :

x^3 | $x^2 - 3$
$-(x^3 - 3x)$ | x $\hookrightarrow$ As. Non vert : $y = x$
$/ \quad 3x$

$\Rightarrow x + \underbrace{\dfrac{3x}{x^2-3}}$

	0		$\sqrt{3}$	
	touche	− $\searrow$	AV	+ $\nearrow$

- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2}$

$= \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-3)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-3)^2} = \dfrac{\overset{\geq 0}{x^2}(x+3)(x-3)}{\underbrace{(x^2-3)^2}_{\geq 0}}$ symétrie

$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = \pm 3$

x	0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$	− 0	−	//	−	0	+

x	0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$	0	$-$	//	$-$	0	$+$
Pente → f	↘ selle ↘		//	↘	m	↗

minimum

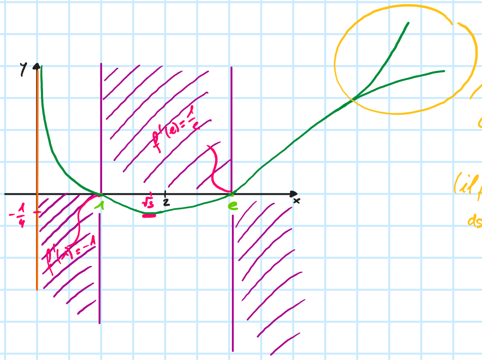
$\Rightarrow$ Selle $(0;0)$, minimum $(3, \frac{3}{2})$

$f(3)$

2) $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$

- $D = \mathbb{R}_+^*$ $\longrightarrow$ $\emptyset$ parité
- $\cap O_y$: $\emptyset$ car $0 \notin D$
- zéros : $f(x) = 0 \iff \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$

  $\ln(x) = 0 \iff x = 1$; $\ln(x) = 1 \iff x = e$



ou

On ne sait pas avec les infos qu'on a (il faut la dérivée de $f'(x)$) ds 2 semaines

- Signes :

0		1		e	
//	$+$	0	$-$	0	$+$

- Bords de D : $\lim_{x \to 0_+} \underbrace{\ln(x)}_{-\infty}\underbrace{(\ln(x) - 1)}_{-\infty} = +\infty \Rightarrow$ A.V. à $x = 0$

  $A.H_d$: $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\ln(x)}_{+\infty}\underbrace{(\ln(x)-1)}_{+\infty} = +\infty$ / $A.O_d$: $\emptyset$

- Dérivée : $f'(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(2\ln(x) - 1)$ on $=0$

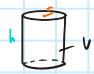
  $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$	
$f'(x)$	//	$-$	0	$+$
f	//	↘	m	↗

$m(\sqrt{e}; -\frac{1}{4})$

3) Cylindre de Volume V fixé

On veut minimiser l'aire totale



$V = \pi r^2 \cdot h$ fixé

Aire totale = 2 disques + rectangle ($2\pi r$, h)

$= 2\pi r^2 + 2\pi r h$ à minimiser $(h, r > 0)$

$h = \frac{V}{\pi r^2}$

$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right)$ à minimiser

$\Rightarrow A'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{V}{\pi r^2}\right)$

$A'(r) = 0 \iff 2r = \frac{V}{\pi r^2} \iff r^3 = \frac{V}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	
$A'(r)$	//	$-$	0	$+$
A		↘	m	↗

$\Rightarrow$ minimum pour $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

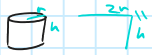
$\Rightarrow$ h pour ce min

$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{V^2 \pi} \cdot V^3} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{V^2\pi} \cdot V^3} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Rapport $\Rightarrow$ $$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{4\cancel{V}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{V}}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$\Rightarrow h = 2r$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ Carré

$\hookrightarrow$ Cylindre carré = forme optimale

2.3 Règle de Bernoulli / de l'Hospital

Théorème : Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \text{ou } \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ ou $\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

