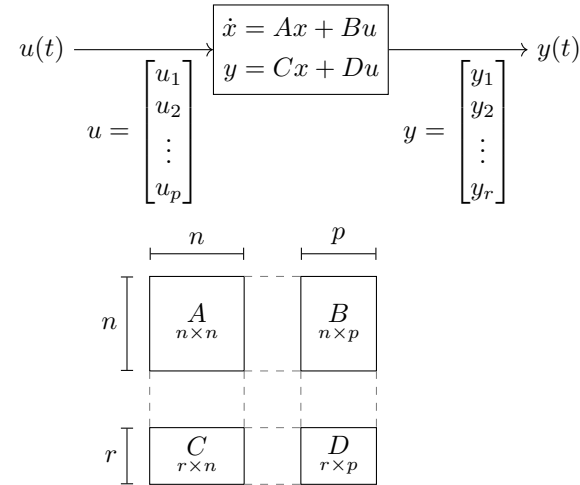
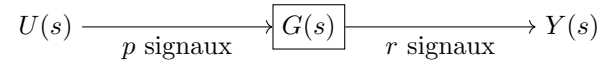


# 1 Espaces d'états



## 1.1 Choix des variables d'état

- Condensateur : tension
- Bobine : courant

## 1.2 Forme modale

Matrice  $T$  construite à partir des vecteurs propres de  $A$

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} = T^{-1}AT & \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT & \tilde{D} = D \end{bmatrix}$$

## 1.3 $A, B, C, D \longrightarrow G$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(z) = C_n(zI - A_n)^{-1}B_n + D_n$$

### 1.3.1 Gain haute fréquence

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = D$$

### 1.3.2 Gain basse fréquence (gain statique)

$$G(0) = -CA^{-1}B + D$$

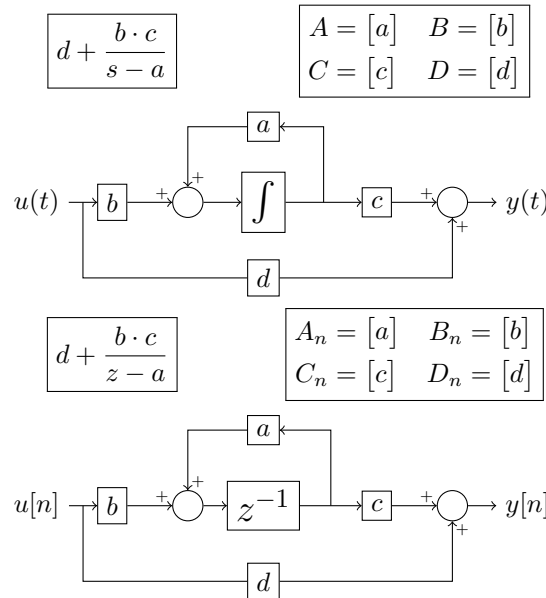
## 1.4 $G \longrightarrow A, B, C, D$

On utilise la forme commandable

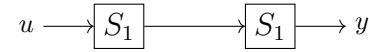
$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \quad D = 0 \end{array}$$

## 1.5 $G(s)/G(z) \longleftrightarrow A, B, C, D$



## 1.6 Mise en cascade

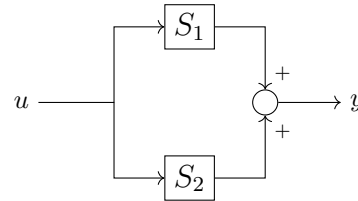


$$S_{tot} = S_2(s) \cdot S_1(s) \quad \text{ordre important}$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad D_{tot} = D_2 D_1$$

## 1.7 Mise en parallèle

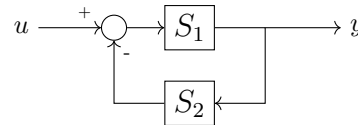


$$S_{tot}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad D_{tot} = D_1 + D_2$$

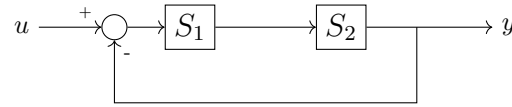
### 1.7.1 Mise en contre-réaction 1



$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -B_1 (C_2 - D_2 D_1 C_2) \\ B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & A_2 - B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 - B_1 D_2 N D_1 \\ B_2 N D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -(I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} \quad D_{tot} = (I - D_1 D_2)^{-1} D_1$$

