T Addition + Multiplication

lundi, 16 septembre 2024 08:18

Propriete

0 = rien de l'addition

1. $a + b = b + a$
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$
3. $a + 0 = a = 0 + a$
4. $a + (-a) = 0$

1 = rien de la multiplication

1. $a \cdot b = b \cdot a$ (commute)
2. $(a.b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associativité)
3. $a . 1 = a = 1 . a$ (élem. neutre)
4. $a + \frac{1}{a} = 1$ (inverse)

a^{-1}

Série 01

lundi, 16 septembre 2024 10:08

1. Effectuer les multiplications suiv:

a) $(x+13)(x-11)$

$x^2 - 11x + 13x - 143$

$x^2 + 2x - 143$

b) $(2x-5)(6x+3)$

$12x^2 + 6x - 30x - 15$

$12x^2 - 24x - 15$

c) $(-3bc - 4b)(5bc - 5c)$

$-15b^2c^2 + 15bc^2 - 20b^2c + 20bc$

d) $(-s^2 + 3s - 1)(2s + 9)$

$-2s^3 - 9s^2 + 6s^2 + 27s - 2s - 9$

$-2s^3 - 3s^2 + 25s - 9$

e) $(a+b)(a-b)$

$a^2 - ab + ab - b^2$

$a^2 - b^2$

f) $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3$

$a^3 - b^3$

g) $(x-1)(1 + x + x^2 + x^3)$

$\cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^4 - 1 - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3}$

$x^4 - 1$

h) $(x^3 - x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

$x^6 + \cancel{x^5} + \cancel{x^4} + \cancel{x^3} - \cancel{x^5} - \cancel{x^4} - \cancel{x^3} - \cancel{x^2} + x^4 + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x^3} - x^2 - \cancel{x} - 1$

$x^6 + x^4 - x^2 - 1$

2. Effectuer les multi. suiv.:

a) $(p-7)^2$

$p^2 - 14p + 49$

b) $(2x+3)^2$

$4x^2 + 12x + 9$

c) $(25p + 9q)^2$

$625p^2 + 450pq + 81q^2$

$625p^2 + 450pq + 81q^2$

d) $(8u^2 - 9v^2)^2$

$64u^4 - 144u^2v^2 - 81v^4$

e) $(9p^3 + 8p)(9p^3 - 8p)$ $a^2 - b^2$

$81p^6 - 64p^2$

f) $(2z^2 + 1)(1 - 2z^2)$

$(1 + 2z^2)(1 - 2z^2)$

$1 - 4z^4$

g) $(2x - 7)(4x + 14)$

$(2x - 7)(2x + 7)\,2$

$(4x^2 - 49)\cdot 2$

$8x^2 - 98$

h) $(2a + 3b + 1)^2$

$4a^2 + 6ab + 2a + 6ab + 9b^2 + 3b + 2a + 3b + 1$

$4a^2 + 9b^2 + 12ab + 4a + 6b + 1$

i) $(8u^2 + v^2)(8u^2 - v^2) - (8u^2 - v^2)^2$

$\cancel{64u^4} - v^4 \qquad - (\cancel{64u^4} - 16u^2v^2 + v^4)$

$-2v^4 - 16u^2v^2$

j) $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2$

$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + 2ab + 2ac + \cancel{2bc} - (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 2ab - 2ac + \cancel{2bc})$

$4ab + 4ac$

3. Décomposer en facteurs:

3. Décomposer en facteurs :

a) $2a(a-b)-c(a-b)$

$(2a-c)(a-b)$

b) $20p^2q^3-10p^3q^2$

$10p^2q^3(2q-p)$

c) $a^2+14ab+49b^2$

$(a+7b)^2$

d) $4c^2-9d^2$

$(2c-3d)(2c+3d)$

e) $a^2-(c^2+2ab)+b^2$

$a^2+b^2-c^2-2ab$

$(a-b)^2-c^2$

$(a-b-c)(a-b+c)$

f) $7(4a-3)-4a+3$

$6(4a-3)$

g) $2(p^2-q^2)-p^2+q^2$

$\cancel{2}((p-q)(p+q))-(q-p)(p+q)$

$(p-q)(p+q)$

h) $a^2-b^2+x^2-y^2+2(ax-by)$

$(a+x)^2-y^2-b^2-2by$

$(a+x)^2-(b+y)^2$

$(a+x-b-y)(a+x+b+y)$

$(a+x-b-y)(a+x+b+y)$

i) $a^2+8a+15$

$a^2+3a+5a+15$

$a(a+3)+5(a+3)$

$(a+5)(a+3)$

$104\cdot 2$

$52\cdot 4$

$26\cdot 8$

$13\cdot 16$

j) $b^2-29b+208$

$b^2-13b-16b+208$

$b(b-13)-16(b-13)$

$(b-16)(b-13)$

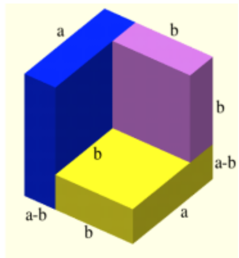
k) $8a^3-27b^3$

$(2a-3b)(2a+ \quad a+3b)$

$(2a-3b)(4a^2+ \quad b \quad 9b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Le volume du grand cube, de coté a, est la somme des volumes de trois parallélépipèdes dont un des cotés vaut a-b et d'un cube de coté b (absent ci-contre).

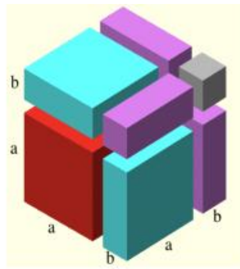


l) $8a^3+12a^2 \quad +6a \quad +$

$(2a+b)^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Le volume du grand cube, de coté a+b, est la somme des volumes des huit parallélépipèdes colorés, dont un est caché.



4. Décomposer en facteur

a) $a^2x-2b^2y+2a^2y-b^2x$

$a^2(x+2y)-b^2(x+2y)$

$(a-b)(a+b)(x+2y)$

b) $a^2-b^2-24ax+6by+144x^2-9y^2$

$(a-12x)^2-(3y-b)^2$

$(a-12x-3y+b)(a-12x+3y-b)$

c) $(x^2+2)^2 + 4x(x^2+2) + 4x^2$

$(x^2+2+2x)^2$

d) $x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$

$(x^2-4)^3$

$(x-2)^3(x+2)^3$

5. Simplifier

a) $\dfrac{\cancel{2q^2} - 4q + 3 - q + \cancel{q^2} - 4 + 8q - \cancel{3q^2}}{3q-1}$

$$\frac{3q-1}{3q-1} = 1$$

b) $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b-a}$

$\dfrac{b-a+a+b}{(a+b)(b-a)}$

$\dfrac{2b}{(a+b)(b-a)}$

$\dfrac{2b}{b^2-a^2}$

c) $\dfrac{1}{x^6} + \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1+x^2-x^5}{x^6}$

d) $\dfrac{u+v}{u-v} + \dfrac{u}{v} + 1$

$$\frac{v(u+v) + u(u-v) + v(u-v)}{v(u-v)}$$

$$\frac{vu + \cancel{v^2} + u^2 - \cancel{uv} + \cancel{uv} - \cancel{v^2}}{v(u-v)}$$

$$\frac{u(u+v)}{v(u-v)}$$

e) $\dfrac{m}{m+n} + \dfrac{2mn}{m^2-n^2} + \dfrac{n}{-n+m}$

$$\frac{m(m-n) + 2mn + n(m+n)}{(m+n)(m-n)}$$

$$\frac{m^2 - mn + 2mn + n^2 + mn}{(m+n)(m-n)}$$

$$\frac{(m+n)^{\cancel{2}}}{\cancel{(m+n)}(m-n)}$$

$$\frac{m+n}{m-n}$$

f) $\dfrac{x+1}{x^2-x} - \dfrac{x-1}{x^2+x} - \dfrac{4}{x^2-1}$

$x(x-1)$ $\quad$ $x(x+1)$ $\quad$ $(x+1)(x-1)$

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 - 4x}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{\cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1} - \cancel{x^2} + \cancel{2x} - \cancel{1} - \cancel{4x}}{x(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{\cancel{x^2}+\cancel{2x}+\cancel{1}-\cancel{x^2}+\cancel{2x}-\cancel{1}-4x}{x(x+1)(x-1)}$$

div par 0 donc $S=\{0\}$

g) $$\frac{4u-13}{2u^2-2u} - \frac{u-1}{u^2+u} - \frac{u-3}{u^2-1}$$

$2u(u-1) \quad u(u+1) \quad (u-1)(u+1)$

$$\frac{(4u-13)(u+1)-2(u-1)(u-1)-2u(u-3)}{2u(u+1)(u-1)}$$

$$\frac{\cancel{4u^2}+4u-13u-13-\cancel{2u^2}+4u-2-\cancel{2u^2}+6u}{''}$$

$$\frac{u-15}{2u(u^2-1)}$$

6. Simplifier

a) $$\frac{5a}{6b}\cdot\frac{3b}{10a}$$

$$\frac{\cancel{15}\cancel{ab}}{\cancel{60}\cancel{ab}}$$

$$\frac{1}{4}$$

b) $$\frac{\overset{9}{\cancel{72}}\,u\cancel{v^2}}{\cancel{11}\,r\cancel{s}}\cdot\frac{\overset{11}{\cancel{121}}\,r^2\cancel{s}}{\cancel{8}\,\cancel{uv}}$$

$9v \cdot 11r$

ggvr

c) $\frac{2U+V}{U-V} \cdot \frac{U^2-V^2}{4U+2V}$

$\frac{2U+V}{U-V} \cdot \frac{(U+V)(U-V)}{2(2U+V)}$

$\frac{U+V}{2}$

d) $(x^2-y^2)\frac{6x}{3xy-3x^2}$

$(x+y)(x-y)\frac{6x}{3x(y-x)}$

$(x+y)(x-y)\quad \frac{-2}{x-y}$

$-2(x+y)$

e) $\frac{xz-9z-5x+45}{x-9}$

$\frac{z(x-9)-5(x-9)}{x-9}$

$z-5$

f) $\frac{z^2+2z-143}{z^2+29z+208}$

$\begin{pmatrix} 104 \cdot 2 \\ 52 \cdot 4 \\ 26 \cdot 8 \\ 13 \cdot 16 \end{pmatrix}$

$\frac{z^2+13z-11z-143}{z^2 \ldots}$

$$\frac{z^2+13z-11z-143}{z^2+13z+16z+208}$$

$26 \cdot 8$

$13 \cdot 16$

$$\frac{z(z+13)-11(z+13)}{z(z+13)+16(z+13)}$$

$$\frac{z-11}{z+16}$$

g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\left(\frac{2}{x-1}+1\right)\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2x}{x^4-1}\right)$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\right)$$

$$\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{x^2+1}$$

7. Simplifier

a) $\dfrac{\dfrac{y-3}{10a}}{\dfrac{y-3}{15b}}$

$\dfrac{\cancel{y-3}}{\overset{}{\cancel{10}}a}\cdot\dfrac{\cancel{15}b}{\cancel{y-3}}$ (with 3 above 15 and 2 below 10)

$\dfrac{3b}{2a}$

b) $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$

$\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x}{x}$

$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

c) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{1+\frac{a+1}{a-1}}$

$\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{1+\frac{a+1}{a-1}}\quad\dfrac{a-1}{a-1}$

$\dfrac{a+1-a+1}{a-1+a+1}=\dfrac{2}{2a}=\dfrac{1}{a}$

d) $\dfrac{\dfrac{3a^2-27}{6a+12}}{\dfrac{a^2-6a+9}{a^2+4a+4}}$

$\dfrac{3a^2-27}{6a+12}\cdot\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-6a+9}$

$\dfrac{\cancel{3}(a+3)\cancel{(a-3)}}{\cancel{6}\cancel{(a+2)}}\cdot\dfrac{(a+2)^{\cancel{2}}}{(a-3)^{\cancel{2}}}$ (2 below 6)

$\dfrac{(a+3)(a+2)}{2(a-3)}$

e) $\dfrac{\frac{1}{a^2}-\frac{4}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$

$$\frac{\frac{}{a^2}\quad\frac{}{2ab}\quad\frac{}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{\cancel{2}}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cancel{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}}$$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \frac{\frac{-a+b}{ab}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{-a+b}{a+b}$$

8. Simplifier

(a) $\frac{ax^2+b}{2x-1}+\frac{2(bx+ax^2)}{1-4x^2}-\frac{ax^2-b}{2x+1}$

$$\frac{(ax^2+b)(2x+1)-2(bx+ax^2)-(ax^2-b)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$\frac{\cancel{2ax^3}+\cancel{2xb}+\cancel{ax^2}\cancel{+b}-\cancel{2xb}-\cancel{2}ax^2-\cancel{2ax^3}+2bx+\cancel{ax^2}\cancel{-b}}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$\frac{2bx}{(2x+1)(2x-1)}$$

(b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$

$$\frac{a(b-c)}{(a-b)(a-c)}-\frac{b(a-c)}{(b-c)(a-b)}+\frac{c(a-b)}{(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{\cancel{ab}-\cancel{ac}-\cancel{ab}+\cancel{bc}+\cancel{ac}-\cancel{bc}}{}$$

$$0$$

(c) $\frac{x+2}{x^3-1}-\frac{1}{x^3+x^2+x}$

$$\frac{x^2+2x-x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{x^2+\cancel{x}+1}{x(x-1)(x^2\cancel{+x}+1)}$$

$$\frac{1}{x^2-x}$$

$(a+b+c+d)^2+(a-b-c+d)^2+(a-b+c-d)^2+(a+b-c-d)^2$

$2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd+a^2+b^2+c^2+d^2$
$-2ab-2ac+2ad+2bc-2bd-2cd+a^2+b^2+c^2+d^2$
$-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd+a^2+b^2+c^2+d^2$
$+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd+a^2+b^2+c^2+d^2$
$4(a^2+b^2+c^2+d^2)$

Série 02

lundi, 23 septembre 2024 10:20

1. (a) Donner la représentation décimale de $\frac{17}{7}$.
   (b) Ecrire sous forme de fraction:
      i. 7.425
      ii. $0.\overline{126}$
      iii. $-10.\overline{03}$
      iv. $2.47\overline{05}$.
   (c) Montrer que $3.3\overline{9} = 3.4$.

a) $\frac{17}{7} =$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 7 \\ 14 & 2.428571 \\ 30 & \\ 28 & \\ 20 & \\ 14 & \\ 60 & \\ 56 & \\ 40 & \\ 35 & \\ 50 & \\ 49 & \\ 10 & \\ 3 & \end{array}$$

$2.\overline{428571}$

b) i: 7.425

$5+80+$ $1+16+80+200$

$$\frac{7425}{1000} = \frac{1485}{200} = \frac{297}{40}$$

ii $0.\overline{126}$

$0.\overline{126} = x$

$126.\overline{126} = 1000x$

on va supprimer la periodicité

$$\begin{array}{rl|l} & 126.\overline{126} & 1000x \\ - & 0.\overline{126} & -x \end{array}$$

$$\frac{126}{999} = \frac{14}{111}$$

iii $-10.\overline{03}$

$-1003.\overline{03} = 100x$

$+10.\overline{03} = -x$

$993 = 99x$

$$-\frac{993}{99} = -\frac{331}{33}$$

iv. $2.47\overline{05}$

$24705.\overline{05} = 10000x$

N. 2.47$\overline{05}$

$24705.\overline{05} = 10000x$

$-247.\overline{05} = -100x$

$24458 = 9900x$

24505
− 47
500 − 42

$\frac{24458}{9900} = \frac{12229}{4950}$

c) $3.3\overline{9} = \frac{17}{5} = 3.4$

$339.\overline{9} = 100x$

$-33.\overline{9} = -10x$

$306 = 90x$

$102 = 30x$

$34 = 10x$

2. Ecrire sous la forme d'un intervalle (ou, si cela n'est pas possible, d'une réunion d'intervalles) et représenter le résultat sur la droite numérique:

(a) $A :=]3,5[\ \cap\ ]4,7[$

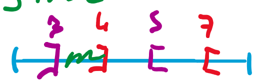
(b) $B :=]3,5[\ \setminus\ ]4,7[$

(c) $C := \{x \mid |x-3| > 5\}$

(d) $D := \{x \mid |x| > 7/2\} \cap \{x \mid |x| < 14/3\}$

a) 

$]4;5[$

b) 

$]3;4]$

c) 

$]-\infty;-2[\ \cup\ ]8;+\infty[$

d) 

