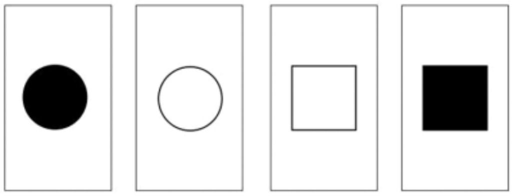
Série 1

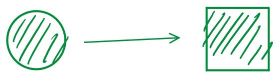
mercredi, 19 février 2025 08:22

1. (a) Claude a dessiné sur quatre cartes un disque d'un côté et un carré de l'autre, puis elle les a posées sur la table comme suit:



1 2 3 4

Elle vous affirme que si le disque est noir, le carré l'est également. Quelle(s) carte(s) devez-vous absolument retourner pour vérifier si son affirmation est vraie ?



$P =$ " ● " $\bar{P} =$ " ○ "

$Q =$ " ■ " $\bar{Q} =$ " □ "

Veut voir si $P \to Q \quad \longleftrightarrow \quad \bar{P} \vee Q$

$\boxed{P}$ ✓ $\boxed{\bar{P}}$ ✗ $\boxed{\bar{Q}}$ ✓ $\boxed{Q}$ ✗

(b) Prouver que $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ et utiliser ce fait pour montrer qu'il existe des nombres $p, q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $p^q \in \mathbb{Q}$.

$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} := \{\pi, e, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \dots\}$

Prouver : $\exists\, p, q \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tq $p^q \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ou $\in \mathbb{Q}$ " / $\notin \mathbb{Q} \longrightarrow \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{2} = 2$; $\notin \mathbb{Q}$; $\notin \mathbb{Q}$

2. (a) Pour montrer que l'assertion "Tout·e ISC sachant coder les yeux fermés travaille mieux avec du café." est fausse, laquelle ou lesquelles des stratégies suivantes faut-il utiliser ?

~~(i)~~ Trouver un·e ISC sachant coder les yeux fermés et travaillant mieux avec du café.

~~(ii)~~ Trouver un·e ISC ne sachant pas coder les yeux fermés et travaillant mieux avec du café.

✓ (iii) Trouver un·e ISC sachant coder les yeux fermés mais ne travaillant pas mieux avec du café.

~~(iv)~~ Trouver un·e ISC ne sachant pas coder les yeux fermés et ne travaillant pas mieux avec du café.

~~(v)~~ Prouver que tout·e ISC qui travaille mieux avec du café sait coder les yeux fermés.

F ◎	B	
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

i) Exactement l'affirmation de la consigne

ii) Coder les yeux fermés implique que l'on code mieux avec du café. Hors là on ne sait pas coder les yeux fermés alors café ou non on ne demontre rien

iii) ✓

iv) idem 2

v) Coder mieux avec n'implique pas que l'on sait coder les yeux fermés

(b) Lu dans l'*Encyclopédie de zoologie digitale*: "Tout malokh soudeau est gytöbe et tout malokh séhemdais est gytöbe. A Digiland, il existe aussi bien des malokhs gytöbes que des malokhs agytöbes."

Laquelle ou lesquelles des conclusions suivantes concernant la faune de Digiland est ou sont permise(s) ?

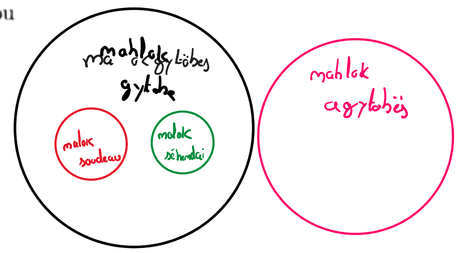
✗ (i) Il existe aussi bien des malokhs soudeaux que des malokhs insoudeaux.

✓ (ii) Il existe des malokhs insoudeaux.

✓ (iii) Tout malokh agytöbe est insoudeau.

✓ (iv) Certains malokhs insoudeaux ne sont pas séhemdais.

~~(v)~~ Tout malokh insoudeau est non-séhemdais.



3. On va définir un système axiomatique dans lequel il y a un seul axiome et quatre règles. Les objets de ce système sont des suites de lettres (ou *mots*) constituées des lettres M, U et I. Les règles disent comment on peut construire des mots à partir de mots déjà existants. Les mots que l'on peut ainsi déduire de l'axiome et des règles sont les *théorèmes* de ce système formel. Dans les règles suivantes, X et Y représentent des suites de lettres quelconques.

