Mathématiques appliquées 2 - Série 5

1. Pour étudier la corrosion, on a mesuré par ultrasons la perte maximale d'épaisseur (en 10^{-3}in) sur le fond de 20 réservoirs du même type et on a obtenu les valeurs suivantes.

$$40 \quad 55 \quad 55 \quad 55 \quad 60 \quad 70 \quad 75 \quad 85 \quad 85 \quad 90 \quad 91 \quad 92 \quad 94 \quad 95 \quad 95 \quad 98 \quad 100 \quad 115 \quad 125 \quad 125$$

(Valeurs adaptées de: Joshi, N.R., Materials Evaluation, pp. 946–849, 1994)

(a) Calculer Q_1, Q_2, Q_3, $\overline{x}$, s^2, s.

(b) Dessiner le boxplot des données.

(c) Dessiner un histogramme basé sur les intervalles $[35, 55[$, $[55, 75[$, $[75, 95[$, $[95, 115[$, $[115, 135[$.

a) $\frac{20+3}{4} = 5,75 \Rightarrow \boxed{Q_1 = \frac{60 + 3 \cdot 70}{4} = 67,5}$

$\boxed{Q_2 = 90,5}$

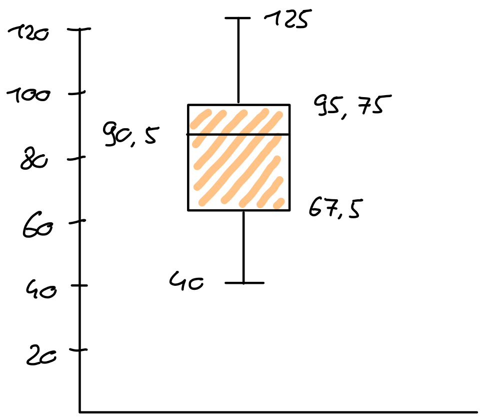
$\frac{60+1}{4} = 15,25 \Rightarrow \boxed{Q_3 = \frac{95 \cdot 3 + 98}{4} = 95,75}$

$\boxed{\bar{x} = \frac{1700}{20} = 85}$ $\quad \boxed{s^2 = 555,79}$ $\quad \boxed{s = 23,58}$

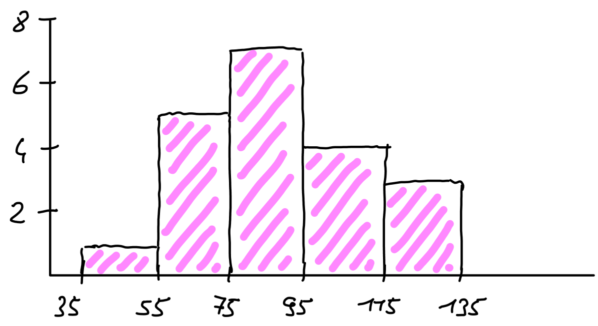
b) $IQR = 95,75 - 67,5 = 28,25$

$Q_1 - 1,5\, IQR = 67,5 - 42,375 = 25,125$

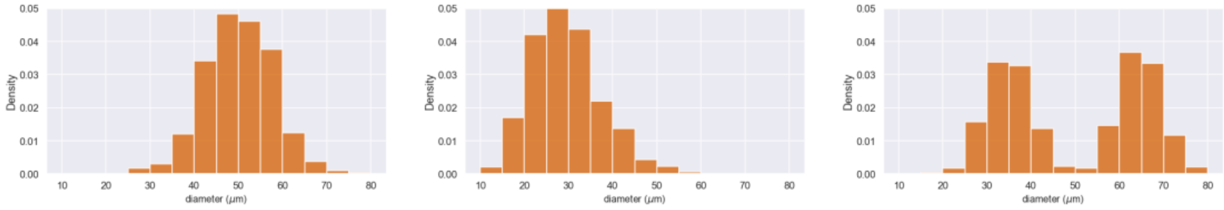
$Q_3 + 1,5\, IQR = 95,75 + 42,375 = 138,125$



c)

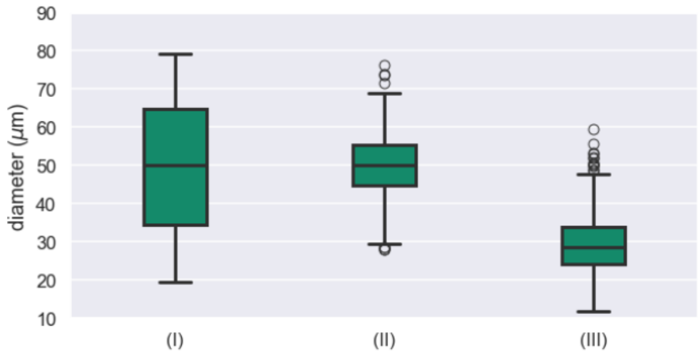


2. On considère les histogrammes suivants représentant la distribution de la taille (en μm) des particules d'une poudre.



A B C

(a) Associer chacun des boxplots suivants à l'histogramme qui lui correspond.



