# Modélisation Mathématique - Série 7

## Equations différentielles: généralités, équation exponentielle

1. (a) Pour chacune des équations suivantes, vérifier que la fonction $y(t)$ donnée est une solution.

| | | |
|---|---|---|
| (i) | $y' + 2y = 2e^t$ | $y(t) = \frac{2}{3}e^t + e^{-2t}$ |
| (ii) | $ty' = y + t^2\sin(t)$ | $y(t) = -t\cos(t) - t$ |
| (iii) | $y' = -e^{-at}(a\cos(t) + \sin(t))$ | $y(t) = e^{-at}\cos(t)$ |

i) $y'(t) = \frac{2}{3}e^t - 2e^{-2t}$

$2e^t - 2y(t) = 2e^t - 2\left(\frac{2}{3}e^t + e^{-2t}\right) = \frac{2}{3}e^t - 2e^{-2t}$ ✓

ii) $y'(t) = -\cos(t) + t\sin(t) - 1$

$y(t) + t^2\sin(t) = -t\cos(t) - t + t^2\sin(t) = t(-\cos(t) - 1 + t\sin(t))$

$= t\,y'(t)$

iii) $y'(t) = -ae^{-at}\cos(t) - \sin(t)e^{-at} = -e^{-at}(a\cos(t) + \sin(t))$

(b) Soit l'équation différentielle

$$y' = -y^2.$$

(i) A priori (c'est-à-dire sans effectuer de calcul, juste en interprétant l'équation différentielle), quelles propriétés doivent être satisfaites par toute solution $y$ de cette équation ?

(ii) Vérifier que tous les membres de la famille de fonctions

$$y = \frac{1}{t+C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

sont des solutions de l'équation différentielle.

i) → la valeur de la pente ne dépend que de $y(t)$, pas de $t$.

→ $-y^2 \leq 0 \ \forall y$ ⇒ toutes les solutions doivent être décroissantent

ii) $y' = ((t+c)^{-1})' = -(t+c)^{-2} = -\frac{1}{(t+c)^2} = -y^2$ ✓

(iii) Donner une solution de l'équation différentielle qui ne fait **pas** partie de la famille de fonctions décrite en (ii).

(iv) Donner une solution de l'équation différentielle telle que $y(0) = \frac{1}{2}$.

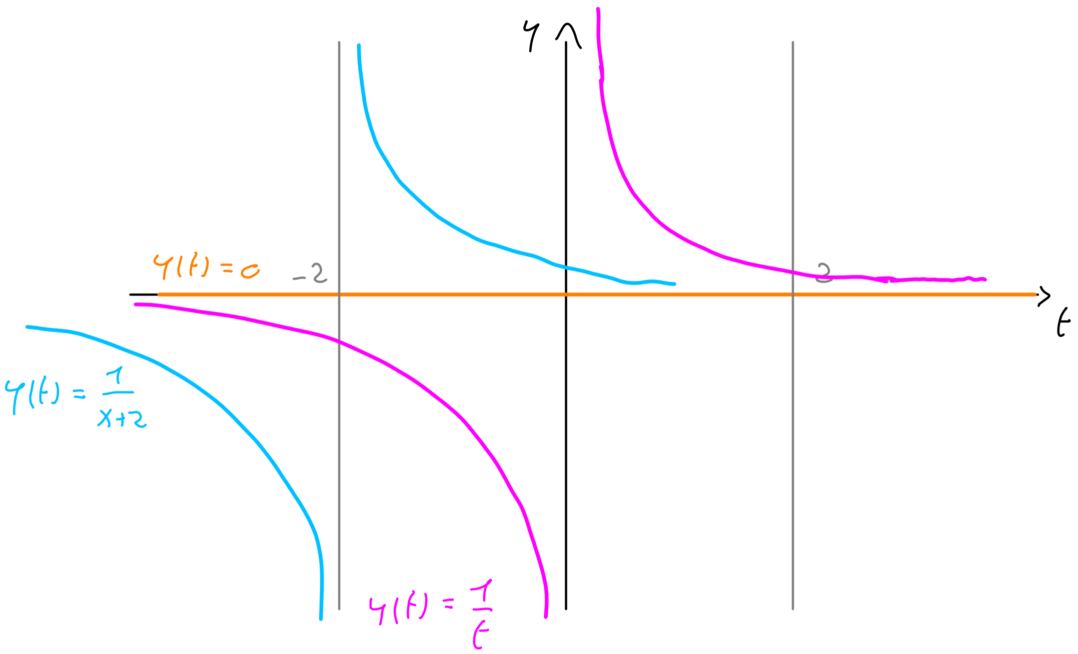
(v) Représenter quelques fonctions de la famille décrite en (ii), ainsi que les fonctions trouvées en (iii) et (iv), sur un même système d'axes.

iii) Solution constante : $y' = 0 \Rightarrow -y^2 = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

iv) $y(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow y(0) = \frac{1}{0+C} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$

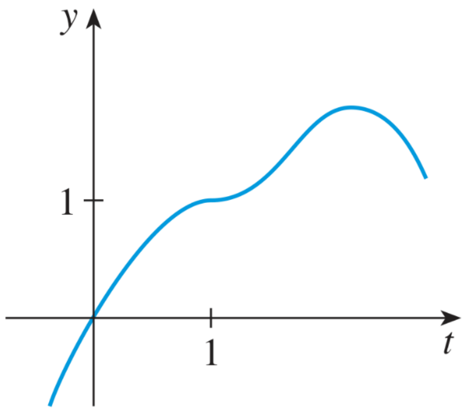
$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{t+2}$

V)

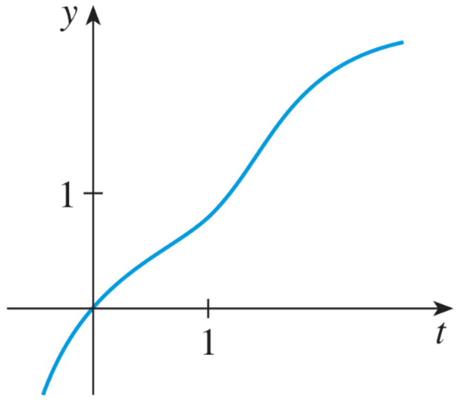


2. (a) Pour chacune des fonctions suivantes, expliquer pourquoi elle ne peut **pas** être solution de l'équation différentielle

$$y' = e^t (y-1)^2.$$




(i)




(ii)

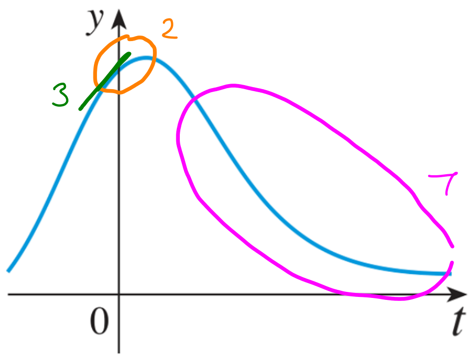
---

i) $e^t \geq 0 \quad \forall t$

$(y-1)^2 \geq 0 \quad \forall y \quad \Rightarrow y'(t) \geq 0 \quad \forall y, t$ mais le graphe est décroissant à certains endroits ↯

ii) Lorsque $y(t) = 1$ on a $y'(t) = 0$ mais en $y(t) = 1$ la pente n'est pas zéro.

