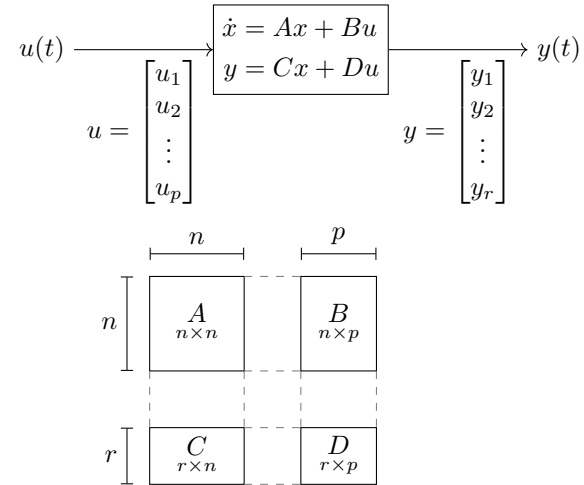
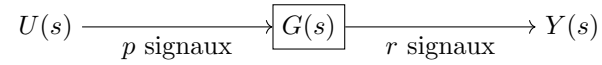


1 Espaces d'états



1.1 Choix des variables d'état

Les variables d'état sont les variables qui ont leurs dérivée dans les équations.

- Condensateur : tension
- Bobine : courant

1.2 Forme modale

Matrice T construite à partir des vecteurs propres de A

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} = T^{-1}AT & \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT & \tilde{D} = D \end{bmatrix}$$

1.3 $A, B, C, D \longrightarrow G$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
$$G(z) = C_n(zI - A_n)^{-1}B_n + D_n$$

1.3.1 Gain haute fréquence

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = D$$

1.3.2 Gain basse fréquence (gain statique)

Analogique :

$$G(s = 0) = -CA^{-1}B + D$$

Numérique :

$$G(z = 1) = -C(I - A)^{-1}B + D$$

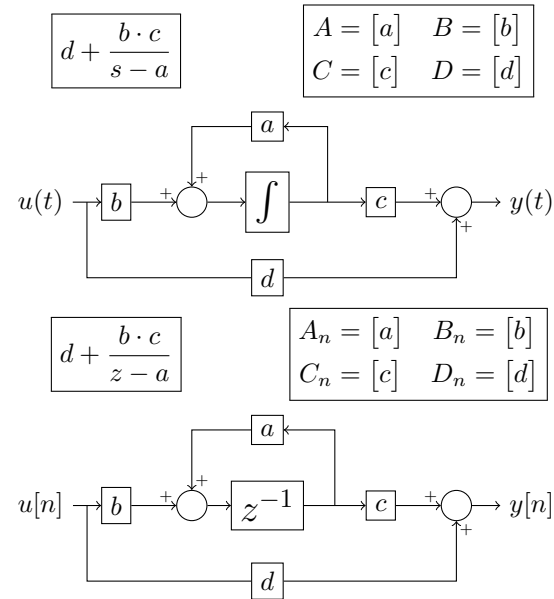
1.4 $G \longrightarrow A, B, C, D$

On utilise la forme commandable

$$G(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2]$	$D = 0$

1.5 $G(s)/G(z) \longleftrightarrow A, B, C, D$



1.6 Conversion analogique vers numérique

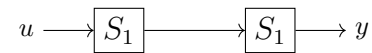
$$A_d = e^{A_a \cdot h}$$

$$B_d = \int_0^h e^{A_a \cdot \tau} B_a d\tau$$

$$C_d = C_a$$

$$D_d = D_a$$

1.7 Mise en cascade

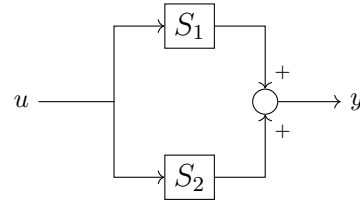


$$S_{tot} = S_2(s) \cdot S_1(s) \quad \text{ordre important}$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad D_{tot} = D_2 D_1$$

1.8 Mise en parallèle

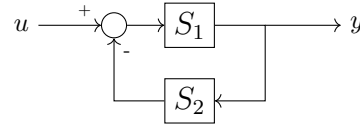


$$S_{tot}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = [C_1 \quad C_2] \quad D_{tot} = D_1 + D_2$$