Alors : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \text{ou } \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \text{ou } \infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (Si cette limite existe)

⚠ Ce n'est pas $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

Exemple : 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x'}{x'} = \frac{1}{1} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}^{*} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

*Si $x <<<<$ (très petit) $\Rightarrow \sin(x) \approx 0$

$\overset{BH}{=} \frac{\cos(x)}{1}^{*} = \frac{1}{1} = 1$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\overset{BH}{=} \frac{e^x}{6x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\overset{BH}{=} \frac{e^x}{6} = +\infty$

4) **Théorème :** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ "L'exponentielle croît plus vite que toute puissance"

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \overbrace{\sin(x)}^{[-1;1]}}{x - \underbrace{\sin(x)}_{=}} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$ $\leftarrow$ indéterminé car $\lim\limits_{x \to \infty} \cos$ n'existe pas

En fait : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{\sin(x)}{x}\right)} = 1$

$= \frac{[-1;1]}{\infty} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

Si on avait fait BH :

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-\sin(x)}{\sin(x)} = -1 \neq 1$

6) $\lim\limits_{x \to 0_+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \text{"}\infty - \infty\text{"}$

$= \lim\limits_{x \to 0_+} \frac{x-1}{x^3} = \frac{-1}{0_+} = -\infty$

7) $\lim\limits_{x \to \infty} x\,\underbrace{(\pi - 2\arctan(x))}_{\to \frac{\pi}{2}\;\; \pi - \frac{2\pi}{2}} = \text{"}\infty \cdot 0\text{"}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(\pi - 2\arctan(x))}{\underbrace{1/x}_{\xrightarrow[x \to \infty]{} 0}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$\overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{+\frac{2}{1+x^2}}{+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2}{\underbrace{x^2+1}_{\xrightarrow[x \to \infty]{} 2}}$ $\left(= \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \;\; \overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4\cancel{x}}{2\cancel{x}} = 2 \right)$

8) $\lim\limits_{x \to 0_+} \sin(x)^{1/\log(x)} = \text{"}0^0\text{"}$

$= \lim e^{\ln(\sin(x)^{1/\log(x)})} = \lim e^{\overbrace{\frac{1}{\ln(x)}}^{\to 0} \cdot \overbrace{\ln(\underbrace{\sin(x)}_{\to 0})}^{\to -\infty}}$ $\to$ "$e^{0 \cdot \infty}$"

$\frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)} \to \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

8) $\lim\limits_{x\to 0_+} \sin(x)^{1/\log(x)} = "0^0"$

$= \lim\limits_{x\to 0_+} e^{\ln(\sin(x)^{1/\log(x)})} = \lim\limits_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{\ln(x)}\cdot\ln(\sin(x))}$ $\quad \to \frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)} \to "\frac{\infty}{\infty}"$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)} = "\frac{\infty}{\infty}"$

$\overset{BH}{=} \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0_+} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos x}_{1} = 1$

2.4 Polynôme de Taylor

Def : La $k^{ème}$ dérivée de f, notée $f^{(k)}(x)$ ou $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$

est la fonction obtenue en dérivant f k fois successivement.

$f^{(2)}(x) = f''(x) = (f(x)')'$

Théorème : Si f est dérivable au moins n fois ($n \in \mathbb{N}^*$)

alors si $x \approx x_0$; $f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T^{n}_{f(x_0)}(x)$

$n^{ème}$ polynôme de Taylor de f autour de x_0

Exemple : $f(x) = e^x$ Veut estimer $e^{0.1}$

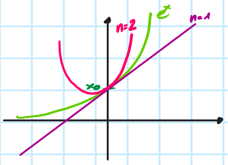
p.ex pour $x_0 = 0$

$\to f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$

$\to f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$

$= \underbrace{1 + x}_{n=1} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$

$n=2$ ...



