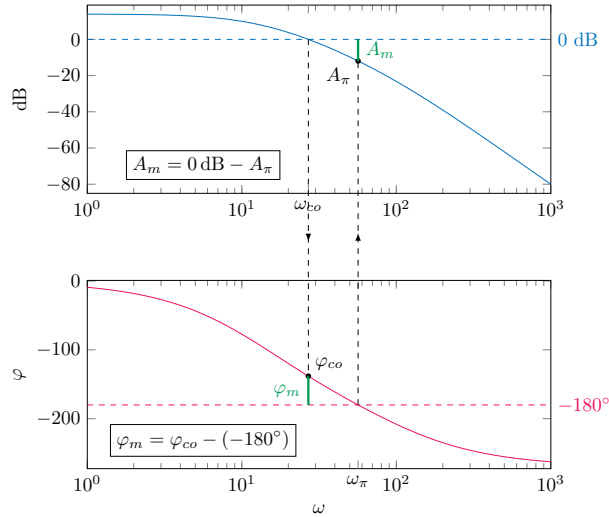


# 1 Fonctions de transfert

## 1.1 Marge de gain / marge de phase



## 1.2 Équations aux différences

$$\text{degré relatif} = \text{deg}(\text{denominateur}) - \text{deg}(\text{numérateur})$$

Forme développée ( $Y$  en fonction de  $U$ )

$$Y(z) (a_0 = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) = U(z) (b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \dots + b_m z^{-d-m})$$

Forme fonction de transfert avec puissances de  $z$  négatives On peut aussi écrire sous la forme  $z^{-x}$

$$G(z) = \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \dots + b_m z^{-d-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

## 1.3 Normes d'une fonction de transfert

### 1.3.1 Norme 2

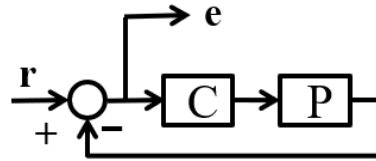
$$\|G_2\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt} = \|g\|_2$$

### 1.3.2 Norme $\infty$

$$\|G\|_{\infty} = \max_{\omega} |G(j\omega)| = \max_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

## 1.4 Fonction de base

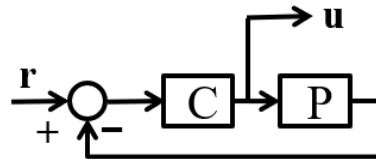
### 1.4.1 Sensibilité



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

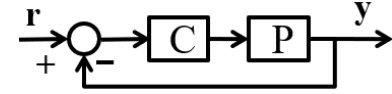
La sensibilité va toujours tendre vers 0 dB à haute fréquence

### 1.4.2 •



$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)} = C(s)S(s)$$

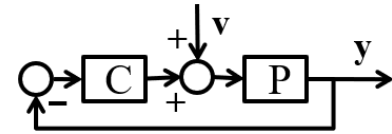
### 1.4.3 Sensibilité complémentaire



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = T(s) = 1 - S(s)$$

La sensibilité complémentaire vaut toujours 0 dB à basse fréquence.

### 1.4.4 •



$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = P(s)S(s)$$

### 1.4.5 Boucle ouverte

$$L(s)$$

La boucle ouverte a un gain qui augmente à basse fréquence, et qui diminue à haute fréquence.

### 1.4.6 Remarques

La valeur à basse fréquence du système à régler  $P(s)$  se retrouve en  $\frac{1}{x}$  ( $\times(-1)$  en dB) sur le Bode du  $|C(s)S(s)|$

## 1.5 Distance critique

$$d_{crit} = \min_{\omega} \{ \text{dist}(L(j\omega)), -1 \}$$

$$d_{crit} = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$

$$d_{crit} = \frac{1}{\min_{\omega} |\frac{1}{1+L(j\omega)}|}$$

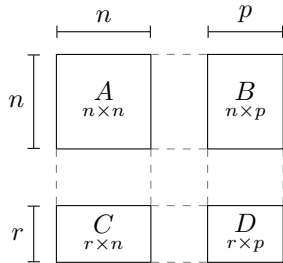
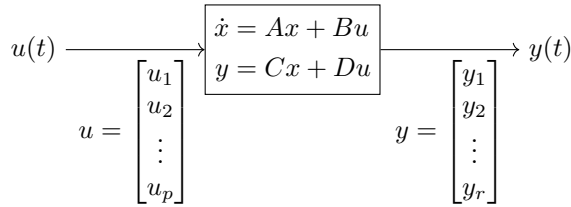
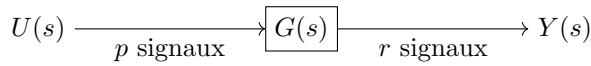
$$d_{crit} = \frac{1}{\|S\|_{\infty}}$$

