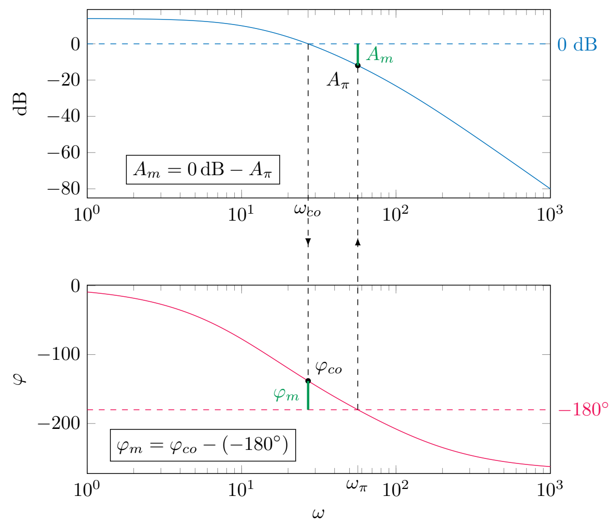
1 Fonctions de transfert

1.1 Marge de gain / marge de phase



1.2 Équations aux différences

$$\underbrace{d}_{\text{degré relatif}} = \underbrace{n}_{\text{deg(denominateur)}} - \underbrace{m}_{\text{deg(numérateur)}}$$

Forme développée (Y en fonction de U)

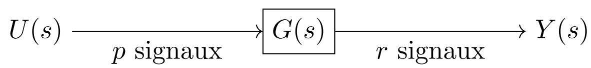
$$Y(z)\left(a_0 = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}\right) = U(z)\left(b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \cdots + b_m z^{-d-m}\right)$$

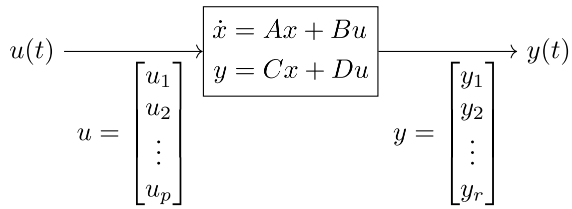
Forme fonction de transfert avec puissances de z négatives On peut aussi écrire sous la forme z^{-x}

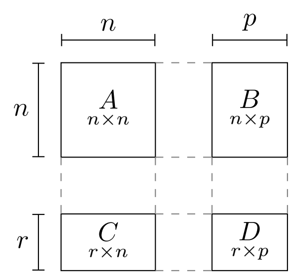
$$G(z) = \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \cdots + b_m z^{-d-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

2 Espaces d'états







2.1 Choix des variables d'état

Les variables d'état sont les variables qui ont leurs dérivée dans les équations.

- Condensateur : tension
- Bobine : courant

2.2 Forme modale

Matrice T construite à partir des vecteurs propres de A

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} = T^{-1}AT & \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT & \tilde{D} = D \end{array}}$$

2.3 $A, B, C, D \longrightarrow G$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(z) = C_n(zI - A_n)^{-1}B_n + D_n$$

2.3.1 Gain haute fréquence

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = D$$

2.3.2 Gain basse fréquence (gain statique)

Analogique :

$$G(s = 0) = -CA^{-1}B + D$$

Numérique :

$$G(z = 1) = -C(I - A)^{-1}B + D$$

2.4 $G \longrightarrow A, B, C, D$

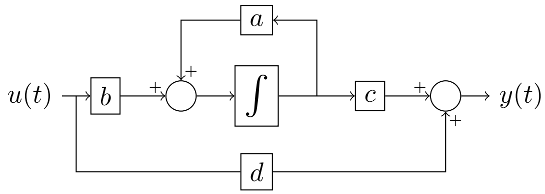
On utilise la forme commandable

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

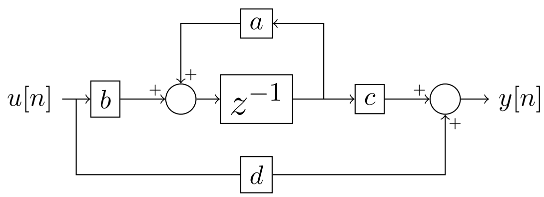
$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D = 0 \end{array}}$$