(b) Soit la fonction $y$ dont le graphe est donné par




Pour chacune des équations différentielles suivantes, dire si la fonction $y$ est solution de l'équation ou non, et justifier votre choix:

(i) $y' = 1 + ty$

(ii) $y' = -2ty$

(iii) $y' = 1 - 2ty$

i) $t > 0,\ y > 0 \Rightarrow y' > 0$ ↯ (1)

ii) $t > 0,\ y > 0 \Rightarrow y' < 0$ ↯ (2)

où $t = 0 \Rightarrow y' = 0$ ↯ (3)

iii) Plausible car :

1) $t < 0,\ y > 0 \Rightarrow y' > 0$ ✓

2) $t = 0 \Rightarrow y' > 0$ ✓

3) $t > 0,\ y > 0$ et $t \cdot y > \frac{1}{2} \Rightarrow y' < 0$ ✓

3. Les équations différentielles peuvent être utilisées pour modéliser la métabolisation d'un médicament administré par voie orale. Dans cet exercice, on s'intéresse à trois d'entre elles.
Dans ce qui suit, on désigne par $c = c(t)$ la concentration du médicament dans l'organisme au temps $t$ (exprimée en mg/mL). Les équations s'intéressent à de faibles concentrations initiales, typiquement $c(0) = 0$, puis décrivent comment la concentration augmente juste après l'ingestion du médicament.

   (a) L'*équation cinétique d'ordre zéro* dit que la dynamique du processus est décrite par

$$\frac{dc}{dt} = k,$$

   où $k \geq 0$ est une constante.

   (i) Qu'est-ce que cette équation dit du processus ?
   (ii) Donner la solution de cette équation qui satisfait la condition $c(0) = 0$.

i) La vitesse du processus est constante : à chaque instant, la même quantité $k$ est ajoutée à la concetration.

ii) $C' = k \Rightarrow C(t) = k \cdot t + d \quad c(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow C(t) = kt$

Solution constante : $C'(t) = 0 \Rightarrow k = 0$

   (b) L'*équation de Noyes-Whitney* dit que la dynamique du processus est décrite par

$$\frac{dc}{dt} = k(C_s - c),$$

   où $k, C_s \geq 0$ sont des constantes.

   (i) Qu'est-ce que cette équation dit du processus ?
   (ii) Vérifier que $c = C_s(1 - e^{-kt})$ est une solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale $c(0) = 0$.

i) L'augmentation de la concetration est proportionelle à $(C_s - c)$
$C_s$ est un seuil :
$C = C_s \Rightarrow C' = 0, \quad C > C_s \Rightarrow C' < 0$ conc. ↓, $C < C_s \Rightarrow C' > 0$ conc. ↑

ii) $c(t) = C_s(1 - e^{-kt}) \Rightarrow c'(t) = C_s \cdot k \cdot e^{-kt}$

$k(C_s - C_s(1 - e^{-kt})) = k C_s e^{-kt}$ ✓

$c(0) = C_s(1 - e^0) = 0$ ✓

(c) L'*équation de Weibull* dit que la dynamique du processus est décrite par

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k}{t^b}(C_s - c),$$

où $k, C_s, b \geq 0$ sont des constantes, et $b < 1$ (on remarque que cette équation n'est pas définie pour $t = 0$).

(i) Qu'est-ce que cette équation dit du processus ?

(ii) Vérifier que pour $\alpha = \dfrac{k}{1-b}$, la fonction $c = C_s(1 - e^{-\alpha t^{1-b}})$ est une solution de l'équation différentielle pour $t > 0$.

i) La variation est proportionelle à $(C_s - c)$ et inversémet proportionelle à $t^b$ ($t$ augmete $\to$ $c'$ diminue).

ii) $c(t) = C_s(1 - e^{-\alpha t^{1-b}})$

$c'(t) = C_s(-e^{-\alpha t^{1-b}}) \cdot (-\alpha t^{1-b})' = C_s \alpha (1-b) t^{-b} e^{-\alpha t^{1-b}}$

$\alpha = \dfrac{k}{1-b} \Rightarrow c'(t) = C_s \dfrac{k}{\cancel{1-b}} \cdot (\cancel{1-b}) t^{-b} e^{-\alpha t^{1-b}} = \dfrac{C_s k}{t^b} e^{-\alpha t^{1-b}}$

$\dfrac{k}{t^b}(C_s - c) = \dfrac{k}{t^b}(C_s - C_s + C_s e^{-\alpha t^{1-b}}) = \dfrac{C_s k}{t^b} e^{-\alpha t^{1-b}}$ ✓

# Modélisation Mathématique - Série 8

## Equations différentielles: généralités, équation logistique

1. (a) Soit l'équation différentielle

$$y' = ty^3.$$

(i) Que pouvez-vous dire du graphe d'une solution de l'équation différentielle quand $t \approx 0$ ? Et quand $t \to +\infty$ ?

(ii) Vérifier que tous les membres de la famille de fonctions

$$y = \frac{1}{\sqrt{C - t^2}}, \quad C \in \mathbb{R}_+^*,$$

sont des solutions de l'équation différentielle.

(iii) Donner une solution de l'équation différentielle qui ne fait pas partie de la famille de fonctions décrite en (ii).

(iv) Donner une solution de l'équation différentielle telle que $y(0) = 2$.

(v) Représenter quelques fonctions de la famille décrite en (ii), ainsi que les fonctions trouvées en (iii) et (iv), sur un même système d'axes.

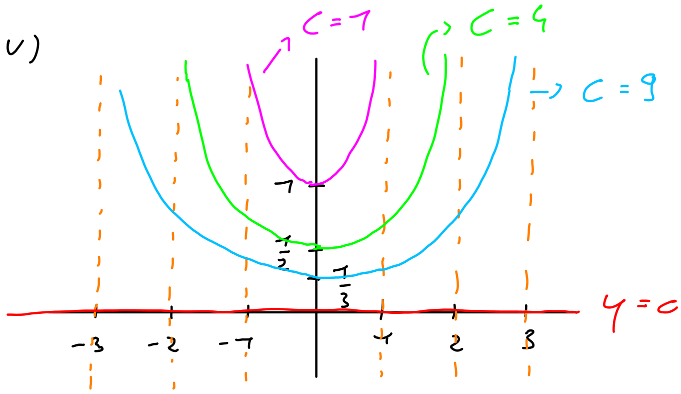
i) Si $t \approx 0$, alors $y' = 0$. Donc pour tout $y$, la pente sera 0 autour de $t = 0$.
Si $t \to \infty$, alors : $\Rightarrow$ Si $y > 0 \Rightarrow ty^3 > 0 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ fonction croissante.
$\Rightarrow$ Si $y < 0 \Rightarrow ty^3 < 0 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ fonction décroissante.
$\Rightarrow$ Si $y = 0 \Rightarrow ty^3 = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$ fonction constante.
La pente s'accentue lorsque $t \to \infty$, $y > 0$ et s'accentue négativement lorsque $t \to \infty$, $y < 0$.

ii) $y' = \left((C - t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(C - t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2t) = t \cdot (C - t^2)^{-\frac{3}{2}} = t\left((C - t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = ty^3$

iii) Solution constante : $y' = 0 \Rightarrow ty^3 = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

iv) $y(0) = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{C - 0^2}} = 0 \Rightarrow C = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1 - 4t^2}}$

v)




$C = 9 \Rightarrow$ A.V. en 3 et $-3$

$C = 4 \Rightarrow$ A.V. en 2 et $-2$

$C = 1 \Rightarrow$ A.V. en 1 et $-1$

(b) La croissance d'une population est décrite par

$$N' = 1.2N\left(1 - \frac{N}{4200}\right).$$

(i) Pour quelles valeurs de $N$ est-ce que la population augmente ?

(ii) Pour quelles valeurs de $N$ est-ce que la population diminue ?

(iii) Pour quelles valeurs de $N$ est-ce que la population reste constante ?

On a une population, donc $N(t) \geqslant 0$.

