Modélisation mathématique en sciences du vivant

Filière LSE

2ème semestre
printemps 2025

Table des matières

Chapitre 1

Modèles mathématiques

1.1 Introduction

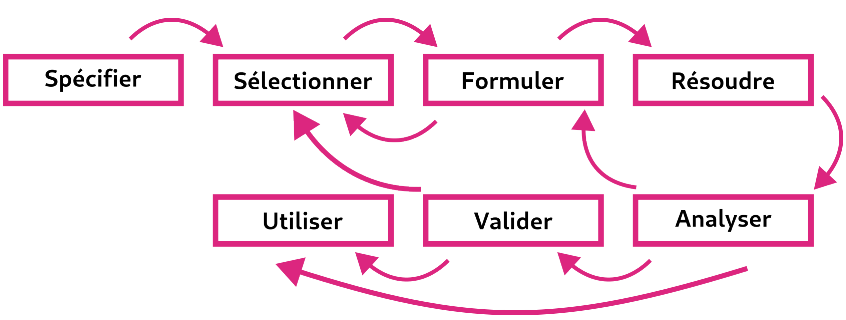
Définition
Un modèle est une représentation simplifiée d'un système qui a pour but de mieux le comprendre, de l'expliquer, ou d'en prédire le comportement. Un modèle mathématique est un modèle utilisant des instruments mathématiques.

Construction d'un modèle mathématique

Voici les différentes étapes de construction d'un modèle mathématique.

1. Explorer les données, spécifier le modèle (que veut-on modéliser ?).
2. Sélectionner le modèle mathématique (quelles fonctions ? Quelles variables ?).
3. Formuler le modèle mathématiquement (Poser les bonnes équations).
4. Résoudre le problème mathématique.
5. Analyser la solution (est-ce que le modèle correspond bien à la situation ?).
6. Valider le modèle (répéter le modèle sur d'autres données par exemple).
7. Utiliser le modèle

Les liens entre ces différentes étapes peuvent être résumé par la figure suivante.



1.2 Régression linéaire, modèles linéaires

Régression : idée générale

On considère n mesures de deux dimensions (une sur l'axe des x, l'autre sur l'axe des y)

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n).$$

On suppose que ces mesures sont issues d'une même fonction f inconnue. C'est-à-dire que

$$\boxed{f(x_i) \approx y_i.}$$

Le but d'une régression est de minimiser les résidus qui sont définis, pour $i = 1, \dots, n$, par

$$\boxed{y_i - f(x_i).}$$

Il est possible d'exprimer les résidus de manière vectorielle, à l'aide des vecteurs

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Les résidus sont encapsulés dans le vecteur-erreur défini par

$$\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix} y_1 - f(x_1) \\ \vdots \\ y_n - f(x_n) \end{pmatrix}.}$$

Résoudre un problème de moindres carrés consiste à minimiser la norme de $\vec{r}$. C'est-à-dire minimiser

$$\boxed{\|\vec{r}\|^2 = \left(y_1 - f(x_1)\right)^2 + \cdots + \left(y_n - f(x_n)\right)^2.}$$

Régression linéaire

Pour la régression linéaire, on suppose que la fonction f est linéaire. C'est-à-dire de la forme $f(x) = ax + b$. La droite de régression est de la forme

$$\boxed{y = ax + b}$$

avec

$$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = \bar{y} - a\bar{x}.}$$

Les valeurs $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les moyennes respectives :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

La droite de régression est la meilleure droite (au sens de moindres carrés).

Coefficient de corrélation

Définition

Le coefficient de corrélation R indique combien les données sont alignées. Il est défini par

$$\boxed{R = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.}$$

Le coefficient de corrélation possède les propriétés suivantes :

- Il est toujours calculable, sauf si tous les x_i ou tous les y_i sont égaux.
- Il est de même signe que a.
- Si $|R| = 1$ alors les points sont exactement alignés.
- Il est tel que $-1 \leq R \leq 1$, ce qui implique $0 \leq R^2 \leq 1$.

Exemple

On considère le tableau de données suivant :

x_i	1	2	3
y_i	4.8	7.3	8.9

Les moyennes respectives sont données par

$$\bar{x} = 2 \quad \text{et} \quad \bar{y} = 7.$$

Pour trouver la droite de régression, il faut trouver les valeurs de a et de b.

- Pour a on obtient

$$\begin{aligned} a &= \frac{(1-2)(4.8-7)+(2-2)(7.3-7)+(3-2)(8.9-7)}{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2} \\ &= \frac{4.1}{2} = 2.05. \end{aligned}$$

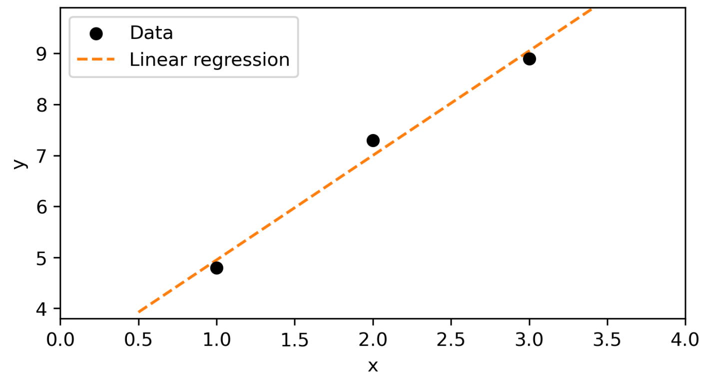
- Pour b on obtient

$$b = 7 - 2.05 \cdot 2 = 2.9.$$

La droite de régression est donc donnée par

$$\boxed{y = 2.05 \cdot x + 2.9.}$$

Voici une figure qui représente les données et la droite de régression.



