HEI Haute Ecole d'Ingénierie, HES-SO Valais

Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

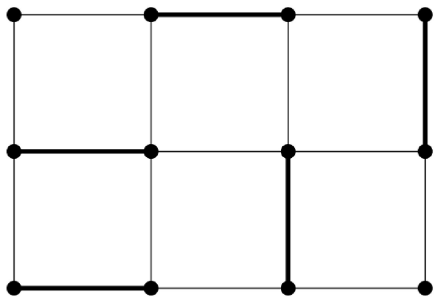
Mathématiques Discrètes - Série 8

Théorie des graphes IV

1. (a) Combien y a-t-il de couplages maximaux différents sur le graphe biparti complet $K_{m,n}$?

   (b) Combien y a-t-il de couplages parfaits sur le graphe complet K_{2n} ?

2. (a) Trouver un chemin augmentant pour le couplage ci-dessous:



   Utiliser ce chemin pour créer un couplage contenant une arête supplémentaire.

   (b) Montrer que tout graphe Hamiltonien avec un nombre pair de sommets admet un couplage parfait.

3. Dans cet exercice, on va s'intéresser aux couplages de graphes pondérés. Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $\omega : E \to \mathbb{R}_+$ une pondération sur les arêtes de G.
   Le but est de trouver des couplages $M \subset E$ dont la somme des poids des arêtes est la plus grande possible. Voici un algorithme destiné à créer de tels couplages:

   (1) On ordonne les arêtes par poids décroissants: $(e_1, ..., e_m)$ tels que $\omega(e_1) \geq ... \geq \omega(e_m)$.

   (2) On initialise $M_0 := \emptyset$.

   (3) On construit ensuite récursivement M_{i+1} à partir de M_i en utilisant l'instruction

$$M_{i+1} = \begin{cases} M_i \cup \{e_{i+1}\} & \text{, si } e_{i+1} \text{ n'a pas de sommet commun avec les arêtes dans } M_i \\ M_i & \text{, sinon} \end{cases}$$

   L'output de l'algorithme est ainsi $M_G := M_m$.

   Prendre une fonction de poids quelconque $\omega : E \to \mathbb{R}_+$ sur les arêtes du graphe de Petersen, et exécuter l'algorithme sur le graphe pondéré ainsi obtenu.