- Axiome : Le mot MI existe.
- Règle 1 : XI ⇒ XIU
- Règle 2 : MX ⇒ MXX
- Règle 3 : XIIIY ⇒ XUY
- Règle 4 : XUUY ⇒ XY

MU est-il un théorème de ce système ?

MU n'a pas de I

Comment enlever les i ?

• Appliquer la règle 3 le seul moyen

MI exist alors on peut lui appliquer la règle 1

On obtient MIU

Il faut impérativement avoir le patter III qu'on ne connaitra jamais à cause de la règle 2

Donc si c'est impossible de reduire le nombre de I

Mu n'existe pas

4. On va prouver que 1 est le nombre entier le plus grand. Voici la preuve:

> Supposons que 1 ne soit pas le nombre naturel le plus grand, mais qu'un autre nombre naturel $p > 1$ soit le nombre naturel le plus grand. Si l'on multiplie cette inégalité des deux côtés par p, alors $p^2 > p$, ce qui contredit la supposition que $p > 1$ est le plus grand nombre naturel. 1 est donc le plus grand nombre naturel.

Trouver l'erreur dans cette "preuve".

La contradiction $p^2 > p$ n'en est pas une c'est une propriété des nombre entier

Donc elle ne prouve rien. Alors 1 n'est pas le plus grand nombre entier

5. On va prouver que s'il y a un·e étudiant·e de bonne humeur dans une classe, alors tou·te·s sont de bonne humeur. Voici la preuve:

> On procède par induction sur le nombre n d'étudiant·e·s dans la classe.
>
> - Ancrage: S'il y a $n = 1$ étudiant·e de bonne humeur dans la classe, alors l'affirmation est clairement correcte.
> - Pas d'induction: On suppose que l'affirmation est vraie pour un $n \geq 1$, c'est-à-dire que si une classe de n étudiant·e·s contient un·e étudiant·e de bonne humeur, alors ils et elles le sont tou·te·s. On montre que l'affirmation doit alors être vraie pour $n+1$ étudiant·e·s.
>   Considérons donc une classe avec $n+1$ étudiant·e·s, dont un·e est de bonne humeur. Nous choisissons n étudiant·e·s dans cette classe en prenant, dont l'étudiant·e dont on sait qu'il/elle est de bonne humeur. Par hypothèse d'induction, tous les n étudiant·e·s de ce sous-groupe sont de bonne humeur.
>   Ensuite, on échange un·e des n étudiant·e·s (qui est de bonne humeur comme on vient de le voir) avec l'étudiant·e restant·e. Le sous-ensemble ainsi formé a de nouveau n étudiant·e·s, dont $n - 1 > 1$ sont de bonne humeur. Par conséquent, l'hypothèse d'induction permet de déduire que l'étudiant·e restant·e était aussi de bonne humeur, ce qui achève de prouver que les $n+1$ étudiant·e·s de la classe sont de bonne humeur.

Trouve l'erreur dans cette "preuve".

L'Ancrage car si on part du principe qu'on a qu'un etudiant on a pas cette notion de groupe. On n'a pas d'autres éléments sur lequel agir

Série 2

mercredi, 5 mars 2025 08:25

1. Prouver que le nombre de diviseurs distincts de $n \in \mathbb{N}^*$ est impair si et seulement si n est un carré parfait (c'est-à-dire $n = k^2$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$).

Supposons que l'on prend un nombre p et on le divise par n, on obtient m

$\frac{p}{n} = m$

Si $m \neq n$ on obtient un nombre pair de diviseur (2)

$p \to$ a pour diviseur $\{n, m\}$

Si $m = n$ on obtient un nombre impair de diviseur (1)

Cela implique que $m \cdot n = p \to m^2 = p$ ou $n^2 = p$, $m = n$

Peut un carré parfait, les carrés parfait ont comme propriétés d'avoir cette situation une fois.

donc il sera composé de pair de diviseur ou non $\underline{+1}$ car donc ce sera forcément impair

2. Vous êtes piégé-e dans le monde d'*Alice in Borderland* ! La dame de coeur est une cartomancienne, et les règles de son jeu sont les suivantes: vous recevez 60 énigmes, chacune ayant pour thème un des 12 signes du zodiaque (il y a donc 5 énigme par signe du zodiaque). Vous remportez un signe du zodiaque si vous résolvez au moins 3 de ses énigmes, et vous gagnez la partie si vous remportez au moins 9 signes du zodiaque.