Le coefficient de corrélation est donné par

$$R = \frac{4.1}{\sqrt{2\left((4.8-7)^2+(7.3-7)^2+(8.9-7)^2\right)}} = 0.992.$$

1.3 Changement d’échelle

La relation linéaire n’est pas la seule possible entre des variables. Mais il est parfois utile de modifier les variables pour obtenir une relation linéaire.

Définition

Soient x et y des variables. Un changement de variables est une transformation des variables x et y de la forme

$$\boxed{X = \phi(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{Y = \psi(y)}$$

avec ϕ et ψ des fonctions continues et inversibles. Un changement de variables $X = \phi(x)$, $Y = \psi(y)$ induit une relation linéaire lorsque

$$\boxed{Y = aX + b}$$

Exemple

Soient des variables x et y liées par la relation

$$y = B \cdot e^{\frac{a}{x}}$$

avec a et $B > 0$ des constantes. Le changement de variables donné par

$$\boxed{X = \frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{Y = \ln(y)}$$

induit une relation linéaire car

$$Y = \ln(y) = \ln\left(B \cdot e^{aX}\right) = \ln(B) + \ln\left(e^{aX}\right) = ln(B) + aX.$$

Définition

Voici deux changements de variables fréquemment utilisés :

- Un graphe semi-log est un graphe obtenu après la transformation

$$\boxed{X = \ln(x)} \quad \text{OU} \quad \boxed{Y = \ln(y).}$$

- Un graphe log-log est un graphe obtenu après la transformation

$$\boxed{X = \ln(x)} \quad \text{ET} \quad \boxed{Y = \ln(y).}$$

Modèle logarithmique

Un modèle

$$\boxed{y = aX + b}$$

avec la transformation

$$\boxed{X = \ln(x)}$$

ce qui implique

$$\boxed{y = a\ln(x) + b} \tag{1.1}$$

est un modèle logarithmique pour y en fonction de x.

Exemple

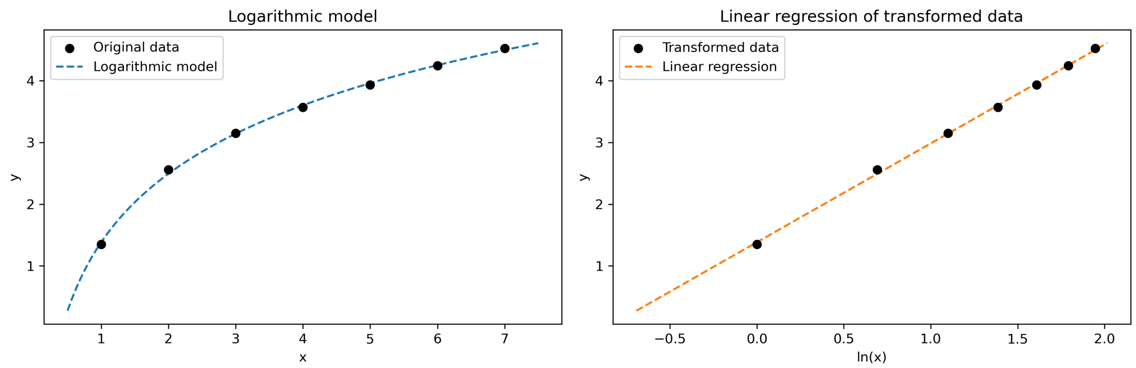
On considère le tableau de données suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1.35	2.56	3.15	3.57	3.93	4.24	4.52

et le tableau de données transformées :

$\ln(x_i)$	0.00	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95
y_i	1.35	2.56	3.15	3.57	3.93	4.24	4.52

Il est maintenant possible d'effectuer une régression linéaire avec les données transformées et de tracer le modèle logarithmique à l'aide de la formule (1.1).



Modèle exponentiel

Un modèle

$$\boxed{Y = ax + b}$$

avec la transformation

$$\boxed{Y = \ln(y)}$$

ce qui implique

$$\ln(y) = ax + b \implies y = e^{ax+b}$$

et donc

$$\boxed{y = C \cdot e^{ax}} \quad \text{avec} \quad \boxed{C = e^b} \tag{1.2}$$

est un modèle exponentiel pour y en fonction de x.