### 1.5.1 marge de phase et de gain

$$A_m > \frac{1}{1 - d_{crit}}$$

$$\varphi_m > 2 \arcsin\left(\frac{d_{crit}}{2}\right)$$

## 2 Espaces d'états



### 2.1 Choix des variables d'état

Les variables d'état sont les variables qui ont leurs dérivée dans les équations.

- Condensateur : tension
- Bobine : courant

### 2.2 Forme modale

Matrice  $T$  construite à partir des vecteurs propres de  $A$

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} = T^{-1}AT & \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT & \tilde{D} = D \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [\tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_2 \quad \tilde{c}_3] \quad \tilde{D} = 1$$

### 2.3 $A, B, C, D \longrightarrow G$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(z) = C_n(zI - A_n)^{-1}B_n + D_n$$

#### 2.3.1 Gain haute fréquence

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = D$$

#### 2.3.2 Gain basse fréquence (gain statique)

Analogique :

$$G(s=0) = -CA^{-1}B + D$$

Numérique :

$$G(z=1) = -C(I - A)^{-1}B + D$$

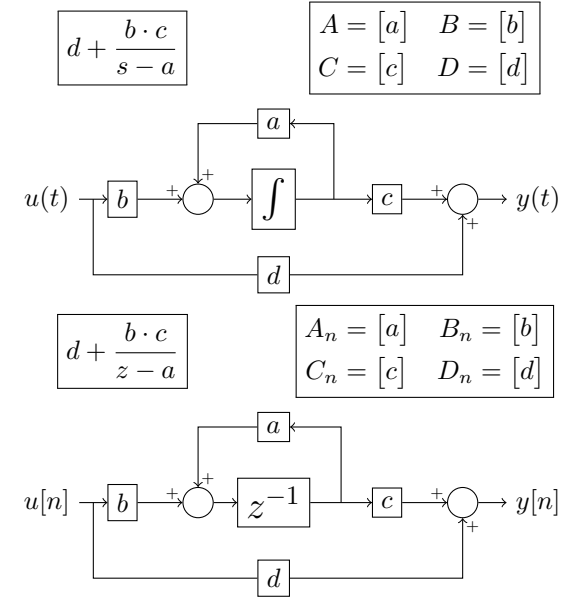
### 2.4 $G \longrightarrow A, B, C, D$

On utilise la forme commandable

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] & D = 0 \end{bmatrix}$$

### 2.5 $G(s)/G(z) \longleftrightarrow A, B, C, D$



### 2.6 Conversion analogique vers numérique

$$A_d = e^{A_a \cdot h}$$

$$B_d = \int_0^h e^{A_a \cdot \tau} B_a d\tau$$

$$C_d = C_a$$

$$D_d = D_a$$

### 2.7 Mise en cascade

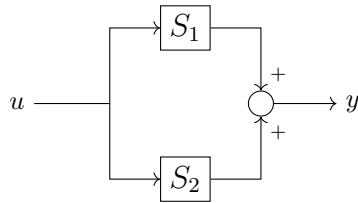
$$u \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow y$$

$$S_{tot} = S_2(s) \cdot S_1(s) \quad \text{ordre important}$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = [D_2 C_1 \quad C_2] \quad D_{tot} = D_2 D_1$$

## 2.8 Mise en parallèle

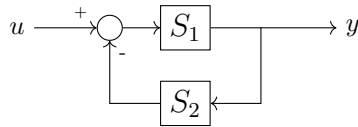


$$S_{tot}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = [C_1 \quad C_2] \quad D_{tot} = D_1 + D_2$$

