

---

**Mathématiques Discrètes - Série 7****Théorie des graphes III**

1. (a) Un graphe planaire  $G$  est dit planaire maximal si l'ajout de n'importe quelle arête (sans ajout de sommet) à  $G$  crée un graphe non-planaire.
  - (i) Montrer que toute face d'un graphe planaire maximal est un triangle.
  - (ii) Si un graphe planaire maximal a  $n$  sommets, combien de faces et d'arêtes ce graphe a-t-il ?
- (b) Montrer que le graphe de Petersen n'est pas planaire.

2. (a) Montrer que pour tout graphe 3-régulier, on a

$$3 \cdot |V| = 2 \cdot |E|.$$

- (b) Soit  $G$  un graphe planaire, connexe, et 3-régulier dont toutes les faces sont soit des pentagones soit des hexagones. Montrer que  $G$  a exactement 12 faces pentagonales.
3. Supposez que l'on vous donne des pièces de tissu qui sont des hexagones réguliers et des pentagones réguliers de côtés de même longueur.  
Vous voulez coudre les pièces ensemble le long de leurs arêtes de sorte qu'à chaque sommet, exactement deux pièces hexagonales et une pièce pentagonale se rencontrent, de manière à former un ballon de football.  
Montrer que la seule manière de le faire est d'utiliser exactement 12 pièces pentagonales et 20 pièces hexagonales.