   (a) Combien de manières minimales (c'est-à-dire en résolvant exactement 3 énigmes dans exactement 9 signes du zodiaque) avez-vous de sortir vainqueur-e ?

   (b) Vous avez résolu exactement 27 énigmes. Quelle est la probabilité que vous ayez remporté la partie ?

   (c) Combien d'énigmes vous faut-il résoudre pour être certain-e de gagner la partie, indépendamment des signes du zodiaque ? A partir de combien d'énigmes échouées êtes-vous certain-e de perdre la partie, indépendamment des signes du zodiaque ?

   (d) Vous estimez que votre fidèle partenaire a une chance sur deux de résoudre chaque énigme. Quelle est la probabilité *a priori* qu'il/elle remporte sa partie ?

a) THM 2.8

Peut importe l'ordre dans ce cas si on résoud l'épreuve

3,2,1 ou 1,2,3 ça ne change rien aux épreuves résolues

$$\frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \underline{\underline{10}}$$

idem pour les signes du zodiaque

$$\frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = \underline{220}$$

$220 \cdot 10^9$ possibilités

---

b) THM 2.8

$$\frac{\text{nbr config gagnante}}{\text{nbr config total}} \to \%$$

$$100 \cdot \frac{220 \cdot 10^9}{\frac{60!}{(60-27)!\,27!}} = 100 \cdot \frac{220 \cdot 10^9 \cdot 33! \cdot 27!}{60!} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \%$$

---

c) $5 \cdot 8 + 2 \cdot 4$

plus de $\underline{\underline{48}}$ épreuves à gagner

plus de 33 épreuves à perdre

---

d)

3. Pour ce problème, on suppose que toutes les années ont 365 jours. Pour $k \geq 2$, soit p_k la probabilité que parmi k personnes il y en ait 2 qui ont le même jour d'anniversaire.

   (a) Quelle est la probabilité qu'une personne parmi $n \geq 1$ autre(s) personne(s) aient la même date d'anniversaire que vous ?

   (b) Calculer p_k.

   (c) Reformuler le problème en termes d'application entre des ensembles.

   (d) Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k.

   (e) Trouver le plus petit k tel que $p_k > 50\%$.

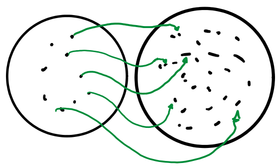
a) $\frac{1}{365^n}$ %

$$1 - \prod_{i=0}^{k} \frac{365 - i}{365}$$

b) $$p_k = 1 - \frac{365!}{(365-k)!} \cdot \underbrace{\frac{1}{365^k}}_{\text{nombre de tirage totale possible}}$$

THM 2.4

c)



d) $$p_{k+1} = 1 - \frac{365!}{(366-k)!} \cdot \frac{1}{365^{k+1}}$$

e) $$50 = 1 - \frac{365!}{(365-k)!} \cdot \frac{1}{365^k}$$

Série 3

mercredi, 26 mars 2025 08:15

1. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \le k \le n-1$. Prouver l'identité

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

à l'aide d'une induction sur n (et donc k fixé), puis d'une induction sur k (et donc n fixé).

(b) Soient $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \le m, n$. Prouver l'identité

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Ancrage : $n=1$ $k=0$

$$\sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{1}{i} = (-1)^0 \binom{0}{0}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$$

$$1 = 1$$

Hi consigne

Pas d'induction $n = n+1 \Rightarrow k = k$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} = (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right)$$

$$1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{n}{i-1} + (-1)^i \binom{n}{i}$$

$$1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{n}{i}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (-1) \binom{n}{i} + (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{n}{i} + (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

$$-\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} - (-1)^k \binom{n}{k}\right) + (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

$$-\left(\cancel{(-1)^k \binom{n-1}{k}} + (-1)^k \binom{n}{k}\right) \cancel{+ (-1)^k \binom{n-1}{k}}$$

$$\underline{(-1)^k \binom{n}{k}}$$

$k = k+1 \Rightarrow n = n$

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1}$$

$$(-1)^k \binom{n-1}{k} - (-1)^k \binom{n}{k+1}$$

$$(-1)^k \left(\binom{n-1}{k} - \binom{n}{k+1}\right)$$

THM 2.12

$$(-1)^k \left(\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k+1}\right)$$

$$(-1)^k - \binom{n-1}{k+1}$$

$$(-1)^{k+1} \binom{n-1}{k+1}$$

(b) Soient $m, n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \le m, n$. Prouver l'identité

