Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Algèbre Linéaire 2 - Série 8

Applications linéaires : image, noyau, inverse, composition

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'application linéaire $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + (2-\alpha)y + z \\ x - y - z \\ x - y + (4-\alpha)z \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application f_α est injective.
   (b) Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application f_α est surjective.
   (c) Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application f_α est bijective.
   (d) Déterminer $\mathrm{Ker}(f_1)$.
   (e) Est-ce qu'il existe une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f_0)$?
   (f) Est-ce qu'il existe une application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f_1)$?

2. Soient

   - $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   - $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par $g(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $g(\overrightarrow{e_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 2z \\ y + z \\ 2x - z \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que f est bijective, et déterminer f^{-1}.
   (b) Soit $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $i \circ f = g$. Calculer $i(\overrightarrow{x})$ pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$.
   (c) A quelle condition le vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ appartient-il à $\mathrm{Im}(h)$?

3. Soit f la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle 45° autour de l'axe Oy, et soit g la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle 120° autour de la droite $x = y = z$.

   (a) Déterminer les matrices de f, g, $f \circ g$, et $g \circ f$.
   (b) On peut prouver que la composition de deux rotations autour d'axes passant par l'origine est à nouveau une telle rotation. Déterminer l'axe et l'angle de rotation de $g \circ f$.