$\rightarrow$ le signe de $N'$ est celui de $\left(1 - \frac{N}{4200}\right)$

$\rightarrow N = 0 \Rightarrow N' = 0$

| Valeur de $N$ | 0 | | 4200 | |
|---|---|---|---|---|
| Signe de $N'$ | 0 | + | 0 | − |
| Croissance de $N$ | → | ↗ | → | ↘ |

i) $N(t)$ ↗ si $N \in ]0, 4200[$

ii) $N(t)$ ↘ si $N \in ]4200, \infty[$

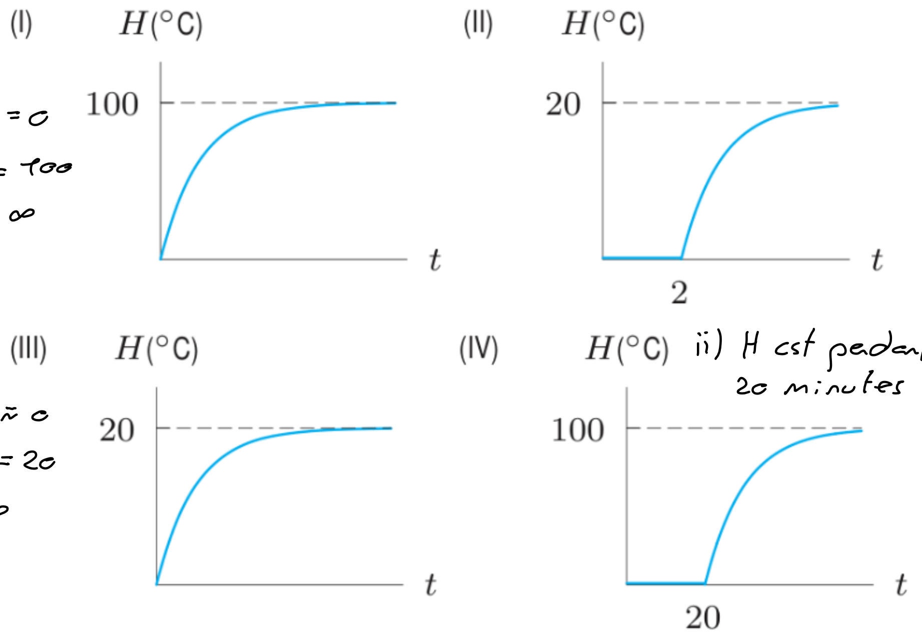
iii) $N(t)$ constante lorsque $N(t) = 0$ et $N(t) = 4200$

2. (a) Les graphes ci-dessous représentent la température $H$ (en degrés Celsius) de quatre oeufs en fonction du temps $t$ (en minutes):

i) $H(0) = 0$
$H(t) = 100$
$t \to \infty$

iii) $H(0) \approx 0$
$H(t) = 20$
$t \to \infty$

ii) $H$ est pendant 20 minutes




Faire correspondre trois des graphes (I)-(II)-(III)-(IV) aux descriptions (i)-(ii)-(iii) ci-dessous:

(i) Un oeuf est sorti du réfrigérateur et est plongé dans de l'eau bouillante.

(ii) Un oeuf subit la même procédure que l'oeuf décrit en (i), vingt minutes après ce dernier.

(iii) Un oeuf est sorti du réfrigérateur en même temps que l'oeuf décrit en (i) et est déposé sur la table de la cuisine.

Proposer une description plausible pour le processus décrit par le graphe restant.

Pour ii) Un oeuf est sorti du frigo 2 minutes après l'oeuf en i) puis posé sur la table de la cuisine.

(b) Associer à chacune des équations différentielles

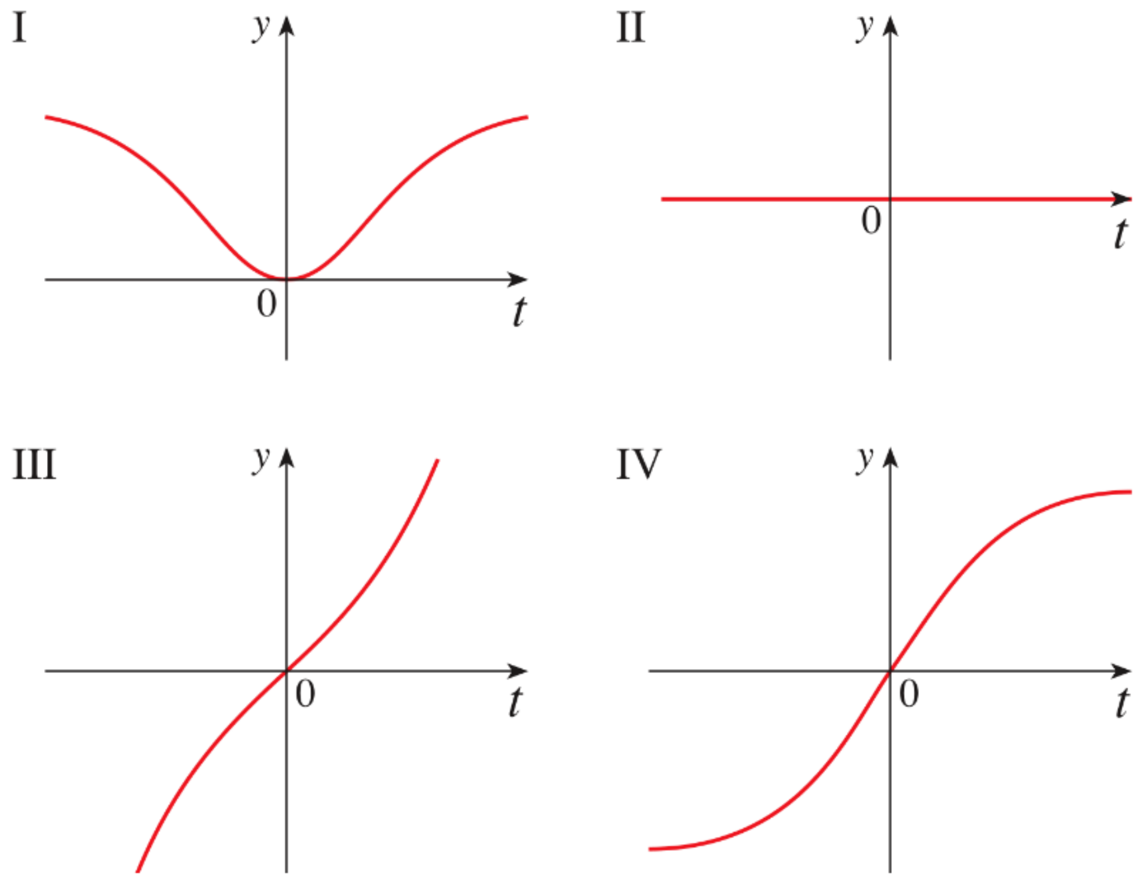
(i) $y' = 1 + t^2 + y^2$

(ii) $y' = \dfrac{1}{1 + e^{t^2 + y^2}}$

(iii) $y' = te^{-t^2 - y^2}$

(iv) $y' = \sin(ty)\cos(ty)$

le graphe I-II-III-IV qui représente une de ses solutions:




i) $y' \neq 0$ → Pas I, Pas II  $y' \to +\infty$ si $t \to +\infty$ → Pas IV  Donc III

ii) $y' \neq 0$ ⇒ Pas I, Pas II ⇒ IV

iii) $y' = 0$ ⇒ $te^{-t^2-y^2} = 0$ → Pas de solution $\forall t$ ⇒ I

$y'$ a le même signe que $t$ ✓

iv) II est cohérent : $y(t) = 0$ ⇒ $\sin(0t)\cos(0 \cdot t) = 0$

3. Soient deux espèces $X$ (dont la population au temps $t$ est $x(t)$) et $Y$ (dont la population au temps $t$ est $y(t)$) vivant dans le même écosystème, telles qu'une des espèces est prédatrice de l'autre. La dynamique de leurs interactions est décrite par un modèle proie-prédateur (ou modèle de Lotka-Volterra).
Dans cet exercice, on considère le modèle proie-prédateur donné par

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} x' & = & -12x & + & 3xy \\ y' & = & 15y & - & 5xy \end{array}\right. .$$

Une manière simple de représenter l'évolution des deux populations simultanément est de représenter $x(t)$ et $y(t)$ par le point $(x(t), y(t))$ du plan. Il n'y a donc pas d'axe des $t$, mais le point $(x(t), y(t))$ bouge en fonction du temps.