$\Rightarrow e^{0.1} \approx \underbrace{1 + 0{,}1}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 0{,}01}_{n=2} + \underbrace{\frac{1}{6}\cdot 0{,}001}_{n=3} + \dots$

2) Estimer $\sqrt{37}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

p.ex (i) $f(x) = \sqrt{36+x}$ autour de $x_0 = 0$ $\quad \sqrt{37} = f(x)$

ou (ii) $f(x) = \sqrt{x}$ autour de $x_0 = 36$ $\to \sqrt{37} = f(37)$

(i) : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{36+x}}$; $f''(x) = \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}(36+x)^{-3/2}$

$\Rightarrow f(x_0) = 6$

$f'(x_0) = \frac{1}{12}$

$f''(x_0) = \frac{-1}{4\cdot 6^3}$ $\Rightarrow \underset{x\approx 0}{f(x) \approx} 6 + \frac{1}{12}x^1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{-1}{4\cdot 6^3}x^2 = \frac{-x^2}{8\cdot 216} + \frac{x}{12} + 6$

ii) $f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^{-3/2}$

$\Rightarrow$ $f(x_0) = \sqrt{36} = 6$

$f'(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$f''(x_0) = -\frac{1}{4}\cdot 6^{-3} = \frac{-1}{4\cdot 216}$

$\Rightarrow \underset{x\approx 36}{f(x) \approx} 6 + \frac{1}{12}(x-36) - \frac{1}{4\cdot 216}\cdot\frac{1}{2!}(x-36)^2$

$\sqrt{37} = f(37) = 6 + \frac{1}{12}(37-36) - \frac{1}{8\cdot 216}\cdot(37-36)^2$

$= 6 + \frac{1}{12} - \frac{1}{8\cdot 216}$

Théorème : Si f est dérivable une infinité de fois en $x_0 = 0$

Alors $\forall x \in D_f$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^k$ (Reste vrai pour tout x_0 si défini)

Théorème : Si f est dérivable une infinité de fois en $x_0 = 0$

Alors $\forall x \in D_f$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k$ (Reste vrai pour tout x_0 si défini)

Rem : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$

$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$(\sin x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\cancel{(2k+1)!}\ (2k)!} \cancel{(2k+1)} \cdot x^{2k} = \cos(x)$

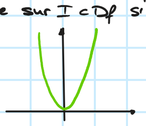
2.5 Convexité et point d'inflexion

Rappel : f' donne la croissance de f

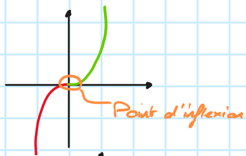
Définition f est convexe sur $I \subset D_f$ si son graph est $\smile$ sur I

f est concave sur $I \subset D_f$ si son graph est $\frown$ sur I

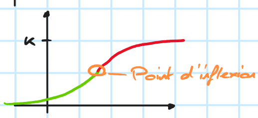
Ex : 1) $f(x) = x^2$



2) $f(x) = x^3$



3) $f(x) = \frac{k}{1 + ae^{-rx}}$



Def : Un point d'inflexion de f est un pt $(x\,;\,f(x))$

où la fonction change de convexité (sa courbure)

Théorème $f''(x) > 0$ sur I : f convexe sur I
$f''(x) < 0$ sur I : f concave sur I

Point d'inflexion : endroit où $f''(x) = 0$

Ex : 1) $f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x \longrightarrow f''(x) = 2 > 0 \longrightarrow$ convexe

2) $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a$

↳ Si $a > 0$: convexe

Si $a < 0$: concave

3) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$

x		0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\frown$	PI	$\smile$

4) $f(x) = \frac{k}{1 + ae^{-rx}} \Rightarrow f'(x) = -k \cdot (1 + ae^{-rx})^{-2} \cdot (-rae^{-rx})$

$= \frac{ka \cdot e^{-rx}}{(1 + ae^{-rx})^2}$

$\Rightarrow f''(x) = kar \frac{-re^{-rx}(1 + ae^{-rx})^{\cancel{2}} - e^{-rx} \cdot 2(1 + \cancel{ae^{-rx}})^1 \cdot (-rae^{-rx})}{(1 + ae^{-rx})^{\cancel{4}\,1}}$

