Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Algèbre Linéaire 2 - Série 10

Matrices orthogonales

1. Donner toutes les valeurs possibles de x, y, z telles que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \cos\alpha & y \\ 0 & \sin\alpha & z \end{pmatrix}$$

soit orthogonale pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

2. (a) Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale, et interpréter son effet géométrique.

(b) Montrer que la matrice A de (a) est diagonalisable, et qu'il existe $P \in \mathrm{O}(3)$ telle que $P^{-1}AP = D$, avec D diagonale.

(c) Montrer que si une matrice $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ est telle qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathrm{O}(n)$ et une matrice diagonale $\Delta \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ telles que $Q\Delta Q^{-1} = M$, alors M est symétrique.

3. (a) Pour chacune des matrices suivantes, montrer qu'elles sont orthogonales et déterminer leur effet géométrique:

(i)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer la matrice par rapport à la base canonique de la rotation de $60°$ autour de l'origine dans le plan d'équation $x + y - z = 0$.