Exemple

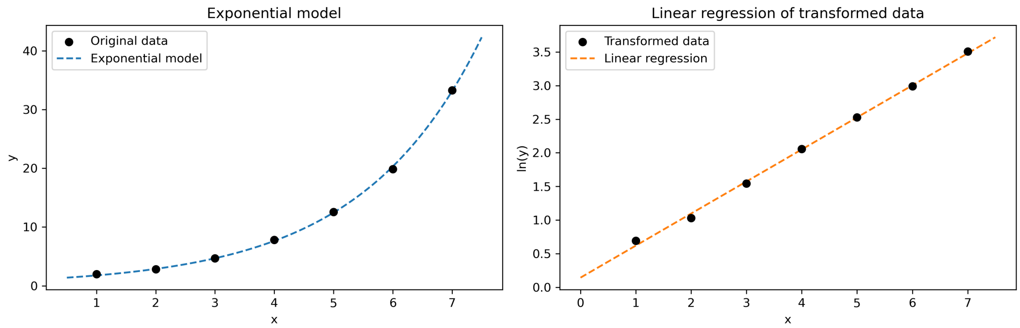
On considère le tableau de données suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	2.00	2.80	4.68	7.84	12.56	19.90	33.31

et le tableau de données transformées :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$\ln(y_i)$	0.70	1.03	1.54	2.06	2.53	2.99	3.51

Il est maintenant possible d'effectuer une régression linéaire avec les données transformées et de tracer le modèle exponentiel à l'aide de la formule (1.2).



Modèle puissance

Un modèle

$$\boxed{Y = aX + b}$$

avec les transformations

$$\boxed{Y = \ln(y)} \quad \text{et} \quad \boxed{X = \ln(x)}$$

ce qui implique

$$\ln(y) = a\ln(x) + b \implies y = e^{a\ln(x)+b} = C \cdot x^a$$

et donc

$$\boxed{y = C \cdot x^a} \quad \text{avec} \quad \boxed{C = e^b} \tag{1.3}$$

est un modèle puissance pour y en fonction de x.

Exemple

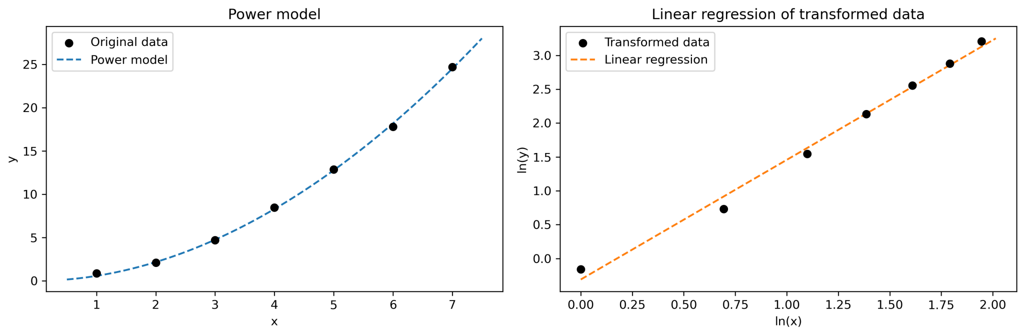
On considère le tableau de données suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0.85	2.08	4.70	8.45	12.87	17.80	24.69

et le tableau de données transformées :

$\ln(x_i)$	0.00	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95
$\ln(y_i)$	-0.16	0.73	1.55	2.13	2.56	2.88	3.21

Il est maintenant possible d'effectuer une régression linéaire avec les données transformées et de tracer le modèle puissance à l'aide de la formule (1.3).



1.4 Autres changement de variables

Modèle hyperbole

Définition

Un modèle de la forme

$$\boxed{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$$

est un modèle hyperbole.

Ce modèle possède trop de paramètres (a, b, c, d) pour pouvoir faire une régression linéaire (qui ne contient que deux paramètres, car de la forme $v = \alpha u + \beta$). Cependant, cela devient possible si on fixe certains paramètres à zéro.

Cas $b = 0$

Le modèle linéaire correspondant est

$$\boxed{v = \alpha u + \beta}$$

avec les transformations,

$$\boxed{v = \frac{1}{y}} \quad \text{et} \quad \boxed{u = \frac{1}{x}.}$$

Le changement de variables donne

$$\frac{1}{y} = \alpha\frac{1}{x} + \beta = \alpha\frac{1}{x} + \beta\frac{x}{x} = \frac{\alpha+\beta x}{x} \implies \boxed{y = \frac{x}{\beta x+\alpha}.}$$

et donc

$$\boxed{y = \frac{x}{\frac{c}{a}x + \frac{d}{a}} = \frac{ax}{cx+d}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{c}{a} = \beta} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d}{a} = \alpha.}$$

Propriétés

Un modèle hyperbole avec $b = 0$ possède les propriétés suivantes :

- Une A.V. en $x = \frac{-\alpha}{\beta}$.
- Une A.H. en $y = \frac{1}{\beta}$.
- La fonction passe par le point $(0, 0)$.

Exemple

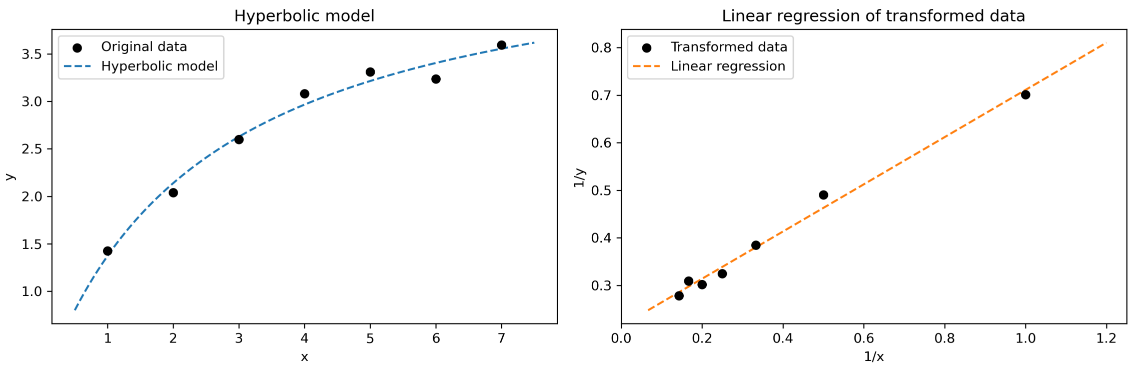
On considère le tableau de données suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1.43	2.04	2.60	3.08	3.31	3.24	3.60

et le tableau de données transformées :