$= kar^2 e^{-rx} \frac{1 + ae^{-rx} - 2ae^{-rx}}{(1 + ae^{-rx})}$ $= -ae^{-rx}$

$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = ae^{-rx} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{r} \ln \frac{1}{a}$

$(1+ae^{-rx})$

$\Rightarrow f''(x)=0 \iff 1 = ae^{-rx} \iff x = \frac{-1}{r}\ln\frac{1}{a}$

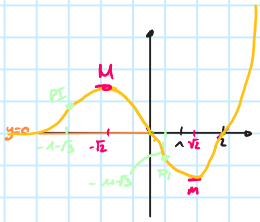
$\iff x = \boxed{\frac{\ln(a)}{r}}$

5) $f(x) = (x^2-2x)e^x$

$D_f = \mathbb{R}$ — $\varnothing$ parité, $\varnothing$ périodicité

$f(0) = 0$

$f(x) = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x=2$ ou $x=0$



Signe

x		0		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Bord de D_f : $\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x^2-2x)}_{-\infty}\underbrace{e^x}_{\to 0} = \text{"}\infty\cdot 0\text{"}$

$= 0$ car e^x + fort que polynôme en $\pm\infty$

$\Rightarrow$ A.H $y=0$ en $-\infty$

$\lim_{x\to\infty} \underbrace{(x^2-2x)}_{\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty} = +\infty$

$\varnothing$ AH en ∞

$\varnothing$ A.O. car e^x gagne contre // les poly. en $+\infty$

• $f'(x) = (2x-2)e^x + (2x^2-2x)e^x = e^x(x^2-2)$

$= e^x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f'(0) = -2$

$f'(2) = 2e^2$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

$M(-\sqrt{2}\,;\,(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}})$

$m(\ 2\,;\,(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}})$

$\tilde{\Delta} = 1+2$ $\quad 4+4\cdot 2 = 4+8 = 12$

• $f''(x) = 2x + e^x + e^x(x^2-2) = (x^2+2x-2)e^x$

$\Rightarrow \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

(PI) $x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{1}$

x		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

$PI_1 = (-1-\sqrt{3}\,;\,f(-1-\sqrt{3}))$

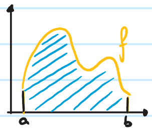
$PI_2 = (-1+\sqrt{3}\,;\,f(-1+\sqrt{3}))$

3. Intégrales

mercredi, 30 avril 2025 12:44

3.1 Intégrales définies et aires

Prend le graph de f

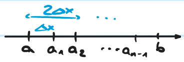


But : Calculer l'aire entre le graph de f et l'axe des x

$\text{Aire} = \int_a^b f(x)\,dx$, l'intégrale définie de f entre a et b

variable = x

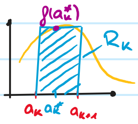
Riemann : On découpe $[a,b]$ en n segment de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



Formellement : $a_k = a + k\Delta x,\ k = 0, \dots, n$

2) Prend le milieu de $[a_k, a_{k+1}]$ $\quad a_k^* = \frac{a_{k+1}+a_k}{2} = a(k+\frac{1}{2})\Delta x$

3) Prend le rectangle R_k de base $[a_k, a_{k+1}]$ et de hauteur $f(a_k^*)$

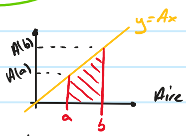


4) $\text{Aire} \approx \sum_{k=0}^{n-1} \text{aire}(R_k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k^*) \cdot \Delta x$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k^*)\,\Delta x$

Exemple : 1) $\int_a^b Ax\,dx$



$\text{Aire} = \overbrace{\frac{A(a+b)}{2}(b-a)}^{=\ \text{Aire trapèze (formule)}}$

