Q1

(a) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \Leftrightarrow \underbrace{A^k \cdot (A^k)^{-1}} = (A^{-1})^k \cdot A^k$ soit $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow I_n = \underbrace{A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{k \text{ fois}} \cdot \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ fois}} \Leftrightarrow I_n = (I_n)^k \Leftrightarrow \boxed{I_n = I_n}$

se couplent par paires

Soit bb-ex: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(I_n)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$

! pas commutatif

$\forall k$ ① $(ABA^{-1})^k = (I_n B)^k \overset{\text{THM}}{=} (B)^k$

② $AB^kA^{-1} = I_n B^k \overset{\text{THM}}{=} B^k$ ✗

THM. parenth.

bb-ex: $k=2$: $(A\underbrace{BA^{-1})(A}BA^{-1}) = AB^2A^{-1}$, $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow AB\underbrace{I_nB}_{B}A^{-1} = AB^2A^{-1} \Leftrightarrow AB^2A^{-1} = AB^2A^{-1}$

$\forall k$: il y aura k termes pour le ① $\Rightarrow k$ fois la lettre $B \Rightarrow B^k$ et les A^{-1} et A se simplifient $(k-1)$ fois

(b) i. $\overset{\cdot(I_n - A)}{\Longleftrightarrow} (I_n - A)^{-1}(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A + \underbrace{\cancel{A^2 + \ldots + A^{k-1}}}_{0_{n,n}})$ $A^k = 0_{n,n}$

$\Leftrightarrow I_n = (I_n - A)(I_n + A) \Leftrightarrow I_n = I_n + A - A - \underbrace{A^2}_{0_{n,n}}$ pas thm

$\Leftrightarrow I_n = I_n \Rightarrow$ ok

ii. $I_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(I_4 - A) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ inversible

méthode cofacteurs: $\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & -1\cdot(+2) & 1\cdot 2 & (-1)\cdot(-2) \\ -1\cdot 0 & 1\cdot 1 & -1\cdot 1 & 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & -1\cdot 0 & 1\cdot 1 & -1\cdot(-1) \\ -1\cdot 0 & 1\cdot 0 & -1\cdot 0 & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (I_4 - A)^{-1} = \frac{1}{\det(I_4 - A)}(\mathrm{cof})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Noter

(c) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ car si multiplie par $A^T \Leftrightarrow A^T(A^{-1})^T = A^T(A^T)^{-1}$

$\Leftrightarrow (A^{-1}A)^T = I \Leftrightarrow \underline{I = I}$

Tips: 1.b.i) multip. par $(I_n - A) \Rightarrow A \cdot A^{-1}$ / 1.c) simp. matrice / 2) théorie

Q2 (a) $\det(A^n) = \det(\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\det A\cdot \det A\cdot\ldots\cdot\det A}_{n\text{ fois}} = (\det A)^n \Rightarrow$ vrai $\forall n$

$\det(BAB^{-1}) = \det B\cdot\det A\cdot\det B^{-1}$
$= \det B\cdot\frac{1}{\det B}\cdot\det A = \det A$

(b) $\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\Leftarrow 3L_2-2L_1\\ L_3\Leftarrow 3L_3-L_1\\ L_4\Leftarrow 3L_4-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 5 & -4 & 3\\ 0 & -2 & 1 & 6\\ 0 & -2 & 4 & 12\end{pmatrix} \underset{\substack{L_3\Leftarrow 5L_3+2L_2\\ L_4\Leftarrow 5L_4+2L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 5 & -4 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 6\\ 0 & 0 & 12 & 66\end{pmatrix}$

$\underset{L_4\Leftarrow L_4+4L_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 5 & -4 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 90\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 3\cdot 5\cdot(-3)\cdot 90 = -4050$

Q3 (a) i. $\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & 5\\ -4 & -6 & -11 & -1\\ 4 & -6 & -7 & -5\\ 2 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\Leftarrow 7L_2-4L_1\\ L_3\Leftarrow 7L_3+4L_1\\ L_4\Leftarrow 7L_4+2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & 5\\ 0 & -54 & -81 & -27\\ 0 & -30 & -45 & -15\\ 0 & 6 & 9 & 3\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\Leftarrow -\frac{1}{27}L_2\\ L_3\Leftarrow -\frac{1}{15}L_3\\ L_4\Leftarrow \frac{1}{3}L_4}}{\Leftrightarrow}$

$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & 5\\ \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{9} & \cancel{3}\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_3\Leftarrow L_3-L_2\\ L_4\Leftarrow L_4-L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$

Jordan: $\underset{L_2\Leftarrow 5L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 14 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \det A$ tjrs $= 0$

aucun besoin de faire Jordan puisque pas tous les pivots

(b) i. Soit $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} \Rightarrow AA^{-1} = I_3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-g & b-h & c-i\\ 3a+d-3g & 3b+e-3h & 3c+f-3i\\ a+2d-2g & b+2e-2h & c+2f-2i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+d-3g = 0\\ a+2d-2g = 0\\ a-g = 1\\ 3b+e-3h = 1\\ b+2e-2h = 0\\ b-h = 0\\ 3c+f-3i = 0\\ c+2f-2i = 1\\ c-i = 0\end{cases}$

rés. du sys. en 3 sous-systèmes

$\Rightarrow A^{-1} = \cancel{\begin{pmatrix} -4 & \frac{4}{3} & -1\\ -3 & 1 & 0\\ -6 & \frac{16}{3} & -4\end{pmatrix}}\ \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1\\ -3 & 1 & 0\\ -5 & 2 & -1\end{pmatrix}$ erreur calcul

ii) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 15 & -6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & -15 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 15 & -6 & 3 \end{array}\right)$

$\downarrow L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -12 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 15 & -6 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right)$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$
$L_2 \leftarrow -L_2$
$L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3$

det Mat∈(2x2) est ad-bc

iii) L_1: $cof_{11}A = (-1)^2 \cdot (-2+6) = 4$ $\quad cof_{12}A = (-1)^3 \cdot (-6+3) = 3$

$cof_{13}A = (-1)^4 \cdot (6-1) = 5$ $\quad cof_{21}A = (-1)^3 \cdot (0+2) = -2$

$cof_{22}A = (-1)^4 (-2+1) = -1$ $\quad cof_{23}A = (-1)^5 (2-0) = -2$

$cof_{31}A = (-1)^4 (0+1) = 1$ $\quad cof_{32}A = (-1)^5 (-3+3) = 0$

$cof_{33}A = (-1)^6 (1-0) = 1$

$\Rightarrow (cof_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq \dots \\ 1 \leq j \leq \dots}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (cof)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

recalc. det A avec ligne 1 car "0" présent

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} (cof)^T$, $\det A \underset{\text{pour } L_1}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-2+6) + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot (6-1) = 4 - 5 = -1$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$