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Ancrage $k=0$

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{m}{i}\binom{n}{-i} = \binom{m+n}{0}$$

$$1 = 1$$

2. Peach commence son niveau tout en bas du château de Bowser. Le château de Bowser est un carré de côté n, et Bowser se trouve tout en haut de la plus haute tour du château, exactement à l'opposé de Peach. Comme c'est le niveau final, Peach ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut, de 1 unité à chaque fois.

   (a) Formaliser mathématiquement la situation: quel est l'ensemble des positions possibles pour Peach ? Quels sont les connexions possibles entre ces positions ?

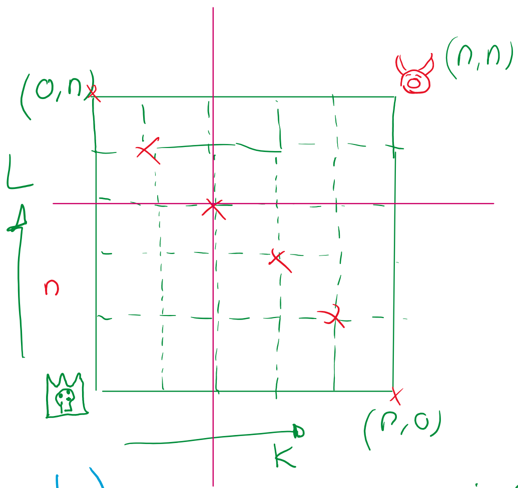
   (b) Caractériser les positions qui se trouvent sur l'autre diagonale du carré (c'est-à-dire celle qui relie les sommets diamétralement opposés qui ne sont ni la position initiale de Peach, ni la position de Bowser).

   (c) Combien Peach a-t-elle d'itinéraires possibles si elle doit absolument passer par le point de sauvegarde situé 3 unités plus haut qu'elle et 3 unités à gauche de Bowser ?

   (d) Prouver l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

   en utilisant le fait que tout chemin parcouru par Peach pour atteindre Bowser doit forcément passer par un des points décrits en (b).



a) (0,0) (n,0)
(0,1) ...
(0,2) ...
(0,n) (n,n)

Chemins THM 2.10 $\binom{n+n}{n}$

b) point (i,j) pour $i+j=n$

$\{(i,j)$ pour $0 \le i,j \le n\}$

c) $\binom{n}{n-3} \cdot \binom{n}{3}$

... i=k alors $|j-l|=1\}$

※ $\{(i,j)$ pour $0 \leq i,j \leq n\}$

※ $\{(i,j)$ avec (k,l) $\begin{cases} i=k \text{ alors } |j-l|=1 \\ j=l \text{ alors } |i-k|=1 \end{cases}\}$

c) $\binom{n-3}{} \cdot \binom{}{3}$

$\downarrow$

$\binom{n}{3} \cdot \binom{n}{3} = \binom{n}{3}^2$

d)

3. Combien y a-t-il de compositions différentes de $n \in \mathbb{N}^*$?

$3 = 1 + 1 + 1$ 2 separations $\binom{n-1}{n-1}$

$3 = 1 + 2$ 1 séparation

$3 = 2 + 1$ $\binom{n-1}{n-2}$

$3 = 3$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \xrightarrow[2.11]{\text{THM}} 2^{n-1}$$

Série 4

mercredi, 26 mars 2025 08:16

1. Prouver les identités suivantes:

(a)

$$\binom{n}{k_1, ..., k_m} = \binom{n}{k_m}\binom{n-k_m}{k_1, ..., k_{m-1}}.$$

(b)

$$\binom{k+l+m}{k, l, m} = \binom{k+l+m-1}{k-1, l, m} + \binom{k+l+m-1}{k, l-1, m} + \binom{k+l+m-1}{k, l, m-1}.$$