$]-\frac{14}{3};-2.5[\ \cup\ ]2.5;\frac{14}{3}[$

3. Ecrire sans le signe de valeur absolue (en distinguant les cas):

(a) $5 + |x-1|$

(b) $||x| - 4|$

(c) $|x+2| - |x-1|$

(d) $|2x + |x-1||$

a) $5 + |x-1|$

si $x = 2$ $\quad |x-1|$

si $x = 0$ $\quad = -|x-1)$

si $x < 1$ alors $-x+6$ $\quad -x+1$

si $x \geq 1$ alors $x+4$

b) $||x|-4|$

		0		
$\|-x-4\|$			$\|x-4\|$	
	-4		4	
$-x-4$	$-(-x-4)$ $x+4$		$-x+4$	$x-4$

si $x < -4$ alors $-x-4$

si $-4 \leq x < 0$ alors $x+4$

si $0 \leq x < 4$ alors $-x+4$

si $4 \leq x$ alors $x-4$

c) $|x+2| - |x-1|$

	-2		1	
$-(x+2)-(-(x-1))$ $-x-2+x-1$ -3		$x+2+x-1$ $2x+3$		$x+2-x+1$ 3

$-x-2+x-1$ $\qquad 2x+3 \qquad 3$

-3

si $x < -2$ alors -3

si $-2 \leq x < 1$ alors $2x+3$

si $1 \leq x$ alors 3

d) $|2x+|x-1||$

$x < 1$	$1 \leq x$
$\lvert 2x-x+1\rvert$	$\lvert 2x+x-1\rvert$
$\lvert x+1\rvert$	$\lvert 3x-1\rvert$
-1: $-x-1$; $x+1$	$3x-1$

si $x < -1$ alors $-x-1$

si $-1 \leq x < 1$ alors $x+1$

si $x \geqslant 1$ alors $3x-1$

4. Résoudre

(a) $\dfrac{7}{2x} + \dfrac{5}{3x} + \dfrac{1}{12} = 0$

$D = \mathbb{R}^*$

$$\frac{21+10}{6x} = -\frac{1}{12}$$

$$31 = -\frac{6x}{12}$$

$$31 = -\frac{x}{2}$$

$$61 = -x$$

$$x = -61$$

b) $\dfrac{\frac{1}{4}-x}{\frac{1}{4}+x} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{\frac{1}{4}+x} - \dfrac{1}{4}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$

$$\frac{\frac{1}{4}-x}{\frac{1}{4}+x} - \frac{x}{\frac{1}{4}+x} = -\frac{2}{4}$$

$\frac{1}{4} - 2x \qquad - \; 2$

$\frac{1}{4} + x \qquad \frac{1}{4} + x \qquad 4$

$$\frac{\frac{1}{4} - 2x}{\frac{1}{4} + x} = -\frac{2}{4}$$

$$\frac{1 - 8x}{1 + 4x} = -\frac{1}{2}$$

$2 - 16x = -1 - 4x$

$-12x = -3$

$x = \frac{1}{4}$

$S = \{ \frac{1}{4} \}$

c) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{3x-2} = \dfrac{1}{3x+1}$ $\qquad Df = \mathbb{R} \setminus \{ -\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; 1 \}$

$$\frac{(3x-2)(3x+1) - (2x-2)(3x+1) - (x-1)(3x-2)}{(x-1)(3x-2)(3x+1)} = 0$$

$$\frac{\cancel{9x^2} - 3x - 2 - \cancel{6x^2} + 4x + 2 - \cancel{3x^2} + 5x - 2}{''} = 0$$

numerateur = à 0

$6x - 2 = 0$

$S = \{ \frac{1}{3} \}$ $\qquad 6x = 2$

$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(d) $\dfrac{4x+1}{2x-1} + \dfrac{3x-1}{2x+1} = \dfrac{14x^2+4}{4x^2-1}$ $\qquad Df = \mathbb{R} \setminus \{ \pm \frac{1}{2} \}$

$$\frac{(4x+1)(2x+1) + (3x-1)(2x-1) - 14x^2 - 4}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$$\frac{8x^2 + 6x + 1 + 6x^2 - 5x + 1 - 14x^2 - 4}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$$\frac{x-2}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$S = \{ 2 \}$

(e) $\dfrac{2}{x-2} = \dfrac{x-2}{2}$ $\qquad Df = \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$

$$\frac{4 - (x^2 - 4x + 4)}{2(x-2)} = 0$$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$S = \{ 0 ; 4 \}$

(f) $\dfrac{x-8}{x-3} + \dfrac{x-3}{x-5} + \dfrac{x-9}{x-7} = \dfrac{x-1}{x-3} + \dfrac{x-13}{x-5} + \dfrac{x-6}{x-7}$

$$\frac{\overset{-7}{x - 8 - x + 1}}{x-3} + \frac{\overset{10}{x - 3 - x + 13}}{x-5} + \frac{\overset{-3}{x - 9 - x + 6}}{x-7} = 0$$

$$\frac{-7(x-5)(x-7) + 10(x-3)(x-7) - 3(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-5)(x-7)} = 0$$

$-7x^2 + 84x - 245 + 10x^2 - 100x + 210 - 3x^2 + 24x - 45 = 0$

$S = \{10\}$

$8x - 80 = 0$

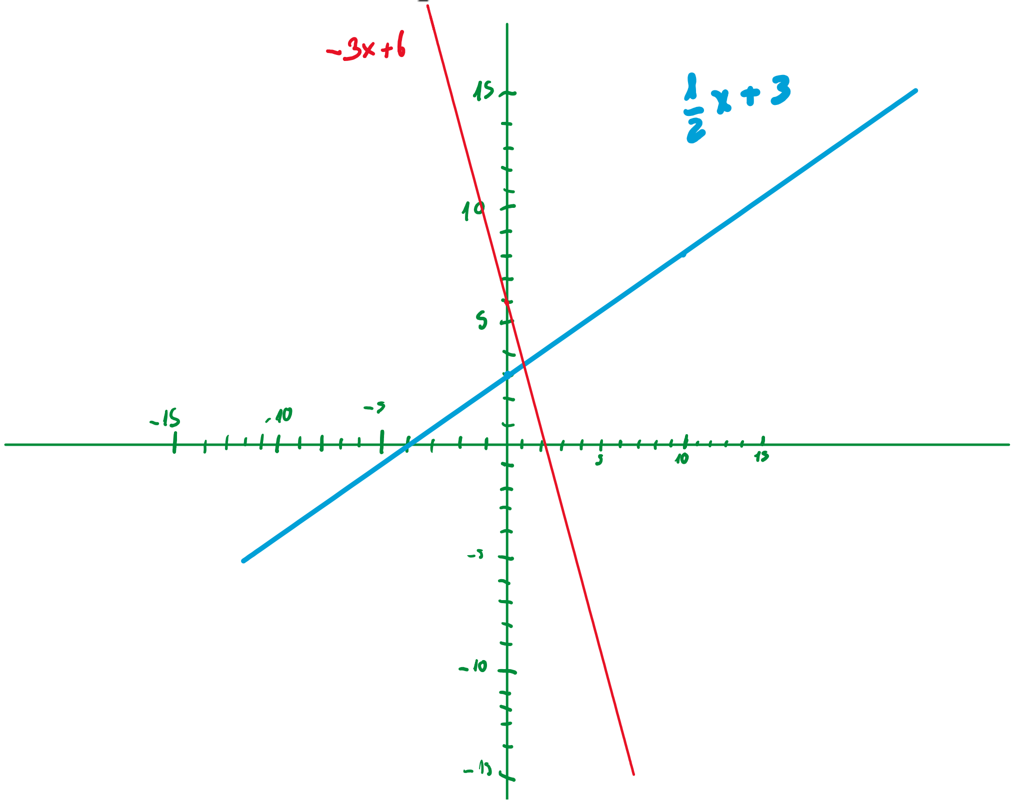
$8x = 80$

$x = 10$

Série 03

lundi, 30 septembre 2024 13:11

1. Dessiner les droites $y = \frac{1}{2}x + 3$ et $y = -3x + 6$.



2. Dessiner les courbes

(a) $y = 5 + |x - 1|$

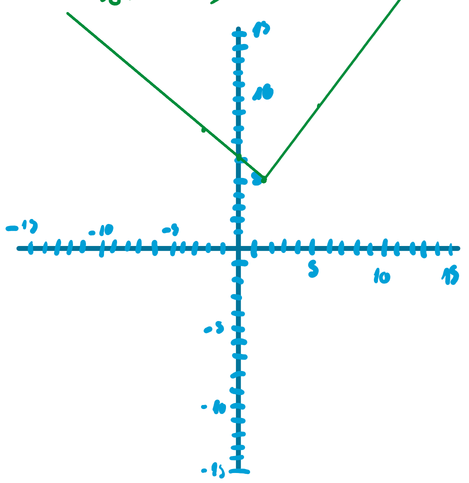
(b) $y = ||x| - 4|$

(c) $y = |x + 2| - |x - 1|$

(d) $y = |2x + |x - 1||$

a) si $x<1$ alors $6-x$

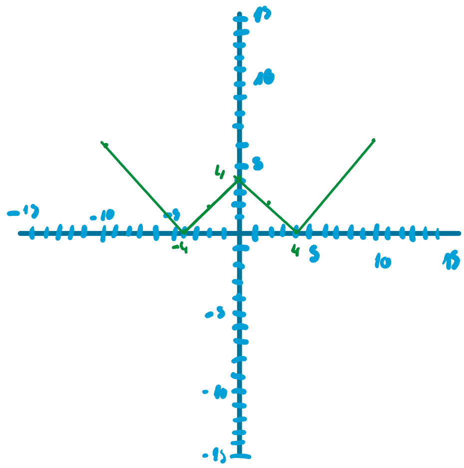
si $x \geq 1$ alors $x+4$



b) $||x|-4|$

	0	
$\lvert -x-4 \rvert$		$\lvert x-4 \rvert$

	-4			4	
$-x-4$		$x+4$	$-x+4$		$x-4$

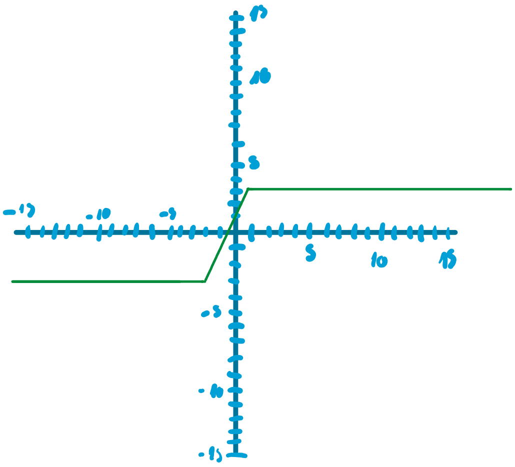


c) $|x+2| - |x-1|$

	-2		1	
$-x-2+x-1$ -3		$x+2+x-1$ $2x+1$		$x+2-x+1$ 3

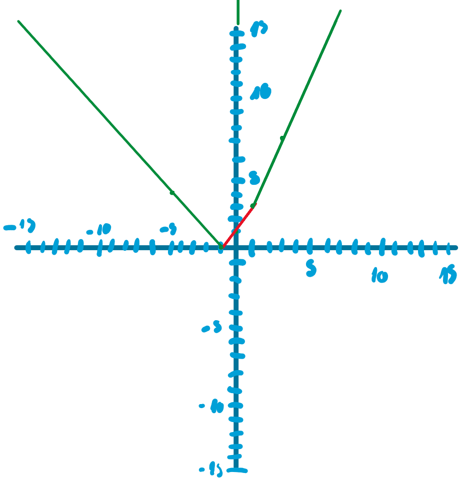
d) $|2x + |x-1||$

-3	$2x+1$	$x+2-x+1$ 3



d) $|2x+|x-1||$

x		1	
	$|2x-x+1|$ $|x+1|$		$|2x+x-1|$ $|3x-1|$
-1	$-x-1$ | $x+1$	$\frac{1}{3}$	$3x-1$



3. Le lien entre la température T_C exprimée en degrés Celsius et la température T_F exprimée en degrés Fahrenheit est représenté par une droite. Sachant que $T_C = 0$ correspond à $T_F = 32$ et que $T_C = 100$ correspond à $T_F = 212$, exprimer T_F en fonction de T_C puis T_C en fonction de T_F. Dessiner ensuite les droites correspondantes.

Soit x la temperature en C°
y la temperature en F

$ax+b=y$

Donc $b=32$

Trouver

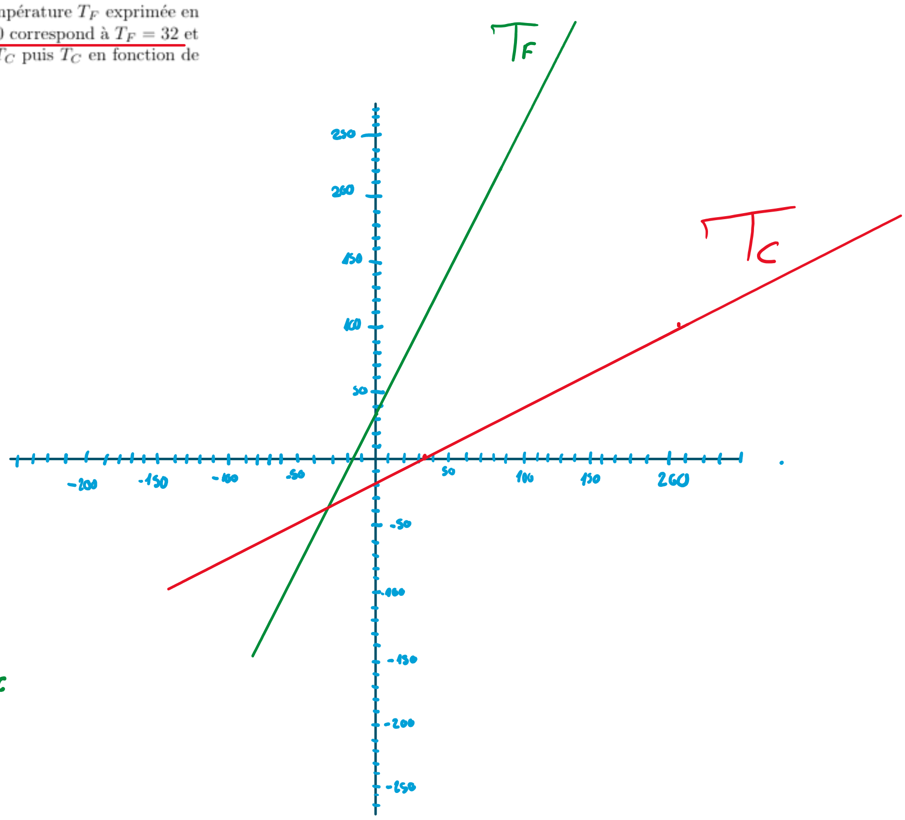
$ax+b=y$

$a=\frac{y-b}{x}$

$a=\frac{212-32}{100}=1.8$

$1.8x+32=y$ pour T_F en fonction de T_c

$x=\frac{y-32}{1.8}$ pour T_c en fonction de T_F



4. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{3x+1}{x+1} = 2 - \dfrac{2}{x+1}$

(b) $(x-1)^2(x+1) = (x-1)^2(2x+3)$

(c) $|5-7x| = 2,$

(d) $|x-2| = 2x-6,$

4. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $\dfrac{3x+1}{x+1} = 2 - \dfrac{2}{x+1}$

   (b) $(x-1)^2(x+1) = (x-1)^2(2x+3)$

   (c) $|5-7x| = 2$,

   (d) $|x-2| = 2x-6$,

   (e) $|2-2x| + |5x-4| = 3$.

a) $D_F = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$3x+1 = x+1-2$

$3x+1 = x-1$

$2x = -2$

$x = -1$

$S = \emptyset$

b) 1 est une solution car $\overset{1}{(x-1)}^2 = 0$ des 2 cotés les resultats seront identiques

Donc

$x+1 = 2x+3$

$x = -2$

$S = \{-2; 1\}$

c) $|5-7x| = 2$

	$\frac{5}{7}$
$5-7x=2$ $-7x=-3$ $x=\frac{3}{7}$	$-5+7x=2$ $7x=7$ $x=1$

$S = \{\frac{3}{7} : 1\}$

d) $|x-2| = 2x-6$

	2
$-x+2=2x-6$ $-3x=-8$ $3x=8$ $x=\cancel{\frac{8}{3}}$	$x-2=2x-6$ $-x=-4$ $x=4$ $S=\{4\}$

e) $|2-2x| + |5x-4| = 3$

	$\frac{4}{5}$	1
$3 = -5x+4+2-2x$ $-7x+6=3$ $-7x=-3$ $x=\frac{3}{7}$	$2-2x+5x-4=3$ $3x-2=3$ $3x=5$ $x=\cancel{\frac{5}{3}}$	$-2+2x+5x-4=3$ $7x-6=3$ $7x=9$ $x=\frac{9}{7}$

$S = \{\frac{3}{7} ; \frac{9}{7}\}$

5. Résoudre l'équation

$$a(ax-1)+1 = (3-2a)x$$

pour toutes les valeurs du paramètre réel a.

