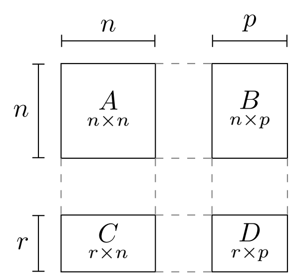
1 Espaces d'états

$$U(s) \xrightarrow[p \text{ signaux}]{} \boxed{G(s)} \xrightarrow[r \text{ signaux}]{} Y(s)$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}} \longrightarrow y(t)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$



1.1 Choix des variables d'état

Les variables d'état sont les variables qui ont leurs dérivée dans les équations.

- Condensateur : tension
- Bobine : courant

1.2 Forme modale

Matrice T construite à partir des vecteurs propres de A

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT & \tilde{B} &= T^{-1}B \\ \tilde{C} &= CT & \tilde{D} &= D \end{aligned}}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{bmatrix} \qquad \tilde{D} = 1$$

1.3 $A, B, C, D \longrightarrow G$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(z) = C_n(zI - A_n)^{-1}B_n + D_n$$

1.3.1 Gain haute fréquence

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = D$$

1.3.2 Gain basse fréquence (gain statique)

Analogique :

$$G(s = 0) = -CA^{-1}B + D$$

Numérique :

$$G(z = 1) = -C(I - A)^{-1}B + D$$

1.4 $G \longrightarrow A, B, C, D$

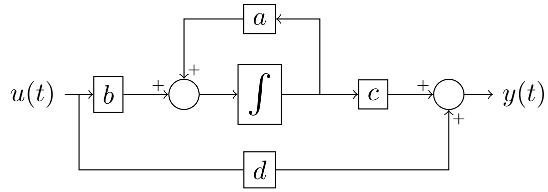
On utilise la forme commandable

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

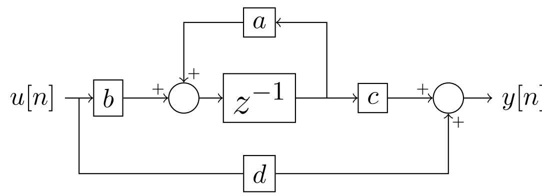
$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D = 0 \end{array}}$$

1.5 $G(s)/G(z) \longleftrightarrow A, B, C, D$

$$\boxed{d + \frac{b \cdot c}{s - a}} \qquad \boxed{\begin{matrix} A = [a] & B = [b] \\ C = [c] & D = [d] \end{matrix}}$$



$$\boxed{d + \frac{b \cdot c}{z - a}} \qquad \boxed{\begin{matrix} A_n = [a] & B_n = [b] \\ C_n = [c] & D_n = [d] \end{matrix}}$$



1.6 Conversion analogique vers numérique

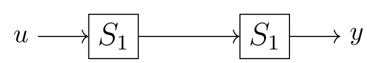
$$A_d = e^{A_a \cdot h}$$

$$B_d = \int_0^h e^{A_a \cdot \tau} B_a d\tau$$

$$C_d = C_a$$

$$D_d = D_a$$

1.7 Mise en cascade

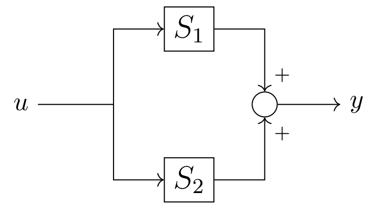


$$S_{tot} = S_2(s) \cdot S_1(s) \qquad \text{ordre important}$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_2 D_1$$

1.8 Mise en parallèle

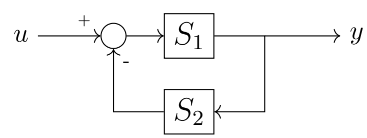


$$S_{tot}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1 + D_2$$

1.8.1 Mise en contre-réaction 1



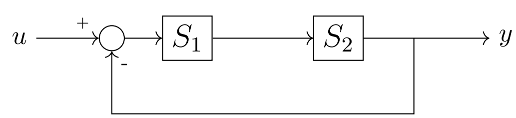
$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -B_1 (C_2 - D_2 D_1 C_2) \\ B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & A_2 - B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix}$$

$$B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 - B_1 D_2 N D_1 \\ B_2 N D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -(I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix}$$

$$D_{tot} = (I - D_1 D_2)^{-1} D_1$$

1.8.2 Mise en contre-réaction 2



$$S_{tot}(s) = (I + S_1(s) S_2(s))^{-1} S_1(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1 D_2$$