2.5 $G(s)/G(z) \longleftrightarrow A, B, C, D$

$$\boxed{d + \frac{b \cdot c}{s - a}} \qquad \boxed{\begin{matrix} A = [a] & B = [b] \\ C = [c] & D = [d] \end{matrix}}$$



$$\boxed{d + \frac{b \cdot c}{z - a}} \qquad \boxed{\begin{matrix} A_n = [a] & B_n = [b] \\ C_n = [c] & D_n = [d] \end{matrix}}$$



2.6 Conversion analogique vers numérique

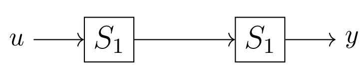
$$A_d = e^{A_a \cdot h}$$

$$B_d = \int_0^h e^{A_a \cdot \tau} B_a d\tau$$

$$C_d = C_a$$

$$D_d = D_a$$

2.7 Mise en cascade

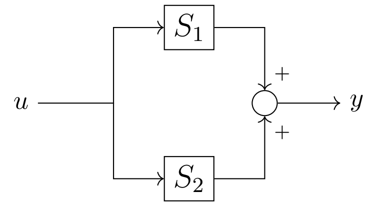


$$S_{tot} = S_2(s) \cdot S_1(s) \qquad \text{ordre important}$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_2 D_1$$

2.8 Mise en parallèle

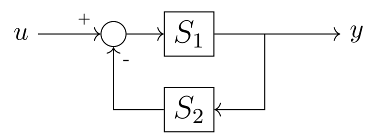


$$S_{tot}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1 + D_2$$

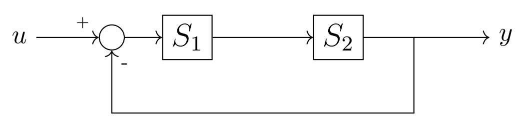
2.8.1 Mise en contre-réaction 1



$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -B_1 (C_2 - D_2 D_1 C_2) \\ B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & A_2 - B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 - B_1 D_2 N D_1 \\ B_2 N D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -(I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = (I - D_1 D_2)^{-1} D_1$$

2.8.2 Mise en contre-réaction 2



$$S_{tot}(s) = \left(I + S_1(s) S_2(s)\right)^{-1} S_1(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1 D_2$$

2.9 Commandabilité

$$\boxed{P_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1} B \end{bmatrix}}$$

Pour des systèmes monoentrée :

$$\det(P_c) \neq 0 \longrightarrow \text{Commandable}$$

Pour des systèmes multi-entrées (généralisation) :

$$\text{rang}(P_c) == n \longrightarrow \text{Commandable}$$

Faire une permutation avec T ne change pas la commandabilité du système. La nouvelle matrice $\tilde{P}_c$ est donnée par $T^{-1} P_c$

2.10 Observabilité

$$\boxed{P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\text{rang}(P_0) = n \longrightarrow \text{Observable}}$$

En monosortie on peut utiliser $\det(P_0) \neq 0 \longrightarrow$ Observable

2.11 Trajectoire

2.12 Système numérique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \qquad B_n \qquad C_n \qquad D_n$$

Et la condition initiale x_0. On chercher à trouver les valeurs de $x[0], x[1], x[2], \cdots$

$$x[k] = A_n^k x[0] + A_n^{k-1} B_n u[0] + A_n^{k-2} B_n u[1] + \cdots + B_n u[k-1]$$

On a la contribution de la condition initiale et un produit de convolution $u[k] * g_x[k]$