$D = \mathbb{R}$

$a^2x - a + 1 = 3x - 2ax$

$a^2x + 2ax - 3x = a - 1$

$x\underbrace{(a^2+2a-3)}_{a} = a-1$

$a=0$

$a^2+2a-3=0$

$a^2+3a-a-3$

$a(a+3)-1(a+3)$

$(a-1)(a+3)=0$

Si $a=1$ alors $S=\mathbb{R}$
Si $a=-3$ alors $S=\emptyset$

$x=\frac{a-1}{(a-1)(a+3)}$

Si $a\neq 1$ ou $a\neq -3$ alors $S=\left\{\frac{4}{a+3}\right\}$

6. Résoudre l'équation
$$\frac{a(ax-1)+1}{x-1}=\frac{(3-2a)x}{x-1}$$
pour toutes les valeurs du paramètre réel a.

$DF=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Si $a=1$ alors $S=D$ $\qquad \frac{1}{a+3}=1$

Si $a=-3$ ou $a=-2$ alors $S=\emptyset$

Si $a\neq 1$ ou $a\neq -2$ ou $a\neq -3$ alors $S=\left\{\frac{1}{a+3}\right\}$ $a=-2$

7. Résoudre l'équation
$$\frac{a(2x+3)-(a^2-2)x}{x+3}=2$$
pour toutes les valeurs du paramètre réel a.

$D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$2ax+3a-a^2x+2x=2x+6$

$-a^2x+2ax=-3a+6$

$x\underbrace{(-a^2+2a)}_{a}=-3a+6$

$a=0$

$-a^2+2a=0$

$a(-a+2)=0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad 2$

$\emptyset \quad D$

Si $a=2$ alors $S=D$

Si $a=0$ ou $a=-1$ alors $S=\emptyset$

$x=\frac{3(-a+2)}{a(-a+2)}=\frac{3}{a}$

$\frac{3}{a}=-3$

$a=-1$

Si $a\neq -1$ ou $a\neq 0$ ou $a\neq 2$ alors $S=\left\{\frac{3}{a}\right\}$

$$\frac{x^2+49}{(x+7)^2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{x^2+49-(x+7)^2}{(x+7)^2} \geq 0$$

$$\frac{14x}{(x+7)^2} \geq 0$$

Série 04

lundi, 7 octobre 2024 09:17

1. Effectuer et simplifier

(a) $90 \cdot 3^{n-2} - 3^n$

(b) $(6x^7 + 5x^4 - 3x^2) \cdot 2x^3$

(c) $(5y + 8y^2 - 3y^5) \cdot 2y^{n-1}$

(d) $(z^{n+3} - 3z^n - z^{n-3}) : z^3$

(e) $(b^{n+1} - 4b^n + 4b^{n-1}) : b^{n-1}$

(f) $(24 \cdot 7^{q-2} + 25 \cdot 7^{q-2}) : 7^{q-1}$

(g) $(a^5 + a^4)(a^3 + a^2)$

(h) $(b^n - 2b^{n-1})(3b^2 + b)$

(i) $(b^{n-1} - 2b^{n+1})(4b^n + 8b^{n-2})$

(j) $(3x^7 + 4y^2)(3x^7 - 4y^2)$

(k) $(3p^x - 4q^x)^2$

(l) $(x^{2p} - 3x^p y^q + 9y^{2q})(x^p + 3y^q)$

a) $90 \cdot 3^{n-2} - 3^n$

$3^{n-2}(90 - 3^2)$

$3^{n-2}(81)$

$3^{n-2} \cdot 3^4$

3^{n+2}

b) $(6x^7 + 5x^4 - 3x^2) \cdot 2x^3$

$12x^{10} + 10x^7 - 6x^5$

c) $(5y + 8y^2 - 3y^5) \cdot 2y^{n-1}$

$y(5 + 8y - 3y^4) \cdot 2y^{n-1}$

$2y^n(5 + 8y - 3y^4)$

$10y^n + 16y^{n+1} - 6y^{n+4}$

d) $\dfrac{z^{n+3} - 3z^n - z^{n-3}}{z^3}$

$z^{n-3}(z^6 - 3z^3 - 1) \cdot z^{-3}$

$z^{n-6}(z^6 - 3z^3 - 1)$

$z^n - 3z^{n-3} - z^{n-6}$

e) $\dfrac{(b^{n+1} - 4b^n + 4b^{n-1})}{b^{n-1}}$

$\dfrac{\cancel{b^{n-1}}(b^2 - 4b + 4)}{\cancel{b^{n-1}}}$

$(b-2)^2$

f) $\dfrac{24 \cdot 7^{q-2} + 25 \cdot 7^{q-2}}{7^{q-1}}$

$\dfrac{7^{q-2}(24 + 25)}{7^{q-1}}$ 49

$\dfrac{7^{q-2} \cdot 7^2}{7^{q-1}} = 7^q \cdot 7^{-q+1} = 7$

g) $(a^5 + a^4)(a^3 + a^2)$

$a^4(a+1) \cdot a^2(a+1)$

$a^4 \cdot a^2 \cdot (a+1)^2$

$a^6 \cdot (a+1)^2$

$a^6 \cdot (a^2 + 2a + 1)$

$a^8 + 2a^7 + a^6$

h) $(b^n - 2b^{n-1})(3b^2 + b)$

$b^{n-1}(b-2)\, b(3b+1)$

$b^n(b-2)(3b+1)$

$b^n(3b^2 - 5b - 2)$

$3b^{n+2} - 5b^{n+1} - 2b^n$

i) $(b^{n-1} - 2b^{n+1})(4b^n + 8b^{n-2})$

$b^{n-1}(1 - 2b^2)\, 4b^{n-2}(b^2 + 2)$

$4b^{2n-3}(1 - 2b^2)(b^2 + 2)$

$b^2 + 2 - 2b^4 - 4b^2$

$-2b^4 - 3b^2 + 2$

$-8b^{2n+1} - 12b^{2n-1} + 8b^{2n-3}$

(j) $(3x^7 + 4y^2)(3x^7 - 4y^2)$

$9x^{14} - 12x^7y^2 + 12x^7y^2 - 16y^4$

$9x^{14} - 16y^4$

k) $(3p^x - 4q^x)^2$

$9p^{2x} - 24p^xq^x - 16q^{2x}$

(l) $(x^{2p} - 3x^p y^q + 9y^{2q})(x^p + 3y^q)$

$x^{3p} - 3x^{2p}y^q + 9x^py^{2q} + 3x^{2p}y^q - 9x^py^{2q} + 27y^{3q}$

$x^{3p} + 27^{3q}$

2. (a) Décomposer en facteurs

i. $a^{n+2} - 4a^{n-2}$
ii. $x^{-n} + x^{-n-3}$
iii. $u^{4m} - v^{-2n}$
iv. $e^{-8x} - 1$
v. $a^7 - 4a^6 + 4a^5$
vi. $t^{4p} - 12t^{2p} + 36$
vii. $9s^{2n+1} - 12s^{n+1} + 4s$
viii. $t^{-4p} - 12t^{-2p} + 36$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

i. $a^{n+2} - 4a^{n-2}$
$a^{n-2}(a^4 - 4)$
$a^{n-2}(a^2-2)(a^2+2)$
$a^{n-2}(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})(a^2+2)$

ii $x^{-n} + x^{-n-3}$
$x^{-n-3}(x^3+1)$
$x^{-n-3}(x+1)(x^2-x+1)$

iii $u^{4m} - v^{-2n}$
$(u^{2m}+v^{-n})(u^{2m}-v^{-n})$

iv. $e^{-8x} - 1$
$(e^{-4x}-1)(e^{-4x}+1)$
$(e^{-2x}-1)(e^{-2x}+1)(e^{-4x}+1)$
$(e^{-x}-1)(e^{-x}+1)(e^{-2x}+1)(e^{-4x}+1)$

V. $a^7 - 4a^6 + 4a^5$
$a^5(a^2-4a+4)$
$a^5(a-2)^2$

Vi. $t^{4p} - 12^{2p} + 36$
$(t^{2p}-6)^2$

Vii $9s^{2n+1} - 12s^{n+1} + 4s^{+1}$
$s(9^{2n} - 12^n + 4)$
$s(3^n-2)^2$

Viii $t^{-4p} - 12t^{-2p} + 36$
$(t^{-2p} - 6)^2$

(b) Simplifier (formellement) les fractions suivantes à l'aide d'une décomposition en facteurs:

i. $\dfrac{y^8 + 3y^9}{y^4 - 9y^6}$
ii. $\dfrac{b^{n+1} + 5b^n}{b^{n-1} + 5b^{n-2}}$
iii. $\dfrac{y^{-2m} + 14y^{-m} + 49}{y^{-2m} - 49}$
iv. $\dfrac{z^{1-q} - 4z^{2-q}}{z^{1-q} - 8z^{-q} + 16z^{-1-q}}$
v. $\dfrac{x^{-2m}}{y^{-2m-1}} \cdot \dfrac{y^{2-m}}{z^{2-3m}} \cdot \dfrac{z^{-2m+5}}{x^{3-m}}$

i $\dfrac{y^8(3y+1)}{y^4(-3y^2+1)}$

$\dfrac{y^{8\,4}(\cancel{3y+1})}{\cancel{y^4}(1-3y)(\cancel{1+3y})}$

$\dfrac{y^4}{1-3y}$

ii $\dfrac{\cancel{b^n}(\cancel{b+5})}{b^{n-2}(\cancel{b+5})}$

$\dfrac{1}{b^{-2}} = b^2$

iii $\dfrac{(y^{-m}+7)^{\cancel{2}}}{(\cancel{y^{-m}+7})(y^{-m}-7)}$

$\dfrac{y^{-m}+7}{y^{-m}-7} = \dfrac{\cancel{y^m}(1+7y^m)}{\cancel{y^m}(1-7y^m)}$

iv. $\dfrac{z^{\cancel{1-q}}(1-4z)}{z^{\cancel{1-q}}(1-8z^{-1}+16z^{-2})}$

$\dfrac{z^2(1-4z)}{z^2(1-8z^{-1}+16z^{-2})}$

$\dfrac{z^2(1-4z)}{(z-4)^2}$

V. $x^{-2m} \cdot x^{-3+m} \cdot y^{2-m} \cdot y^{+2m+1} \cdot z^{-2m+5} \cdot z^{-2+3m}$

$x^{-m-3} \cdot y^{m+3} \cdot z^{m+3}$

$\left(\dfrac{yz}{x}\right)^{m+3}$

3. Simplifier (formellement)

(a) $(-x-5)^{-7}(-x+5)^{-7}$

(b) $\dfrac{(a+b)^{-q}}{(a^2-b^2)^{-q}}$

(c) $\dfrac{(x+5)^{-2-p}}{(x^2+5x)^{-p-2}}$

(d) $(\frac{2}{3}z)^{-3} : (\frac{5}{6}zh)^{-2}$

(e) $\left[(-c^5)^{-4}(a^{-2}b^0e^{-3+t})^{-7}\right]^{-2}$

(f) $\dfrac{a^{-4}b^5}{x^{-3}y^{-2}} \cdot \dfrac{x^{-2}y^{-1}}{a^{-3}b^6}$

(g) $\dfrac{x^2y^{-5}}{a^{-3}b^{-1}} \cdot \dfrac{a^{-1}b}{x^{-2}y^{-7}}$

(h) $\dfrac{q^{-2}(\frac{1}{p^3})^{-1}}{r^{-4}s^{-5}} \cdot \dfrac{\frac{1}{p} \cdot q^2}{\left(\frac{1}{r^3}\right)^2 \left(\frac{1}{s}\right)^{-1}}$

a) $\dfrac{1}{(-x-5)^{+7} \cdot (-x+5)^{+7}}$

$-x^7 - s^7 \cdot -x^7 + s^7$

$x^{14} + \cancel{(x)}^7 - (\cancel{5x})^7 + 25^{14}$

$x^{14} + 25^{14}$

b) $\dfrac{(a^2-b^2)^q}{(a+b)^q}$

$\dfrac{(a-b)^q \cdot (\cancel{a+b})^q}{(\cancel{a+b})^q}$

$(a-b)^q$

c) $\dfrac{x^{2+p}(x\cancel{+5})^{2+p}}{(x\cancel{+5})^{2+p}}$

x^{2+p}

d) $\left(\dfrac{5}{6}zh\right)^2$

e) $(-c^5)^8 \cdot (a^{-2}e^{-3+t})^{14}$

d) $\dfrac{(\frac{5}{6}zh)^2}{(\frac{2}{3}z)^3}$ $\qquad \dfrac{\frac{25}{36}h^2}{\frac{8}{27}z}$ $\qquad \dfrac{\frac{25h^2}{36}}{\frac{8z}{27}}$ $\qquad \dfrac{25h^2}{\cancel{36}_{4}}\cdot\dfrac{\cancel{27}^{3}}{8z}$ $\qquad \dfrac{75h^2}{32z}$

e) $(-c^5)^8 \cdot (a^{-2}e^{-3+t})^{14}$

$= c^{40} \cdot a^{-28}\cdot e^{-42+14t}$

$\dfrac{c^{40}}{a^{28}\cdot e^{42-14t}}$

f) $\dfrac{a^{-1}b^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$ $\qquad \dfrac{\cancel{x^{-2}}\;\cancel{y^{-1}}}{\cancel{a^{-3}}\;b^{-1}}$

$\dfrac{xy}{ab}$

g) $\dfrac{x^4 y^2}{\cancel{a^{-3}}\;\cancel{b^{-1}}}$ $\qquad \dfrac{a^2 b^2}{\cancel{x^{-2}}\;\cancel{y^{-1}}}$

$(abx^2y)^2$

h) $\dfrac{r^4\cdot s^4\cdot p^2}{\cancel{q^2}\cdot}$ $\qquad \dfrac{r^6\;\cancel{q^2}}{\cancel{p}\;\cancel{s}}$

$r^{10}\cdot p^2\cdot s^4$

$(r^5\cdot p\cdot s^2)^2$

4. Simplifier (formellement) et écrire le résultat uniquement avec des exposants positifs:

(a) $(b^{-4})^2$

(b) $(a^{-2}b)^{-5}$

(c) $2^{-1}a^0b^{-3}c^{-2}4a^2b^5c^{-3}$

(d) $\dfrac{9a^{-3}b^2x^{-4}}{3a^{-5}bx^{-2}}$

(e) $(x-y)^{-2}:(y-x)^{-1}$

(f) $\left\{-\left[-(-x)^{-1}\right]^{-2}\right\}^{-3}$

a) b^{-8}

$\dfrac{1}{b^8}$

b) $a^{10}\,b^{-5}$

$\dfrac{a^{10}}{b^5}$

c) $\dfrac{\cancel{4}a^2\cancel{b^5}}{\cancel{2}\cancel{b^3}c^5}$

$\dfrac{2a^2b^2}{c^5}$

2

d) $\dfrac{3a^2b}{x^2}$

e) $\dfrac{-y+x}{-(x-y)^2}$

$\dfrac{1}{-x+y}$

f) $-(-x^2)^{-3}$

$-\dfrac{1}{x^6}$

Série 05

lundi, 14 octobre 2024 10:12

1. Calculer

(a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$ (b) $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[3]{a}$ (c) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}}$ (d) $\sqrt[n]{a^3} : \sqrt[n]{a^2}$ (e) $\sqrt{18x^3}$ (f) $\sqrt{\dfrac{8a^4}{25}}$ (g) $\sqrt{\dfrac{32x^3}{75y}}$

a) $a^{\frac13}\cdot a^{\frac14}$

$a^{\frac{4}{12}}\cdot a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{7}{12}}$

b) $a^{\frac23}\cdot a^{-\frac13}$

$\sqrt[3]{a}$

c) $x\cdot x^{-\frac23}\cdot x^{-\frac14}$

$x^{\frac{12}{12}}\cdot x^{-\frac{8}{12}}\cdot x^{-\frac{3}{12}}$

$x^{\frac{1}{12}}$

d) $a^{\frac3n}\cdot a^{-\frac2n}$

$= a^{\frac1n}$

e) $3\sqrt2\cdot x^{\frac32}$

$3x\sqrt{2x}$

f) $\dfrac{a^2\sqrt8}{5} = \dfrac{a^2\, 2^{3/2}}{5} = \dfrac{2a^2\sqrt2}{5}$

g) $\dfrac{4\sqrt2\cdot|x|\sqrt{x}}{5\sqrt3\ \sqrt{y}}$

$\dfrac{4x\cdot\sqrt{2x}}{5\sqrt{3y}}$

2. Calculer

(a) $\sqrt{4x+4}-\sqrt{9x+9}+\sqrt{x+1}$ (b) $(b^{5/6})^4$ (c) $\left(\sqrt[10]{y^3}\right)^5$ (d) $(\sqrt[2n]{x})^n$ (e) $(b^{2/3})^{3/4}$ (f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{b}}$

a) $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1}\,(2-3+1)$

0

b) $b^{5/6\cdot 4}$

$= b^{20/6} = b^{10/3}$

c) $(y^{3/10})^5$

$15/10$

$y^{3/2}$

d) $(x^{\frac{1}{2n}})^n$

$x^{\frac12} = \sqrt{x}$

e) $b^{\frac23\cdot\frac34}$

$b^{\frac{6}{12}}$

$b^{\frac12}$

$\sqrt{b}$

f) $\sqrt[3]{b^{\frac13}}$

$b^{\frac13}$

3. Simplifier en écrivant sous la racine:

(a) $\sqrt2\sqrt{2+\sqrt3}\,(\sqrt3-1)$ (b) $\sqrt{2-\sqrt3}\,(\sqrt6-\sqrt2)(2+\sqrt3)$

a) $\sqrt{2(2+\sqrt3)}\cdot(\sqrt3-1)$

$\sqrt{6(2+\sqrt3)} - \sqrt{2(2+\sqrt3)}$

$\sqrt{12+6\sqrt3} - \sqrt{4+2\sqrt3}$

$\sqrt{(3+\sqrt3)^2} - \sqrt{(1+\sqrt3)^2}$

$3+\sqrt3-1-\sqrt3$

2

b) $(\sqrt{12-6\sqrt3} - \sqrt{4-2\sqrt3})(2+\sqrt3)$

$(\sqrt{(3-\sqrt3)^2} - \sqrt{(1-\sqrt3)^2})(2+\sqrt3)$

$(3-\sqrt3-\sqrt3+1)(2+\sqrt3)$

$(4-2\sqrt3)(2+\sqrt3)$

$8-4\sqrt3+4\sqrt3-6$

2

4. Simplifier le plus possible:

(a) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}}$ (b) $\sqrt[4]{\sqrt5-1}\,\sqrt[4]{\sqrt5+1}$ (c) $\sqrt[3]{x^2y\sqrt{xy^{-1}}}\quad (x,y>0)$ (d) $a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$

a) $\sqrt[3]{a^6}$

a^2

b) $\sqrt[4]{(\sqrt5+1)(\sqrt5-1)}$

$\sqrt[4]{5-1}$

$\sqrt[4]{4}$

$\sqrt2$

c) $x^{\frac23}\cdot y^{\frac13}\cdot x^{\frac16}\cdot y^{-\frac16}$

$x^{\frac56}\cdot y^{\frac16}$

$\sqrt[6]{x^5\cdot y}$

d) $a\cdot a^{\frac13}\cdot a^{\frac19}\cdot a^{\frac{1}{27}}$

$a^{\frac{27}{27}}\cdot a^{\frac{9}{27}}\cdot a^{\frac{3}{27}}\cdot a^{\frac{1}{27}}$

$a^{\frac{40}{27}}$

$\sqrt[27]{a^{40}}$

5. Rendre (formellement) le dénominateur rationnel:

(a) $\frac{10\sqrt{11}-5}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ (c) $\frac{8\sqrt{3}+3\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{8}}$ (d) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$

a) $\frac{10\sqrt{11}-5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$\frac{10\sqrt{55}-5\sqrt{5}}{5}$