Avec def : $\int_a^b Ax\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{A \cdot a_k^*}_{f(a_k^*)} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A\left(a + (k+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$

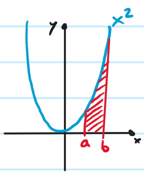
$= \lim_{n\to\infty} \frac{A(b-a)}{n}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a}_{n \cdot a} + \frac{b-a}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(k+\frac{1}{2})}_{\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}}_{\frac{(n-1)\cdot n}{2} + \frac{1}{2}n}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{A(b-a)}{n}\left(na + \frac{b-a}{\cancel{n}}\underbrace{\left(\frac{(n-1)\cancel{n}}{2} + \frac{1}{2}\cancel{n}\right)}_{=\ \frac{n}{2}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{A(b-a)}{n}\left(na + \frac{nb}{2} - \frac{na}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(b-a)}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{2}(a+b)$

$= \frac{A(b-a)}{2}(a+b)$

2)



$\text{Aire} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + (k+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{b-a}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^2 + \frac{2a}{n}(k+\frac{1}{2})(b-a) + (k+\frac{1}{2})^2(\frac{b-a}{n})^2\right)\frac{b-a}{n}$

$= \dots$ trop long $= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ " $\frac{x^3}{3}$ en b " − " $\frac{x^3}{3}$ en a "

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0} \left(a^2 + \frac{\ }{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)(b-a) + \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\ }{n}\right)\right) \frac{\ }{n}$$

$$= \dots \text{ trop long } = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \text{"}\frac{x^3}{3} \text{ en } b\text{"} - \text{"}\frac{x^3}{3} \text{ en } a\text{"}$$

Propriétés

1) Si $f(x) \leq 0$ sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

2) 

$\int_a^b f(x)\,dx$ = "Surface ⊕" − "Surface ⊖"

= "Bilan d'aires"

Surface totale $= \int_a^b |f(x)|\,dx$

$$= \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^e f(x)\,dx - \int_e^b f(x)\,dx$$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

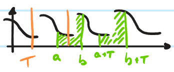
5) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ $\left(\text{car } \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0\right)$

6) $\int_a^b (A f(x) + B g(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$

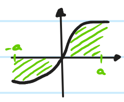
7) $\int_a^b 1\,dx = b-a$

$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{2} - \frac{a^2}{2}$

8) Si f est T-périodique 

$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

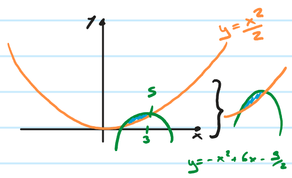
9) Si f impaire 

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

10) Si f est pair 

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx$

Exemple : Aire entre $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = -x^2 + 6x - \frac{9}{2}$?



Intersection : $\frac{x^2}{2} = -x^2 + 6x - 9/2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

a b

$\Rightarrow \int_1^3 \left(-x^2 + 6x - \frac{9}{2}\right)dx - \int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = \text{Aire}$

$$\Rightarrow \int_1^3 \left(-x^2+6x-\frac{3}{2}\right)dx - \int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = \text{Aire}$$

$$\text{Aire} = -\int_1^3 x^2\,dx + 6\int_1^3 x\,dx - \frac{3}{2}\int_1^3 1\,dx - \frac{1}{2}\int_1^3 x^2\,dx$$

$$= -\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) + 6\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right) - \frac{3}{2}(3-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)$$

$$= \dots = \underline{\underline{2}}$$

3.2 Intégrales indéfinie / Primitive / "Anti-dérivée"

Def: Soit $f(x)$ une fct. Une primitive de f est une fonction $F(x)$ tel que $F'(x) = f(x)$

Ex: $f(x) = x$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ou $\frac{x^2}{2} - 7$ ou $\frac{x^2}{2} + 3\pi$ ...

