HEI Haute Ecole d'Ingénierie, HES-SO Valais

Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Algèbre Linéaire 2 - Série 5

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ II

1. Soient $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{v_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer si les familles $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}\}$, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$, $\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ et $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}\}$ sont liées ou libres.

   (b) Une des familles de (a) est une base de $\mathbb{R}^4$. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

   (c) Dans $\mathbb{R}^n$, si un vecteur $\overrightarrow{x}$ n'est pas combinaison linéaire de vecteurs $\overrightarrow{y_1}$, ..., $\overrightarrow{y_{n-1}}$, peut-on en déduire que la famille $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_1}, ..., \overrightarrow{y_{n-1}}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$? Si oui, justifier. Si non, donner un contre-exemple.

2. (a) Déterminer la distance du point $P(0, 1, -1, 2)$ à l'hyperplan H d'équation

   $$H : \; x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2.$$

   (b) Déterminer l'angle des hyperplans H_1 et H_2 donnés par

   $$H_1 : \; x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \text{ et } H_2 : \; 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -1.$$

3. Interpréter géométriquement les exercices 1, 2 et 3 de la Série 1.