HEI Haute Ecole d'Ingénierie, HES-SO Valais

Campus Energypolis
1950 Sion
Tél. +41 58 606 85 23

Algèbre Linéaire 2 - Série 2

Matrices I

1. (a) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

   Calculer tous les produits A_iA_j, $i, j \in \{1,2,3\}$, possibles.

   (b) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

   $E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Effectuer les multiplications suivantes et expliquer à chaque fois en quoi la multiplication matricielle diffère de la multiplication de nombres réels:

   (i) A^2
   (ii) BC
   (iii) CD et DC
   (iv) D^2
   (v) E^2
   (vi) FG et FH

   (c) Si deux matrices A et B sont telles que $AB = BA$, on dit qu'elles <u>commutent</u>.

   (i) Montrer que A et B commutent seulement si elles sont toutes deux carrées et de même taille. Est-ce que la réciproque est vraie ?

   (ii) Déterminer toutes les matrices A qui commutent avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

   (iii) On suppose que A est diagonale de taille $n \times n$. A quelle condition est-ce que A commute avec chacune des matrices de $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$?

2. (a) Soient $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

   Calculer les matrices suivantes, si elles existent:

   (i) $A - 3D^T$
   (ii) $A + B$
   (iii) $3A - 2A^T$
   (iv) BD
   (v) $2AA^T - 4C$
   (vi) DB
   (vii) $CD^T - 2A$

   (b) Soient A et B deux matrices symétriques de taille $n \times n$. Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

   (c) Que peut-on dire d'une matrice A telle que $A^T = -A$?

3. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Calculer, à la main ou numériquement :

   (a) Le produit AB.

   (b) La multiplication composante par composante de A et B (ce n'est **pas** AB !).

   (c) B^3 et A^{17} (sans utiliser de boucle).

   (d) Une matrice C telle que $BC = I_3$. Calculer ensuite CB.