$2\sqrt{55}-\sqrt{5}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}$

$\sqrt{2}-1$

c) $\frac{8\sqrt{3}+3\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}-\sqrt{8}}$

$\frac{8\cdot 3+3\sqrt{24}-8\sqrt{24}-3\cdot 8}{3-8}$

$\frac{5\sqrt{24}}{5} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} \cdot \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$

$\frac{a\sqrt{ab}-ab+ab-b\sqrt{ab}}{a^2b-ab^2}$

$\frac{\sqrt{ab}(\cancel{a-b})}{ab(\cancel{a-b})}$

6. Résoudre les équations suivantes:

$[4;+\infty[\quad]-\infty;1]$

(a) $\sqrt{x(x-4)} = 2\sqrt{1-x}$,
(b) $\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{2(2-x)} = 0$,
(c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{4-4x}$,
(d) $\sqrt{x-1} = \sqrt{3x} - \sqrt{9x-9}$,
(e) $\sqrt{x^2+2} = x-1$,
(f) $\sqrt{x}+3 = \sqrt{x+11}$,
(g) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$,
(h) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$,
(i) $\sqrt{4x^2-16x+16} = x+3$,
(j) $\sqrt{9x-9}\,\sqrt{x-1} = x+3$.

a) $x(x-4) = 4(1-x)$

$x^2-4x = -4x+4$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$S = \{-2\}$

b) $x(x-2) = 4-2x$

$x^2-2x = 4-2x$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$S = \{2\}$

c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+4} = 2\sqrt{x-1}$

$\sqrt{3x+4} = \sqrt{x-1}$

$3x+4 = x-1$

$2x = -5$

$x = -\frac{5}{2}$

$S = \emptyset$

d) $\sqrt{x-1} = \sqrt{3x} - 3\sqrt{x-1}$

$4\sqrt{x-1} = \sqrt{3x}$

$16x-16 = 3x$

$13x = 16$

$x = \frac{16}{13}$

e) $\sqrt{x^2+2} = x-1$

$x^2+2 = x^2-2x+1$

$1 = -2x$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

$S = \emptyset$

f) $\sqrt{x}+3 = \sqrt{x+11}$

$x+6\sqrt{x}+9 = x+11$

$6\sqrt{x} = 2$

$\sqrt{x} = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{9}$

$S = \{\frac{1}{9}\}$

g) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$

$\sqrt{x}-\sqrt{2} = -\sqrt{x+1}$

$x-2\sqrt{2x}+2 = x+1$

$-2\sqrt{2x} = -1$

$2\sqrt{2x} = 1$

$\sqrt{2x} = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{8}$

$S = \{\frac{1}{8}\}$

h) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

$x+2+2\sqrt{x^2-4}+x-2 = 2x+3$

$2x+2\sqrt{x^2-4} = 2x+3$

$2\sqrt{x^2-4} = 3$

$\sqrt{x^2-4} = \frac{3}{2}$

$x^2-4 = \frac{9}{4}$

$x^2 = \frac{9}{4}+\frac{16}{4} = \frac{25}{4}$

$x = \pm\frac{5}{2}$

$S = \{\frac{5}{2}\}$

i) $\sqrt{4x^2-16x+16} = x+3$

$\sqrt{(2x-4)^2} = x+3$

$2x-4 = x+3$

$-2x+4 = x+3$

$3x = 1$

j) $\sqrt{9x-9}\cdot\sqrt{x-1} = x+3$

$3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1} = x+3$

$3x-3 = x+3$

$2x = 6$

$\sqrt{(2x-4)} = x+3$

$2x-4 = x+3 \qquad -2x+4 = x+3 \qquad 3x-3 = x+3$

$x-4=3 \qquad 3x = 1 \qquad 2x = 6$

$x = 7 \qquad x = \frac{1}{3} \qquad x = 3$

7. Résoudre les équations suivantes:

(a) $\sqrt[8]{(x+5)^2} = 2$,

(b) $\sqrt[9]{x^3+3x^2} = \sqrt[3]{x+1}$,

(c) $\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[8]{x+5} = 0$,

(d) $\sqrt[4]{4(x-1)^2} = \sqrt{x+5}$,

(e) $\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[6]{4x^2-3}$.

a) $(x+5)^2 = 2^8$

$(x+5)^2 = 256$

$x+5 = \pm 16$

$S = \{-21; 11\}$

b) $x^3+3x^2 = (x+1)^3$

$= (x^2+2x+1)(x+1)$

$x^3+3x^2 = x^3+3x^2+3x+1$

$3x+1=0$

$x = -\frac{1}{3}$

c) $\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[8]{x+5} = 0$

$\sqrt[8]{x+5} = -\sqrt[4]{x+2}$

$x+5 = x^2+4x+4$

$S = \emptyset$

d) $\sqrt[4]{4(x-1)^2} = \sqrt{x+5}$

$4(x-1)^2 = (x+5)^2$

$4x^2-8x+4 = x^2+10x+25$

$3x^2-18x-21=0$

$3x^2+3x-21x-21=0$

$3x(x+1)-21(x+1)$

$(3x-21)(x+1)=0$

$S = \{7; -1\}$

63

3. 21

e) $\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[6]{4x^2-3}$

$(2x+1)^2 = 4x^2-3$

$\cancel{4x^2}+4x+1 = \cancel{4x^2}-3$

$4x = -4$

$x = -1$

$S = \{\emptyset\}$

CC 01 Examen 2022

lundi, 21 octobre 2024 09:15

1. Simplifier les expressions suivantes

a) $\sqrt[4]{5 \cdot 2^5 \cdot 2^{-3} - 2^2}$

$\sqrt[4]{5 \cdot 2^2 - 2^2} = \sqrt[4]{16} = 2$

b) $\dfrac{9x^2 - (a+4)^2}{x(3x+a+4)} = \dfrac{(3x-a-4)(3x+\cancel{a+4})}{x(\cancel{3x+a+4})} = \dfrac{3x-a-4}{x}$

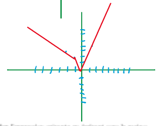
2. (a) Exprimer $|x+1| + 2x$ sans valeur absolue.
(b) Dessiner la courbe $y = ||x+1| + 2x|$.

a)

-1	
$\lvert -x-1+2x\rvert$ $\lvert x-1\rvert$	$\lvert x+1+2x\rvert$ $\lvert 3x+1\rvert$ ($-\frac{1}{3}$)
$-x+1$	$-3x-1$ $\quad$ $3x+1$

Si $x < -1$ alors $-x+1$
Si $-1 \leq x < -\frac{1}{3}$ alors $-3x-1$
Si $-\frac{1}{3} \leq x$ alors $3x+1$

b)



3. Simplifier l'expression suivante en écrivant sous la racine:

$$\sqrt{8+3\sqrt{7}}\,(3-\sqrt{7})$$

4 points

$\sqrt{(8+3\sqrt{7}) \cdot (3-\sqrt{7})^2}$
$\sqrt{(8+3\sqrt{7}) \cdot (9-6\sqrt{7}+7)}$
$\sqrt{(8+3\sqrt{7})\, 2\,(8-3\sqrt{7})}$
$\sqrt{2(64-63)}$
$\sqrt{2}$

4. Résoudre l'équation

$$\sqrt{2x-10} + \sqrt{x+2} = \sqrt{8-x}$$

$2x-10+2\sqrt{(2x-10)(x+2)}+x+2 = 8-x$ $\qquad$ $D_f = [5;8]$
$3x-8+2\sqrt{(2x-10)(x+2)} = 8-x$
$\sqrt{(2x-10)(x+2)} = -2x+8$ $\qquad$ $S = \emptyset$
$+ \neq -$

5. Résoudre l'inéquation

$$\frac{x^2}{1+x} - \frac{x^2}{x-1} \leq \frac{x^2}{1-x^2}$$

5 points

$\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{x^2}{x-1} \leq \dfrac{-x^2}{x^2-1}$ $\qquad$ $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$\dfrac{x^2(x-1) - x^2(x+1) + x^2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

$\dfrac{x^2(x-1-x-1+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

$\dfrac{-x^2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

$-1 \quad 0 \quad 1$
$- \quad + \quad + \quad -$ $\qquad$ $S =]-\infty; -1[\cup \{0\} \cup]1; +\infty[$

6. Résoudre l'équation

$$\frac{4}{x^2-4} + \frac{x+1}{3x^2+6x} = \frac{2}{x^2-2x}$$

6 points

$\dfrac{4}{(x-2)(x+2)} + \dfrac{x+1}{3x(x+2)} = \dfrac{2}{x(x-2)}$ $\qquad$ $D = \mathbb{R}^* \setminus \{\pm 2\}$

$\dfrac{4 \cdot 3x + (x+1)(x-2) - 2\overset{(3x+6)}{(3(x+2))}}{3x(x+2)(x-2)} = 0$

$\dfrac{12x + x^2 - x - 2 - 6x - 12}{3x(x+2)(x-2)} = 0$

$\dfrac{x^2+5x-14}{3x(x+2)(x-2)} = 0$

$\dfrac{(x+7)(x-2)}{3x(x+2)(x-2)} = 0$

$S = \{-7\}$

7. Résoudre l'équation suivante en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a^2-x-3}{x+2} = a$$

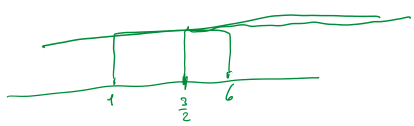
7 points

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$a^2 - x - 3 = ax + 2a$
$a^2 - 2a - 3 = x(a+1)$
$(a-3)(a+1) = x(a+1)$

Si $a = -1$ alors $S = D$
Si $a = 1$ alors $S = \emptyset$
Si $a \neq \pm 1$ alors $S = a-3$

Extra



$2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

Ex 1

1. $\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = \sqrt{2x-3}$ $\qquad$ $D_f = [1.5; 6]$

$x - 1 + 6 - x + 2\sqrt{(x-1)(6-x)} = 2x-3$
$2\sqrt{(x-1)(6-x)} = 2x-8$ $\qquad$ $x = \frac{11}{2}$
$\sqrt{(x-1)(6-x)} = x-4$

$(x-1)(6-x) = x^2-8x+16$ $\qquad$ $x \neq 2$
$6x - x^2 - 6 + x = x^2 - 8x + 16$
$-x^2+7x-6 = x^2-8x+16$
$-2x^2+15x = 22$
$(2x-11)(x-2) = 0$

$\sqrt{4} + \sqrt{2 \cdot 4}$

$2 + 2\sqrt{2}$

4. $x - \sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{4x+8}$

$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-1}$
$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-1}$
$x+5+x-1+2\sqrt{(x+5)(x-}$
$2\sqrt{x}$

$\frac{5}{2}$

$= \sqrt{4x-10}$

$= \sqrt{2(2x-5)}$

$= 4x-10$

$-1)$

$5)(x-1) = 2x-14$

$\sqrt{(x+5)(x-1)} = x-7$

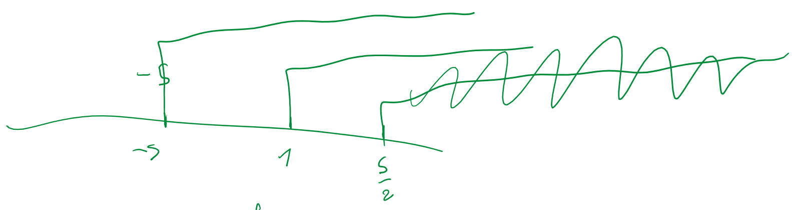
$\cancel{x^2} + 4x - 5 = \cancel{x^2} - 14x + 49$

$18x = 54$

$2x = 6$

$x = 3$

$S = \emptyset$



$D_f = [\frac{5}{2} ; +\infty[$

$$x - \sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{4(x+2)}$$

$$-\sqrt{x+2} - \sqrt{4(x+2)} = 2 - x$$

$$-3\sqrt{x+2} = 2 - x$$

$$9x + 18 = x^2 - 4x + 4$$

$$0 = x^2 - 13x - 14$$

$$0 = x^2 + x - 14x - 14$$

$$0 = (x+1)(x-14)$$

$$x = 14$$

$+$ $-$ $-$ $+$

3. $|1 - x| + |x + 3| = 4$

-3		1	
$1 - x - x - 3 = 4$	$1 - x + x + 3 = 4$		$-1 + x + x + 3 = 4$
$-2x - 2 = 4$	$4 = 4$		$2x + 2 = 4$
$x = -3$	$\mathbb{R}$		$x = 1$

$$S = [-3 ; 1]$$

$-$ $+$

1. $||x - 3| + 2x| = 7$

3	
$\|-x + 3 + 2x\| = 7$	$\|x - 3 + 2x\| = 7$
$\|x + 3\| = 7$	$\|3x - 3\| = 7$

-3		
$-x - 3 = 7$	$x + 3 = 7$	$3x - 3 = 7$
$x = -10$	$x = 4$	$3x = 10$
	Non	$x = \frac{10}{3}$

$$S = \{-10 ; \tfrac{10}{3}\}$$

$$\frac{4x - a^2x + a}{2x - ax + 2} = 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{2}{2-a}\}$$

$$x(2-a) + 2 = 0$$

$$2x - ax + 2 = 0$$

$$x = \frac{-2}{2-a}$$

$$\frac{x(4 - a^2) + a}{x(2-a) + 2} = 1$$

$$x(2-a)(2+a) + a = x(2-a) + 2$$

$$x(2-a)(2+a) - x(2-a) = (2-a)$$

$$(2-a)(x(2+a) - x) = 2 - a$$

Si $a = 2$ alors $S = \emptyset$

Si $a \neq 2$

alors $2x + ax = 1$

$$x = \frac{1}{a+1}$$

CC 01 Examen 2023

mardi, 22 octobre 2024 19:59

1. Ecrire $\sqrt{0.01\bar{7}} = \sqrt{0.017777\ldots}$ sous forme de fraction, puis sous forme décimale.

$0.1\bar{7} = 10$

$0.01\bar{7} = x$

$17.\bar{7} = 1000x$

$1.\bar{7} = 100x$

$\frac{16}{900} = x$

$\sqrt{\frac{16}{900}} = \frac{4}{30} = \boxed{\frac{2}{15}}$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 15 \\ \hline 50 & 0.13 \\ 45 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$0.1\bar{3}$

$$a^2 = \frac{4x - (a+6)}{x-1}$$

$4 = \frac{4x-4}{x-1}$

$4x - 1 = 4x - 4$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$(x-1)a^2 = 4x - (a+6)$

$a^2x - a^2 = 4x - a - 6$

$a^2x - 4x = a^2 - a - 6$

$x(a^2-4) = a^2 - a - 6$

$x(a-2)(a+2) = (a-3)(a+2)$

Si $a = 2$ ou $a = 3$ $S = \emptyset$

Si $a = -2$ $S = D$

Si $a \neq \pm 2$ ou $a \neq 3$

alors

$ax - 2x = a - 3$

$ax - 2x - a + 3 = 0$

$x(a-2) = a - 3$

$x = \frac{a-3}{a-2}$

$S = \left\{ \frac{a-3}{a-2} \right\}$

3. (a) Ecrire $||x-2| - x|$ sans valeur absolue (en distinguant les cas).
   (b) Esquisser le graphe de la courbe $y = ||x-2| - x|$.
   (c) Résoudre l'équation $||x-2| - x| = 3$.

