Campus Energypolis
1950 SION
Tél. +41 58 606 85 23

Mathématiques Discrètes - Série 3

Combinatoire II

1. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n-1$. Prouver l'identité

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i} = (-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

à l'aide d'une induction sur n (et donc k fixé), puis d'une induction sur k (et donc n fixé).

(b) Soient $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq m, n$. Prouver l'identité

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

2. Peach commence son niveau tout en bas du château de Bowser. Le château de Bowser est un carré de côté n, et Bowser se trouve tout en haut de la plus haute tour du château, exactement à l'opposé de Peach. Comme c'est le niveau final, Peach ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut, de 1 unité à chaque fois.

   (a) Formaliser mathématiquement la situation: quel est l'ensemble des positions possibles pour Peach ? Quels sont les connexions possibles entre ces positions ?

   (b) Caractériser les positions qui se trouvent sur l'autre diagonale du carré (c'est-à-dire celle qui relie les sommets diamétralement opposés qui ne sont ni la position initiale de Peach, ni la position de Bowser).

   (c) Combien Peach a-t-elle d'itinéraires possibles si elle doit absolument passer par le point de sauvegarde situé 3 unités plus haut qu'elle et 3 unités à gauche de Bowser ?

   (d) Prouver l'identité

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

en utilisant le fait que tout chemin parcouru par Peach pour atteindre Bowser doit forcément passer par un des points décrits en (b).

3. Combien y a-t-il de compositions différentes de $n \in \mathbb{N}^*$?