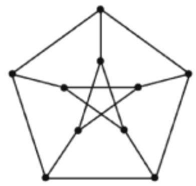
(c)

$$\sum_{\substack{k,l,m \geq 0 \\ k+l+m=n}} \binom{n}{k, l, m} = 3^n.$$

Série 5

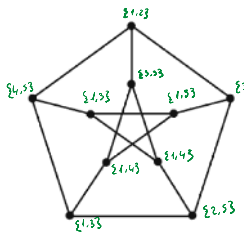
mercredi, 26 mars 2025 08:16

1. (a) Montrer que le graphe de Petersen



est isomorphe au graphe donné par

$$V = \{\{a,b\} \subset \{1,2,3,4,5\} \mid a \neq b\} \quad , \quad E = \{\{S_1, S_2\} \mid S_1 \cap S_2 = \emptyset\}.$$



$V = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\} = $ ☺

$\{1,2\}$

$\{3,4\}$

$\{2,5\}$

$E = \checkmark$ ☺

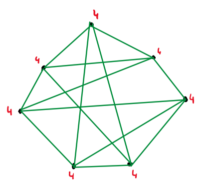
(b) Pour chacun des graphes suivants, donner un exemple d'un tel graphe ou prouver qu'un tel graphe n'existe pas:

(i) Un graphe 4-régulier avec 7 sommets.

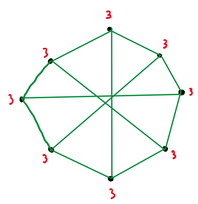
(ii) Un graphe 3-régulier avec 8 sommets.

(iii) Un graphe 3-régulier avec 7 sommets.

i)



ii)



iii) $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

$7 \cdot 3 = 2|E| \qquad |E| \in \mathbb{N}$

$\frac{7 \cdot 3}{2} = |E| \quad \lightning \quad |E| \cancel{\in \mathbb{N}}$

2. Prouver les propositions suivantes:

(a) Si un graphe a 15 sommets tels qu'un seul sommet a degré 14, alors il est connexe.

(b) Si un graphe a 15 sommets, tous de degré au moins 7, alors il est connexe.

(c) Si un graphe connexe ne contient aucun cycle de longueur impaire, alors il est biparti. Pour ce faire, fixer d'abord un sommet $v \in V$ du graphe et considérer la fonction $f : V \to \{0,1\}$ telle que $f(w) = 0$ si le chemin le plus court entre v et w est de longueur paire, et $f(w) = 1$ sinon.

a) Si on prend un sommet V_n quelconque de $V = \{V_1, \dots, V_{15}\}$

V_n doit avoir un deg (14) ce qui implique qu'il est connecté à 14 sommets distincts

de plus une arrête ne peut pas être incidente à elle même.

Alors $|V| - \underset{(V_n)}{1} = 14$ Donc on ne laisse aucun sommet seul alors connexe ☺

b) Supposons que ce soit pas le cas donc le graphe est non connexe

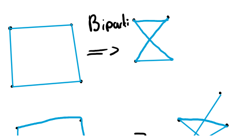
On peut alors les séparer en 2 graphes connexes. mais du coup si on veut que ces 2 graphes possède pour chaque sommet d'un degrés d'au moins 7

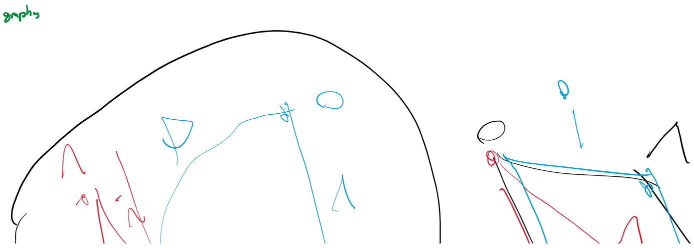
alors il faut que les 2 graphes connexes soient 8 sommets

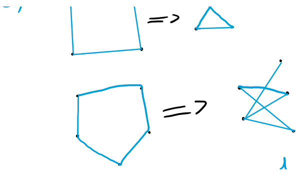
$8 \cdot 7 = 2|E| \quad \checkmark$

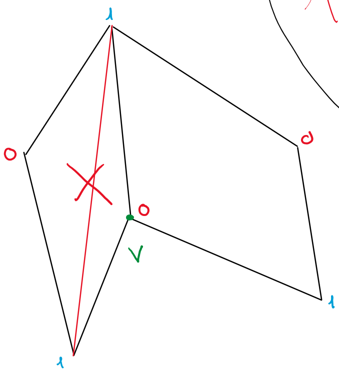
Mais on a uniquement 15 sommets et non pas 16 donc ces 2 graphes ne peuvent pas exister donc c'est connexe