Rem: Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors $F(x) + C$ aussi $\forall C \in \mathbb{R}$

tjr l'écrire

Def: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ est l'intégrale indéfinie de f ("Primitives de f")

Ex: 1) $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

2) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

3) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

4) $\int e^x\,dx = e^x + C$

5) $\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C & \text{si } n \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$

6) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$

7) $\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot^2(x) + C \quad \left(= \int (1+\cot^2(x))\,dx\right)$

8) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

9) $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

10) $\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Rajoute pour faire ressortir la deriv interne de e^{x^2} $(2x)$

11) $\int \frac{1}{5x-2}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$

Rem: $\int e^{x^2}$ N'existe pas

12) $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \int \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2}_{\frac{x^2}{4}}}\right)dx = \underbrace{\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}_{=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{deriv interne}}}\cdot 2 + C$

Pour annuler

13) $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|4+x^2| + C$

deriv interne

14) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$

$f(x)$

14) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2)+C$

15) $\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\log|1+x^4|+C$ ⚠ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$ Primitive

16) $\int \frac{1}{\underbrace{x^2+2x+5}_{\underbrace{x^2+2x+1+4}_{(x+1)^2}}}\,dx = \int \frac{1}{4+(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot 2 + C$

'inter $= \frac{1}{2}$

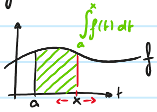
17) $\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\underbrace{x^2+2x+5}_{'=2x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{-2}{x^2+2x+5}\,dx\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\ln|x^2+2x+5| - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+C$

3.3 Théorème fondamental du calcul intégrale (TFI)

Théorème

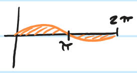
f continue sur $[a,b] \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}$



Corollaire : $\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b)-F(a)}_{=[F(x)]_a^b}$ où F = une primitive de f.

Exemple : 1) $\int_a^b x^2\,dx \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

2) $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$



$= [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$

$= -(-1) - (-1) = \underline{\underline{2}}$

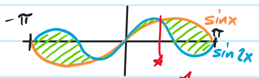
3) $\int_0^1 e^x = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

4) $\int_1^e \ln(x)\,dx =$

Primitive de $\ln x$? → Chap. 4

5) Aire entre $y = \sin x$ et $y = \sin(2x)$ sur 1 période du sinus (2π)

ici : $-\pi$ à π pour symétrie



Symétrie : Aire $= 2\left(\int_0^{*} |\sin 2x - \sin x|\,dx + \int_{*}^{\pi} |\sin x - \sin 2x|\,dx\right)$

$*$: $\sin(2x) = \sin(x)$

$2\sin x\cos x = \sin x$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ $\quad \cos x = \frac{1}{2}$

$x = 0$ ou π $\quad x = \frac{\pi}{3} \rightarrow *$

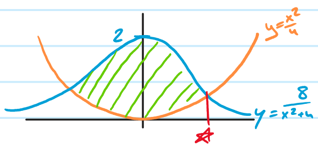
Aire $= 2\left(\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/3} - [-\cos x]_0^{\pi/3} + [-\cos x]_{\pi/3}^{\pi} - \left[-\cos 2x\right]_{\pi/3}^{\pi}\right)$

$= 2\left(\overset{1/4}{-\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}} - \overset{1/2}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1} - \overset{-1/2}{\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right)} + \overset{3/2}{\left(-(-1) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)} - \overset{3/4}{\left(-\frac{1}{2}\cdot 1 - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)}\right)$

$= 1/4 + 1/2 - 1/2 + 3/2 + 3/4$

$= \underline{5}$

6) Aire entre $y = \frac{x^2}{4}$ et $y = \frac{8}{x^2+4}$



fct paire : Aire $= 2\cdot\int_0^{*} \left(\frac{8}{x^2+4}\right) - \left(\frac{x^2}{4}\right)\,dx$

$*$: $\frac{8}{x^2+4} = \frac{x^2}{4}$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$

$(x^2+8)(x^2-4) = 0$

$x = \pm 2 \Rightarrow * = 2$

Calculé dans ex(2)