2.12.1 Réponse impulsionnelle

Si on suppose que la condition initiale est nulle et qu'on excite le signal avec un dirac numérique, alors on a

$$\boxed{x[k] = A_n^{k-1} B_n}$$

2.13 Système analogique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \qquad B_n \qquad C_n \qquad D_n$$

Et la condition initiale x_0

$$\boxed{x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}$$

2.13.1 Exponentielle matricielle (ou matrice de transition)

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots}$$

Si A est diagonale, on peut simplifier en écrivant

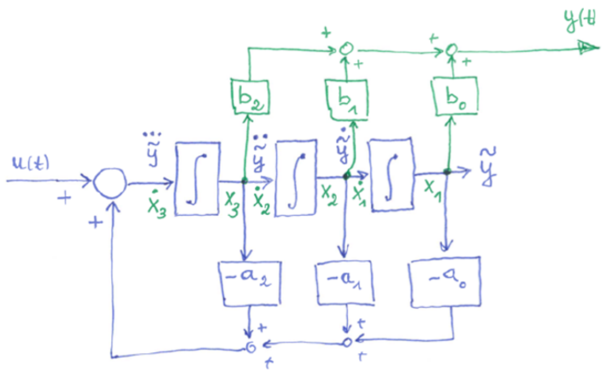
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{bmatrix}$$

Calcul par diagonalisation Si A est diagonalisable, alors

$$\boxed{e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}}$$

Ceci permet de simplifier les calculs en utilisant la propriété de l'exponentielle lorsque $\tilde{A}$ est diagonal

2.14 Forme commandable



On obtient donc finalement

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D = 0 \end{array}}$$

Voir 1.2

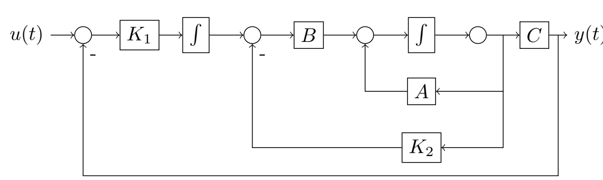
2.15 Modèle échantillonné

$$\boxed{H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G_a(s)}{s}\right)\Big|_{t=kh}\right)}$$

2.15.1 Représentation dans l'espace d'état

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_n = e^{Ah} & B_n = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau \\ C_d = C & D_n = D \end{array}}$$

2.16 Action intégrale sur la commande



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$$

2.17 Placement de pôles

Il faut que le polynôme caractéristique de la boucle fermée (par exemple $sI - A_{bf} = sI - (A - BK)$) corresponde aux pôles que l'ont souhaite

$$\det(sI - A_{bf}) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

2.18 Retour d'état

$$A_{bf} = A - BK$$

3 Régulateurs

3.1 Méthode de la sécante

$$\boxed{\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[k] - x[k-1]}{h}}$$

$$G_s(z) = \frac{1 - z^{-1}}{h} = \frac{z-1}{hz}$$

3.2 Méthode des rectangles

$$\boxed{\int_0^t x dt \approx h \sum_{l=0}^{k-1} e[l]}$$

$$G_I(s) = \frac{h}{z-1}$$

3.3 PID

En temps discret et avec méthode de la sécante et des rectangles

$$y[k] = K_p \left(e[k] + \frac{1}{T_i} h \sum_{l=0}^{k-1} e[l] + T_d \frac{e[k] - e[k-1]}{h} \right)$$

3.4 LQR (forme quadratique)

$$Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = \vec{x}^T \cdot M \cdot \vec{x}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$x^T \cdot M \cdot x = M_{11}x_1^2 + 2M_{12}x_1x_2 + M_{22}x_2^2$$

3.4.1 fonction de coût à minimiser

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Avec $Q \geq 0$ et $R > 0$ / Taille matrice Q = A, R nombre de signaux entrée

3.4.2 Solution LQR analogique (Riccati)

$$K = R^{-1}B^T P$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q$$

3.4.3 Solution LQR discreet

$$K = (R + B^T PB)^{-1}B^T PA$$

$$A^T PA - P - A^T PB(R + B^T PB)^{-1}B^T PA + Q = 0$$

3.4.4 Choix de Q

Si on veut pénalisé que la sortie. On a $Q = C^t C \geq 0$ et le R reste arbitraire

