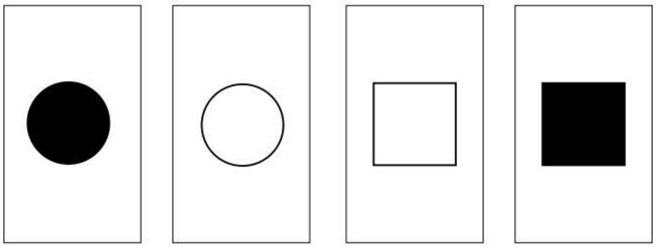
Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Mathématiques Discrètes - Série 1

Ensembles et preuves

1. (a) Claude a dessiné sur quatre cartes un disque d'un côté et un carré de l'autre, puis elle les a posées sur la table comme suit:



1 2 3 4

Elle vous affirme que si le disque est noir, le carré l'est également. Quelle(s) carte(s) devez-vous absolument retourner pour vérifier si son affirmation est vraie ?

(b) Prouver que $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ et utiliser ce fait pour montrer qu'il existe des nombres $p, q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $p^q \in \mathbb{Q}$.

2. (a) Pour montrer que l'assertion "Tout·e ISC sachant coder les yeux fermés travaille mieux avec du café." est fausse, laquelle ou lesquelles des stratégies suivantes faut-il utiliser ?
   (i) Trouver un·e ISC sachant coder les yeux fermés et travaillant mieux avec du café.
   (ii) Trouver un·e ISC ne sachant pas coder les yeux fermés et travaillant mieux avec du café.
   (iii) Trouver un·e ISC sachant coder les yeux fermés mais ne travaillant pas mieux avec du café.
   (iv) Trouver un·e ISC ne sachant pas coder les yeux fermés et ne travaillant pas mieux avec du café.
   (v) Prouver que tout·e ISC qui travaille mieux avec du café sait coder les yeux fermés.

   (b) Lu dans l'*Encyclopédie de zoologie digitale*: "Tout malokh soudeau est gytöbe et tout malokh séhemdais est gytöbe. A Digiland, il existe aussi bien des malokhs gytöbes que des malokhs agytöbes."
   Laquelle ou lesquelles des conclusions suivantes concernant la faune de Digiland est ou sont permise(s) ?
   (i) Il existe aussi bien des malokhs soudeaux que des malokhs insoudeaux.
   (ii) Il existe des malokhs insoudeaux.
   (iii) Tout malokh agytöbe est insoudeau.
   (iv) Certains malokhs insoudeaux ne sont pas séhemdais.
   (v) Tout malokh insoudeau est non-séhemdais.

3. On va définir un système axiomatique dans lequel il y a un seul axiome et quatre règles. Les objets de ce système sont des suites de lettres (ou *mots*) constituées des lettres M, U et I. Les règles disent comment on peut construire des mots à partir de mots déjà existants. Les mots que l'on peut ainsi déduire de l'axiome et des règles sont les *théorèmes* de ce système formel. Dans les règles suivantes, X et Y représentent des suites de lettres quelconques.

- Axiome : Le mot MI existe.
- Règle 1 : XI $\Rightarrow$ XIU
- Règle 2 : MX $\Rightarrow$ MXX
- Règle 3 : XIIIY $\Rightarrow$ XUY
- Règle 4 : XUUY $\Rightarrow$ XY

MU est-il un théorème de ce système ?

4. On va prouver que 1 est le nombre entier le plus grand. Voici la preuve:

    Supposons que 1 ne soit pas le nombre naturel le plus grand, mais qu'un autre nombre naturel $p > 1$ soit le nombre naturel le plus grand. Si l'on multiplie cette inégalité des deux côtés par p, alors $p^2 > p$, ce qui contredit la supposition que $p > 1$ est le plus grand nombre naturel. 1 est donc le plus grand nombre naturel.

    Trouver l'erreur dans cette "preuve".

5. On va prouver que s'il y a un·e étudiant·e de bonne humeur dans une classe, alors tou·te·s sont de bonne humeur. Voici la preuve:

    On procède par induction sur le nombre n d'étudiant·e·s dans la classe.

    - Ancrage: S'il y a $n = 1$ étudiant·e de bonne humeur dans la classe, alors l'affirmation est clairement correcte.
    - Pas d'induction: On suppose que l'affirmation est vraie pour un $n \geq 1$, c'est-à-dire que si une classe de n étudiant·e·s contient un·e étudiant·e de bonne humeur, alors ils et elles le sont tou·te·s. On montre que l'affirmation doit alors être vraie pour $n + 1$ étudiant·e·s.
      Considérons donc une classe avec $n + 1$ étudiant·e·s, dont un·e est de bonne humeur. Nous choisissons n étudiant·e·s dans cette classe en prenant, dont l'étudiant·e dont on sait qu'il/elle est de bonne humeur. Par hypothèse d'induction, tous les n étudiant·e·s de ce sous-groupe sont de bonne humeur.
      Ensuite, on échange un·e des n étudiant·e·s (qui est de bonne humeur comme on vient de le voir) avec l'étudiant·e restant·e. Le sous-ensemble ainsi formé a de nouveau n étudiant·e·s, dont $n - 1 > 1$ sont de bonne humeur. Par conséquent, l'hypothèse d'induction permet de déduire que l'étudiant·e restant·e était aussi de bonne humeur, ce qui achève de prouver que les $n+1$ étudiant·e·s de la classe sont de bonne humeur.

    Trouve l'erreur dans cette "preuve".