$u_i = \frac{1}{x_i}$	1.00	0.50	0.33	0.25	0.20	0.17	0.14
$v_i = \frac{1}{y_i}$	0.70	0.49	0.38	0.32	0.30	0.31	0.28

Il est maintenant possible d'effectuer une régression linéaire avec les données transformées et de tracer le modèle hyperbole correspondant.



Cas $a = 0$

Le modèle linéaire correspondant est

$$\boxed{v = \alpha u + \beta}$$

avec les transformations,

$$\boxed{v = \frac{1}{y}} \quad \text{et} \quad \boxed{u = x}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{y} = \alpha x + \beta$$

et donc

$$\boxed{y = \frac{b}{cx + d}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{c}{b} = \alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d}{b} = \beta.}$$

Cas $d = 0$

Le modèle linéaire correspondant est

$$\boxed{v = \alpha u + \beta}$$

avec les transformations,

$$\boxed{v = y} \quad \text{et} \quad \boxed{u = \frac{1}{x}}$$

ce qui implique

$$y = \alpha \frac{1}{x} + \beta$$

et donc

$$\boxed{y = \frac{ax + b}{cx}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{a}{c} = \beta} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{b}{c} = \alpha.}$$

Cas $c = 0$

Lorsque $c = 0$, le modèle devient

$$\boxed{\frac{ax + b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}.}$$

Ce qui est déjà un modèle linéaire.

Modèle logistique (sigmoïde)

Définition

Un modèle de la forme

$$\boxed{y = \frac{K}{1 + ae^{-rt}}}$$

est modèle logistique ou sigmoïde.

Comme pour le modèle hyperbole, il faut à nouveau fixer certains paramètres.

Cas r fixé

Lorsque r est fixé, on retombe sur un modèle hyperbole :

$$\boxed{y = \frac{K}{1 + aX}} \quad \text{avec} \quad \boxed{X = e^{-rt}.}$$

Cas K fixé

Lorsque K est fixé, le modèle linéaire correspondant est

$$\boxed{v = \alpha u + \beta}$$

avec les transformations

$$\boxed{v = \ln\left(\frac{K}{y} - 1\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{u = t}$$

ce qui implique

$$\ln\left(\frac{K}{y} - 1\right) = \alpha t + \beta \implies \frac{K}{y} = e^{\alpha t + \beta} + 1$$
$$\implies \boxed{y = \frac{K}{e^{\beta} e^{\alpha t} + 1}}$$

et donc

$$\boxed{y = \frac{K}{1 + ae^{-rt}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{a = e^{\beta}} \quad \text{et} \quad \boxed{-r = \alpha}$$

est un modèle logistique ou sigmoïde pour y en fonction de x.

Propriétés

Un modèle logistique avec K constant, si $r > 0$, possède les propriétés suivantes :

- Une A.H. en $y = 0$ en $-\infty$.
- Une A.H. en $y = K$ en $+\infty$.
- La fonction passe par le point $(0, \frac{K}{1+a})$.

Exemple

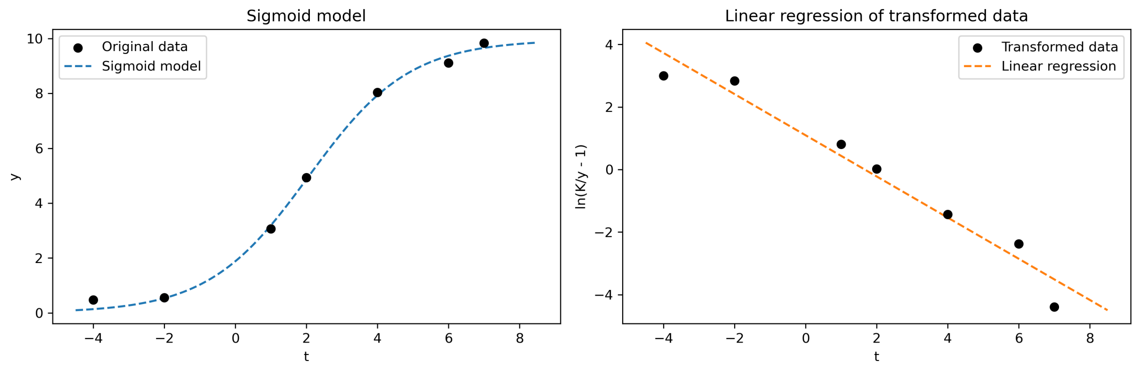
On considère le tableau de données suivant :

t_i	-4	-2	1	2	4	6	7
y_i	0.47	0.55	3.07	4.93	8.04	9.11	9.83

et le tableau de données transformées :

$u_i = t_i$	-4	-2	1	2	4	6	7
$v_i = \ln\left(\frac{K}{y_i} - 1\right)$	3.00	2.84	0.81	0.02	-1.44	-2.38	-4.39

Il est maintenant possible d'effectuer une régression linéaire avec les données transformées et de tracer le modèle logistique correspondant.



