Noyau et image d'une application linéaire

Le noyau de f est :

$$\mathrm{Ker}(f) := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$$

(c'est-à-dire $f^{-1}(\vec{0})$, la préimage de $\vec{0}$)

$$\exists \vec{x}, f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A = 0_{m,n}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{\vec{0}\right\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$$

Exemple :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants)

Remarque : ce sont les colonnes de A !

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$