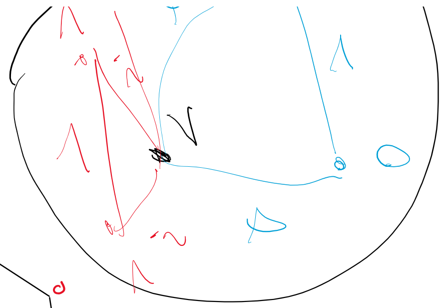
c)

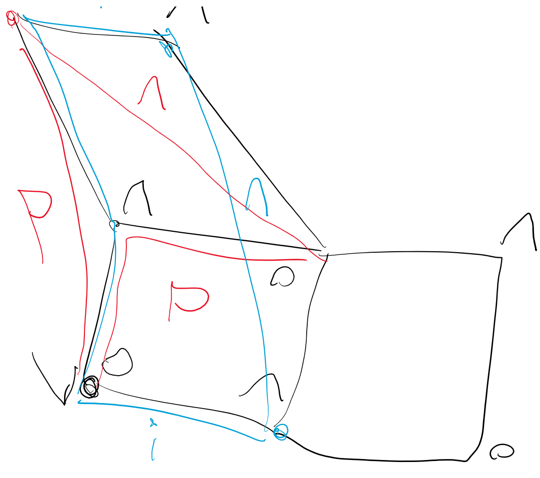












0 chemin pair 1 chemin Impaire

Si on dessine un graphe quelconque, contenant uniquement des boucles pairs on peut séparer les sommets dans 2 familles {0,1} ce qui implique que l'on peut dessiner un graphe biparti.

Si on a ajoute une arrête entre 2 sommets de la même famille on crée un "bug" qui ne permet de ne plus dessiner un graphe biparti. On peut essayer de refaire la répartition des 0 et 1 mais c'est impossible dû à la présence de boucle impaire. Car pour un sommet on à la fois un chemin pair et impaire.

3. Soit A la matrice d'adjacence du graphe $G = (V, E)$, avec $V = \{v_1, ..., v_n\}$, et soit $a_{ij}^{(k)} = [A^k]_{ij}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $a_{ii}^{(2)} = \deg(v_i)$ et que

$$a_{ij}^{(2)} = |\{\text{chemins de longueur 2 entre } v_i \text{ et } v_j,\ i \neq j\}|.$$

(b) Montrer que

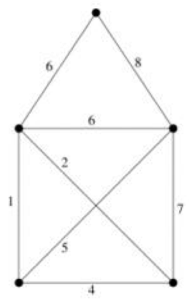
$$a_{ij}^{(k)} = |\{\text{chemins de longueur } k \text{ entre } v_i \text{ et } v_j,\ i \neq j\}|.$$

THM 3.3

Série 6

mercredi, 14 mai 2025 09:45

1. Dans cet exercice, on va considérer le graphe pondéré suivant:



(a) Est-ce que la version non-pondérée du graphe est Eulérienne ? semi-Eulérienne ?

(b) Sur la version non-pondérée du graphe, y a-t-il un circuit Eulérien, resp. une marche Eulérienne, qui commence sur le sommet de degré 2 ? Si oui, donner un exemple. Sinon, prouver qu'une telle marche n'existe pas.

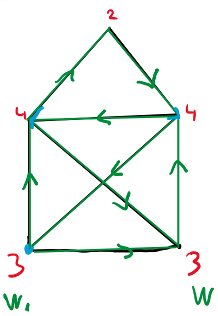
(c) Sur la version non-pondérée du graphe y a-t-il une marche Eulérienne ? Si oui, laquelle ? Sinon, prouver qu'une telle marche n'existe pas.

(d) A l'aide de l'algorithme de Kruskal, trouver un arbre couvrant minimal du graphe pondéré.

(e) Sur le graphe pondéré, donner un exemple de 2 sommets tels que le chemin entre eux sur l'arbre couvrant minimal est plus lourd que le chemin de poids minimal entre eux dans le graphe.

a)

c)

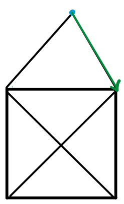


Semi Eulerien

Il possède 1 pairs de sommet impaire

=> $\deg(v)$ pair $v \in V / \{w_1, w_2\}$

b)

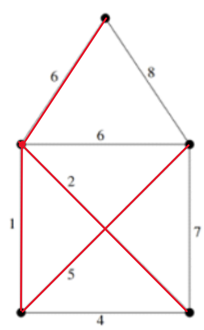


On est obligé de partir d'un sommet impair car le graphe est semi-eulérien.