### 2.8.1 Mise en contre-réaction 1



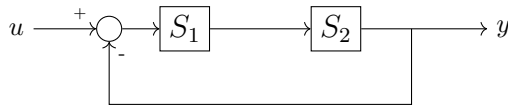
$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -B_1 (C_2 - D_2 D_1 C_2) \\ B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & A_2 - B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix}$$

$$B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 - B_1 D_2 N D_1 \\ B_2 N D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = [(I - D_1 D_2)^{-1} C_1 \quad -(I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2]$$

$$D_{tot} = (I - D_1 D_2)^{-1} D_1$$

### 2.8.2 Mise en contre-réaction 2



$$S_{tot}(s) = (I + S_1(s)S_2(s))^{-1} S_1(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = [D_2 C_1 \quad C_2] \quad D_{tot} = D_1 D_2$$

## 2.9 Commandabilité

$$P_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Pour des systèmes monoentrée :

$$\det(P_c) \neq 0 \rightarrow \text{Commandable}$$

Pour des systèmes multi-entrées (généralisation) :

$$\text{rang}(P_c) = n \rightarrow \text{Commandable}$$

Faire une permutation avec  $T$  ne change pas la commandabilité du système. La nouvelle matrice  $\tilde{P}_c$  est donnée par  $T^{-1}P_c$

## 2.10 Observabilité

$$P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(P_0) = n \rightarrow \text{Observable}$$

En monosortie on peut utiliser  $\det(P_0) \neq 0 \rightarrow \text{Observable}$ .

Si le système est observable, on peut utiliser l'observateur trivial  $H = 0$

## 2.11 Trajectoire

## 2.12 Système numérique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \quad B_n \quad C_n \quad D_n$$

Et la condition initiale  $x_0$ . On cherche à trouver les valeurs de  $x[0], x[1], x[2], \dots$

$$x[k] = A_n^k x[0] + A_n^{k-1} B_n u[0] + A_n^{k-2} B_n u[1] + \dots + B_n u[k-1]$$

On a la **contribution de la condition initiale** et un **produit de convolution**  $u[k] * g_x[k]$

### 2.12.1 Réponse impulsionnelle

Si on suppose que la condition initiale est nulle et qu'on excite le signal avec un dirac numérique, alors on a

$$x[k] = A_n^{k-1} B_n$$

## 2.13 Système analogique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \quad B_n \quad C_n \quad D_n$$

Et la condition initiale  $x_0$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

### 2.13.1 Exponentielle matricielle (ou matrice de transition)

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Si  $A$  est diagonale, on peut simplifier en écrivant

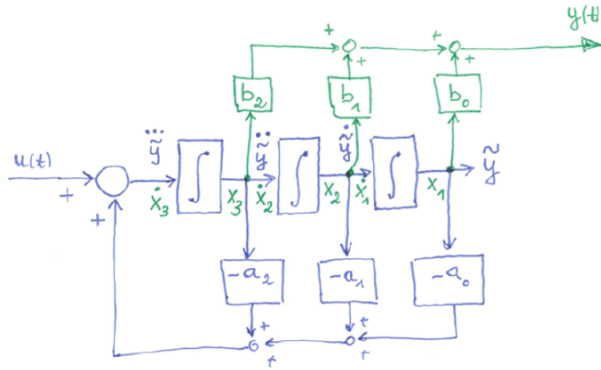
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{bmatrix}$$

**Calcul par diagonalisation** Si  $A$  est diagonalisable, alors

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$$

Ceci permet de simplifier les calculs en utilisant la propriété de l'exponentielle lorsque  $\tilde{A}$  est diagonal

## 2.14 Forme commandable



On obtient donc finalement

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \quad D = 0$$

Voir 1.2

## 2.15 Modèle échantillonné

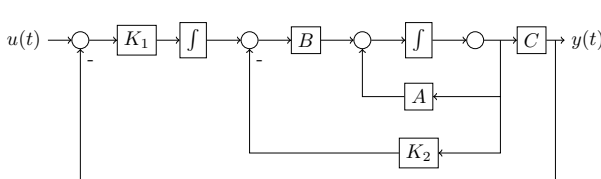
$$H(z) = \frac{z-1}{z} Z \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_a(s)}{s} \right) \Big|_{t=kh} \right)$$

### 2.15.1 Représentation dans l'espace d'état

$$A_n = e^{Ah} \quad B_n = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$$

$$C_d = C \quad D_n = D$$

## 2.16 Action intégrale sur la commande



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$$

## 2.17 Placement de pôles

Il faut que le polynôme caractéristique de la boucle fermée (par exemple  $sI - A_{bf} = sI - (A - BK)$ ) corresponde aux pôles que l'on souhaite