11 points

	2	
$\lvert -x+2-x \rvert$		$\lvert x-2-x \rvert$
$\lvert -2x+2 \rvert$		$\lvert -2 \rvert$

$|-x+2-x|$ | $|x-2-x|$

$|-2x+2|$ | $|-2|$

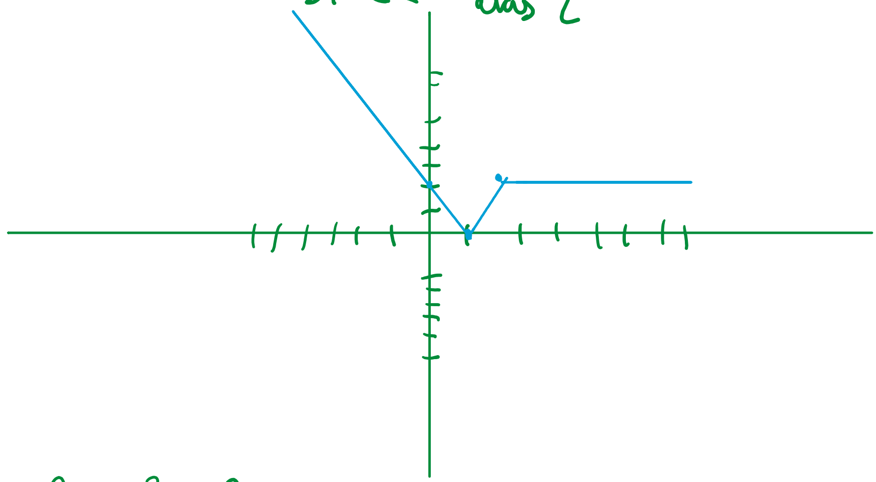
2

$-2x+2 \quad | \quad 2x-2$ (split at 1)

Si $x<1$ alors $-2x+2$

Si $1 \leq x < 2$ alors $2x-2$

Si $2 \leq x$ alors 2



$$-2x+2=3$$

$$-2x=1$$

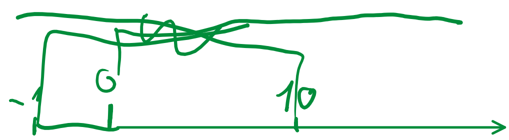
$$2x=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

4. Résoudre l'équation:

$$\sqrt{10-x}+\sqrt{x}=\sqrt{2x+2}$$

6 points



$$DF=[0;10]$$

$$\sqrt{10-x}+\sqrt{x}=\sqrt{2(x+1)}$$

$$10-x+x+2\sqrt{(10-x)(x)}=2(x+1)$$

$$10+2\sqrt{-x^2+10x}=2x+2$$

$$2\sqrt{-x^2+10x}=2x-8$$

$$\sqrt{-x^2+10x}=x-4$$

$$-x^2+10x=x^2-8x+16$$

$$-2x^2+18x-16=0$$

$$-2x^2+2x+16x-16=0$$

$$-2x(x-1)+16(x-1)$$

$(-2x+16)(x-1)=0$

$x_1 = 8$ $\quad S = \{8\}$

$x_2 \neq 1$

$\sqrt{2}+\sqrt{8} = \sqrt{18}$

$2\sqrt{16}+2+8 = 18$

$10+8 = 18$

5. Résoudre l'inéquation:

$$\frac{x}{x^2-5x+6} \leq \frac{2}{x^2-6x+9}$$

(

5 points

$$\frac{x}{x^2-2x-3x+6} \leq \frac{2}{(x-3)^2}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} \leq \frac{2}{(x-3)^2}$$

$$\frac{x(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)^2} \leq 0$$

$$\frac{x^2-3x-2x+4}{(x-2)(x-3)^2} \leq 0$$

$$\frac{x^2-4x-x+4}{(x-2)(x-3)^2} \leq 0$$

	1		2		3		4	
$-$	0	+	‖	$-$	‖	$-$	0	+

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)^2} \leq 0$$

$S =]-\infty;1] \cup]2;3[\cup]3;4]$

1 2 3 4

$-$ $+$

$+$

6. Résoudre l'équation:

$$(x^2+2x)^2+3(x^2+2x)=4$$

6 points

Soit $y = x^2+2x$

$D = \mathbb{R}$

$$y^2 + 3y = 4$$

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$y^2 + 4y - y - 4 = 0$$

$$(y+4)(y-1) = 0$$

$y_1 = -4$ $\quad$ y_1 pas possible

$y_2 = 1$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$4 - (4 \cdot -1) = 8$$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$-1 \pm \sqrt{2}$$

$$S = \{-1 \pm \sqrt{2}\}$$

Série 06

jeudi, 24 octobre 2024 08:13

1. Résoudre les équations suivantes:

(a) $20x^2 + x = 12$
(b) $15x^2 + 527 = 178x$
(c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0$
(d) $(2x-5)^2 - (x-6)^2 = 80$
(e) $\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4x-6}$.

a) $20x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 240 = 961$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 31}{40} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{32}{40} = -\frac{4}{5}$

$S = \{-\frac{4}{5}; \frac{3}{4}\}$

b) $15x^2 - 178x + 527$

$\Delta = 178^2 - 4 \cdot 15 \cdot 527 = 64$

$\frac{178 \pm 8}{30} \Rightarrow x_1 = \frac{17}{3}$, $x_2 = \frac{186}{30} = \frac{62}{10} = \frac{31}{5}$

$S = \{\frac{17}{3}; \frac{31}{5}\}$

e) $\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2x} - \frac{3}{2(2x-3)} = 0$

$\frac{4x(x) - 2(2x-3) - 3(2x)}{4x(2x-3)} = 0$

$4x^2 - 4x + 6 - 6x = 0$

$4x^2 - 10x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - (4 \cdot 4 \cdot 6) = 4$

$\frac{10 \pm 2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \notin D$

$= 1$ ✓

$S = \{1\}$

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$

$S = \emptyset$

d) $4x^2 - 20x + 25 - x^2 + 12x - 36 - 80 = 0$

$3x^2 - 8x - 91 = 0$

$\Delta = 64 + (12 \cdot 91) = 1156$

$\frac{8 \pm 34}{6} \Rightarrow x_1 = 7$, $x_2 = \frac{-26}{6} = \frac{-13}{3}$

2. Résoudre les équations suivantes:

(a) $(x+2)^5 + (x-2)^5 = x^3 2^7$
(b) $x^3 - \frac{6^3}{x^3} = 19$
(c) $\frac{x^2+x}{48} - \frac{48}{x^2+x} = 4.8$
(d) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x - \frac{1}{x}$
(e) $\sqrt{x-4} + 3 = x - \sqrt{x-4}$
(f) $\sqrt{2x-3} - \frac{x}{\sqrt{2x-3}} = 1$
(g) $\sqrt{1 + x\sqrt{1+8x}} = x + 1$
(h) $3\sin(x) = 2\cos^2(x)$, $0 \le x \le 2\pi$

4

a) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
$+ x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32 = x^3 2^7$

$2x^5 + 80x^3 + 160x = x^3 2^7$

$2x^5 - 48x^3 + 160x = 0$

$2x(x^4 - 24x^2 + 80) = 0$

$2x\,(x^2-4)(x^2-20) = 0$

$S = \{0; \pm 2; \pm 2\sqrt{5}\}$

b) $x^3 = y$ $S = \{-2; 3\}$

$y - \frac{216}{y} = 19$

$y^2 - 19y - 216 = 0$

$(y-27)(y+8) = 0$

$108 \cdot 2$
$54 \cdot 4$
$27 \cdot 8$

e) $2\sqrt{x-4} = x - 3$

$4x - 16 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x-5)^2 = 0$

$S = \{5\}$ $-5 \notin D$

g) $1 + x\sqrt{1+8x} = x^2 + 2x + 1$

$x\sqrt{1+8x} = x^2 + 2x$

$\sqrt{1+8x} = x + 2$

$1 + 8x = x^2 + 4x + 4$

$0 = x^2 - 4x + 3$

$S = \{0; 1; 3\}$ $0 = (x-3)(x-1)$

c) $y = x^2 + x$

$\frac{t}{48} - \frac{48}{t} = 4.8$

$(t-240)(t+9.6)$

$x^2 + x - 240$

$66 \cdot 4$
$30 \cdot 8$
$15 \cdot 16$

$(x-15)(x+16) = 0$
$+15$ -16

$S = \{-16; 15\}$

$x^2 + x + 9.6 = 0$

d) $y = \sqrt{x}$ $S = \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

$y + \frac{1}{y} = y^2 - \frac{1}{y^2}$

$\frac{y^3 + y}{y} = \frac{y^4 - y^2}{y^2}$

$y^3 + y = y^4 - 1$

$(y-1)(y+1)(y^2+1) - y(y^2+1) = 0$

$(y^2+1)((y-1)(y+1) - y) = 0$

$y^2 - y - 1 = 0$

$b^2 - 4ac = 5$

$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = y$

f) $2x - 3 - x = \sqrt{2x-3}$

$x - 3 = \sqrt{2x-3}$

$x^2 - 6x + 9 = 2x - 3$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-6)(x-2) = 0$

$S = \{6\}$

3. Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $8x^2 + 10x > 3$
(b) $2 - 6x\sqrt{2} > -9x^2$
(c) $\frac{2x-3}{3x+2} \ge 1$
(d) $\frac{3x+4}{4x-3} \le \frac{x+3}{x-3}$
(e) $\frac{5x+8}{2x-3} > \frac{3-x}{x+1}$
(f) $2x^4 - 4x^2 + 1 < 0$
(g) $(x^2 - x + 1)(-x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) > 0$

a) $8x^2 + 10x - 3 > 0$

$8x^2 + 12x - 2x - 3 > 0$

$(2x+3)(4x-1) > 0$

$-\frac{3}{2}$ $\frac{1}{4}$

$+$ $-$ $+$

$S =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{4}; +\infty[$

b) $9x^2 + 2 > 6x\sqrt{2}$

$9x^2 - 6x\sqrt{2} + 2 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 72 - 4 \cdot 9 \cdot 2$
$= 0$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$S = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\sqrt{2}}{3}\}$

$+ +$
$\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

$\frac{2x-3}{3x+2} \ge 1$

$\frac{2x-3-3x-2}{3x+2} \ge 1$

$\frac{-(x+5)}{3x+2} \ge 0$

-5 $-\frac{2}{3}$

$-$ $+$ $-$

$S = [-5; -\frac{2}{3}[$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}; 3\}$

d) $\frac{(3x+4)(x-3) - (x+3)(4x-3)}{(4x-3)(x-3)} \le 0$

$\frac{3x^2 - 9x + 4x - 12 - 4x^2 + 3x - 12x + 9}{(4x-3)(x-3)} \le 0$

$\frac{-x^2 - 14x - 3}{(4x-3)(x-3)} \le 0$ $\frac{-(x+7-\sqrt{46})(x+7+\sqrt{46})}{(4x-3)(x-3)} \le 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 196 - (4 \cdot -1 \cdot -3)$
$= 184$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 \pm 2\sqrt{46}}{-2}$ $-7 - \sqrt{46}$, $-7 + \sqrt{46}$

$-7-\sqrt{46}$ $-7+\sqrt{46}$ $\frac{3}{4}$ 3

$-$ ≈ -13 $+$ ≈ -0.3 $-$ $+$ $-$

$S =]-\infty ; -7 - \sqrt{46}] \cup [-7+\sqrt{46} , \frac{3}{4}[\cup]3 , +\infty[$

Série 07

lundi, 4 novembre 2024 10:22

1. Calculer:

(a) $\sum_{k=0}^{50}(5-k)$

(b) $\sum_{i=0}^{40}\frac{3}{2}(i-6)$

(c) $\sum_{n=1}^{32}(3n+9)^2$

(d) $\sum_{j=13}^{39}\left[(j+5)^2-(j-5)^2\right]$

(e) $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+2)^{10}-k^{10}\right]$

a) $\sum_{k=0}^{50} 5 - \sum_{k=1}^{50} k$

$51 \cdot 5 - \frac{n(n+1)}{2}$

$51 \cdot 5 - 25 \cdot 51$

$= -20 \cdot 51$

$= -1020$

b) $\frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{40} i - \sum_{i=0}^{40} 6\right)$ $40!$ $41!$

$\frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 41 \cdot 6\right)$

$\frac{3}{2}\left(20 \cdot 41 - 41 \cdot 6\right)$

$\frac{3}{2}(41 \cdot 14) = 861$

c) $9\sum_{n=1}^{32}(n+3)^2$

$9\left(\sum_{n=1}^{32} n^2 + \sum_{n=1}^{32} 6n + \sum_{n=1}^{32} 9\right)$

$9\left(\sum_{n=1}^{32} n^2 + 6\sum_{n=1}^{32} n + \sum_{n=1}^{32} 9\right)$ $+ 9 \cdot n)$

$9\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right.$

$9\left(\frac{32 \cdot 33 \cdot 65}{6} + 6 \cdot \frac{32 \cdot 33}{2} + 9 \cdot 32\right)$

$9\,(11440 + 3168 + 288)$

$9n^2 + 54n + 81$

$9\left(n^2 + 6n + 9\right)$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d) $\sum_{j=13}^{39} 20j$

$20\left(\sum_{j=1}^{39} j - \sum_{j=1}^{12} j\right)$

$39 \cdot 20 - 6 \cdot 13$

$20\,(13 \cdot 60 - 13 \cdot 6)$

$20 \cdot 54 \cdot 13$

$14'040$

e) $\sum_{k=1}^{n}(k+2)^{10} - \sum_{k=1}^{n} k^{10}$

3 $5^{10} - 3^{10}$

2 $4^{10} - 2^{10}$

1 $3^{10} - 1$

0 $2^{10} - 0$

$\sum_{k=3}^{n+2} k^{10} - \sum_{k=1}^{n} k^{10}$

$(n+2)^{10} + (n+1)^{10} - (1 + 2^{10})$

2. Ecrire à l'aide du signe $\sum$ et calculer les sommes:

(a) $3+12+27+48+\cdots+1200$

(b) $1+3^2+3^4+3^6+\cdots+3^{2n}$

(c) $5^3-5^4+5^5-5^6+\cdots-5^{20}$

(d) $5+10+20+40+80+\cdots+5120$

a) $3 \cdot \sum_{k=1}^{20} k^2$

$\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{2} = 8610$

b) $\sum_{k=0}^{n} 3^{2k}$

$\frac{1-3^{2n+2}}{1-3^2} = -\frac{1-3^{2n+2}}{8}$

c) $5^3 \sum_{k=0}^{17} (-5)^k$

$5^3 \cdot \frac{1-(-5)^{18}}{1+5} = \frac{5^3}{6}(1-5^{18})$

d) $\sum_{k=0}^{10} 2^k \cdot 5$

$5\sum_{k=0}^{10} 2^k$

$5 \cdot \frac{1-2^{11}}{1-2} = 10235$

$5120 = 2^x \cdot 5$

$1024 = 2^x$

$x = 10$

3. Rendre (formellement) le dénominateur rationnel:

(a) i. $\dfrac{\sqrt[3]{7}+1}{\sqrt[3]{7}-1}$ ii. $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}$

(b) Simplifier en écrivant sous la racine: $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})$.

a) $\frac{x^3+1^3}{x^3-1^3}$ equivalent idéal

$(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$

$\frac{\sqrt[3]{7}+1}{\sqrt[3]{7}-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1}$

$\frac{7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} + 1}{7-1}$

$\frac{7 + \sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1}{7-1}$

$\frac{8 + 2\sqrt[3]{49} + 2\sqrt[3]{7}}{6} = \frac{4 + \sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7}}{3}$

b) $a^6 - b^6 \Rightarrow$ Goal dégager les racines

$(a^3-b^3)(a^3+b^3) = (a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}{a-\sqrt[3]{b^2}} \cdot \frac{a^2 + a\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{a^2 + a\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{b^4}}$

$\frac{a^2\sqrt{a} + a\sqrt[6]{a^3b^4} + \sqrt[6]{a^3b^2}\,b + a^2\sqrt[3]{b} + ab + \sqrt[3]{b^2}\,b}{a^3-b^2}$

c) $(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{6-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+1}$

$(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1^2-2$

$= -1$

Nique la consigne XD

4. Simplifier :

(a) $\dfrac{(n+2)!}{2\cdot n!}-\sum_{j=0}^{n} j$

(b) $\dfrac{n(n+1)!}{(n+1)(n-1)!} : \dfrac{(n+2)n!}{(n-1)(n+2)!}$

(c) $\dfrac{(n+1)\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}}$

(d) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$

(a) $\frac{(n+2)!}{2\cdot n!} - \sum_{j=0}^{n} j$

(b) $\frac{n(n+1)!}{(n+1)(n-1)!} : \frac{(n+2)n!}{(n-1)(n+2)!}$

(c) $\frac{(n+1)\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}}$

(d) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$

a) $\frac{(n+2)(n+1)\cdot \cancel{n!}}{2\cdot \cancel{n!}} - \frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{(n+2)(n+1) - n(n+1)}{2}$

$\frac{(n+1)(n+2-n)}{2}$

$\underline{n+1}$

b) $\frac{n(n+1)(n)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} : \frac{(n+2)\,n!}{(n-1)(n+2)(n+1)\,n!}$

$n^2(n-1)(n+1) = n^2(n^2-1)$

$\underline{n^4 - n^2}$

c) $\frac{n+1 \quad \frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-k-1)!}} = \frac{(n+1)\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}{\frac{(n+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}} = \frac{(k+1)\cdot \cancel{k!}\cdot \cancel{(n-k)!}}{\cancel{k!}\,\cancel{(n-k)!}} = \underline{k+1}$

d) $\frac{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}}$

$\frac{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!}{k(k-1)!\,(n-k)!}$

$\frac{n-k+1}{k}$

5. (a) Déterminer le coefficient de x^7 dans le développement de $(2x-1)^2(x+2)^8$.

(b) Pour quelle valeur de $k \in \mathbf{N}$ le terme de la forme x^6y^k apparaît dans le développement du binôme $(2x^2-y^3)^{10}$? Calculer pour cette valeur de k le coefficient de x^6y^k.

