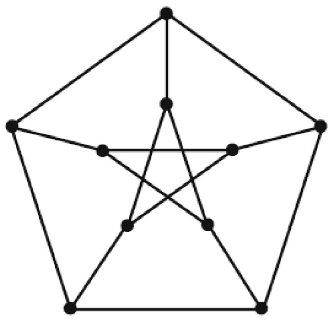
HEI Haute Ecole d'Ingénierie, HES-SO Valais

Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Mathématiques Discrètes - Série 5

Théorie des graphes I

1. (a) Montrer que le graphe de Petersen



est isomorphe au graphe donné par

$$V = \{\{a, b\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \mid a \neq b\} \quad , \quad E = \{\{S_1, S_2\} \mid S_1 \cap S_2 = \emptyset\}.$$

(b) Pour chacun des graphes suivants, donner un exemple d'un tel graphe ou prouver qu'un tel graphe n'existe pas:

(i) Un graphe 4-régulier avec 7 sommets.

(ii) Un graphe 3-régulier avec 8 sommets.

(iii) Un graphe 3-régulier avec 7 sommets.

2. Prouver les propositions suivantes:

(a) Si un graphe a 15 sommets tels qu'un seul sommet a degré 14, alors il est connexe.

(b) Si un graphe a 15 sommets, tous de degré au moins 7, alors il est connexe.

(c) Si un graphe connexe ne contient aucun cycle de longueur impaire, alors il est biparti. Pour ce faire, fixer d'abord un sommet $v \in V$ du graphe et considérer la fonction $f : V \to \{0, 1\}$ telle que $f(w) = 0$ si le chemin le plus court entre v et w est de longueur paire, et $f(w) = 1$ sinon.

3. Soit A la matrice d'adjacence du graphe $G = (V, E)$, avec $V = \{v_1, ..., v_n\}$, et soit $a_{ij}^{(k)} = [A^k]_{ij}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $a_{ii}^{(2)} = \deg(v_i)$ et que

$$a_{ij}^{(2)} = |\{\text{chemins de longueur 2 entre } v_i \text{ et } v_j,\ i \neq j\}|\,.$$

(b) Montrer que

$$a_{ij}^{(k)} = |\{\text{chemins de longueur } k \text{ entre } v_i \text{ et } v_j,\ i \neq j\}|\,.$$