HEI Haute Ecole d'Ingénierie, HES-SO Valais

Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Algèbre Linéaire 2 - Série 6

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ III

1. Soient $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \frac{1}{\sqrt{266}} \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la norme de $3\overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2} + 5\overrightarrow{v_3}$.
   (c) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$.

2. Implémenter l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans le langage de votre choix. L'utiliser pour orthonormaliser les familles libres de l'exercice 1(a) de la Série 5.

3. Soient $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi que $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{U} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ et $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{U}$, et celle de la base canonique à la base $\mathcal{V}$.
   (c) Calculer la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{V}$, et celle de la base $\mathcal{V}$ à la base $\mathcal{U}$.
   (d) Soit $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (dans la base canonique). Ecrire la représentation de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{U}$ de deux manières:
      (i) en passant de la base canonique à la base $\mathcal{U}$.
      (ii) en écrivant d'abord $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{V}$, puis en faisant un changement de base pour passer de la base $\mathcal{V}$ à la base $\mathcal{U}$.
   (e) Appliquer le processus de Gram-Schmidt sur la base $\mathcal{U}$ et sur la base $\mathcal{V}$. Soient $\mathcal{U}^\perp$ et $\mathcal{V}^\perp$ les bases orthonormées ainsi obtenues. Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{U}^\perp$ à $\mathcal{V}^\perp$. Calculer $\det P$, ainsi que les produits scalaires respectifs des colonnes de P entre elles.