(c) Calculer la partie entière de $(100.01)^9$.

a) On réécrit le polynôme en le développant + Newton

$(4x^2 - 4x + 1)\cdot \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^k 2^{8-k}$

Pour x^2:

Il faut x^5 donc dans newton on a $\underline{k=5}$

$4x^2 \cdot \binom{8}{5}x^5\cdot 2^3$

$4x^2 \cdot \frac{8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,(3)!}\; x^5\cdot 8$

$4x^2\cdot \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{3\cdot2}}\; x^5\cdot 8$

$4x^2\cdot 56\cdot 8\cdot x^5$

$\underline{32\cdot 56\cdot x^7}$

Pour x:

Il faut x^6 donc dans newton a $k=6$

$-4x\cdot\binom{8}{6}x^6\cdot 2^2$

$-4x\cdot\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,2!}\;x^6\cdot 4$

$-4x\cdot x^6\cdot 4\cdot 4\cdot 7$

$x^7\cdot 16\cdot -28$

Pour x^0 soit 1 il faut un $k=7$

$1\cdot\binom{8}{7}x^7\cdot 2^1$

$\frac{8\cdot\cancel{7!}}{\cancel{7!}\cdot 1!}\;x^7\cdot 2$

$16\cdot x^7$

$x^7(32\cdot 56 + 16\cdot -28 + 16)$

$\underline{1360\,x^7}$

Coefficient de $\underline{1360}$ Oui!!!

b) $(2x^2 - y^3)^{10}$ trouve k pour x^6y^k et son coefficient

$$\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-y^3)^k\cdot(2x^2)^{10-k}$$

$\Updownarrow$

$$\sum^{10}\binom{10}{k}(-1)^k\cdot y^{3k}\cdot 2^{10-k}\cdot x^{2(10-k)}$$

$k=0$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^k \cdot y^{3k} \cdot 2^{10-k} \cdot x^{2(10-k)}$$

$$k \Rightarrow 2(10-k) = 6$$

$$10-k = 3$$

$$10-3 = k$$

$$7 = k$$

⚠ y^{3k} celas le degrés k de $y = 3 \cdot 7 = \underline{\underline{21}}$

$$\binom{10}{7} \cdot (-1)^7 \cdot y^{21} \cdot 2^3 \cdot x^6$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} \cdot -1 \cdot 8 \cdot x^6 y^{21}$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} \cdot -8 \quad x^6 y^{21}$$

$$-960 x^6 y^{21}$$

le coefficient est de -960

c) $(100.01)^9$ Calculer la partie entière

$$(100 + 0.1)^9$$

$$\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (10^2)^k (10^{-1})^{9-k}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=0}^{9} \underbrace{\binom{9}{k} 10^{2k}}_{\text{partie entière}} \cdot \underbrace{10^{k-9}}_{\text{ce qui a après la virgule}}$$

DONC

$$10^{18} + \underbrace{\binom{9}{8} 10^{16} \cdot 10^{-2}} + \dots + \binom{9}{0} 10^{-9}$$

$$10^{18} + \binom{9}{8} 10^{14} + \dots$$

J'ai la flemme

Vous avez capté c'est ce qui compte

Série 08

jeudi, 21 novembre 2024 14:40

1. Soient $a = \log_{10}(2)$ et $b = \log_{10}(3)$. Exprimer les nombres suivants à l'aide de a et b:

(a) $\log_{10}(54)$ (b) $\log_{10}(4.5)$ (c) $\log_{10}(15)$ (d) $\log_{10}(0.075)$

(a) $\log(27) + \log(2)$

$3\log(3) + \log(2)$

$a + 3b$

(b) $\log\left(\frac{9}{2}\right)$

$\log(9) - \log(2)$

$2b - a$

(c) $\log\left(\frac{60}{4}\right)$

$\log(60) - \log(4)$

$\log(3) + \log(2) + \log(10) - \log(4)$

$b + a + 1 - 2a$

$-a + b + 1$

(d) $\log\left(\frac{15}{200}\right)$

$\log\left(\frac{3}{40}\right)$

$\log(3) - (\log(4) + \log(10))$

$b - a - 1$

$-2a + b - 1$

2. Résoudre les équations suivantes:

(a) $2^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(b) $2 + \log_3(2x+1) = 2\log_3(x+5)$

(c) $\log_8(x) + \log_2(x) = 2$

(d) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{\ln(x)}$

(e) $7^{9^x} = 5^{6^x}$

(f) $\sqrt{a^{7-3x}}\sqrt[3]{a^{x+1}}\sqrt[4]{a^{5x-7}}\sqrt[5]{a^{7-2x}} = 1$

(g) $(4/7)^{-3x+1} = (3/5)^{2x-3}$

(h) $\ln(\log_{10}(x)) = \log_{10}(\ln(x))$

(i) $10^{\ln(x)} = e^{\log_{10}(x)}$

(j) $10^{-1+\ln(x)} = e^{1+\log_{10}(x)}$

(k) $\log_3(x) = 2 + \log_3(x+2) - \log_3(x+16)$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \left(= \frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)$$

a) $2^{x-1} = 3^{-x}$

$\ln(2^{x-1}) = \ln(3^{-x})$

$(x-1)\ln(2) = (-x)\ln(3)$

$x\ln(2) - \ln(2) = -x\ln(3)$

$x(\ln(2) + \ln(3)) = \ln(2)$

$x = \frac{\ln(2)}{\ln(6)}$

b) $2 = 2\log_3(x+5) - \log_3(2x+1)$

$2 = \log_3\left(\frac{(x+5)^2}{2x+1}\right) \quad)\, 3^{x}$

$3^2 = \frac{(x+5)^2}{2x+1}$

$18x + 9 = x^2 + 10x + 25$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x-4)^2 = 0$

$S = \{4\}$

c) $\frac{\ln(x)}{\ln(8)} + \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = 2$

$\ln(x)\ln(2) + \ln(x)\ln(8) = 2\ln(2)\ln(8)$

$\ln(x) = \frac{2\ln(2)\ln(8)}{\ln(16)}$

$\ln(x) = \frac{2\ln(2)\,3\ln(2)}{4\ln(2)}$

$\ln(x) = \frac{3\ln(2)}{2}$

$x = 2^{\frac{3}{2}}$

$x = \sqrt{8}$

d) $-\frac{1}{2}\ln(x) = \sqrt{\ln(x)}$

$\frac{1}{4}\ln(x) = \ln(x)$

$4\sqrt{x} = x$

$S = \{1\}$

e) $\ln(7^{9^x}) = \ln(5^{6^x})$

$3^x \ln 9 = 6^x \ln 5$

$\ln(3^x) + \ln(\ln(9)) = \ln(6^x) + \ln(\ln(5))$

$x\ln(3) - x\ln(6) = \ln(\ln(5)) - \ln(\ln(9))$

$x(\ln(3) - \ln(6)) = \ln\left(\frac{\ln(5)}{\ln(9)}\right)$

$x = \frac{\ln\left(\frac{\ln(5)}{\ln(9)}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

f) $\sqrt[60]{a^{210-90x} \cdot a^{20x+20} \cdot a^{15x-105} \cdot a^{84-24x}} = 1$

$\sqrt[60]{a^{-79x+209}} = 1$

$a^{-19x+209} = a^0 \quad)\log_a(x)$

$-19x + 209 = 0$

$x = 11$

g) $(-3x+1)(\ln(4) - \ln(7)) = (2x-3)(\ln(3) - \ln(5))$

$-3x\ln(4) + 3x\ln(7) + \ln(4) - \ln(7) - 2x\ln(3) + 2x\ln(5) + 3\ln(3) - 3\ln(5) = 0$

$x(-3\ln(4) + 3\ln(7) - 2\ln(3) + 2\ln(5)) = -\ln(4) + \ln(7) - 3\ln(3) + 3\ln(5)$

$x\left(3\ln\left(\frac{7}{4}\right) + 2\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \ln\left(\frac{7}{4}\right) + 3\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$x = \frac{\ln\left(\frac{7}{4}\right) + 3\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{3\ln\left(\frac{7}{4}\right) + 2\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

h) $\ln(\log(x)) = \log(\ln(x))$

$\ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right) = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(10)}$

$\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(10)) = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(10)}$

$\ln(\ln(x)) = t$

$t - \ln(\ln(10)) = \frac{t}{\ln(10)}$

$t \cdot \ln(10) - \ln(10) \cdot \ln(\ln(10)) = t$

$t(\ln(10) - 1) = \ln(10) \cdot \ln(\ln(10))$

$t = \frac{\ln(10) \cdot \ln(\ln(10))}{\ln(10) - 1}$

$x = e^{e^{\frac{\ln(10) \cdot \ln\ln(10)}{\ln(10) - 1}}}$

i) $10^{\ln(x)} = e^{\log_{10}(x)} \quad) \cdot \frac{10}{e}$

$\frac{100}{e}^{\ln(x)} = 10^{\log 10(x)} = x$

$\left(\frac{100}{e}\right)^{\ln(x)} = x \qquad a^0 = 1$

$x = 1$

j) $10^{-1+\ln(x)} = e^{1+\log(x)}$

$(-1 + \ln(x))\ln(10) = 1 + \log(x)$

$-\ln(10) + \ln(10)\ln(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

$-\ln(10)^2 + \ln(10)^2\ln(x) - \ln(10) - \ln(x) = 0$

$\ln(x)(\ln(10)^2 - 1) = \ln(10)^2 + \ln(10)$

$\ln(x) = \frac{\ln(10)(\ln(10) + 1)}{(\ln(10) - 1)(\ln(10) + 1)}$

$x = e^{\frac{\ln(10)}{\ln(10) - 1}}$

k) $\log_3(x) = 2 + \log_3(x+2) - \log_3(x+16) \qquad D_f =]0; +\infty[$

$\log_3(x^2 + 16x) = 2 + \log_3(x+2)$

$\log_3\left(\frac{x^2 + 16x}{x+2}\right) = 2$

$\frac{x^2 + 16x}{x+2} = 9$

$x^2 + 16x = 9x + 18$

$x^2 + 7x - 18 = 0$

$(x+9)(x-2) = 0$

3. Résoudre les équations suivantes:

(a) $\log_x(x-2) = \log_{x-2}(x)$

(b) $x^{\ln(x^3)} = \frac{e^5}{x^{14}}$

(c) $\log_5(x-5) - \log_{25}(x+20) = 1 - \log_{25}(2)$

(d) $e^{3x} + 4e^{2x} - e^x = 0$

(e) $\log_x(10) + \log_{10x}(10) + \log_{100x}(10) = 0$

(f) $x^{\log_{10}(x^2) + \log_{10}(x) + 1} = 10^{14}$

a) $\log_x(x-2) = \frac{\log_x(x)}{\log_x(x-2)}$

$\log_x(x-2) = \frac{1}{\log_x(x-2)}$

$(\log_x(x-2))^2 = 1$

$\log_x(x-2) = \pm 1$

$x - 2 = \frac{1}{x}$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

b) $\ln(x^{\ln(x^3)}) = \ln\left(\frac{e^5}{x^{14}}\right)$

$3\ln(x)^2 = 5 - \ln(x^{14}) \qquad \ln(x) = y$

$3y^2 = 5 - 14y$

$3y^2 + 14y - 5 = 0$

$3y^2 + 15y - y - 5 = 0$

$(3y - 1)(y + 5) = 0$

$\ln(x) = \frac{1}{3} \qquad \ln(x) = -5$

$S = \{\sqrt[3]{e}\,;\, \frac{1}{e^5}\}$

c) $\log_5(x-5) - \frac{\log_5(x+20)}{2} = 1 - \frac{\log_5(2)}{2}$

$2\log_5(x-5) - \log_5(x+20) = 2 - \log_5(2)$

$\log_5\left(\frac{(x-5)^2}{x+20}\right) = \log_5\left(\frac{25}{2}\right)$

$\frac{(x-5)^2}{x+20} = \frac{25}{2}$

$2(x-5)^2 = 25x + 500$

$S = \{30\}$

$\log_x(x-2) = \pm 1$

$x-2 = \frac{1}{x}$

$x^2-2x-1=0$

on fait le discriminant

$S=\{1+\sqrt{2}\}$

$(3y-1)(y+5)=0$

$\ln(x)=\frac{1}{3}$ $\quad \ln(x)=-5$

$S=\{\sqrt[3]{e}\,;\,\frac{1}{e^5}\}$

$\log_5\left(\frac{(x-3)^2}{x+20}\right) = \log_5\left(\frac{25}{2}\right)$

$\frac{(x-3)^2}{x+20} = \frac{25}{2}$

$2(x-3)^2 = 25x+500$

$2x^2-20x+50 = 25x+500$

$2x^2-45x-450=0$

$(2x+15)(x-30)=0$

$\{-\frac{15}{2}$ et 30

$S=\{30\}$

d) $\ln(e^{3x}+4e^{2x}) = \ln(e^x)$

$\ln(e^{2x}(e^x+4)) = x$

$2x+\ln(e^x+4) = x$

$x = -\ln(e^x+4)$

$e^x = \frac{1}{e^x+4}$ $\quad e^x=t$

$t^2+4t-1=0$

$\Delta = \dots$ $\quad x_1=-2+\sqrt{5}$

$x_2=-2-\sqrt{5}$ ↯

$S=\{\ln(-2+\sqrt{5})\}$

e) $\frac{\log(10)}{\log(x)} + \frac{\log(10)}{\log(10x)} + \frac{\log(10)}{\log(100x)} = 0$

$\frac{1}{\log(x)} + \frac{1}{\log(10x)} = -\frac{1}{\log(100x)}$

$\frac{1}{\log(x)} + \frac{1}{1+\log(x)} + \frac{1}{2+\log(x)} = 0$ $\quad \log(x)=t$

$\frac{1}{t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t} = 0$

$3t^2+6t+2=0$

$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$

$S=\{10^{\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}}\}$

f) $\log(x^2)+\log(x)+1 = \log_x(10^{14})$

$3\log(x)+1 = \frac{14}{\log(x)}$ $\quad t=\log(x)$

$3\log(x)^2+\log(x) = 14$

$3t^2+t-14=0$

$3t^2-6t+7t-14=0$

$(3t+7)(t-2)=0$

$t_{1,2}=-\frac{7}{3}\,;\,2$

$S=\{\sqrt[3]{10^{-7}}\,;\,100\}$

1. (a) Pour quelles valeurs de a le polynôme $x^3 - a^2x^2 + ax + 7x - 20$ est–il divisible par $x - 2$? Donner pour ces valeurs de a le résultat de la division.
   (b) Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $x^3 + ax^2 + b$ est–il divisible par $x^2 + x - 2$?

a) $\frac{x^3 - a^2x^2 + ax + 7x - 20}{x-2} = 0$ $\quad \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

$P(2) \Rightarrow 2^3 - a^2 2^2 + a2 + 14 - 20 = 0$

$8 - 4a^2 + 2a + 14 - 20 = 0$

$-4a^2 + 2a + 2 = 0$

$2(-2a^2 + a + 1) = 0$

$-2a^2 + a + 1 = 0$

$(2a+1)(-a+1) = 0$

Pour $a = -\frac{1}{2}$ ou 1

Si $a = 1 \Rightarrow R(x) = (x^2 + x + 10)$

Si $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow R(x) = (x^2 - \frac{3}{4}x + 10)$

b) $x^2 + x - 2$

$x^2 + 2x - x - 2$

$(x-1)(x+2)$

$P(1) \Rightarrow +1 + a + b = 0$

$P(-2) \Rightarrow -8 + 4a + b = 0$

$+1 + a + b = -8 + 4a + b$

$+9 = 3a$

$a = +3$

$+1 + 3 + b = 0$

$b = -4$

2. On considère les polynômes suivants:

- $p_1(x) := x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
- $p_2(x) := x^7 - 2x^4 + x$
- $p_3(x) := x^{10} + 2x^9 + x^8 + x^2 + 2x + 1$
- $p_4(x) := 6x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 5x^2 - x - 1.$

Déterminer les zéros de ces polynômes ainsi que leur multiplicité.

1) $x_0 = -2$, $x_{0_2} = 1$, $x_{0_3} = -1$, $x_{0_4} = 3$

$(x+2)(x-1)(x+1)(x-3)$

4 polynôme de multiplicité 1

2) $x_{0_1} = 1$, $x_{0_2} = 0$, $x_{0_3} = -1$

$x(x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

0 = 1 multiplicité

1 = double

3) $(x-1)^2(x^8+1)$

4) $(x+1)(6x^4 + 5x^2 - 1)$

$(x+1)(x - \frac{1}{\sqrt{6}})(x + \frac{1}{\sqrt{6}})$

$(x+1)6(x - \frac{1}{\sqrt{6}})(x + \frac{1}{\sqrt{6}})$

$x^2 = k$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 25 - (6 \cdot 4 \cdot -1)$

$= 49$

$\frac{-5 \pm 7}{12}$

3. On considère les polynômes suivants:

1) $p(x) = x^3 - 7x + 6$
2) $p(x) = x^5 - x$
3) $p(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$
4) $p(x) = x^4 + 9$
5) $p(x) = x^{10} + x^9 - 2x^8 - 2x^7 + x^6 + x^5$
6) $p(x) = x^4 + x^2 + 1.$

(a) Décomposer le polynôme $p(x)$ en un produit de facteurs linéaires et quadratiques
(b) Résoudre l'inéquation $p(x) > 0$.
(c) Esquisser la courbe $y = p(x)$.

1) a) $(x-1)(x-2)(x+3)$

2) $x^5 - x$

On sait déjà que 0

a) $x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

1)

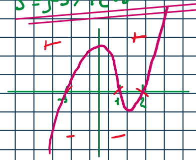
	1	0	-7	6
		1	1	-6
1	1	1	-6	0
		2	6	
2	1	3	0	
		-3		
-3	1	0		

a) $(x-1)(x-2)(x+3)$

b) $-3 \quad 1 \quad 2$; $- \quad + \quad - \quad +$

$S =]-3;1[\cup]2;+\infty[$

c)



2) $x^5 - x$

On sait déjà que 0

$x(x^4-1)$

$x(x^2-1)(x^2+1)$

$x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

a) $x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

b) $-1 \quad 0 \quad 1$; $- \quad + \quad - \quad +$

$S =]-1;0[\cup]1;+\infty[$

c)

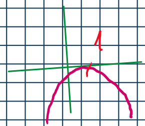
3)

	-1	+4	-6	+4	-1
		-1	3	-3	1
1	-1	3	-3	1	0
		-1	2	-1	
1	-1	2	-1	0	
		-1	1		
1	-1	1	0		
		-1			
1	-1	0			

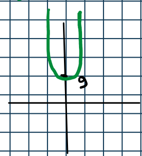
a) $-(x-1)^4$

b) $S = \emptyset$

c)



4) Toujours positif !