1.9 Commandabilité

$$\boxed{P_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}$$

Pour des systèmes monoentrée :

$$\det(P_c) \neq 0 \longrightarrow \text{Commandable}$$

Pour des systèmes multi-entrées (généralisation) :

$$\text{rang}(P_c) == n \longrightarrow \text{Commandable}$$

Faire une permutation avec T ne change pas la commandabilité du système. La nouvelle matrice $\tilde{P}_c$ est donnée par $T^{-1}P_c$

1.10 Observabilité

$$\boxed{P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\text{rang}(P_0) = n \longrightarrow \text{Observable}}$$

En monosortie on peut utiliser $\det(P_0) \neq 0 \longrightarrow$ Observable.
Si le système est observable, on peut utiliser l'observateur trivial $H = 0$

1.11 Trajectoire

1.12 Système numérique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \qquad B_n \qquad C_n \qquad D_n$$

Et la condition initiale x_0. On chercher à trouver les valeurs de $x[0], x[1], x[2], \cdots$

$$x[k] = A_n^k x[0] + A_n^{k-1} B_n u[0] + A_n^{k-2} B_n u[1] + \cdots + B_n u[k-1]$$

On a la contribution de la condition initiale et un produit de convolution $u[k] * g_x[k]$

1.12.1 Réponse impulsionnelle

Si on suppose que la condition initiale est nulle et qu'on excite le signal avec un dirac numérique, alors on a

$$\boxed{x[k] = A_n^{k-1} B_n}$$

1.13 Système analogique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \qquad B_n \qquad C_n \qquad D_n$$

Et la condition initiale x_0

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

1.13.1 Exponentielle matricielle (ou matrice de transition)

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots}$$

Si A est diagonale, on peut simplifier en écrivant

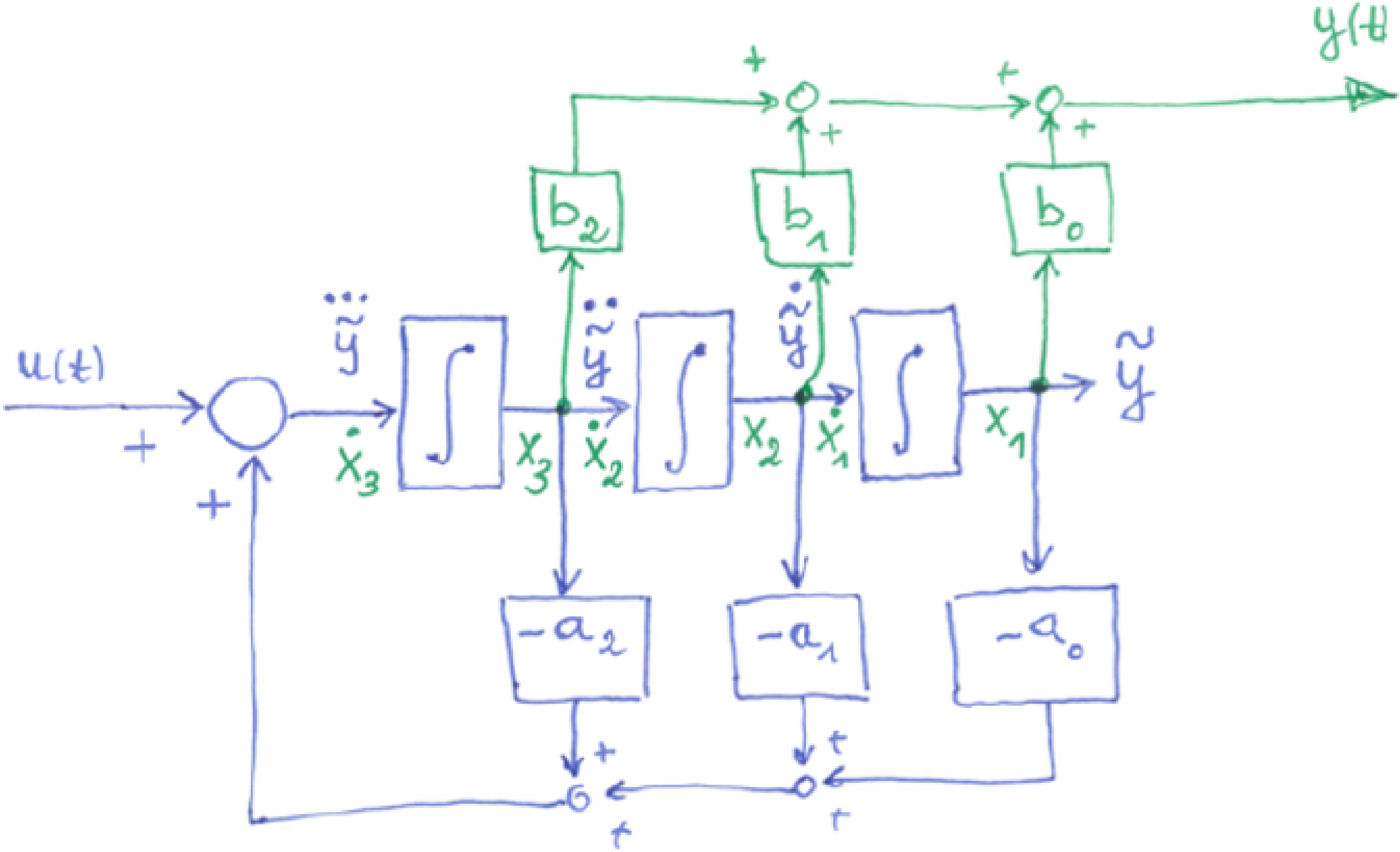
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{bmatrix}$$