Aire $= 2\left(8\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2\right)$

$= 2\left(8\left(\frac{1}{2}\overset{=\pi/4}{\arctan(1)} - \frac{1}{2}\overset{=0}{\arctan(0)}\right) - \left(\frac{8}{12} - \frac{0}{12}\right)\right)$

$= 2\left(8\cdot\frac{\pi}{8} - \frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{2\pi - \frac{4}{3}}}$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$

$(x^2+8)(x^2-4) = 0$

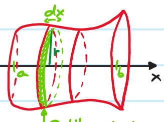
$\emptyset \qquad x = \pm 2 \Rightarrow \alpha = 2$

$= 2\left(8\left(\frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}\arctan(0)\right) - \left(\frac{0}{12} - \frac{-}{12}\right)\right)$

$= 2\left(8 \cdot \frac{\pi}{8} - \frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{2\pi - \frac{4}{3}}}$

3.4 Volume d'un corps de révolution

Idée :



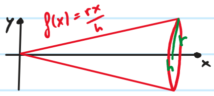
Petit cylindre

- hauteur : dx
- Rayon : $f(x)$

↳ Aire base $= \pi \cdot f(x)^2$

$$\boxed{\Rightarrow \text{Volume} = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx}$$

Exemple : cône



car quand x vaut h : y doit valoir r

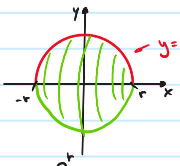
↳ $r = a \cdot h \Rightarrow a = \frac{r}{h}$

↳ $f(x) = ax + b \rightarrow f(x) = \underline{\underline{\frac{r}{h} \cdot x}}$

$$\Rightarrow \text{Volume} = \int_0^h \pi \cdot \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

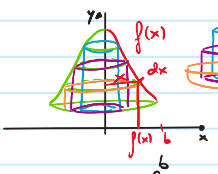
Sphere :

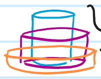


$$\Rightarrow V = \int_{-r}^{r} \pi (r^2 - x^2) \, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{\pi^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 - \frac{(-r)^3}{3}\right)\right)$$

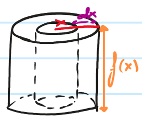
$$= \frac{\pi \cdot 4r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Rotation autour de Oy :





Cylindre creux



$$\Rightarrow V = 2\pi \int_0^b x \cdot f(x) \, dx$$

4. Méthodes d'intégration

mercredi, 21 mai 2025 13:18

4.1 Intégration par parties (IPP)

Idée : "Renverser" la règle du produit

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\xrightarrow{\int \dots dx} f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\iff \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$

↳ $\downarrow$ = dériv, $\uparrow$ = intégr

$\uparrow$ = intégr, $\downarrow$ = Dériv

; $$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\int e^x$

$x\cdot e^x$

Ex :

1) $$\int x e^x\,dx = x e^x - \int 1\cdot e^x\,dx \quad \text{“}x'\text{”}$$ ← Pratique

$$= x e^x - e^x + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot e^x - \int \frac{x^2}{2}\cdot e^x\,dx$$ ← Pas pratique

2) $$\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln(x) - x + C$$

$\int 1$

3) $$\int \arctan(x)\,dx = \int \arctan(x)\cdot 1\,dx = x\cdot\arctan(x) - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Rien — $\int 1$ — $\int 1$ — $\arctan(x)'$

4) $$\int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx = \Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\cdot(-\cos x)\,dx$$

$$= \pi^2\cdot(-1) - 0 + 2\int_0^\pi x\cdot(-\cos x)\,dx$$

$$= \pi^2 + 2\left(\Big[x\cdot\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\sin x\,dx\right)$$

$$= \pi^2 + 2\left(\pi\cdot 0 - 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^\pi\right)$$

$$= \pi^2 + (-1) - 1 = \pi^2 - 2$$

5) $$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$$

$$= e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right)$$

$$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$$

$$2\int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$