(b) Que peut-on dire de la poudre représentée par l'histogramme C ?

a) A → (II) médiane ≈ 50

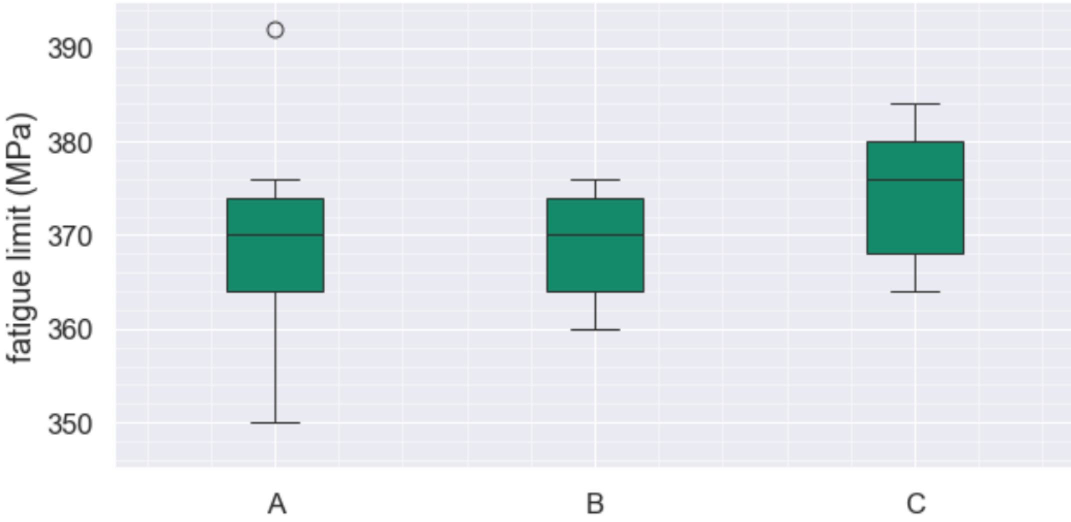
B → (III) médiane ≈ 30

C → (I) médiane ≈ 50, $Q_1 \approx 35$, $Q_3 \approx 65$

b) La poudre C est probablement un mélange → C_1 $\mu \approx 35$

→ C_2 $\mu \approx 65$

3. On étudie la limite d'endurance (en MPa) de câbles provenant de trois fabricants. Les données mesurées sont représentées par les boxplots suivants.



(a) Déterminer pour chaque fabricant les valeurs Q_1, Q_2, Q_3 et IQR.

(b) Quel câble résiste le mieux à la fatigue ? Pour quel fabricant la production est-elle la plus régulière ?

a) A : $Q_1 = 364$ $Q_2 = 370$ $Q_3 = 374$ $IQR = 10$

B : $Q_1 = 364$ $Q_2 = 370$ $Q_3 = 374$ $IQR = 10$

C : $Q_1 = 368$ $Q_2 = 376$ $Q_3 = 380$ $IQR = 12$

b) → le cable C est le plus resistant.

→ le cable B est le plus regulier.

4. L'indice d'iode (x, en gI/100g) et le nombre de cétane (y, sans dimension) ont été mesurés pour différents biodiesels. Les valeurs sont reportées dans le tableau suivant.

x	60	70	80	90	100
y	64	61	58	56	54

(a) Calculer $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_x, s_y, Cov(x, y) et Corr(x, y).

(b) Y a-t-il une relation linéaire entre x et y ?

(c) Déterminer l'équation de la droite de régression. Dessiner les valeurs mesurées et la droite de régression sur un même graphique.

a) $\bar{x} = 80$, $\bar{y} = 58,6$, $s_x = \sqrt{250} \approx 15,811$, $s_y = \sqrt{15,8} \approx 3,975$

$\text{Cov}(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{5} (x_i - 80)(y_i - 58,6) = -62,5$, $\text{Corr}(x,y) = \frac{-62,5}{62,85} = 0,9944$

b) Oui car Corr(x,y) est très proche de -1.