(a) Dans le modèle ci-dessus, déterminer quelle espèce est prédatrice, et quelle espèce est proie. Justifier.

(b) Dessiner dans le quadrant $\mathbb{R}^2_+$ les droites $\{(x,y) \,|\, x' = 0\}$ et $\{(x,y) \,|\, y' = 0\}$. Qu'est-ce que ces droites représentent ?

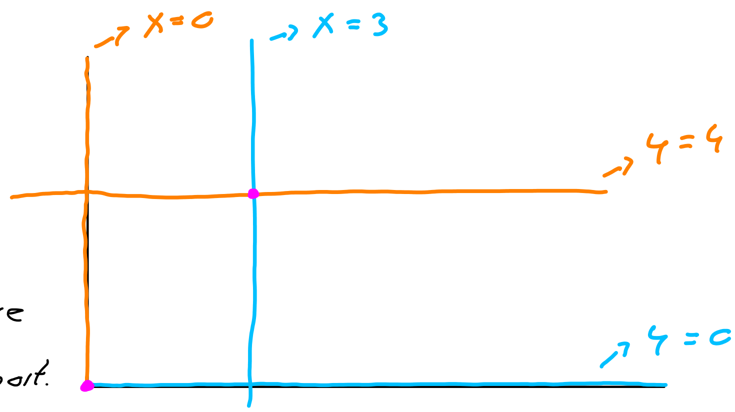
(c) Trouver les points d'équilibres de ce système, c'est-à-dire les points $(x,y)$ tels que les populations restent constantes.

(d) Identifier les quatre régions du quadrant $\mathbb{R}^2_+$ correspondant aux quatres dynamiques possibles ($X$ croit / décroit, resp. $Y$ croit / décroit).

(e) Esquisser quelques trajectoires (= courbes solutions) $(x(t), y(t))$ en fonction de populations initiales $(x(0), y(0))$. Quelles sont les dynamiques de ces courbes ? Expliquer.

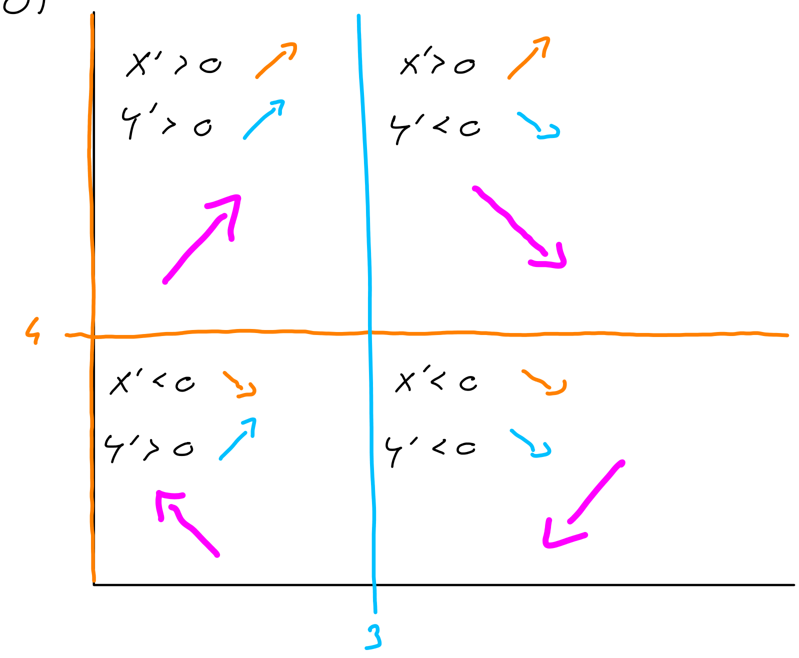
a) $xy$ positif pour $x$ et $x' < 0$ si $y < 4$ $\Rightarrow$ prédateur
$xy$ négatif pour $y$ et $y' < 0$ si $x > 3$ $\Rightarrow$ proie

b) $\{(x,y) : x' = 0\} = \{x = 0\} \cup \{y = 4\}$
$\{(x,y) : y' = 0\} = \{y = 0\} \cup \{x = 3\}$




c) $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) = (3,4)$
↳ pas d'espèces ↳ équilibre entre naissances et mort.

d)




$x' = 3x(y-4) \quad x>0$

$\Rightarrow x'>0 \Leftrightarrow y>4$

$x'<0 \Leftrightarrow y<4$

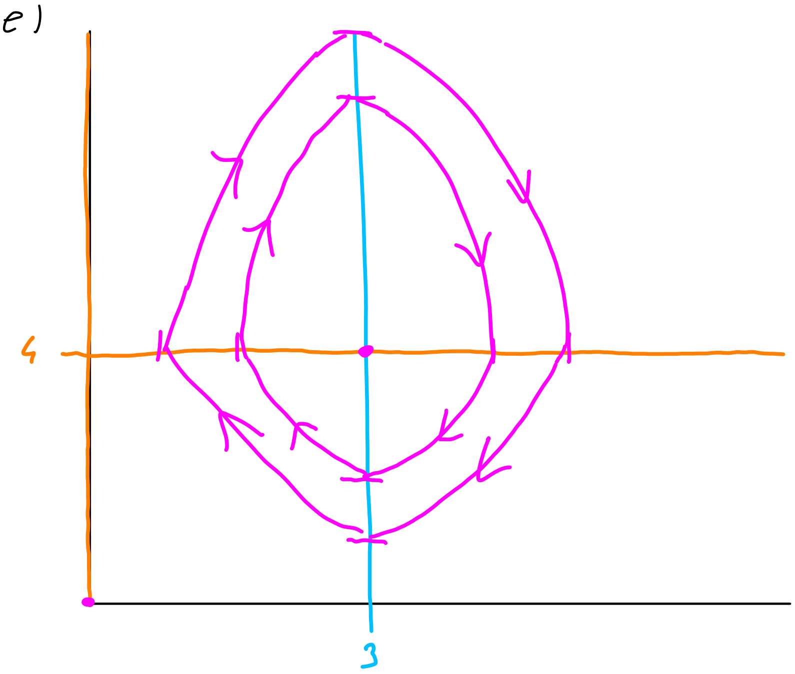
$y' = 5y(3-x) \quad y>0$

$\Rightarrow y'>0 \Leftrightarrow x<3$

$y'<0 \Leftrightarrow x>3$

$\rightarrow (x(t), y(t))$

e)




| $((x_0, y_0))$ | |
|---|---|
| $(3,4)$ | Solution constante |
| $(x,0)$ | $y' = 0 \Rightarrow x' < 0 \rightarrow$ mort des prédateurs |
| $(0,y)$ | $x' = 0 \Rightarrow y' > 0 \rightarrow$ prolifération des proies |
| $(3,y)$ | $y' = 0 \Rightarrow y$ stable |
| $(x,4)$ | $x' = 0 \Rightarrow x$ stable |

# Modélisation Mathématique - Série 9

Equations différentielles: ordre 1 sous forme explicite, champs de directions

1. (a) Faire correspondre les équations différentielles (i) – (v) aux champs de directions I – IV
ci-dessous. Justifier votre choix.