1.5 Interpolation, régression polynomiale

Polynôme d'interpolation

Définition

Le polynôme d'interpolation des points

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

est le polynôme

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}} \tag{1.4}$$

de degré minimal, dont le graphe passe par les points (x_i, y_i) pour $i = 1, \dots, n$.
Ce polynôme est donné par la solution du système de n équations à n inconnues $(a_0, \dots, a_{n-1})$ donné par

$$\boxed{p(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n.}$$

Si $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-1}$ sont les solutions de respectivement $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, alors il est possible de trouver le polynôme d'interpolation en utilisant la formule (1.4) :

$$\boxed{p(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \dots + \hat{a}_{n-1} x^{n-1}.}$$

Théorème

Le polynôme d'interpolation possède les propriétés suivantes :

- Il existe toujours si $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$.
- Il est unique.
- Il est de degré $\leq n - 1$.

Cas $n = 3$

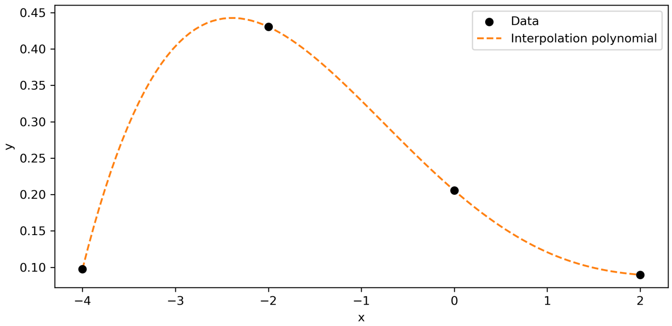
Pour $n = 3$, on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3. \end{cases}$$

Le polynôme d'interpolation correspondant est donc donné par

$$\boxed{p(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2.}$$

La figure suivante montre un exemple de polynôme d'interpolation.



Exemple

On considère le tableau de données suivant :

x_i	1	2	3
y_i	2	3	5

Pour trouver le polynôme d'interpolation, il faut résoudre le système donné par

$$\begin{cases} a_0 + 1a_1 + 1^2 a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 = 3 \\ a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 = 5. \end{cases}$$

Ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} a_0 + 1a_1 + 1a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 5. \end{cases}$$

La solution de ce système pour a_0, a_1, a_2 est donnée par

$$\hat{a}_0 = 2 \quad \hat{a}_1 = -\frac{1}{2} \quad \hat{a}_2 = \frac{1}{2}.$$

Le polynôme d'interpolation est donc donné par

$$\boxed{p(x) = 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2}.$$

Régression polynomiale

Définition

La régression polynomiale permet de trouver le meilleur polynôme de degré m (au sens des moindres carrés). Il s'obtient en résolvant les équations normales.

Les équations normales forment le système de $m+1$ équations à $m+1$ inconnues $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ donné par

$$\boxed{\sum_{i=0}^{m} a_i \left(\vec{x}^i \cdot \vec{x}^j\right) = \vec{y} \cdot \vec{x}^j, \quad j = 0, \ldots, m,}$$

avec

$$\boxed{\vec{x}^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.}$$

Définition

Le polynôme ajusté est de la forme

$$\boxed{f(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \ldots + \hat{a}_m x^m}$$

où

$$(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_m)$$

est la solution des équations normales.

Cas $m = 2$

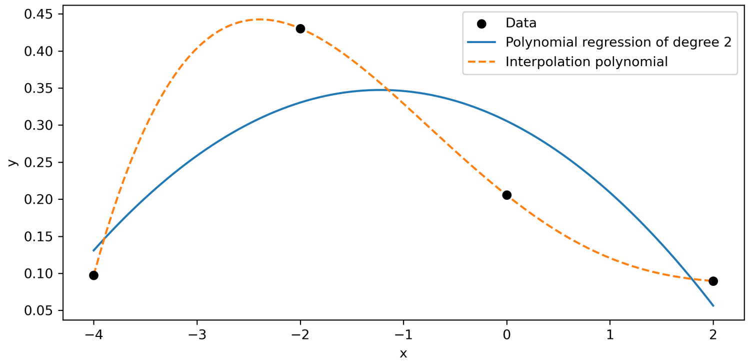
Pour $m = 2$, on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} a_0 \left(\vec{x}^0 \cdot \vec{x}^0\right) + a_1 \left(\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^0\right) + a_2 \left(\vec{x}^2 \cdot \vec{x}^0\right) = \left(\vec{y} \cdot \vec{x}^0\right) \\ a_0 \left(\vec{x}^0 \cdot \vec{x}^1\right) + a_1 \left(\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^1\right) + a_2 \left(\vec{x}^2 \cdot \vec{x}^1\right) = \left(\vec{y} \cdot \vec{x}^1\right) \\ a_0 \left(\vec{x}^0 \cdot \vec{x}^2\right) + a_1 \left(\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^2\right) + a_2 \left(\vec{x}^2 \cdot \vec{x}^2\right) = \left(\vec{y} \cdot \vec{x}^2\right). \end{cases}$$

Le polynôme ajusté correspondant est donc donné par

$$\boxed{f(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 x^2.}$$

La figure suivante montre la différence entre un polynôme de régression de degré 2 et le polynôme d'interpolation correspondant.