1.8.1 Mise en contre-réaction 1



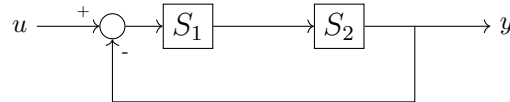
$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -B_1 (C_2 - D_2 D_1 C_2) \\ B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & A_2 - B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix}$$

$$B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 - B_1 D_2 N D_1 \\ B_2 N D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = [(I - D_1 D_2)^{-1} C_1 \quad -(I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2]$$

$$D_{tot} = (I - D_1 D_2)^{-1} D_1$$

1.8.2 Mise en contre-réaction 2



$$S_{tot}(s) = (I + S_1(s) S_2(s))^{-1} S_1(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = [D_2 C_1 \quad C_2] \quad D_{tot} = D_1 D_2$$

1.9 Commandabilité

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Pour des systèmes monoentrée :

$$\det(P_c) \neq 0 \longrightarrow \text{Commandable}$$

Pour des systèmes multi-entrées (généralisation) :

$$\text{rang}(P_c) == n \longrightarrow \text{Commandable}$$

Faire une permutation avec T ne change pas la commandabilité du système. La nouvelle matrice \tilde{P}_c est donnée par $T^{-1}P_c$

1.10 Observabilité

$$P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(P_0) = n \longrightarrow \text{Observable}$$

En monosortie on peut utiliser $\det(P_0) \neq 0 \longrightarrow \text{Observable}$

1.11 Trajectoire

1.12 Système numérique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \quad B_n \quad C_n \quad D_n$$

Et la condition initiale x_0 . On cherche à trouver les valeurs de $x[0], x[1], x[2], \dots$

$$x[k] = A_n^k x[0] + A_n^{k-1} B_n u[0] + A_n^{k-2} B_n u[1] + \cdots + B_n u[k-1]$$

On a la **contribution de la condition initiale** et un **produit de convolution** $u[k] * g_x[k]$

1.12.1 Réponse impulsionnelle

Si on suppose que la condition initiale est nulle et qu'on excite le signal avec un dirac numérique, alors on a

$$x[k] = A_n^{k-1} B_n$$

1.13 Système analogique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \quad B_n \quad C_n \quad D_n$$

Et la condition initiale x_0

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

1.13.1 Exponentielle matricielle (ou matrice de transition)

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Si A est diagonale, on peut simplifier en écrivant

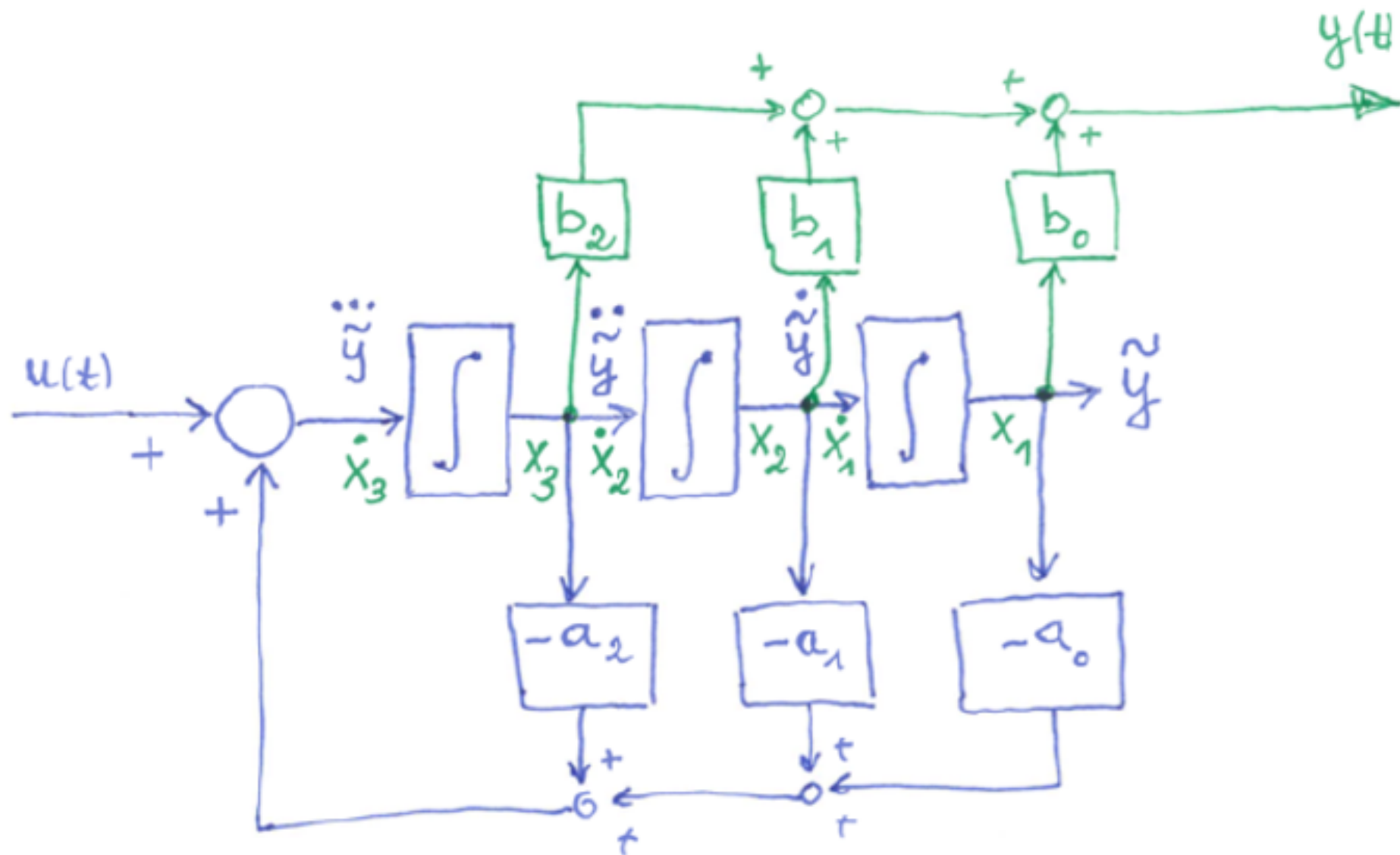
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{bmatrix}$$