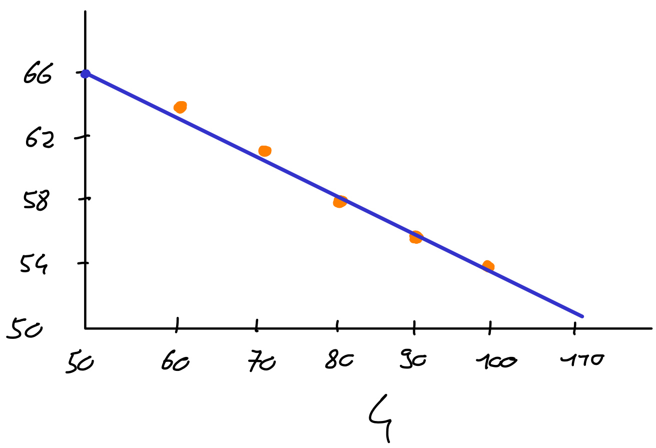
c)

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 1 \\ 70 & 1 \\ 80 & 1 \\ 90 & 1 \\ 100 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 64 \\ 61 \\ 58 \\ 56 \\ 54 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 & 1 \\ 70 & 1 \\ 80 & 1 \\ 90 & 1 \\ 100 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33000 & 400 \\ 400 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -400 \\ -400 & 33000 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5000} \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 \\ 61 \\ 58 \\ 56 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23190 \\ 293 \end{pmatrix}$$

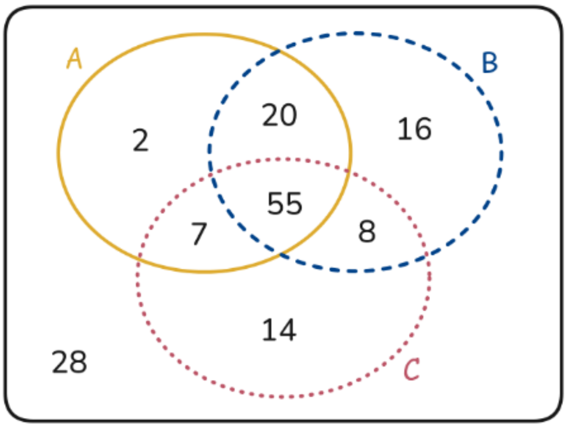
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{5000} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -400 \\ -400 & 33000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23190 \\ 293 \end{pmatrix} = \frac{1}{5000} \begin{pmatrix} -1250 \\ 393000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 \\ 78,6 \end{pmatrix}$$



Mathématiques appliquées 2 - Série 6

1. Le résultat d'un sondage auprès de 150 personnes sur la mobilité urbaine est résumé dans le diagramme suivant.

   A représente les personnes habitant à plus de 5 km du centre-ville,
   B représente les personnes utilisant leur voiture pour se rendre au travail
   et C les personnes qui seraient prêtes à se déplacer uniquement en transports publics.



   Déterminer pour un participant choisi au hasard :

   (a) $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

   (b) $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(\overline{A}|B)$ et $P(A|\overline{B})$.

   (c) La probabilité qu'une personne soit prête à utiliser uniquement les transports publics, sachant qu'elle habite à moins de 5 km du centre-ville.

a) $|\Omega| = 150$, $|A| = 84$, $|B| = 99$, $|C| = 84$, $|A \cap B| = 75$, $|A \cup B| = 108$

$\Rightarrow P(A) = \frac{84}{150} = 0{,}56$, $P(B) = \frac{99}{150} = 0{,}66$, $P(C) = \frac{84}{150} = 0{,}56$, $P(A \cap B) = \frac{75}{150} = 0{,}5$

$P(A \cup B) = \frac{108}{150} = 0{,}72$

b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{75}{99} = 0{,}\overline{75}$, $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{75}{84} = 0{,}893$

$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{24}{99} = 0{,}\overline{24} = 1 - P(A|B)$, $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{9}{51} = 0{,}176$

c) $P(C|\bar{A}) = \frac{P(C \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{22}{66} = 0{,}\overline{3}$

2. On effectue un test pour détecter une maladie qui touche 0.1 % de la population. La probabilité que le test donne un résultat positif si une personne est malade est de 0.95. Si la personne n'est pas maladie, la probabilité que le test donne un résultat négatif est également de 0.95.