(i) $y' = t\,(2-y)$

(ii) $y' = t+y-1$

(iii) $y' = 2-y$

(iv) $y' = \sin(t)\sin(y)$

(v) $y' = t^2-2y+1$

→ Pas de sol cst (I, II, III) $y'=1$ lorsque $t=y=0$ (IV)

↳ aucun des graphe

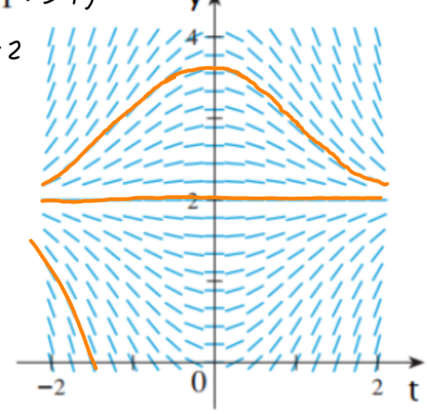
I → i)

Sol cst $y=2$

$y'=0$ si $t=0$

$t>0, y<2$ => $y'$ ↗

$t>0, y>2$ => $y'$ ↘



II → iv)

Sol cst $y=k\pi$

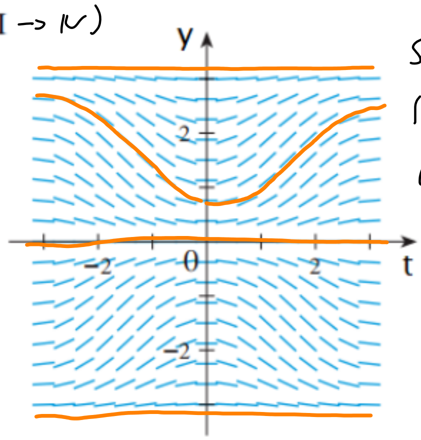
$(-\pi, 0, \pi)$

$t=0 \Rightarrow y'=0$

$y\in[0,\pi] \Rightarrow$

$t\in[-\pi,0] \to y'\leq 0$

$t\in[0,\pi] \to y'\geq 0$

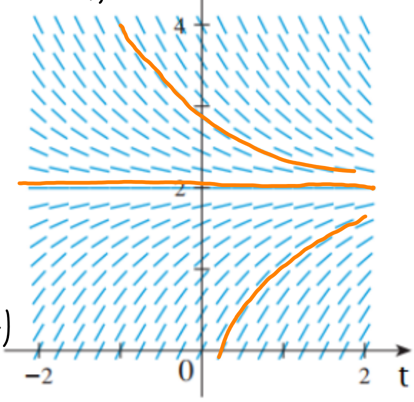


III → iii)

Sol cst $y=2$

Ne dépend pas de $t$

(la pente reste la même horizontalement)

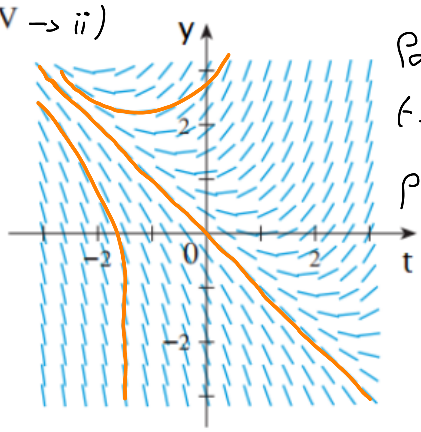


IV → ii)

Pas de sol cst.

$t=-y \Rightarrow y'=-1$

pente 0 pour $y=1-t$



(b) Pour chacune des équations dans (a), calculer algébriquement les solutions constantes éventuelles, puis dessiner, en se servant des champs de directions, quelques courbes solutions, ainsi que les solutions constantes.

i) $y'=0 \Rightarrow t(2-y)=0 \Rightarrow y=2$ ii) $y'=0 \Rightarrow t+y-1=0$ → pas de sol cst.

iii) $y'=0 \Rightarrow 2-y=0 \Rightarrow y=2$

iv) $y'=0 \Rightarrow \sin(t)\sin(y)=0 \Rightarrow y=k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

v) $y'=0 \Rightarrow t^2-2y+1$ → pas de solution constante

2. Pour les équations différentielles suivantes, esquisser le champ de directions pour $(t, y) \in [-2,2] \times [-2,2]$. Tracer ensuite les deux courbes $y(t)$ satisfaisant aux conditions initiales données, ainsi que les solutions constantes éventuelles. Ne pas résoudre les équations !

(a) L'équation

$$y' = \frac{y}{t}$$ → pas de solution constante

Pour $y(0) = 1$ et $y(0) = -1$.

(b) L'équation

$$y'(t) = t^2 - y^2$$ $= (t+y)(t-y)$ → Pas de solution constante.

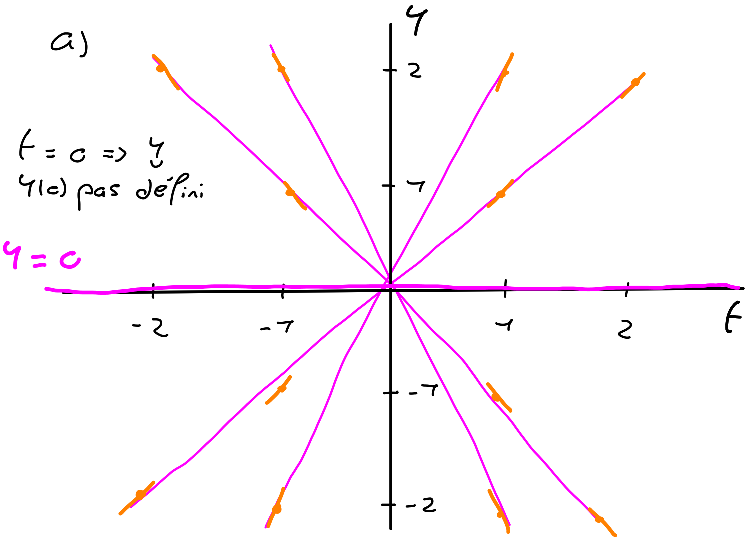
Pour $y(-2) = 2$ et $y(0) = 0$.

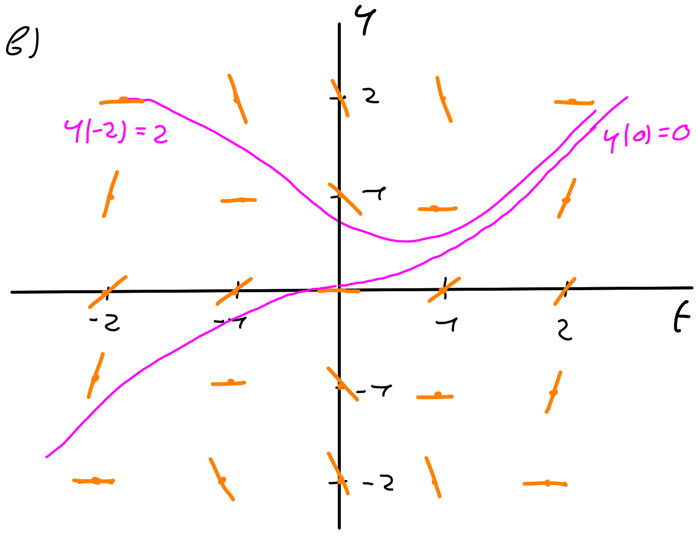
(c) L'équation

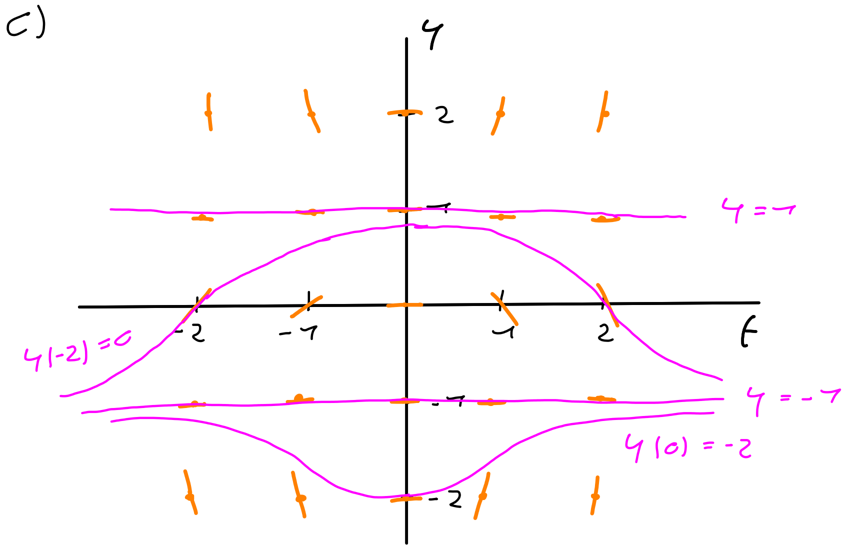
$$y' = ty^2 - t$$ $= t(y+1)(y-1)$

Pour $y(-2) = 0$ et $y(0) = -2$.