Si on part du sommet de $\deg(v) = 2$ il nous reste qu'une arête non parcourue => soit un cul de sac soit l'~~arrivée~~ et de dep

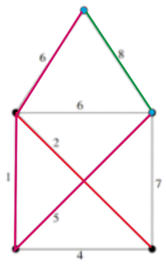
semi-Eulerien

d)



(1, 2, 4, 5, 6, 6, 7, 8)

e)

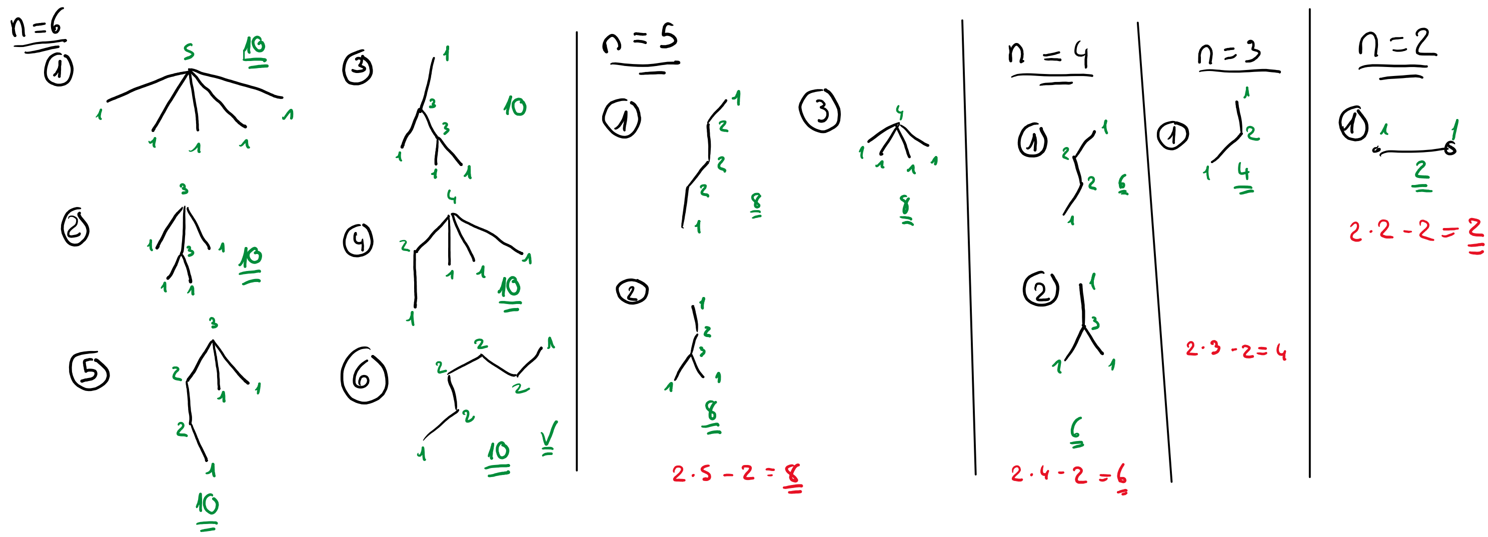


8

12

2. (a) Classifier tous les arbres à n sommets à isomorphisme près, pour $1 \leq n \leq 6$.
   (b) Montrer que dans chaque arbre $T = (V, E)$, on a

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|V| - 2.$$



$2 \cdot 6 - 2 = 10$

$2 \cdot 5 - 2 = 8$

$2 \cdot 4 - 2 = 6$

$2 \cdot 3 - 2 = 4$

$2 \cdot 2 - 2 = 2$

3. La famille Piré-Anderre de Rydum de Thuringe était une famille des XVIIe et XVIIIe siècles, maintenant éteinte. La légende raconte que Blaise Pascal a volé l'idée de la "Pascaline" à Brunault Piré-Anderre de Rydum de Thuringe. Ce dernier a eu 4 enfants. Parmi les descendant·e·s de Brunault, 10 ont eu 3 enfants chacun·e, 15 en ont eu 2, et tou·te·s les autres descendant·e·s n'ont eu aucun enfant.
En supposant qu'il n'y ait eu aucune union consanguine dans la famille Piré-Anderre de Rydum de Thuringe, combien Brunault Piré-Anderre de Rydum de Thuringe a-t-il eu de descendant·e·s en tout ?