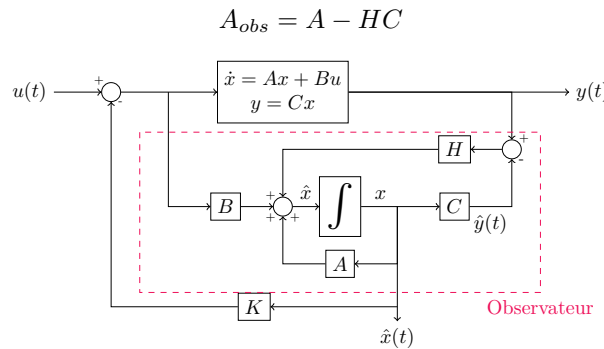
$$\det(sI - A_{bf}) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

## 2.18 Retour d'état

$$A_{bf} = A - BK$$

## 2.19 Observateur

Matrice A de l'observateur (pour le calcul des pôles)



$$A_{obs} = A - HC$$

La fonction de transfert du régulateur est

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K (sI - A + BK + HC)^{-1} H$$

### 2.19.1 Filtre

Si il faut exprimer un filtre, par exemple  $\hat{X}_2 = \dots$ , il faut commencer par décrire  $\hat{X}_1$  en fonction du reste puis résoudre le système (en tout cas dans l'exercice 8.1).

Les pôles de l'observateur dans ce cas peuvent se baser sur le dénominateur de la fonction de transfert (si elle est donnée ou calculée).

### 2.19.2 Trajectoire

$$\hat{x}[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + H(y[k] - \hat{y}[k])$$

## 3 Régulateurs

### 3.1 Méthode de la sécante

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[k] - x[k-1]}{h}$$

$$G_s(z) = \frac{1 - z^{-1}}{h} = \frac{z - 1}{hz}$$

### 3.2 Méthode des rectangles

$$\int_0^t x dt \approx h \sum_{l=0}^{k-1} e[l]$$

$$G_I(s) = \frac{h}{z - 1}$$

### 3.3 PID

En temps discret et avec méthode de la sécante et des rectangles

$$y[k] = K_p \left( e[k] + \frac{1}{T_i} h \sum_{l=0}^{k-1} e[l] + T_d \frac{e[k] - e[k-1]}{h} \right)$$

### 3.4 LQR (forme quadratique)

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = \vec{x}^T \cdot M \cdot \vec{x}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^T \cdot M \cdot \vec{x} = M_{11}x_1^2 + 2M_{12}x_1x_2 + M_{22}x_2^2$$

#### 3.4.1 fonction de coût à minimiser

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Avec  $Q \geq 0$  et  $R > 0$  / Taille matrice Q = A, R nombre de signaux entrée

### 3.4.2 Solution LQR analogique (Riccati)

$$K = R^{-1}B^T P$$
$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q$$

### 3.4.3 Solution LQR discret

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$
$$A^T P A - P - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q = 0$$

### 3.4.4 Choix de Q

Si on veut pénaliser que la sortie. On a  $Q = C^T C \geq 0$  et le R reste arbitraire

## 3.5 LTR

On fait la synthèse du retour d'état normalement puis pour la synthèse de l'observateur on choisit des valeurs spécifiques de Q et R  $Q = \rho B B^T$  et  $R = 1$  plus rho est grand meilleur sera la robustesse.

Cette méthode est valable pour un système à déphasage minimal (pas de zéro dans le demi-plan droite en s)

## 4 Nyquist

### 4.1 Nyquist simplifié

Il faut que la boucle ouverte soit stable sinon il faut le critère généralisé

$$G_o(s) = G_a(s) \cdot G_c(s)$$

$$G_{yw}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

#### 4.1.1 boucle ouverte

$$G_o(s) = K(sI - A)^{-1}B$$

#### 4.1.2 marge de phase

1. identifier module = 0
2. à la même pulsation regarder la diff entre  $-180^\circ$  et la phase actuelle

### 4.1.3 marge de gain

1. identifier la phase à  $-180^\circ$
2. à la même pulsation regarder la diff entre le module et 0[dB]

## 4.2 Nyquist généralisé

Utilisable en tout temps. La boucle ouverte doit exactement encercler le point critique dans le sens trigonométrique le nombre de pôle instable. Pour compter le nombre d'encerclement, il faut fixer un élastique sur le point critique et l'autre bout suit la courbe de  $-\infty$  à  $\infty$ .