Solution constante : $y = 1$
$y = -1$



3. Dans cet exercice on va s'intéresser à la croissance de deux populations de bactéries, la souche $1$ et la souche $2$. Soient $N_1(t)$, resp. $N_2(t)$, le nombre de bactéries de la souche $1$, resp. $2$, au temps $t$.
On suppose que les populations $1$ et $2$ croissent selon les équations

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 \cdot N_1 \quad \text{et} \quad \frac{dN_2}{dt} = r_2 \cdot N_2,$$

pour des taux de croissance $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$, tels que $r_1 \neq r_2$.

(a) Interpréter la quantité

$$p_1(t) = \frac{N_1(t)}{N_1(t) + N_2(t)}.$$

$p_1(t)$ est la proportion de bactérie de type 1 au temps $t$.

(b) Montrer que $p_1(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$p_1' = R \cdot p_1 \cdot (1 - p_1),$$

où $R := r_1 - r_2$.

$$p_1' = \left(\frac{N_1}{N_1+N_2}\right)' = \frac{N_1'(N_1+N_2) - (N_1'+N_2')N_1}{(N_1+N_2)^2} = \frac{r_1 N_1 (N_1+N_2) - (r_1 N_1 + r_2 N_2) N_1}{(N_1+N_2)^2}$$

$$= \frac{N_1}{N_1+N_2} \cdot \frac{r_1 \cancel{N_1} + r_1 N_2 - r_1 \cancel{N_1} - r_2 N_2}{N_1+N_2} = p_1 \cdot \frac{N_2(r_1 - r_2)}{N_1+N_2}$$

de plus $p_1 = \frac{N_1}{N_1+N_2} = 1 - \frac{N_2}{N_1+N_2}$

$\Rightarrow p_1' = R\, p_1 (1 - p_1)$ ✓

(c) Interpréter l'équation (1) en termes de dynamique (solutions constantes, croissance/décroissance de $p_1$, etc.), en fonction du signe de $R$.

(d) Esquisser le champ de directions de l'équation (1) pour $r_1 = 5$ et $r_2 = 3$. Calculer les solutions constantes et les représenter. Représenter également quelques courbes solutions.

(e) Déduire des interprétations obtenues en (a) et en (c) une équation différentielle similaire à (1) pour

$$p_2(t) = \frac{N_2(t)}{N_1(t) + N_2(t)}.$$

Remarque: on peut le faire sans calculer explicitement la dérivée de $p_2$ ; voyez-vous comment ?

c) $p_1' = 0 \Rightarrow R = 0$ (proportion constante)

$\Rightarrow p_1 = 0$ ($N_1 = 0 \to$ pas de bactérie 1)
$\Rightarrow p_1 = 1$ ($N_2 = 0 \to$ pas de bactérie 2)
} solutions constantes

$p_1 \geq 0 \Rightarrow 1 - p_1 \geq 0$ car $p_1 \in [0,1] \Rightarrow p_1'$ a le même signe que $\mathbb{R}$ !

$p_1 \nearrow \Leftrightarrow r_1 > r_2$ la proportion augmente si la bactérie 1 croît plus vite

$p_1 \searrow \Leftrightarrow r_2 > r_1$ " " diminue " " " " " " lentement

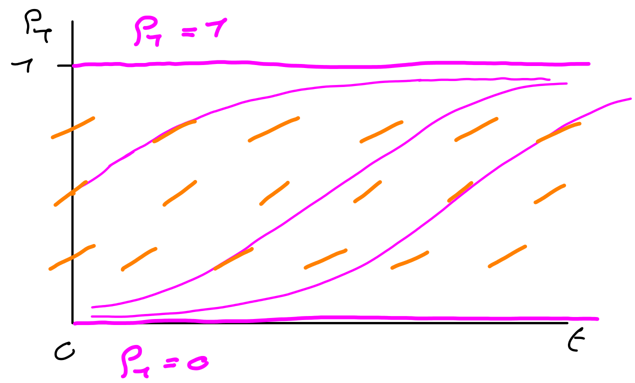
d) $p_1' = 2 p_1 (1 - p_1)$

Solutions constantes : $p_1 = 0$

$p_1 = 1$

$p_1' > 0 \Rightarrow p_1 \nearrow$

⚠ les pentes ne dépendent PAS de $t$ !




e) $p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - p_1$

$\Rightarrow p_2' = (1 - p_1)' = -p_1' = -R\, p_1 (1 - p_1) = -R (1 - p_2) p_2$

# Modélisation Mathématique - Série 10

## Equations différentielles: Equations d'ordre 1 séparables

1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1+y^2}{1+t^2}$$

1) $y' = \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{= g(t)} \underbrace{(1+y^2)}_{= h(y)} \Rightarrow$ séparable

2) Solutions constantes : $h(y) = 0 \Rightarrow 1+y^2 = 0 \; \nexists \Rightarrow$ aucune solution constante.

3) $\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt \Rightarrow \arctan(y) = \arctan(t) + \overset{\in \mathbb{R}}{C} \Rightarrow y = \tan(\arctan(t)+c)$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{t + \tan(c)}{1 - t \cdot \tan(c)} = \frac{t+D}{1-t \cdot D}}$, $D = \tan(c) \in \mathbb{R}$

(b) Déterminer la solution du problème initial

$$\begin{cases} y' & = & \dfrac{\ln t}{ty} \\ y(1) & = & 2 \end{cases}$$

1) $y' = \underbrace{\frac{\ln(t)}{t}}_{= g(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{= h(y)} \Rightarrow$ Séparable

2) $h(y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} = 0 \; \nexists$

3) $\int y\, dy = \int \frac{\ln(t)}{t}\, dt$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \ln(t)^2 + \overset{\in \mathbb{R}}{C} \Rightarrow \boxed{y = \pm \sqrt{\ln(t)^2 + D}}$, $D = 2C$

$y(1) = 2 = \pm \sqrt{\ln(1)^2 + D} \Rightarrow 2 = \pm \sqrt{D} \Rightarrow D = 4 \Rightarrow \boxed{y(t) = \sqrt{\ln(t)^2 + 4}}$

(c) Le taux de décomposition du pentoxyde d'azote $N_2O_5$ en tétraoxyde d'azote $N_2O_4$ et oxygène $O$ est proportionnel à sa concentration. On considère une solution contenant 5 moles de $N_2O_5$. Après 10 minutes, la solution ne contient plus que 3 moles de $N_2O_5$.
En combien de temps 90% du pentoxyde d'azote sera-t-il décomposé ?

Soit $c = c(t)$ la concentration de $N_2O_5$ au temps $t$
On cherche $c' = rc$, $r$ constante de proportionnalité.