Calcul par diagonalisation Si A est diagonalisable, alors

$$e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}$$

Ceci permet de simplifier les calculs en utilisant la propriété de l'exponentielle lorsque \tilde{A} est diagonal

1.14 Forme commandable



On obtient donc finalement

$$\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \quad D = 0 \end{array}$$

Voir ??

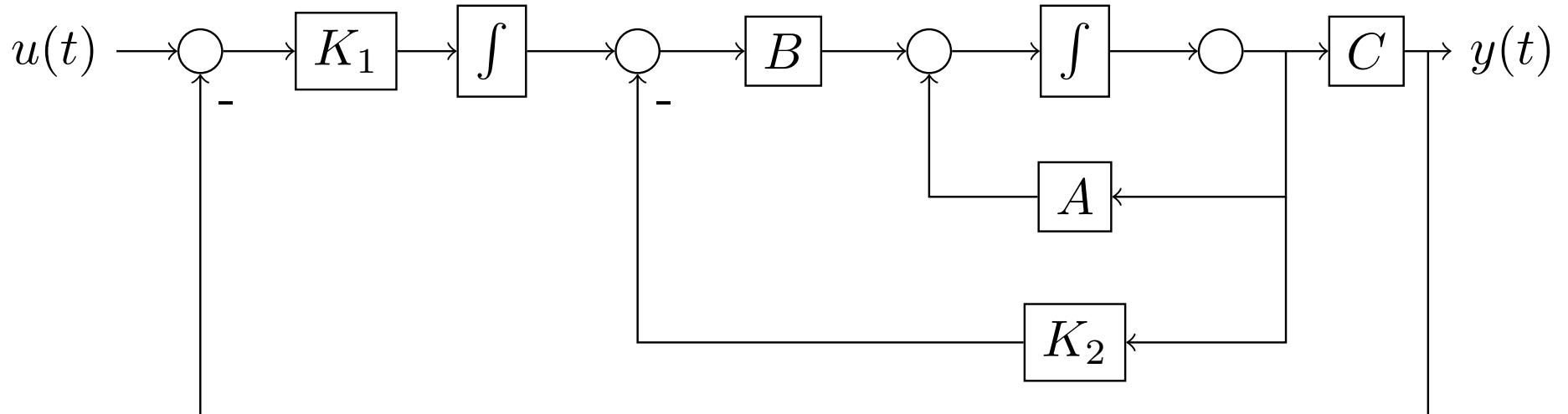
1.15 Modèle échantillonné

$$H(z) = \frac{z-1}{z} Z \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G_a(s)}{s} \right) \Big|_{t=kh} \right)$$

1.15.1 Représentation dans l'espace d'état

$$\begin{array}{l} A_n = e^{Ah} \quad B_n = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau \\ C_d = C \quad D_n = D \end{array}$$

1.16 Action intégrale sur la commande



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$$

1.17 Placement de pôles

Il faut que le polynôme caractéristique de la boucle fermée (par exemple $sI - A_{bf} = sI - (A - BK)$) corresponde aux pôles que l'ont souhaite

$$\det(sI - A_{bf}) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

1.18 Retour d'état

$$A_{bf} = A - BK$$