Le noyau de f est $\mathrm{Ker}(f) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$
$(= f^{-1}(\vec{0})$, la préimage de $\vec{0})$
Ex: $f(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \to \quad A = 0_{m,n}$

$\mathrm{Im}(f) := \{\vec{0}\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \quad \mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \mathbb{R}^2$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont lin. indé.

(Rem: ce sont les colonnes de A!)

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ x+y=0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \end{array} \right\}$$