### 1.7.2 Mise en contre-réaction 2



$$S_{tot}(s) = (I + S_1(s)S_2(s))^{-1} S_1(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad D_{tot} = D_1 D_2$$

## 1.8 Commandabilité

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Pour des systèmes monoentrée :

$$\det(P_c) \neq 0 \longrightarrow \text{Commandable}$$

Pour des systèmes multi-entrées (généralisation) :

$$\text{rang}(P_c) == n \longrightarrow \text{Commandable}$$

Faire une permutation avec  $T$  ne change pas la commandabilité du système. La nouvelle matrice  $\tilde{P}_c$  est donnée par  $T^{-1}P_c$

## 1.9 Observabilité

$$P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(P_0) = n \longrightarrow \text{Observable}$$

En monosortie on peut utiliser  $\det(P_0) \neq 0 \longrightarrow \text{Observable}$

## 1.10 Trajectoire

### 1.11 Système numérique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \quad B_n \quad C_n \quad D_n$$

Et la condition initiale  $x_0$ . On cherche à trouver les valeurs de  $x[0], x[1], x[2], \dots$

$$x[k] = A_n^k x[0] + A_n^{k-1} B_n u[0] + A_n^{k-2} B_n u[1] + \dots + B_n u[k-1]$$

On a la **contribution de la condition initiale** et un **produit de convolution**  $u[k] * g_x[k]$

---

### 1.11.1 Réponse impulsionnelle

Si on suppose que la condition initiale est nulle et qu'on excite le signal avec un dirac numérique, alors on a

$$x[k] = A_n^{k-1} B_n$$

## 1.12 Système analogique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \quad B_n \quad C_n \quad D_n$$

Et la condition initiale  $x_0$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

### 1.12.1 Exponentielle matricielle (ou matrice de transition)

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Si  $A$  est diagonale, on peut simplifier en écrivant

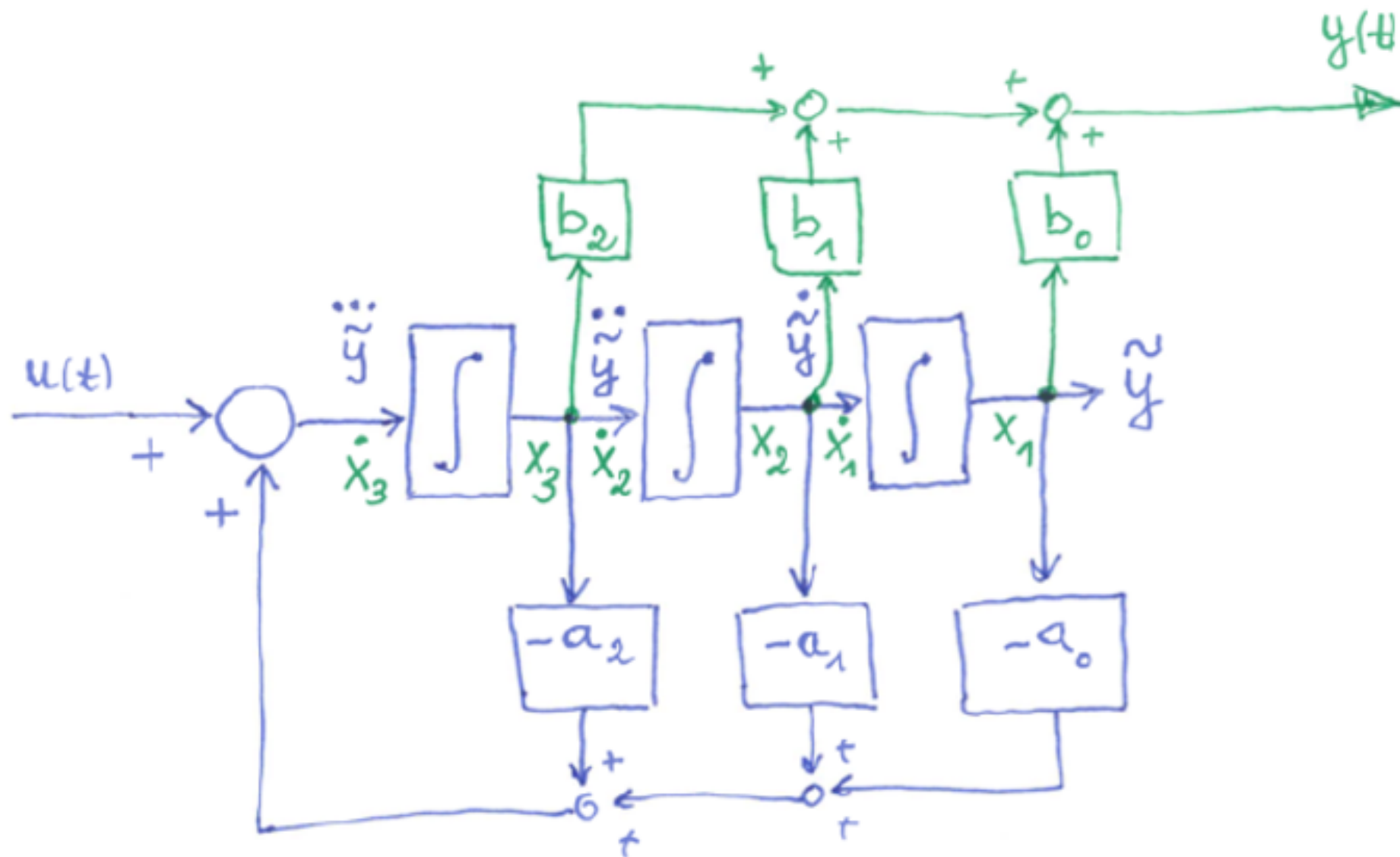
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{bmatrix}$$