Calcul par diagonalisation Si A est diagonalisable, alors

$$\boxed{e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}}$$

Ceci permet de simplifier les calculs en utilisant la propriété de l'exponentielle lorsque $\tilde{A}$ est diagonal

1.14 Forme commandable



On obtient donc finalement

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D = 0 \end{array}}$$

Voir **??**

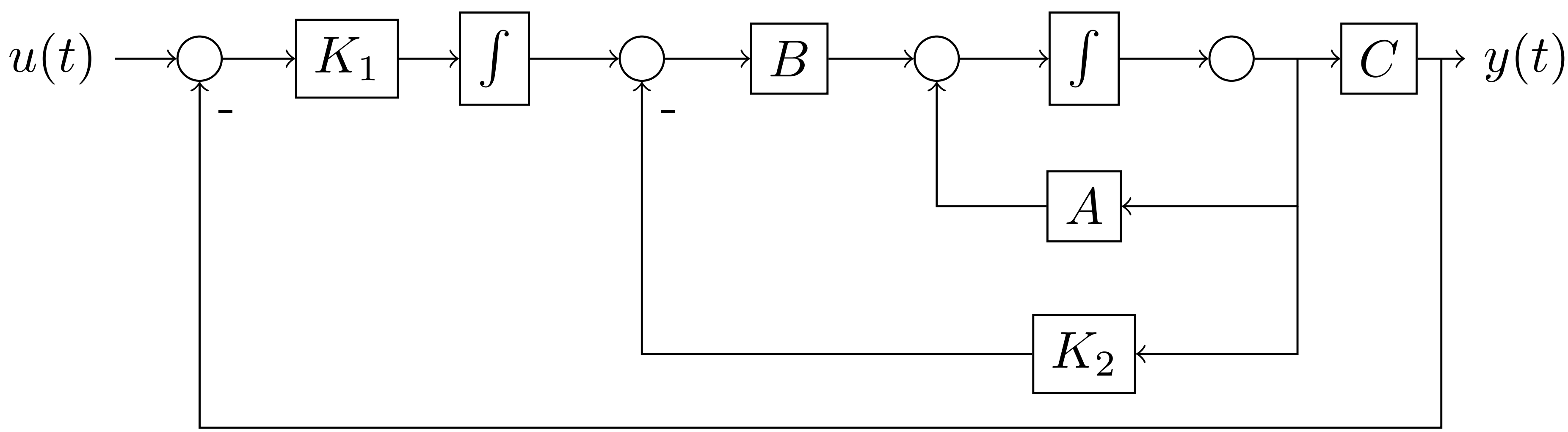
1.15 Modèle échantillonné

$$\boxed{H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G_a(s)}{s}\right)\Big|_{t=kh}\right)}$$

1.15.1 Représentation dans l'espace d'état

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_n = e^{Ah} & B_n = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau \\ C_d = C & D_n = D \end{array}}$$

1.16 Action intégrale sur la commande



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$$

1.17 Placement de pôles

Il faut que le polynôme caractéristique de la boucle fermée (par exemple $sI - A_{bf} = sI - (A - BK)$) corresponde aux pôles que l'ont souhaite