Exemple

On considère le tableau de données suivant :

x_i	1	2	3
y_i	2	3	5

Le but est de trouver le polynôme ajusté de degré 1.

On commence par définir les vecteurs $\vec{x}^k$ et $\vec{y}$:

$$\vec{x}^k = \begin{pmatrix} 1^k \\ 2^k \\ 3^k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Les équations normales pour trouver un polynôme de degré 1 sont données par le système

$$\begin{cases} a_0\left(\vec{x}^0 \cdot \vec{x}^0\right) + a_1\left(\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^0\right) = \left(\vec{y} \cdot \vec{x}^0\right) \\ a_0\left(\vec{x}^0 \cdot \vec{x}^1\right) + a_1\left(\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^1\right) = \left(\vec{y} \cdot \vec{x}^1\right). \end{cases}.$$

En remplaçant par les valeurs du tableau de données, on obtient

$$\begin{cases} 3a_0 + 6a_1 = 10 \\ 6a_0 + 14a_1 = 23 \end{cases} \implies \hat{a}_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \hat{a}_1 = \frac{3}{2}.$$

Le polynôme de degré 1 ajusté, obtenu en résolvant le système linéaire, est donné par

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2}x.}$$

Chapitre 2

Equations différentielles

2.1 Modéliser à l'aide d'équations différentielles

Définition

Une équation différentielle (ED) est une équation qui contient :

- une fonction inconnue (souvent notée $y(t)$),
- certaines des dérivées de cette fonction ($y'(t), y''(t), \dots$),
- la variable de la fonction (souvent notée t).

Souvent on notera y à la place de $y(t)$, y' à la place de $y'(t)$ et ainsi de suite.

Définition

Soit une équation différentielle de fonction inconnue y.

- L'ordre d'une ED est l'ordre de la plus haute dérivée de y qui apparaît.
- Une solution particulière d'une ED est une fonction $y(t)$ qui la satisfait pour tout t.
- La solution générale d'une ED est l'ensemble de toutes les solutions particulières de l'ED.
- Résoudre une ED revient à trouver la solution générale de l'ED.

! Attention, on cherche les fonctions y, PAS les valeurs de t.

Définition

Une solution constante ou un équilibre d'une ED à fonction inconnue y est une solution $y(t)$ telle que

$$\boxed{y' = 0} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{y = k, \quad k \in \mathbb{R}.}$$

Exemple

Soit l'équation différentielle

$$\boxed{y' = 2y.}$$

- C'est une ED d'ordre 1.
- La fonction
$$y(t) = e^{2t}$$
est une solution particulière. En effet,
$$y'(t) = \left(e^{2t}\right)' = 2e^{2t} = 2y(t).$$
- La solution constante de l'ED est donnée par
$$y'(t) = 0 \iff 2y(t) = 0 \iff y(t) = 0.$$

La solution générale de cet ED sera calculée plus tard.

2.1.1 Croissance de populations

Les deux exemples suivants sont importants et sont souvent utilisés, notamment en biologie, pour décrire des croissances de populations.

Exemple

L'équation différentielle exponentielle est définie par

$$\boxed{N' = rN.}$$

Le paramètre r est le taux de variation de la population.

- Si $r > 0$ la population croît.
- Si $r < 0$ la population décroît.
- Si $r = 0$ la population reste constante.

Cette ED a comme solution générale

$$\boxed{N(t) = Ce^{rt}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

et comme solution constante

$$\boxed{N = 0.}$$

Exemple

L'équation différentielle logistique est définie par

$$\boxed{N' = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N.}$$

Le paramètre $K > 0$ est la capacité biotique du milieu.

La solution générale de l'ED est formée des fonctions

$$\boxed{N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

et des solutions constantes

$$\boxed{N = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{N = K.}$$

2.2 Champs de directions d'une ED

Définition

Une ED d'ordre 1 est sous forme explicite si elle est de la forme

$$\boxed{y' = F(t.y)}$$

avec $F(t, y)$ qui ne contient PAS y'.

- Un point (t_0, y_0) est appellé condition initiale pour l'ED.
- Le graphe de la fonction $y(t)$ qui passe par (t_0, y_0) est une courbe solution de l'ED.
- La fonction $y(t)$ telle que $y' = F(t, y)$ et $y(t_0) = y_0$ est une solution particulière de l'ED.
- L'ensemble de toutes les solutions particulières possibles est l'ensemble des solutions ou la solution générale de l'ED.

Dans ce cas, il est possible de représenter graphiquement l'ED à l'aide d'un champ de directions.

2.2.1 Construction d'un champ de direction

Comme y' est la dérivée de la fonction y, c'est aussi sa pente. Donc, si une ED est sous forme explicite, on peut connaître la pente de cette fonction en tout point (t, y) où $F(t, y)$ existe.