   (a) Pour une personne prise au hasard dans la population, on considère les événements :
   M="la personne est malade"
   A="le test est positif".
   Déterminer $P(M)$, $P(\overline{M})$, $P(A|M)$ et $P(\overline{A}|\overline{M})$.

a) $P(M) = 0,1\% = 0,001$, $P(\bar{M}) = 0,999$

$P(A|M) = 0,95$

$P(\bar{A}|\bar{M}) = 0,95$

   (b) Calculer la probabilité que le test soit positif, sachant que la personne n'est pas malade et en déduire $P(\underset{A}{\cancel{M}})$.

   (c) Calculer la probabilité que la personne soit malade, sachant que le test a donné un résultat positif.

b) On cherche $P(A|\bar{M})$: $1 = \dfrac{P(\bar{M})}{P(\bar{M})} = \dfrac{P(A \cap \bar{M}) + P(\bar{A} \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = P(A|\bar{M}) + P(\bar{A}|\bar{M})$

$\Rightarrow P(A|\bar{M}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{M}) = 0,05$

$P(A) = P(A|\bar{M})P(\bar{M}) + P(A|M)P(M) = 0,05 \cdot 0,999 + 0,95 \cdot 0,001$

$= 0,0509$

c) $P(M|A) = \dfrac{P(A|M) \cdot P(M)}{P(A)} = \dfrac{0,95 \cdot 0,001}{0,0509} = 0,0187$

3. (Problème de Monty Hall)

Le candidat d'un jeu télévisé a devant lui trois portes fermées. Derrière l'une des porte se trouve une voiture et derrière chacune des 2 autres se trouve une chèvre.

Le présentateur demande au candidat de choisir l'une des portes, sans l'ouvrir. Ensuite, le présentateur ouvre l'une des portes restantes où se trouve une chèvre. Il demande alors au candidat s'il souhaite garder la porte qu'il a choisie ou s'il veut changer de porte.

(a) En supposant que le premier choix du candidat était la porte 1 et que le présentateur a ouvert la porte 3, quelle est la probabilité que le joueur trouve la voiture, s'il décide de rester sur son premier choix ?

(b) Quelle est la meilleure stratégie pour le candidat ?

Indication: utiliser les probabilités conditionnelles.

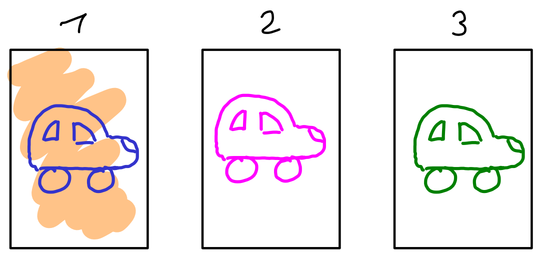
a) Pour $i \in \{1,2,3\}$ on définit

$G_i \to$ la voiture est derrière la porte i

$O_i \to$ le présetateur ouvre la porte i

$\Rightarrow P(G_1) = P(G_2) = P(G_3) = \frac{1}{3}$ (la voiture est placée aléatoirement derrière une des 3 portes)

$P(O_3 | G_1) = \frac{1}{2}$, $P(O_3 | G_2) = 1$, $P(O_3 | G_3) = 0$



choix candidat.e.x

$$\Rightarrow P(O_3) = \boxed{P(O_3 | G_1)} \cdot P(G_1) + \boxed{P(O_3 | G_2)} \cdot P(G_2) + \boxed{P(O_3 | G_3)} \cdot P(G_3)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

On garde son choix

$$P(G_1 | O_3) = \frac{P(O_3 | G_1) P(G_1)}{P(O_3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

On change de porte

b) $$P(G_2 | O_3) = \frac{P(O_3 | G_2) P(G_2)}{P(O_3)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Le raisonnement est similaire si le présentateur ouvre la porte 2.

En conclusion, mieux vaut changer son choix initial !

On pourrait aussi résoudre le problème de la manière suivante :

$G \to$ la personne gagne
$B \to$ la personne choisi la bonne porte

$$P(G) = P(G|B) \cdot P(B) + P(G|\bar{B}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{3} \cdot P(G|B) + \frac{2}{3} P(G|\bar{B})$$

<u>La personne ne change pas de porte :</u>

$P(G|B) = 1$
$P(G|\bar{B}) = 0$
$\Rightarrow P(G) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

<u>La personne change de porte :</u>

$P(G|B) = 0$
$P(G|\bar{B}) = 1$
$\Rightarrow P(G) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$