$$\det(sI - A_{bf}) = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)$$

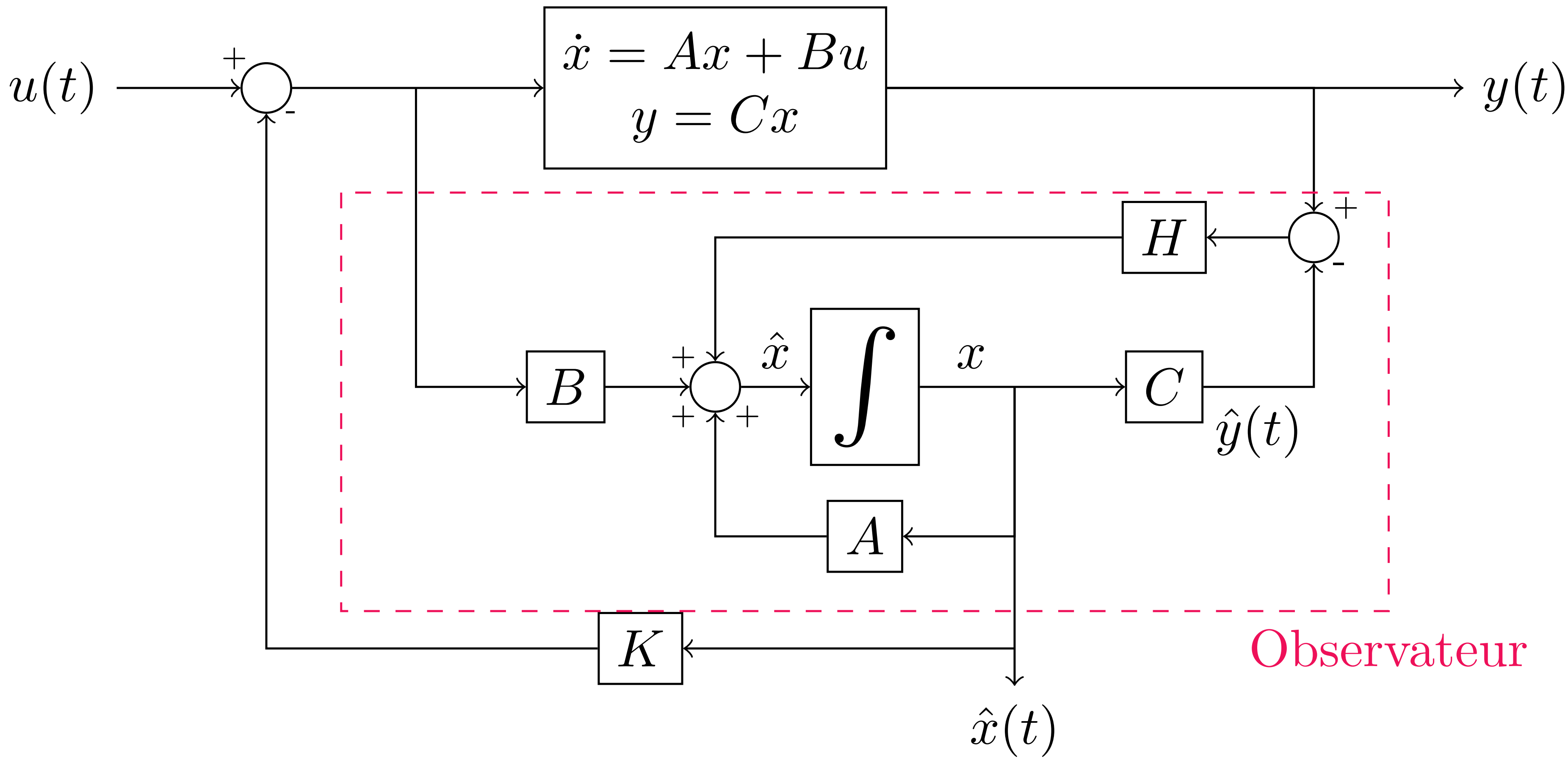
1.18 Retour d'état

$$A_{bf} = A - BK$$

1.19 Observateur

Matrice A de l'observateur (pour le calcul des pôles)

$$A_{obs} = A - HC$$



La fonction de transfert du régulateur est

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K\left(sI - A + BK + HC\right)^{-1} H$$

1.19.1 Filtre

Si il faut exprimer un filtre, par exemple $\hat{X}_2 = \cdots$, il faut commencer par décrire $\hat{X}_1$ en fonction du reste puis résoudre le système (en tout cas dans l'exercice 8.1). Les pôles de l'observateur dans ce cas peuvent se baser sur le dénominateur de la fonction de transfert (si elle est donnée ou calculée).

1.19.2 Trajectoire

$$\boxed{\hat{x}[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + H\left(y[k] - \hat{y}[k]\right)}$$

1.20 Règle de Mason

$$G(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_o(s)}$$

Chaîne d'action sur 1+boucle ouverte. A noter que le signe $+$ est l'inverse de la valeur du sommateur en début de système. Avec $G_a(s)$ la chaîne d'action (d'un point considéré à un autre) et $G_o(s)$ la boucle ouverte.