$4 + 10 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 64$

Série 7

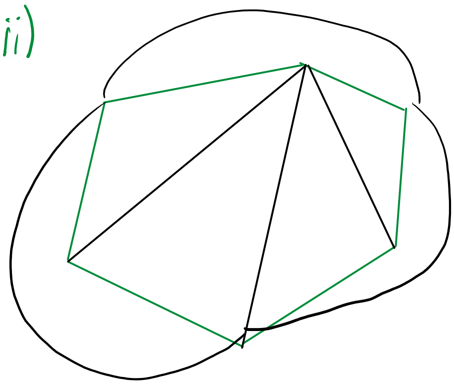
mercredi, 28 mai 2025 08:39

1. (a) Un graphe planaire G est dit planaire maximal si l'ajout de n'importe quelle arête (sans ajout de sommet) à G crée un graphe non-planaire.
   (i) Montrer que toute face d'un graphe planaire maximal est un triangle.
   (ii) Si un graphe planaire maximal a n sommets, combien de faces et d'arêtes ce graphe a-t-il ?

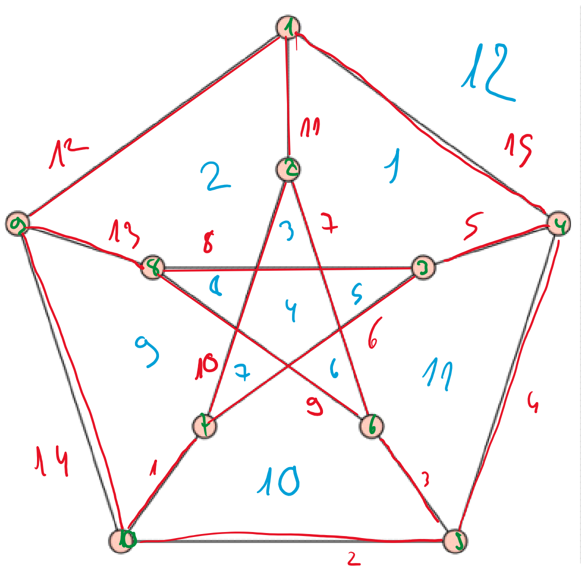
   (b) Montrer que le graphe de Petersen n'est pas planaire.

i) Si on prend une face $n \geq 4$ on peut tirer des diagonales entre les sommets qui ne sont pas adjacent $\Rightarrow$ 3 pas planaire maximale pour former une composition de graphe planair maximal à 3 sommets donc un triangle !! :)

ii)



$8 = |F|$
$n = |V| = 6$
$12 = |E|$



THM 3.19 "Euler"
Si G planaire et si $F := \{$faces de $G\}$
alors $|V| - |E| + |F| = 2$

$|V| = 4$
$|E| = 6$
$|F| = 4$

$|F| = 12$

$|V| = 10$

$|E| = 15$

$10 - 15 + 12 \neq 3$

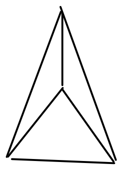
2. (a) Montrer que pour tout graphe 3-régulier, on a

$$3 \cdot |V| = 2 \cdot |E|.$$

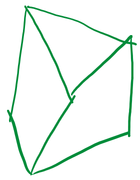
   (b) Soit G un graphe planaire, connexe, et 3-régulier dont toutes les faces sont soit des pentagones soit des hexagones. Montrer que G a exactement 12 faces pentagonales.

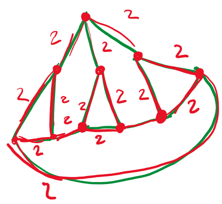
a) Pour un graphe 3 régulier

pentagones soit des hexagones. Montrer que G a exactement 12 faces pentagonales.

a) 

Pour un graphe 3 régulier





si on multiplie par $\overset{=3}{\deg(v)}$ chaque sommet on compte chaque arrête 2 fois alors

$$3 \cdot |V| = 2|E|$$