4 Nyquist

4.1 Nyquist simplifié

Il faut que la boucle ouverte soit stable sinon il faut le critère généralisé

$$G_o(s) = G_a(s) \cdot G_c(s)$$

$$G_{yw}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

4.1.1 boucle ouverte

$$G_o(s) = K(sI - A)^{-1}B$$

4.1.2 marge de phase

1. identifier module = 0
2. à la même pulsation regarder la diff entre -180° et la phase actuelle

4.1.3 marge de gain

1. identifier la phase à -180°
2. à la même pulsation regarder la diff entre le module et 0[dB]

4.2 Nyquist généralisé

Utilisable en tout temps. La boucle ouverte doit exactement encercler le point critique dans le sens trigonométrique le nombre de pôle instable. Pour compter le nombre d'encerclement, il faut fixer un élastique sur le point critique et l'autre bout suit la courbe de $-\infty$ à ∞.

4.2.1 marge de phase et de gain

Tracer un cercle unité centré à l'origine et check les intersections entre lieux de nyquist et le cercle le plus petit angle nous donne la marge de phase.

4.3 Distance critique

Distance entre le point critique (-1) et la courbe du lieux de Nyquist.

$$d_{crit} = min(dist(-1, L(j\omega)))$$

5 Observateur

6 Autres

6.1 Inversion de matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

6.2 Valeurs propres

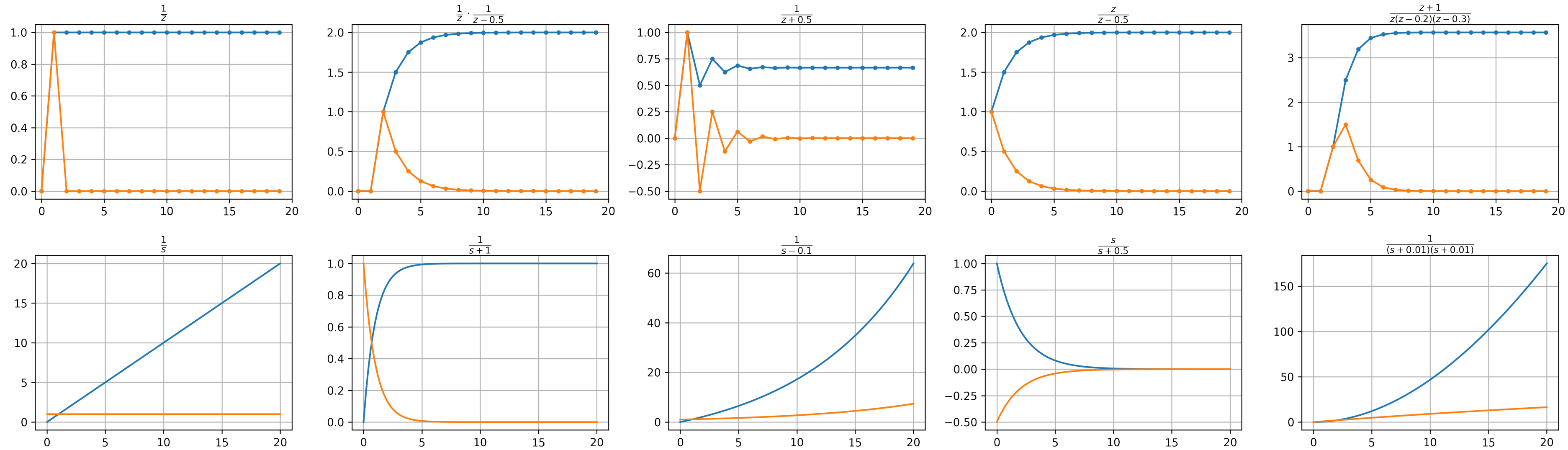
$$|\lambda_i I - A| = 0$$

fonction en s et en z

6.3 Vecteurs propres

Chercher tous les vecteurs v_i qui respectent

$$(\lambda_i I - A)v_i = \vec{0}$$



7 A trier

7.1 Identification

Avec deux bodes, on peut identifier lequel est $G(s)$ et lequel est $\frac{1}{G(s)}$ en regardant une valeur (en dB) de x qui devient $-x$