$S = \mathbb{R}$

$x^4 + 9$

$x^4 + 6x^2 + 9 - 6x^2$

$(x^2+3)^2 - 6x^2$

$(x^2 - \sqrt{6}x + 3)(x^2 + \sqrt{6}x + 3)$

5) $x^{10} + x^9 - 2x^8 - 2x^7 + x^6 + x^5$

On a déjà 5·0 qui marche car

$x^5(x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1)$

	1	1	-2	-2	1	1
		-1	0	2	0	-1
-1	1	0	-2	0	1	0
		-1	1	1	-1	
-1	1	-1	-1	1	0	
		1	0	-1		
1	1	0	-1	0		

(x^2-1)

$(x-1)(x+1)$

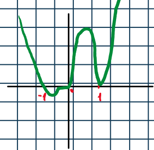
a) $x^5(x+1)(x+1)(x-1)(x-1)(x+1)$

$x^5(x+1)^3(x-1)^2$

b) $-1 \quad 0 \quad 1$; $+ \quad - \quad + \quad +$

$S =]-\infty;-1[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

c)



6) $x^4 + x^2 + 1$

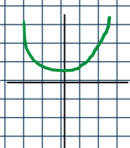
$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$

$(x^2+1)^2 - x^2$

a) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

b) $S = \mathbb{R}$

c)



4. Le polynôme $4x^3 - 3x + c$ a un zéro double. Déterminer c et tous les zéros de ce polynôme.

$4x^3 - 3x + c$

$t(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$(tx^2 - 2t\alpha x + t\alpha^2)(x-\beta)$

$tx^3 - 2t\alpha x^2 + t\alpha^2 x - t\beta x^2 + 2t\alpha\beta x - t\alpha^2\beta$

$4x^3 + 0x^2 + 3x + c$

$$\begin{cases} c = -t\alpha^2\beta \\ t = 4 \\ -2t\alpha - t\beta = 0 \\ t\alpha^2 + 2t\alpha\beta = 3 \end{cases}$$

Série 10

lundi, 6 janvier 2025 10:20

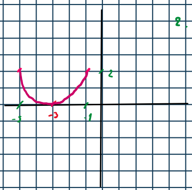
1. Déterminer le graphe ainsi que l'image de f:

(a) $x \mapsto 2-\sqrt{-x^2-6x-5}$ (b) $x \mapsto |x|+|1-2x|-|x-2|$

a) $f(x) = 2-\sqrt{-x^2-6x-5}$

1 Pour $x_1 = -1$ et $x_2 = -5$
$y = 2$ (2 vert haut)

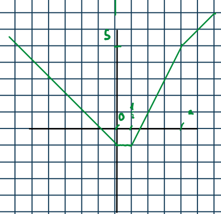
2 Sommet x: entre x_1 et $x_2 = -3$
$y: 2 - \sqrt{4} = 0$



3 $Df = [-5; -1]$
$Im(f) = [0; 2]$

b)

$-x+1-2x+x-2$	$x+1-2x+x-2$	$x-1+2x+x-2$	$x-1+2x-x+2$
$-2x-1$	-1	$4x-3$	$2x+1$



2. Montrer que les fonctions suivantes sont injectives. Calculer ensuite $f^{-1}(x)$.

(a) $f: \quad x \quad \mapsto \quad \sqrt{\ln(x)+1}$ (b) $f: \quad x \quad \mapsto \quad e^{\frac{x+2}{x+1}}$

a) $x \xrightarrow{\ln()} \ln(x) \xrightarrow{+1} \ln(x)+1 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{\ln(x)+1}$

$y = \sqrt{\ln(x)+1}$
$y^2 = \ln(x)+1$
$y^2-1 = \ln(x)$
$e^{y^2-1} = x$

Elle n'est composée uniquement de transformation injective alors elle est injective

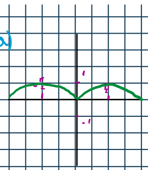
b) $x \xrightarrow{+2} x+2 \xrightarrow{/x+1} \frac{x+2}{x+1} \xrightarrow{e^{\cdot}} e^{\frac{x+2}{x+1}}$

$y = e^{\frac{x+2}{x+1}}$
$\ln(y) = \frac{x+2}{x+1}$
$\ln(y)\cdot(x+1) = x+2$
$\ln(y) + \ln(y)x = x+2$
$\ln(y) - 2 = x - \ln(y)x$
$\frac{\ln(y)-2}{1-\ln(y)} = x$

Etudier la parité des fonctions suivantes:

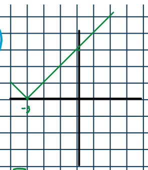
(a) $f_1: \quad x \quad \mapsto \quad \sin(x^2)$
(b) $f_2: \quad x \quad \mapsto \quad |x+3|$
(c) $f_3: \quad x \quad \mapsto \quad x^4+17x^3-\pi x^2+1$
(d) $f_4: \quad x \quad \mapsto \quad \cot(x)-\ln(|x|)\cdot(3x+x^3)$ Impaire
(e) $f_5: \quad x \quad \mapsto \quad \dfrac{x^3+x}{x^4+1}$

a)



Pair

b)



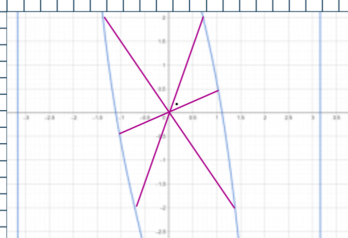
Indeterminé

c) $f(x) = f(-x)$?
$x^4+17x^3-\pi x^2+1 \neq x^4-17x^3-\pi x^2+1$
$-f(x) = f(-x)$
$-x^4-17x^3+\pi x^2-1 \neq$ "

Indeterminé

d) $-f(x) = f(-x)$
$-\cot(x)+\ln(|x|)\cdot(3x+x^3) = -(\cot(x) - \ln(|x|)\cdot(-3x-x^3))$
$\cot(x)+\ln(|x|)(3x+x^3)$

Impaire

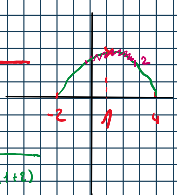


e) $f(x) = f(-x)$?
$\frac{x^3+x}{x^4+1} \neq \frac{-x^3-x}{x^4+1}$
$-f(x) = f(-x)$
$-\frac{x^3+x}{x^4+1} = \frac{-(x^3+x)}{x^4+1}$

Impaire

4. Soit $f: \quad x \mapsto \sqrt{-x^2+2x+8}$. Déterminer $\mathbf{D}(f), \mathbf{Im}(f)$ ainsi que les zéros de f. La fonction $f: \mathbf{D}(f) \to \mathbf{R}$ est–elle injective? Donner le plus grand intervalle $[a,b]$ contenant 2 où $g := f|_{[a,b]}$ est injective. Déterminer g^{-1}. Dessiner les graphes de f et de g^{-1}.

$\sqrt{-x^2+2x+8}$
$\sqrt{-(x^2-2x-8)}$
$\sqrt{-1(x-4)(x+2)}$



$Df = [-2; 4]$
$Imf = [0; 3]$

$\sqrt{-1(1-4)(1+2)}$
$\sqrt{9}$
3

Elle n'est pas injective

$y = \sqrt{-1(x-4)(x+2)}$
$y^2 = -1(x-4)(x+2)$
$-y^2 = x^2-2x-8$
$x^2-2x-8+y^2 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

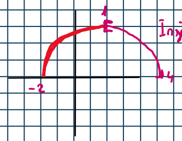
$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{9-y^2}}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{9-y^2}$

$\Delta = b^2-4ac = 0$
$= 4-4\cdot(-8+y^2)$
$4-(-32+4y^2)$
$= 36-4y^2$
$4(9-y^2)$

Injective $[1; 4]$

Elle n'est pas injective

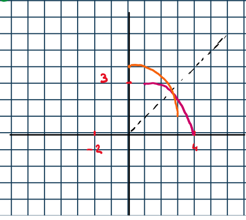


Injective $[1;4]$

$g = f_{[1;4]}$

$x = 1 \pm \sqrt{3 - x^2}$

$g^{-1} : x \to 1 \pm \sqrt{3 + x^2}$ $\quad g^{-1}[0;3] \to [1;4]$



5. Discuter sommairement le graphe des fonctions f suivantes ($\mathbf{D}(f)$, zéros, points d'intersection avec l'axe des y, asymptotes, extréma locaux). Déterminer $\mathbf{Im}(f)$.

(a) $f: \quad x \quad \mapsto \quad \dfrac{\lvert x\rvert + 1}{\lvert x\rvert - 2}$ $\quad \frac{1001}{998}$	(e) $f: \quad x \quad \mapsto \quad x^2 + \lvert 2x - 1\rvert$
(b) $f: \quad x \quad \mapsto \quad \dfrac{x}{\lvert x\rvert - 3}$	(f) $f: \quad x \quad \mapsto \quad \ln(\lvert x\rvert + 1)$
(c) $f: \quad x \quad \mapsto \quad \lvert x^2 - 4x\rvert$	(g) $f: \quad x \quad \mapsto \quad \lvert e^{-x+1} - 2\rvert$
(d) $f: \quad x \quad \mapsto \quad \lvert x\rvert - x^2$	(h) $f: \quad x \quad \mapsto \quad 3\sin(2x - 2)$

a) $Df : \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

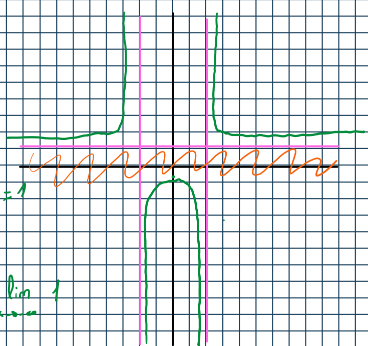
Pas de zéro

$f(0) \to -\frac{1}{2}$

$\dfrac{\cancel{x}(1 + \frac{1}{x})}{\cancel{x}(1 - \frac{2}{x})} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} 1$ et $\lim_{x \to -\infty} 1$

$\lim_{x \to \pm 2} \pm\infty$



$Imf :]-\infty ; -1/2] \cup]1 ; +\infty[$

b) $Df = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$

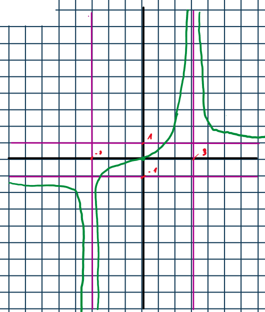
zéros $(0;0)$

$\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1 - \frac{3}{x})} = 1$ $\qquad \dfrac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(1 + \frac{3}{x})} = -1$

$\lim_{x \to +\infty} 1$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} -1$

$\lim_{x \to \pm 3} \pm\infty$

$Im f : \mathbb{R}$



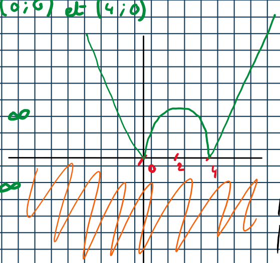
c) $|x^2 - 4x|$

$Df : \mathbb{R}$

$x^2 - 4x = 0$
$x(x-4)$ } zéros en $(0;0)$ et $(4;0)$

$\lim_{x \to \infty} |x^2(1 - \frac{4}{x})| \to \lim_{x \to \infty} \infty$

$\lim_{x \to -\infty} |x^2(1 - \frac{4}{-x})| \to \lim_{x \to \infty} \infty$



$Imf : [0 ; \infty[$

d) $|x| - x^2$

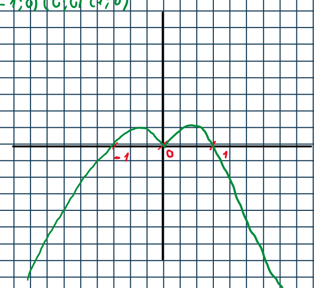
$Df : \mathbb{R}$

$-x - x^2$	$x - x^2$
$-x(1+x)$	$x(1-x)$
$(0;0)$	$(0;0)$
$(-1;0)$	$(1;0)$

3 zéros $(-1;0)$ $(0;0)$ $(1;0)$

$\lim_{x \to \infty} x^2(-1 + \frac{1}{x}) \to \lim_{x \to \infty} -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2(-1 + \frac{1}{x}) \to \lim_{x \to \infty} -\infty$



Pour Imf

$f(0.5) \to 0.5 - 0.25 = 0.25$

$Imf :]-\infty ; 0.25]$

e) $x^2 + |2x - 1|$

$Df : \mathbb{R}$

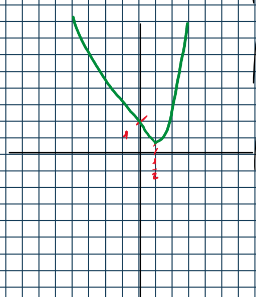
$x^2 - 2x + 1 = 0$ $\qquad x^2 + 2x - 1 = 0$ $\varnothing$
$(x-1)^2 = 0$
$\varnothing$

zéros : Aucun

$f(0) \to 1$ $\qquad f(\frac{1}{2}) \to \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to \infty} x^2(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) \to \lim_{x \to \infty} \infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) \to \lim_{x \to \infty} \infty$



$Im f : [\frac{1}{4} ; +\infty[$

f) $\ln(|x| + 1)$

$Df : \mathbb{R}$

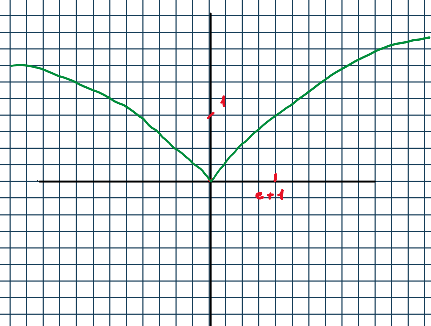
$\ln(|x|+1) = 0$
$|x| + 1 = 1$
$x = 0$

1 zéro en $(0;0)$

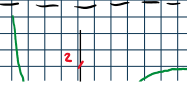
$\lim_{x \to \infty} \ln(x + 1) \to \lim_{x \to \infty} \infty$

$\lim_{x \to -\infty} \ln(-x + 1) \to \lim_{x \to \infty} \infty$

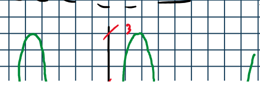
$Im f : [0 ; \infty[$



g) $|e^{-x+1} - 2|$



h) $3\sin(2x - 2)$



$x \to -\infty$ $x \to -\infty$

g) $|e^{-x+1} - 2|$

DF : $\mathbb{R}$

$e^{-x+1} - 2 = 0$

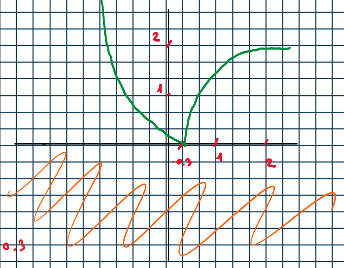
$e^{-x+1} = 2$

$\ln(e^{-x+1}) = \ln(2)$

$-x = \ln(2) - 1$

$x = -\ln(2) + 1$

$\sim 0{,}3$



1 zéro en $(-\ln(2)+1 \,;\, 0)$

$\frac{1}{\infty}$

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x+1} - 2 \rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x-1}} \rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} |0 - 2| \rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} |e^{x+1} - 2| \longrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \infty$ car (e^{∞})

Im f : $[0 \,;\, \infty[$

h) $3\sin(2x-2)$

DF : $\mathbb{R}$

IM f : $[-3 \,;\, 3]$

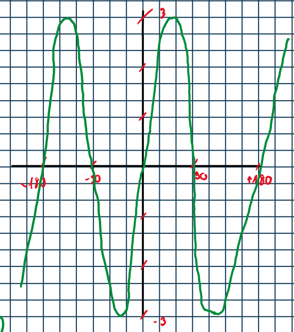
zéros $[0 \,;\, 360[$

$\sin(2x-2) = 0$

$2x-2 = 0$

$2x-2 = \pm 180$

3 zéros $(1 \,;\, 0)$; $(91 \,;\, 0)$; $(-89 \,;\, 0)$



Série 11

mercredi, 15 janvier 2025 15:54

1. Déterminer l'équation de la parabole qui passe par les points A, B, C.

   (a) $A = (-4, 8)$, $B = (0, 0)$, $C = (10, 15)$

   (b) $A = (-3, 2)$, $B = (-1, -1)$, $C = (1, -4)$

   Esquisser la situation

a) $ax^2 + bx + c$

$16a + -4b + c = 8$

$0a + 0b + c = 0$ $\}$ $c = 0$

$100a + 10b + c = 15$

$16a - 4b = 8$

$100a + 10b = 15$

$a = \frac{4b+8}{16} = \frac{b+2}{4}$

$a \to 100\,\frac{b+2}{4} + 10b = 15$

$20\,\frac{b+2}{4} + 2b = 3$

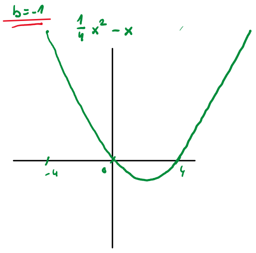
$7b + 10 = 3$

$7b = -7$

$b = -1$

$a = \frac{-1+2}{4} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}x^2 - x$



b) $ax^2 + bx + c$

$9a - 3b + c = 2$

$a - b + c = -1$

$-a - b - c = +4$

$-2b = 3$

$b = -\frac{3}{2}$

$9a + \frac{9}{2} + c = 2$

$a + \frac{3}{2} + c = -1$

$8a + \frac{6}{2} = 3$

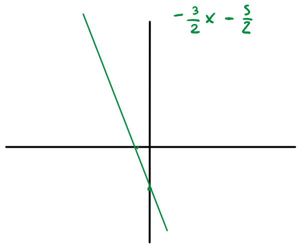
$16a + 6 = 6$

$16a = 0$

$a = 0$

$c = -\frac{5}{2}$

$-\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$



$-\frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$

$-3x = 5$

$x = \frac{-3}{5}$

2. Soient f paire, g impaire et h une fonction ni paire ni impaire. Les fonctions

$$a := h \circ f \circ g, \qquad b : x \mapsto \frac{h(x) + h(-x)}{h(x) - h(-x)}$$

sont–elles paires ou impaires?

a) $x \to h(f(g(x)))$

g Impaire

$-g(x) = g(-x)$

$f \circ g$

$f(g(-x)) = \cancel{f(-g(x))}$

f est paire ducoup

$f(g(x))$

$a_x \to h(f(g(x)))$

$a_{-x} \to h(f(g(-x)))$

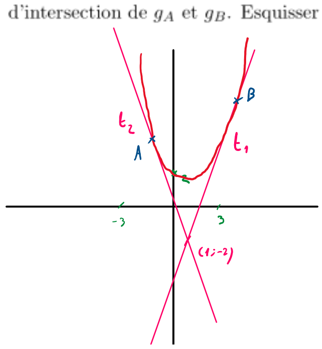
$x \to \underbrace{\frac{h(x) + h(-x)}{h(x) - h(-x)}}_{}$ $b(x)$ $\neq$ $b(-x)$ $\frac{h(-x) + h(x)}{h(-x) - h(x)}$