### 4.2.1 marge de phase et de gain

Tracer un cercle unité centré à l'origine et check les intersections entre lieux de nyquist et le cercle le plus petit angle nous donne la marge de phase.

## 4.3 Distance critique

Distance entre le point critique (-1) et la courbe du lieux de Nyquist.

$$d_{crit} = \min(\text{dist}(-1, L(j\omega)))$$

## 5 Observateur

### 5.1 Observateur trivial

L'erreur est  $\dot{x}_e = Ax_e$  ce qui donne  $x_e(t) = e^{At}x_{e,0}$  donc converge si les valeurs propres de A sont toutes négatives.

### 5.2 Observateur complet

erreur =  $x_e = (x - \hat{x})$  la dynamique de l'erreur est donc  $\dot{x}_e = (A - HC)x_e$   $A_{obs} = (A - HC)$  avec H libre Convergence si toutes les la valeurs propres ont une partie réelle négative.

## 5.3 Dynamique du système

$$\begin{cases} \hat{x}[k+1] = A\hat{x}[k] + Bu[k] + H(y[k] - \hat{y}[k]) \\ \hat{y}[k] = C\hat{x}[k] + Du[k] \end{cases}$$

## 5.4 Séparation

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Les pôles de la boucle fermée sont composés des pôles de la synthèse du retour d'état K et de la synthèse de l'observateur H.

## 6 Valeurs singulières

### 6.1 Valeurs singulières d'une matrice

avoir une notion quantitative pas juste booléen (commandabilité, observabilité)

toujours positives et tiré de la plus grande à la plus petite

### 6.2 Norme d'une matrice

$$\|M\|_2 = \max_{x \neq 0} \left( \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} \right) = \sigma_{max}$$

le vecteur nul n'est pas pris en compte

### 6.3 SVD décomposition en valeurs singulières

Les valeurs singulières d'une matrice diagonale sont les valeurs absolues des éléments de la diagonale.

$$M = U \cdot S \cdot V^T$$

M : mXn, U : mXm, S : mXn,  $V^T$  : nXn

$$\bullet S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} @ \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$
$$\sigma_k[M] = \sqrt{\text{eig}[M^T M]}$$

- $V = [v_1 | v_2 | v_3]$   
 $\vec{v}_k = \text{eig}[M^T M] : \text{vecteur propres de } M^T M$
- $U = [u_1 | u_2 | u_3]$   
 $M \vec{v}_k = \sigma_k \vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k = \frac{M \vec{v}_k}{\|M \vec{v}_k\|_2}$

### 6.3.1 Propriétés SVD

- $\sigma_k[M] = \sqrt{\text{eig}[M^T M]}$  racine des valeurs propres de  $M^T M$
- applicable sur n'importe quelle matrice
- toujours réel et positif
- ordre décroissant

## 7 Système non linéaire

### 7.1 sans action de l'entrée

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

linéarisé autour d'un point de fonctionnement.

$\vec{f}(\vec{x}_e) = \vec{0}$  avec  $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_e$  alors on a  $\dot{\Delta \vec{x}} = A \cdot \Delta \vec{x}$  ou  $A$  est la matrice jacobienne

Stabilité locale: on prend le système linéarisé  $\dot{\Delta \vec{x}} = A \cdot \Delta \vec{x}$  et on calcul les pôles du système si la partie réel des valeurs propre est négative.  $\lambda_k = \det(\lambda I - A)$

- système linéarisé stable  $\Rightarrow$  point d'équilibre du système non-linéaire **localement stable**.
- système linéarisé instable  $\Rightarrow$  point d'équilibre du système non-linéaire est localement instable.
- système linéaire marginalement stable  $\Rightarrow$  aucune information sur la stabilité du système non-linéaire.

### 7.2 avec l'action de l'entrée

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, u), \vec{f}(\vec{x}_e, u_e) = \vec{0}$$

$$A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \Big|_{\vec{x}_e, u_e}$$

$$B = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u} \Big|_{\vec{x}_e, u_e}$$

$$\dot{\Delta \vec{x}} = A \cdot \Delta \vec{x} + B \cdot \Delta u$$

Si plusieurs entrées alors  $u$  peut être un vecteur aussi.