$\Rightarrow \boxed{c(t) = De^{rt}}$ $D \in \mathbb{R}$ $\quad c(0) = 5 \Rightarrow D = 5$

$c(10) = 3 \Rightarrow 3 = 5\cdot e^{r\cdot 10} \Rightarrow \frac{3}{5} = e^{r\cdot 10}$

$\Rightarrow r = \frac{1}{10}\cdot \ln\left(\frac{3}{5}\right)$

On veut $c(t) = 0{,}5$ (10% de 5) $\Rightarrow 0{,}5 = 5\cdot e^{r\cdot t}$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{r}\cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{\frac{1}{10}\cdot\ln\left(\frac{3}{5}\right)}\ln\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{10\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 45 \text{ minutes}$$

2. Une procédure médicale requiert qu'on bloque temporairement les voies respiratoires d'un·e patient·e, empêchant ainsi l'inspiration d'oxygène. La durée pendant laquelle une telle procédure peut être exécutée sans danger peut être augmentée en remplaçant au préalable une grande portion de l'air contenu dans les poumons du/de la patient·e par de l'oxygène pur.
On suppose que le volume des poumons est de 3 litres et qu'on remplace l'air des poumons par de l'oxygène pur à une vitesse de 10 ml/s. En particulier, au temps $t$, une partie de l'oxygène pur précédemment injecté dans les poumons s'est mélangée à l'air des poumons et a été éjectée.

   (a) On note $V(t)$ le volume d'oxygène dans les poumons après $t$ secondes. Expliquer pourquoi la dynamique décrite plus haut est exprimée par l'équation différentielle

Variation du volume d'oxygène au temps $t$.

entre / sort

$$V' = \frac{1}{100} - \frac{V}{300}. = \frac{V}{3}\cdot\frac{10}{1000}\,\ell$$

$= \frac{10}{1000}\,\ell$

proportion d'oxygène

$V(t)$

$O_2 \xrightarrow{10\,ml/s}$  $\xrightarrow{10\,ml/s}$ éjection

poumon

(b) Déduire de (a) une expression pour $V(t)$ en fonction de la quantité initiale $V_0$ d'oxygène dans les poumons.

1) $V' = \frac{3-V}{300} = \underbrace{\frac{1}{300}}_{=g(t)} \cdot \underbrace{(3-V)}_{=h(y)}$ séparable

2) $h(y) = 0 \Rightarrow V = 3$ (les poumons sont pleins d'oxygène pur)

3) $\int \frac{1}{3-V}\, dV = \int \frac{1}{300}\, dt \Rightarrow -\ln|3-V| = \frac{1}{300}t + C \Rightarrow 3-V = \underbrace{D}_{=\pm e^C \in \mathbb{R}} e^{-\frac{1}{300}t}$

$\Rightarrow \boxed{V = 3 + De^{-\frac{1}{300}t}}$ $\quad V = 3 \Rightarrow D = 0$

$V(0) = V_0 \Rightarrow V_0 = 3 + D \Rightarrow D = V_0 - 3 \Rightarrow \boxed{V(t) = 3 + (V_0 - 3)e^{-t/300}}$

(c) Quelle sera la quantité d'oxygène dans les poumons au temps $t$ si les poumons contenaient initialement 20% d'oxygène ?

(d) Déduire de (c) le temps nécessaire au processus d'oxygénation pour que les poumons contiennent 80% d'oxygène.

c) $20\% = 0{,}2/1\ell = 0{,}6/3\ell \Rightarrow V_0 = 0{,}6 \Rightarrow \boxed{V(t) = 3 - 2{,}4e^{-t/300}}$

d) $80\% = 0{,}8/1\ell = 2{,}4/3\ell \Rightarrow V(t) = 2{,}4 \Rightarrow 2{,}4 = 3 - 2{,}4e^{-t/300}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-t/300} \Rightarrow t = -300\ln\left(\frac{1}{4}\right) = 300\ln(4) = 416$ secondes

= 6 minutes 56 secondes

3. Le but de cet exercice est d'étudier la diffusion d'une rumeur sur le réseau social InstaTikter. On désigne par $F(t)$ le nombre d'utilisateurs et utilisatrices d'InstaTikter qui ont été exposé·e·s à cette rumeur $t$ jours après sa première diffusion.

(a) Expliquer pourquoi l'équation différentielle

Variation de personnes influencées → $F' = C \cdot F \cdot (P - F)$, → personnes pas encore infectées

→ proba d'infection

↳ personnes déjà infectées

où $P$ est le nombre total d'utilisateurs et utilisatrices d'InstaTikter, et $C$ est une constante positive, pourrait être utilisée pour modéliser cette situation. → Ne prend PAS en compte la topologie

Voyez-vous des limitations à ce modèle, c'est-à-dire des présupposés qu'il induit et qui vous semblent critiquables ?

↳ Ne prend PAS en compte d'autres réseau.

(b) Résoudre l'équation différentielle du point (a).

Equation logistique 1) $F' = \underbrace{c}_{g(t)} \cdot \underbrace{F \cdot (P - F)}_{h(F)}$ séparable

2) $h(F) = 0 \Rightarrow F(P-F) = 0 \Rightarrow F = 0$ et $F = P$

↗ personne exposé

↳ tout le monde exposé

3) $\int \frac{1}{F(P-F)}\, dF = \int c\, dt \Rightarrow \int \frac{1}{P}\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{P-F}\right) dF = \int c\, dt$

$$\frac{1}{F(P-F)} = \frac{1}{P}\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{P-F}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P}\Big(\underbrace{\ln|F| - \ln|P-F|}_{\ln\left|\frac{F}{P-F}\right|}\Big) = c \cdot t + D \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -\ln\left|\frac{F}{P-F}\right| = -Pct + \underbrace{E}_{-PD}$$

$$\Rightarrow \frac{P-F}{F} = L \cdot e^{-Pc \cdot t} \quad (L = \pm e^{E} \in \mathbb{R}^*)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{F} = 1 + Le^{-Pc \cdot t}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(t) = \frac{P}{1 + Le^{-Pct}}}$$

$L \in \mathbb{R}$ $F(t) = P \Rightarrow L = 0$

↗ Solution constante

On suppose pour le reste de l'exercice qu'il y a en tout 1 milliard d'utilisatrices et utilisateurs d'InstaTikter. Le jour $t = 0$, le compte `@EasterRabbitOfficial` poste un message disant que le Père Noël n'existe pas. Le même jour, la publication est lue par 1000 personnes, puis partagée. On suppose qu'en dehors de ces 1000 personnes, aucun·e utilisatrice ou utilisateur d'InstaTikter n'avait été confronté·e à cette rumeur.

(c) Donner la fonction $F(t)$ qui modélise la situation décrite ci-dessus.

(d) Dix jours après sa publication, un million de personnes avaient été en contact avec la rumeur. A combien s'élèvera ce nombre après 20 jours ?

