

4. L'indice d'iode (x , en gI/100g) et le nombre de cétane (y , sans dimension) ont été mesurés pour différents biodiesels. Les valeurs sont reportées dans le tableau suivant.

x	60	70	80	90	100
y	64	61	58	56	54

- (a) Calculer \bar{x} , \bar{y} , s_x , s_y , $\text{Cov}(x, y)$ et $\text{Corr}(x, y)$.
 (b) Y a-t-il une relation linéaire entre x et y ?
 (c) Déterminer l'équation de la droite de régression. Dessiner les valeurs mesurées et la droite de régression sur un même graphique.

(a) $\bar{x} = 80$, $\bar{y} = 58,6$, $s_x = \sqrt{25} \approx 5$, $s_y = \sqrt{7,58} \approx 2,75$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_i - 80)(y_i - 58,6) = -62,5, \quad \text{Corr}(x, y) = \frac{-62,5}{5 \times 2,75} = -0,9944$$

(b) Oui car $\text{Corr}(x, y)$ est très proche de -1 .

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 1 \\ 70 & 1 \\ 80 & 1 \\ 90 & 1 \\ 100 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 64 \\ 61 \\ 58 \\ 56 \\ 54 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 & 1 \\ 70 & 1 \\ 80 & 1 \\ 90 & 1 \\ 100 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33000 & 400 \\ 400 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{5000} \begin{pmatrix} 5 & -400 \\ -400 & 33000 \end{pmatrix}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 \\ 61 \\ 58 \\ 56 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23790 \\ 293 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{5000} \begin{pmatrix} 5 & -400 \\ -400 & 33000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23790 \\ 293 \end{pmatrix} = \frac{1}{5000} \begin{pmatrix} 5 \times 23790 - 400 \times 293 \\ -400 \times 23790 + 33000 \times 293 \end{pmatrix} = \frac{1}{5000} \begin{pmatrix} -7250 \\ -392500 \end{pmatrix} =$$

(Le résultat final est noté dans l'image comme $(-1,45, -78,6)$, transcription fidèle.)

(Le graphique montre les points et la droite de régression décroissante.)