HEI Haute Ecole d'Ingénierie, HES-SO Valais

Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Mathématiques Discrètes - Série 4

Combinatoire III

1. Prouver les identités suivantes:

   (a)
   $$\binom{n}{k_1, ..., k_m} = \binom{n}{k_m}\binom{n-k_m}{k_1, ..., k_{m-1}}.$$

   (b)
   $$\binom{k+l+m}{k, l, m} = \binom{k+l+m-1}{k-1, l, m} + \binom{k+l+m-1}{k, l-1, m} + \binom{k+l+m-1}{k, l, m-1}.$$

   (c)
   $$\sum_{\substack{k,l,m\geq 0\\ k+l+m=n}} \binom{n}{k, l, m} = 3^n.$$

2. On se place dans le contexte du problème des chapeaux.

   (a) Quelle est la probabilité qu'exactement une personne parte avec son chapeau ?

   (b) On modifie le problème comme suit: les invité·e·s partent l'un·e après l'autre. La première personne à partir prend un chapeau au hasard, puis chaque personne suivante cherche son propre chapeau. Si elle le trouve, alors elle le prend. Sinon, alors elle en prend un au hasard, et ainsi de suite.
   Quelle est la probabilité que la dernière personne à partir parte avec son chapeau ?

3. Si on prend en compte les ami·e·s imaginaires, la classe ISC contient 33 étudiant·e·s. Parmi ces personnes, 20 aiment commencer leurs décomptes par $i = 1$, 15 codent uniquement en alexandrins, et 8 écrivent des programmes sans retour à la ligne ni commentaire.
   On sait qu'exactement 6 font leurs décomptes à partir de $i = 1$ et codent en alexandrins, 2 comptent à partir de $i = 1$ et codent sur une ligne sans commentaire, et 3 codent sur une ligne, sans commentaire, et en alexandrins.
   Prouver qu'il y a au maximum une personne qui aime commencer à partir de $i = 1$ et coder en alexandrins sans retour à la ligne ni commentaire.