(e) Après combien de temps 95% des utilisatrices et utilisateurs d'InstaTikter auront été confronté·e·s à la rumeur ?

c) $P = 10^9$, $F(0) = 1000 \Rightarrow F(0) = \frac{10^9}{1+L} = 1000 \Rightarrow L = 10^6 - 1$

$$\Rightarrow \boxed{F(t) = \frac{10^9}{1+(10^6-1)e^{-10^9 \cdot ct}}}$$

d) $F(10) = 10^6 = \frac{10^9}{1+(10^6-1)e^{-10^9 \cdot c \cdot 10}} \Rightarrow 10^3 = 1 + (10^6-1)e^{-10^9 \cdot c \cdot 10}$

$$\Rightarrow \frac{10^3-1}{10^6-1} = e^{-10^{10} \cdot c} \Rightarrow c = -\frac{1}{10^{10}} \ln\Bigg(\frac{10^3-1}{\underbrace{10^6-1}_{(10^3+1)(10^3-1)}}\Bigg) = \frac{\ln(1001)}{10^{10}}$$

$$\Rightarrow F(20) = \frac{10^9}{1+(10^6-1)e^{-\cancel{10^{10}} \cdot 2 \cdot \frac{\ln(1001)}{\cancel{10^{10}}}}} = \frac{10^9}{1+(10^6-1)\, e^{\ln(1001^{-2})}}$$

$$= \frac{10^9}{1+(10^6-1)\cdot\frac{1}{(10^3+1)^2}} = \frac{10^9}{1+\frac{10^3-1}{10^3+1}} = \frac{10^9}{\frac{10^3+\cancel{1}+10^3-\cancel{1}}{10^3+1}}$$

$$= \frac{10^6(10^3+1)}{2} = \boxed{5005 \cdot 10^5}$$

95% de $10^9$

e) On cherche $F(t) = 9{,}5 \cdot 10^8 = \frac{19}{2} \cdot 10^8$

$$\Rightarrow \frac{10^9}{1 + (10^6 - 1)\, e^{-10^9 \cdot \frac{\ln(10^3+1)}{10^{10}} \cdot t}} = \frac{19}{2} \cdot 10^8$$

$$\Rightarrow \frac{20}{19} = 1 + (10^6 - 1)\, e^{-\frac{\ln(10^3+1)}{10} \cdot t}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{10^6 - 1}\right) = -\frac{\ln(10^3+1)}{10} \cdot t$$

$$\Rightarrow t = -10\, \frac{\ln\left(\frac{1}{19(10^6-1)}\right)}{\ln(10^3+1)}$$

$$\Rightarrow t = 10\, \frac{\ln(19(10^6-1))}{\ln(10^3+1)} \simeq 24{,}26 \text{ jour donc } \boxed{25 \text{ jours}}$$

## Modélisation Mathématique - Série 11

### Equations différentielles: Equations linéaires d'ordre 1

1. Pour chacune des équations suivantes, dire si elle est séparable, linéaire, les deux, ou aucune des deux. Ne pas résoudre les équations !

   (a) $y' = y + t$.

   (b) $y' = 3y - 2t + 6ty - 1$.

   (c) $y' = te^{-\sin t} - y\cos t$.

   (d) $y' = \sin y + t$.

   (e) $2ye^{y^2}y' = 2t + 3\sqrt{t}$.

   (f) $y' + y = t^2 - 1$.

   (g) $y' = 1 - t + y - ty$.

   (h) $t^2yy' - y^2 = 2t^3e^{-1/t}$.

a) Pas séparable

Linéaire : $a(t) = 1$ et $b(t) = t$

b) $y' = \underbrace{y \cdot 3(1+2t)}_{\text{''} a(t)} - \underbrace{(1+2t)}_{\text{''} b(t)}$ ⇒ Linéaire

$= \underbrace{(3y-1)}_{= h(y)}\underbrace{(1+2t)}_{= g(t)}$ ⇒ Séparable

c) Pas séparable

Linéaire : $a(t) = -\cos(t)$

$b(t) = te^{-\sin(t)}$

d) Pas linéaire

Pas séparable

e) $y' = \underbrace{(2t+3\sqrt{t})}_{= g(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2ye^{y^2}}}_{= h(y)}$ ⇒ Séparable

Pas linéaire

f) $y' = \underbrace{t^2 - 1}_{\text{''} b(t)} \underbrace{- y}_{\text{''} a(t)}$ ⇒ linéaire

Pas séparable

g) $y' = \underbrace{(1-t)}_{\text{''} b(t)} + y\underbrace{(1-t)}_{\text{''} a(t)}$ ⇒ linéaire

$= \underbrace{(1-t)}_{\text{''} g(t)}\underbrace{(1+y)}_{\text{''} h(y)}$ ⇒ séparable

h) $y' = \dfrac{y^2 + 2t^3e^{-\frac{1}{t}}}{t^2y}$ Pas séparable

Pas linéaire

2. (a) Résoudre les équations différentielles suivantes :

   (i)
$$y' = t^2 - y.$$

1. $a(t) = -1 \Rightarrow A(t) = -t$

$\Rightarrow \boxed{y_\ell = Ce^{-t}}$, $C \in \mathbb{R}$

2. $\int \frac{t^2}{e^{-t}}\, dt \cdot e^{t} = t^2e^t - 2\int te^t\, dt = t^2e^t - 2\left(te^t - \int e^t\, dt\right) = t^2e^t - 2te^t + 2e^t$

$= e^t(t^2-2t+2) \Rightarrow y_p = e^t(t^2-2t+2)\cdot e^{-t} = \boxed{t^2-2t+2}$

3. $\boxed{y_i(t) = Ce^{-t} + t^2 - 2t + 2}$, $C \in \mathbb{R}$

(ii)

$$y'\cos(t)+y\sin(t)=\tan(t). \qquad y' = -\underbrace{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}_{=a(t)} y + \underbrace{\frac{\tan(t)}{\cos(t)}}_{=b(t)}$$

1. $a(t) = -\tan(t) = A(t) = \ln|\cos(t)| \Rightarrow e^{A(t)} = e^{\ln|\cos(t)|} \Rightarrow \boxed{y_e = C\cdot\cos(t),}\ C\in\mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int \frac{\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}}{\cos(t)}\,dt = \int\frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,dt = \frac{1}{2}\cos^{-2}(t) \Rightarrow y_p = \frac{1}{2\cos^2(t)}\cdot\cos(t) = \boxed{\frac{1}{2\cos(t)}}$

3. $\boxed{y_i(t) = C\cdot\cos(t) + \frac{1}{2\cos(t)}}\quad C\in\mathbb{R}.$

(b) **Résoudre les problèmes initiaux suivants :** $\quad y' = \underbrace{\frac{3}{t^2}}_{b(t)} - \underbrace{\frac{2}{t}}_{a(t)} y$

(i)

$$\begin{cases} t^2y'+2ty &= 3 \\ y(1) &= -2 \end{cases}$$

1. $a(t) = -\frac{2}{t} \Rightarrow A(t) = -2\ln|t|$
$\Rightarrow e^{A(t)} = e^{\ln(t^{-2})} = \frac{1}{t^2}$
$\Rightarrow \boxed{y_e = C\cdot\frac{1}{t^2}},\ C\in\mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int\frac{3/t^2}{1/t^2}\,dt = \int 3\,dt = 3t = y_p = 3t\cdot\frac{1}{t^2} = \boxed{\frac{3}{t}}$

3. $\boxed{y_i(t) = C\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}},\ C\in\mathbb{R}$ $\qquad$ 4. $y(1) = C+3 = -2 \Rightarrow C = -5$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{5}{t^2}+\frac{3}{t}}$

(ii)

$$\begin{cases} y'+y\cos(t) &= \sin(t)\cos(t) \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1 \end{cases}$$

$y' = -y\underbrace{\cos(t)}_{a(t)} + \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{b(t)}$

1. $a(t) = -\cos(t) \Rightarrow A(t) = -\sin(t)$
$\Rightarrow e^{A(t)} = e^{-\sin(t)}$
$\Rightarrow \boxed{y_e = Ce^{-\sin(t)},}\ C\in\mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int\frac{\sin(t)\cos(t)}{e^{-\sin(t)}}\,dt = \int\sin(t)\underbrace{\cos(t)e^{\sin(t)}}_{=(e^{\sin(t)})'}\,dt$
$\displaystyle = \sin(t)e^{\sin(t)} - \int\cos(t)e^{\sin(t)}\,dt = \sin(t)e^{\sin(t)} - e^{\sin(t)}$
$= e^{\sin(t)}(\sin(t)-1) \Rightarrow y_p = e^{\sin(t)}(\sin(t)-1)e^{-\sin(t)} = \boxed{\sin(t)-1}$

3. $\boxed{y_i(t) = Ce^{-\sin(t)}+\sin(t)-1,}\quad C\in\mathbb{R}$

4. $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = Ce^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}e^{-\sin(t)}+\sin(t)-1}$