Pas paire

$-b(x)$ $\quad b(-x)$

$-\frac{h(x) + h(-x)}{h(x) - h(-x)} = \frac{h(-x) + h(x)}{h(-x) - h(x)}$

3. Déterminer l'équation des tangentes t et t' à la parabole d'équation $y = x^2 - x + 2$ passant par le point $(1, -2)$. Déterminer les points A et B, où t et t' sont tangentes à la parabole. Soient g_A resp. g_B les droites normales à la parabole passant par A resp. B. Calculer le point d'intersection de g_A et g_B. Esquisser la situation



$\begin{cases} ax + b = x^2 - x + 2 \\ a + b = -2 \end{cases}$

$a = -2 - b$

$x(-2-b) + b = x^2 - x + 2$

$-2x - bx + b = x^2 - x + 2$

$x^2 - x + 2 + 2x + bx - b = 0$

$x^2 + x + 2 + bx - b$

$\underset{a}{1}x^2 + x\underset{b}{(1+b)} + \underset{c}{2-b}$

$\Delta = (1+b)^2 - 4(2-b) = 0$ car 1 solution

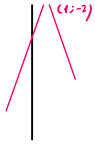
$1 + 2b + b^2 - 8 + 4b = 0$

$b^2 + 6b - 7 = 0$

$(b+7)(b-1) = 0$

$b_1 = -7 \quad a_1 = -2 + 7 = 5$

$b_2 = 1 \quad a_2 = -2 - 1 = -3$



$x - x + 2 + 2x + \ 7x - b = 0$

$x^2 + x + 2 + bx - b$

$\underbrace{1}_{a} x^2 + x\underbrace{(1 + b)}_{b} + \underbrace{2 - b}_{c}$

$(b+7)(b-1) = 0$

$b_1 = -7 \quad a_1 = -2 + 7 = 5$

$b_2 = 1 \quad a_2 = -2 - 1 = -3$

$t_2 = 5x - 7$

$t_1 = -3x + 1$

B => $\underline{\underline{x}}$

$5x - 7 = x^2 - x + 2$

$0 = x^2 - 6x + 9$

$0 = (x-3)^2$

$y = 5 \cdot 3 - 7 = 8$

$[3;8]$

A => $\underline{\underline{x}}$

$-3x + 1 = x^2 - x + 2$

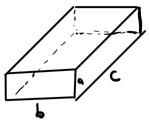
$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$-3 \cdot -1 + 1 = 5$

$[-1;5]$

4. La somme des longueurs des douze arêtes d'un parallélépipède rectangle vaut 84 cm. Une arête est quatre fois plus longue qu'une autre. Quelles sont les longueurs des arêtes si la surface du parallélépipède doit être maximale? Quelle est la valeur de l'aire maximale?



$4 \cdot a + 4 \cdot b + 4 \cdot c = 84$

$\underline{\underline{a = 4b}}$

$2ab + 2ac + 2bc = \text{Max}$

$20b + 4c = 84$

$5b + c = 21$

$\underline{\underline{c = 21 - 5b}}$

On met dans la formule de l'aire totale

$2 \cdot 4b \cdot b + 2 \cdot 4b \cdot (21 - 5b) + 2 \cdot b \cdot (21 - 5b)$

$8b^2 + 168b - 40b^2 + 42b - 10b^2$

$-42b^2 + 210b$

sommet $S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

$x = \frac{210}{84} = \frac{70}{28} = \frac{10}{4} = \underline{\underline{2.5}}$

$y = \frac{-(b^2 - \cancel{4ac})}{4a}$ $c=0$ $= \frac{210^2}{4 \cdot 42} = \underline{\underline{262.5}}$

L'aire max est de $262.5\,\text{cm}^2$ pour un côté $a = 10$, $b = 2.5$, $c = 8.5$

5. Dessiner sommairement le graphe de f. Déterminer $\mathbf{D}(f)$, $\mathbf{Im}(f)$, les zéros de f et l'intersection avec l'axe des y.

(a) $f: \quad x \mapsto |x+1|^3 - 8$

(b) $f: \quad x \mapsto |1 - \sqrt{|x+1|}|$

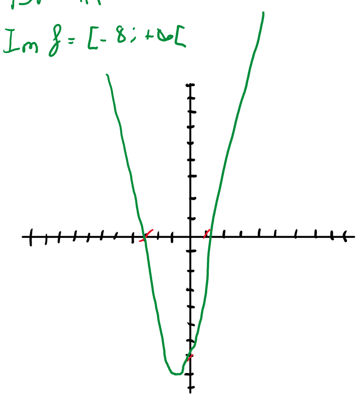
(c) $f: \quad x \mapsto \sqrt{1 - |x|}$

(d) $f: \quad x \mapsto 2 - \sqrt[4]{|x| - 1}$

a) $f = |x+1|^3 - 8$

$Df = \mathbb{R}$

$Im f = [-8; +\infty[$



$f(0) \to -7$

$f(x) \to 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$

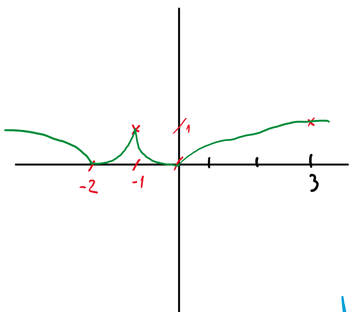
b) $f = |1 - \sqrt{|x+1|}|$

$Df = \mathbb{R}$

$Im f = \mathbb{R}^+$

$f(x) = 0$

$x = 0$



-1

$|1 - \sqrt{-x-1}|$ $\quad$ $|1 - \sqrt{x+1}|$

-2		0	
$-1 + \sqrt{-x-1}$	$1 - \sqrt{-x-1}$	$1 - \sqrt{x+1}$	$-1 + \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

d) $f(x) = 2 - \sqrt[4]{|x| - 1}$

$D f = \mathbb{R} \setminus]-1; 1[$

$Im f = [2; -\infty[$

	0	
$2 - \sqrt[4]{-x-1}$		$2 - \sqrt[4]{x-1}$

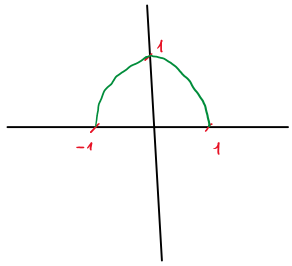
0

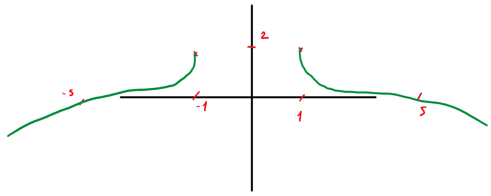
$\sqrt{1+x}$ | $\sqrt{1-x}$

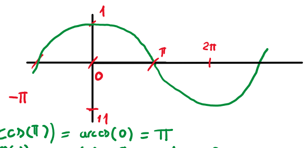
DF : $[-1;0]$ | DF: $[0;1]$

DF $[-1;1]$

Im f $[0;1]$







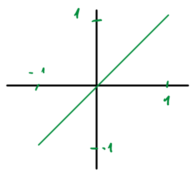
6. Déterminer $\mathbf{D}(f)$, $\mathbf{Im}(f)$ et dessiner le graphe de f.

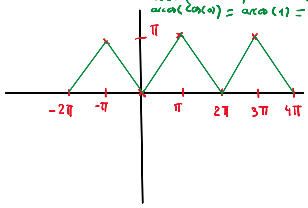
(a) $f: \quad x \mapsto \cos(\arccos(x)) = x$

(b) $f: \quad x \mapsto \arccos(\cos(x))$

$\arccos(\cos(\pi)) = \arccos(0) = \pi$

$\arccos(\cos(0)) = \arccos(1) = 0$ pareil pour 2π





Df et Im f = $[-1;1]$

DF = $\mathbb{R}$

Im f = $[0;\pi]$

Série 12

jeudi, 16 janvier 2025 17:28

Récap

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \infty & \text{si } n>m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n<m \end{cases}$$

1. Calculer:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{16}+3x^6-19}{10x^{20}-5x^4+3x+7}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^2-1}{16x^3+17x+3}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5-5x^3+9}{7x^5+x^2+1}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x(x+1)}}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{x}}$

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x-3^{x-2}}{5+3^x}$

a) $m>n$ $\lim_{x\to\infty} 0$

b) $n>m$ $\lim_{x\to\infty} \infty$

c) $n=m$ $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{7}$

d) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2}{x^2+x}}$ $n=m$ $\lim_{x\to\infty} 2$ $(\sqrt{4})$

e) $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{\sqrt{x}\left(\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x-1)^3}\right)}$ $\frac{\cancel{x^3}+3x^2 \ldots - \cancel{x^3} + 3x^2 \ldots}{x^{\frac{1}{2}}\underbrace{\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)}_{2x^2}} \Rightarrow \frac{6}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 3$

f) $\frac{3^x\left(1-\frac{1}{3^2}\right)}{3^x\left(1+\frac{5}{3^x}\right)} = \frac{8}{9}$

2. Discuter sommairement les fonctions suivantes ($\mathbf{D}(f)$, zéros, intersection du graphe avec l'axe des y, signe de f, asymptotes, graphe de f):

(a) $f: x\mapsto \frac{x^2-3x}{x+1}$ (b) $f: x\mapsto \frac{-x^3+9x+8}{x^2+2x-3}$ (c) $f: x\mapsto \frac{x^4-x^2-6x}{4x^2-4}$

a) $\frac{x^2-3x}{x+1}$ $\frac{x(x-3)}{x+1}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$x^2-3x : x+1 = x-4$ $q(x)$; $-x^2-x$; $-4x$; $+4x+4$; 4 $r(x)$

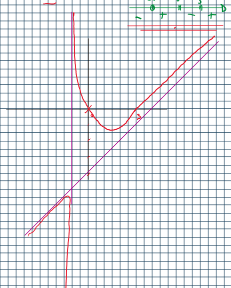
$f = x-4+\frac{4}{x+1}$

zéros: $x^2-3x=0$, $x(x-3)$, $\{0;3\}$

axe y: $f(0)=0$

asymptotes: a.O en $x-4$; a.v en -1

signes: $-\quad -1 \quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$



b) $\frac{-x^3+9x+8}{x^2+2x-3}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$

	-1	0	9	8
-1		1	-1	-8
	-1	1	8	0

$\frac{(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)}{(x+3)(x-1)}$

$-x^3+9x+8 : x^2+2x-3 = -x+2$; $+x^3+2x^2-3x$; $2x^2+6x+8$; $-2x^2-4x+6$; $10x+14$

$-x^2+x+8$; $\Delta = 1+32 = 33$; $\frac{-1\pm\sqrt{33}}{-2}$

$\frac{1\pm\sqrt{33}}{2} = 3.37$; -2.37

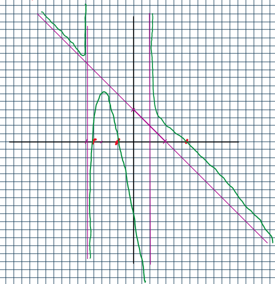
$f = -x+2+\frac{10x+14}{x^2+2x-3}$

zéros: $\frac{1\pm\sqrt{33}}{2}$, -1

axe y: $f(0)=-\frac{8}{3}$

asymptotes: a.O: $-x+2$; a.v: -3 et 1

signes: $+\ -3\ -\ \frac{1-\sqrt{33}}{2}\ +\ -1\ -\ 1\ +\ \frac{1+\sqrt{33}}{2}\ -$



c) $\frac{x^4-x^2-6x}{4x^2-4}$

	1	0	-1	-6
2		2	4	6
	1	2	3	0

$D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

$\frac{x(x-2)(x^2+2x+3)}{4(x-1)(x+1)}$

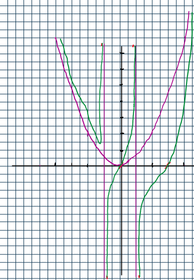
$x^4-x^2-6x : 4x^2-4 = \frac{1}{4}x^2$; $-x^4+x^2$; $-6x$

$f = \frac{1}{4}x^2+\frac{-6x}{4x^2-4}$

zéros: $\{0;2\}$

asymptotes: a.v en ± 1; a.parabolique: $\frac{1}{4}x^2$

signes: $+\ -1\ -\ 0\ +\ 1\ -\ 2\ +$



3. Déterminer, lorsqu'elles existent, les asymptotes obliques (pour $x\to\infty$ et $x\to-\infty$) des fonctions suivantes:

(a) $x\mapsto\sqrt{x^2+7x+1}$ (b) $x\mapsto\sqrt[3]{x^3+x^2}$ (c) $x\mapsto\frac{1-2x^3}{x^2+x^{3/2}}$

Rappel

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=b$$

a) $+\infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+7x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+7x+1}{x^2}} = 1$ $n=m$ $\Big\}\, a$

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+7x+1}-x\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+7x+1}+x}{\sqrt{x^2+7x+1}+x}\right)$

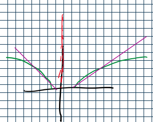
$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+7x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+7x+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(7+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{7}{2}$ a.O $x+\frac{7}{2}$ $\Big\}\, b$

C'est une fonction qui a une symétrie axiale, y=axe en 0

alors son a.O pour $x\to-\infty$ est l'inverse de $x\to\infty$

$\lim_{x\to-\infty} -x-\frac{7}{2}$



b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1$ $\Big\}\, a$

$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\left(\frac{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}\right)$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}+x^2-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{x^6+2x^5+x^4}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x^2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ldots}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}$ $\Big\}\, b$

A.O $x+\frac{1}{3}$

C'est le même pour $-\infty$ car on a une symétrie centrale au O unique de cette fonction. C'est une fonction impaire en plus.

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{(1-2x^3)x}{x^2+\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(-\frac{2}{x}+1\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)} = \infty$

Pas d'asymptote Oblique

4. Déterminer la fonction rationnelle de la forme $f: x\mapsto\frac{p(x)}{q(x)}$ telle que:

(a) $\deg p = 3$, $\deg q = 2$

(b) f possède un pôle double au point $x=2$

(c) f a l'asymptote oblique d'équation $y=\frac{1}{2}x+1$

(d) $(-2,0)$ et $(3,5)$ appartiennent au graphe de f.

deg p < deg q

a) x^3 c) 1 $ax+b$

f as d'asymptote oblique

4. Déterminer la fonction rationnelle de la forme $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ telle que:

(a) $\deg p = 3$, $\deg q = 2$

(b) f possède un pôle double au point $x = 2$

(c) f a l'asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$

(d) $(-2, 0)$ et $(0, 3)$ appartiennent au graphe de f.

deg p < deg q

a) $\frac{x^3}{x^2}$

b) $\frac{x^3}{(x-2)^2}$

c) $\frac{1}{2}x + 1 + \frac{ax+b}{(x-2)^2}$

d) $\frac{1}{2}x + 1 + \frac{4(x+2)}{(x-2)^2}$

$4x+8$

$b = 8$ car $1 + \frac{b}{(-2)^2} = 3$

$b = 2 \cdot 4$

$a = 4$ car $0 + \frac{(a \cdot -2) + 8}{16} = 0$

$\frac{(x-2)^2 x + 2(x-2)^2 + 8(x+2)}{2(x-2)^2}$

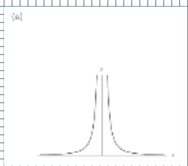
$\frac{(x-2)^2(x+2) + 8(x+2)}{2(x-2)^2}$

$\frac{(8 + (x-2)^2)(x+2)}{2(x-2)^2}$

$\frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+12)(x+2)}{(x-2)^2}$

5. Donner une fonction rationnelle dont le graphe corresponde à peu près à la figure suivante:

(a)



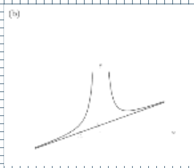
a.V en 0

fonction paire

Strictement positive

$\frac{1}{x^2}$

(b)



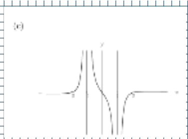
A.O $x+1$

A.V 0

Si on ignore A.O on a la même f que la a)

$x + 1 + \frac{1}{x^2}$

(c)



dénominateur

2 A.V en ± 1

1 a.H en 0

3 zéros en $\underbrace{\pm 2 \text{ et } 0}_{\text{numérateur}}$

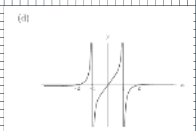
notre fonction est composée de 5 polynôme différents.

$(x+1)$	$(x-1)$	$(x+2)$	$(x-2)$	x
paire	paire	impaire	impaire	impaire

Change de signe

$\frac{x(x^2-4)}{(x^2-1)^2}$

(d)

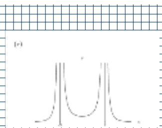


Le numerateur reste le même que l'exercice précédent

$\frac{x(x^2-4)}{x^4-1}$

Le denominateur perd sa parité est doit garder le même degrés alors $x^4 - 1$

(e)



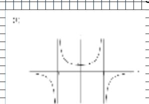
A.V en ± 1 ← polynome paire

A.H en 0

Pas de numerateur car pas de 0

$\frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{1}{(x^2-1)^2}$

(f)



A.V en ± 1 ← polynôme impaire

A.H en 0

Pas de numerateur car pas de 0

$-\frac{1}{(x^2-1)}$

car $f(0) \to 1$ hors si c'est positif ca fait -1

6. Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

(a) $\lim_{x \to -3} \frac{x^3+27}{x^4-81}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{2-x}}{x}$

(c) $\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x \to +\infty} (\ln(1+x) - \ln(3+2x))$

a) $\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x^2+9)(x-3)(x+3)}$

$x = -3$

$\frac{9+9+9}{18 \cdot -6} = -\frac{27}{108} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

b) $\frac{\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{2-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{2-x}}{\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{2-x}}$

c)