## 8 Incertitudes

### 8.1 Classification d'incertitudes

1. Incertitudes structurées (paramétriques)
  - Paramètres avec tolérances, dérives thermiques, etc.
  - Famille de modèles, le modèle nominal fait partie de cette famille.
  - L'ordre et la structure du modèle ne changent pas !
2. Incertitudes non structurées
  - Modes non modélisés, p.ex. dynamique des capteurs/actionneurs.
  - L'incertitude non structurée peut être modélisé par une fonction de transfert inconnue  $\Delta(s)$ , mais bornée en amplitude  $\|\Delta\|_\infty < M \rightarrow$  Famille de modèles.
  - L'ordre de la famille de modèle peut changer

### 8.2 Perturbation additive



$$\|\Delta_a\|_\infty < \frac{1}{\left\| \frac{C}{1+P_0 C} \right\|_\infty}$$

Plus le pic de la boucle ouverte sera faible plus on aura de possibilité de travailler avec des incertitudes.

### 8.3 Perturbation multiplicative



$$\|\Delta_m\|_\infty < \frac{1}{\left\| \frac{P_0 C}{1+P_0 C} \right\|_\infty} = \frac{1}{\|T\|_\infty}$$

Bruit sur un capteur

### 8.4 Optimisation général

Trouver un régulateur  $C(s)$  qui tolère un maximum d'incertitude  $\|\Delta\|_\infty$  donc qui minimise le pic en boucle ouverte

## 9 Autres

### 9.1 Inversion de matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

### 9.2 Valeurs propres

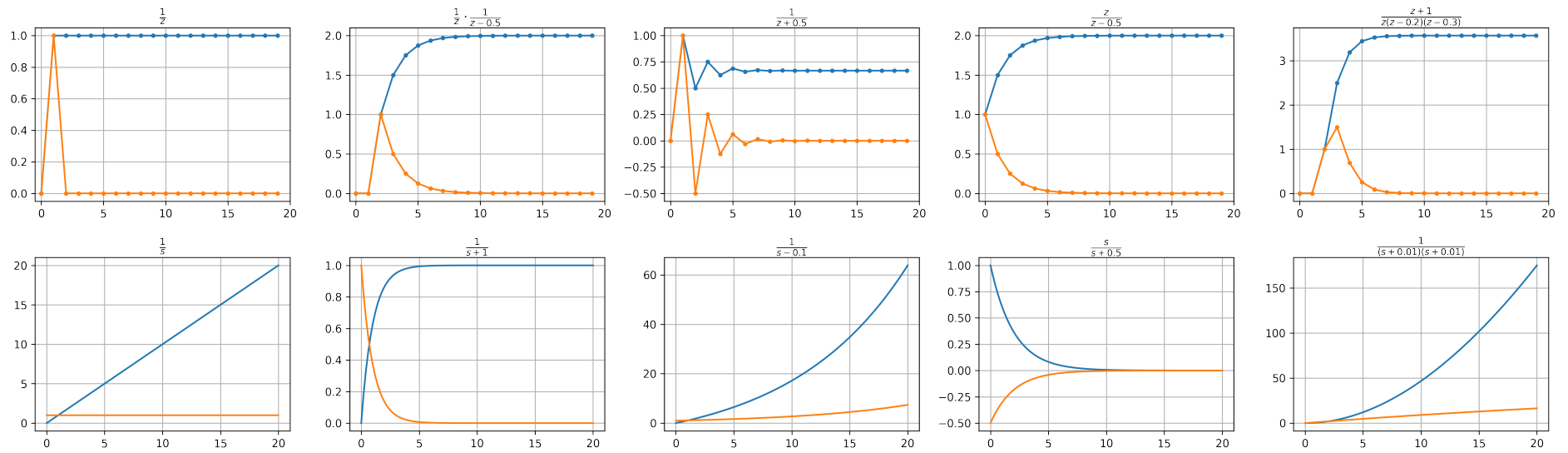
$$|\lambda_i I - A| = 0$$

fonction en  $s$  et en  $z$

### 9.3 Vecteurs propres

Chercher tous les vecteurs  $v_i$  qui respectent

$$(\lambda_i I - A)v_i = \vec{0}$$



## 10 A trier

### 10.1 Identification

Avec deux bodes, on peut identifier lequel est  $G(s)$  et lequel est  $\frac{1}{G(s)}$  en regardant une valeur (en dB) de  $x$  qui devient  $-x$