Exemple

Soit l'ED définie par

$$\boxed{y' = t^2 - y.}$$

La pente au point $(t, y) = (2, 3)$ est donnée par

$$2^2 - 3 = 1.$$

Concrètement, pour dessiner un champ de vecteur, on procède de la manière suivante :

- On calcule les pentes y' pour des valeurs de t et y que l'on choisit.
- On dessine sur un système d'axes (t, y) (ce qui veut dire que l'axe horizontal est t et l'axe verticale est y) des flèches avec les pentes correspondantes.

Exemple

Soit l'ED définie par

$$\boxed{y' = t^2 - y.}$$

Il est possible de calculer la pente pour certaines valeurs de (t, y) :

(t, y)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
y'	0	1	-1	0	1	1	2	2	0

Il est ensuite possible de représenter les différentes pentes sur un graphe comme représenté dans la Figure 1, à gauche.

En pratique, on le fait numériquement pour un grand nombre de points pour avoir une meilleure idée de la dynamique de l'ED, c'est le champ de directions (voir Figure 1, à droite). La solution générale (on verra plus tard comment la calculer) est donnée par

$$\boxed{y = Ce^{-t} + t^2 - 2t + 2.}$$

Le point $(-1, -1)$ est une condition initiale. La fonction $y(t)$ telle que $y(-1) = -1$ est la solution particulière correspondante. En remplaçant t et y par -1 dans la solution générale, on obtient

$$Ce^1 + 1 + 2 + 2 = -1 \implies C = \frac{-6}{e},$$

et donc la solution particulière vaut

$$\boxed{y = \frac{-6}{e}e^{-t} + t^2 - 2t + 2.}$$

La Figure 1, à droite, représente le champ de vecteur de cette ED et la courbe solution pour la condition initiale $y(-1) = -1$.

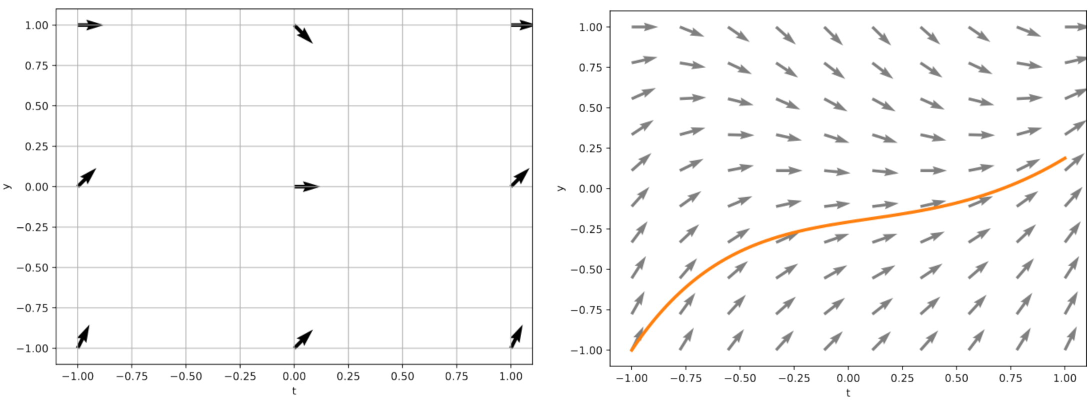


Figure 1

2.3 Equations différentielles séparables (ordre 1)

Soit

$$y' = F(t, y)$$

une ED sous forme explicite.

Définition

Si l'ED peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{y' = g(t) \cdot h(y).}$$

avec

- g(t) une fonction qui dépend de t, mais PAS de y
- h(y) une fonction qui dépend de y, mais PAS de t.

Dans ce cas, on dit que l'ED est séparable.

2.3.1 Méthode de résolution

Voici une méthode de résolution pour une ED séparable

$$\boxed{y' = g(t) \cdot h(y),}$$

Théorème

1. Bien définir les fonctions $g(t)$ et $h(y)$.
2. Chercher les solutions constantes, en résolvant

$$\boxed{h(y) = 0.}$$

3. Chercher les autres solutions de l'ED en séparant puis en intégrant. Ce qui revient à résoudre l'équation donnée par

$$\boxed{\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt.}$$

4. La solution générale de l'ED séparable est donnée par les solutions obtenues dans les points 2. et 3.

Exemple

Soit l'équation différentielle

$$\boxed{y' = 2y.}$$

C'est une ED séparable.

1. $g(t) = 2$ et $h(y) = y$.
2. La solution constante est donnée par

$$2y = 0 \iff y = 0.$$

3. Les autres solutions sont données par

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2dt.$$

Il est possible de résoudre chaque intégrale.

- L'intégrale de gauche donne

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + D_1, \quad D_1 \in \mathbb{R}.$$

- L'intégrale de droite donne

$$\int 2dt = 2t + D_2, \quad D_2 \in \mathbb{R}.$$

En combinant les deux résultats, on obtient

$$\begin{aligned} \ln|y| = 2t + D &\iff |y| = e^D e^{2t} \iff y = \pm e^D e^{2t} \\ &\iff y = Ce^{2t} \end{aligned}$$

Avec $D = D_2 - D_1$ et $C = \pm e^D$.

4. Lorsque $C = 0$, on obtient $y = 0$. La solution générale de cette ED séparable est donc

$$\boxed{y = Ce^{2t}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Remarque

Voici deux remarques importantes.

