Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Algèbre Linéaire 2 - Série 7

Applications linéaires : généralités

1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires. Le cas échéant, déterminer la matrice associée.

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - z + 3y \\ z - 6x - 2y \\ \frac{x}{3} - 2y + z \end{pmatrix}$

(b) $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - z + 3y \\ z - 6x - 2y \\ \frac{x}{3} - 2y + z \end{pmatrix}$

(c) $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x - 2 \end{pmatrix}$

(d) $i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{7})x - \sin(\frac{3\pi}{7})y \\ \sin(\frac{3\pi}{7})x + \cos(\frac{3\pi}{7})y \end{pmatrix}$

(e) $j\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(y) \\ \sin(z) \end{pmatrix}$

(f) $k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x \\ 2x + y \\ xy \\ 3y \end{pmatrix}$

2. Montrer que les transformations géométriques suivantes sont des applications linéaires, et donner leur matrice:

   (a) La symétrie par rapport à l'origine de $\mathbb{R}^3$.

   (b) La symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'angle α avec l'axe Ox positif.

   (c) La symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $x = y$.

   (d) La projection orthongonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x = y$.

   (e) La symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan Π contenant le point O et perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^3$.

3. (a) On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 \end{pmatrix}.$$

   (i) Vérifier que $f(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ pour une matrice $A \in \text{mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

   (ii) Déterminer l'image par f des vecteurs

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{u_3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (iii) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

   (iv) Interpréter f géométriquement.

   (b) Décrire géométriquement l'effet de l'application linéaire de matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$