1. La solution générale aura toujours un paramètre libre issu de la constante d'intégration.
2. Pour trouver une solution particulière, on fixe une condition initiale

$$\boxed{y(t_0) = y_0}$$

ce qui permet de trouver une valeur pour le paramètre libre.

Exemple

L'exemple précédent

$$\boxed{y' = 2y}$$

a comme solution générale

$$y = Ce^{2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En prenant la condition initiale

$$y(0) = 2,$$

on obtient

$$y(0) = Ce^{2\cdot 0} = Ce^0 = C.$$

Ce qui implique

$$y(0) = 2 \iff C = 2.$$

La solution particulière correspondant à la condition initiale $y(0) = 2$ est donnée par

$$\boxed{y = 2e^{2t}.}$$

2.4 Equations différentielles linéaires (ordre 1)

Soit

$$y' = F(t, y)$$

une ED sous forme explicite.

Définition

Si l'ED peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{y' = a(t) \cdot y + b(t)}$$

avec

- a(t) une fonction qui dépend de t, mais PAS de y
- b(t) une fonction qui dépend de t, mais PAS de y.
- La fonction y toute seule (pas de $y^2, \sqrt{y}, \sin(y), ...$).

Dans ce cas, on dit que l'ED est linéaire.

Définition

Soit une ED linéaire.

$$y' = a(t) \cdot y + b(t)$$

1. Elle est homogène si $b(t) = 0$.
2. Elle est inhomogène si $b(t) \neq 0$.
3. L'équation homogène associée à une équation linéaire inhomogène est obtenue en posant $b(t) = 0$.

Exemple

L'ED définie par

$$\boxed{y' = ty + 2}$$

est linéaire et inhomogène.
Son équation homogène associée est donné par

$$\boxed{y' = ty.}$$

Remarque

Soit $y' = a(t)y + b(t)$ une ED linéaire.

1. Il n'y a PAS de lien entre linéaire et séparable.
   - L'ED
     $$\boxed{y' = ty^2 + 2}$$
     n'est ni linéaire, ni séparable.
   - l'ED
     $$\boxed{y' = ty + 2}$$
     est linéaire, mais pas séparable.
   - L'ED
     $$\boxed{y' = ty^2}$$
     n'est pas linéaire, mais est séparable.
   - L'ED
     $$\boxed{y' = ty}$$
     est linéaire et séparable.
2. Linéaire et homogène $\implies$ séparable, mais l'inverse est faux.

Théorème

Soit une ED linéaire.

$$y' = a(t)y + b(t)$$

1. Soit la fonction y_p, une solution particulière de l'équation inhomogène
   $$\boxed{y_p' = a(t)y_p + b(t).}$$
2. Soit y_h la solution générale de l'équation homogène associée
   $$\boxed{y_h' = a(t)y_h.}$$
3. Alors
   $$\boxed{y_i = y_h + y_p}$$
   est la solution générale de l'ED inhomogène.

2.4.1 Méthode de résolution

Voici une méthode de résolution pour une ED linéaire

$$\boxed{y' = a(t) \cdot y + b(t),}$$

Théorème

1. Bien définir les fonctions $a(t)$ et $b(t)$.
2. Calculer

   $$\boxed{A(t) = \int a(t)dt}$$ SANS la constante d'intégration.

   La solution de l'équation homogène associée est donnée par

   $$\boxed{y_h = Ce^{A(t)}}$$

3. Calculer

   $$\boxed{\int \frac{b(t)}{e^{A(t)}}dt}$$ SANS la constante d'intégration.

   Une solution particulière de l'équation inhomogène est donnée par

   $$\boxed{y_p = \left(\int \frac{b(t)}{e^{A(t)}}dt\right) \cdot e^{A(t)}}$$

4. La solution générale de l'ED linéaire inhomogène est donnée par

   $$\boxed{y_i = y_h + y_p}$$

Exemple

Soit l'équation différentielle

$$\boxed{y' = \frac{y}{t} + t^2}$$

et la condition initiale

$$y(1) = -4.$$

C'est une équation linéaire

1. $a(t) = \frac{1}{t}$ et $b(t) = t^2$.
2. La primitive de $a(t)$ sans la constante d'intégration est donnée par

$$\int a(t)dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|$$

La solution de l'ED homogène associée est donnée par

$$\boxed{y_h = Ce^{A(t)} = Ce^{\ln|t|} = Ct, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

3. L'intégrale

$$\boxed{\int \frac{b(t)}{e^{A(t)}}dt = \int \frac{t^2}{t}dt = \int tdt = \frac{t^2}{2}}$$

sans la constante d'intégration permet de trouver une solution particulière de l'ED inhomogène

$$\boxed{y_p = \frac{t^2}{2} \cdot t = \frac{t^3}{2}.}$$

4. La solution générale de l'ED linéaire inhomogène est donnée par

$$\boxed{y_i = y_h + y_p = Ct + \frac{t^3}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

En utilisant la condition initiale, on obtient

$$\boxed{y(1) = -4 \iff C + \frac{1}{2} = -4 \iff C = -4 - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}.}$$

La solution du problème à condition initiale est donnée par

$$\boxed{y(t) = -\frac{9}{2}t + \frac{t^3}{2} = \frac{t}{2}(t^2 - 9).}$$