**Calcul par diagonalisation** Si  $A$  est diagonalisable, alors

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$$

Ceci permet de simplifier les calculs en utilisant la propriété de l'exponentielle lorsque  $\tilde{A}$  est diagonal

### 1.13 Forme commandable



On obtient donc finalement

$$\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \quad D = 0 \end{array}$$

Voir ??

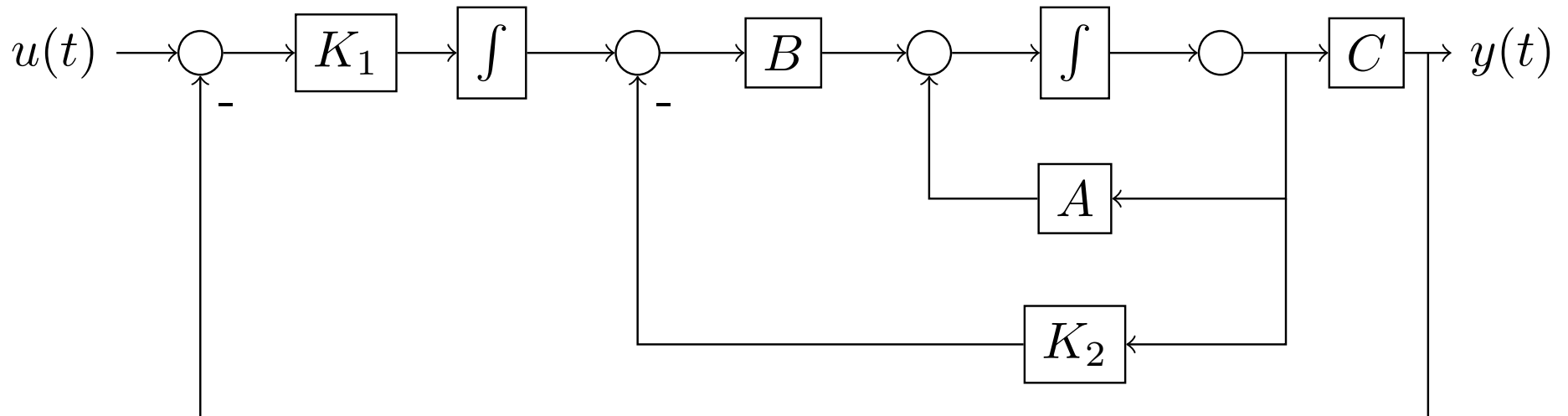
## 1.14 Modèle échantillonné

$$H(z) = \frac{z-1}{z} Z \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_a(s)}{s} \right) \Big|_{t=kh} \right)$$

### 1.14.1 Représentation dans l'espace d'état

$$\begin{array}{l} A_n = e^{Ah} \quad B_n = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau \\ C_d = C \quad D_n = D \end{array}$$

## 1.15 Action intégrale sur la commande



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$$

### 1.16 Placement de pôles

Il faut que le polynôme caractéristique de la boucle fermée (par exemple  $sI - A_{bf} = sI - (A - BK)$ ) corresponde aux pôles que l'ont souhaite

$$\det(sI - A_{bf}) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

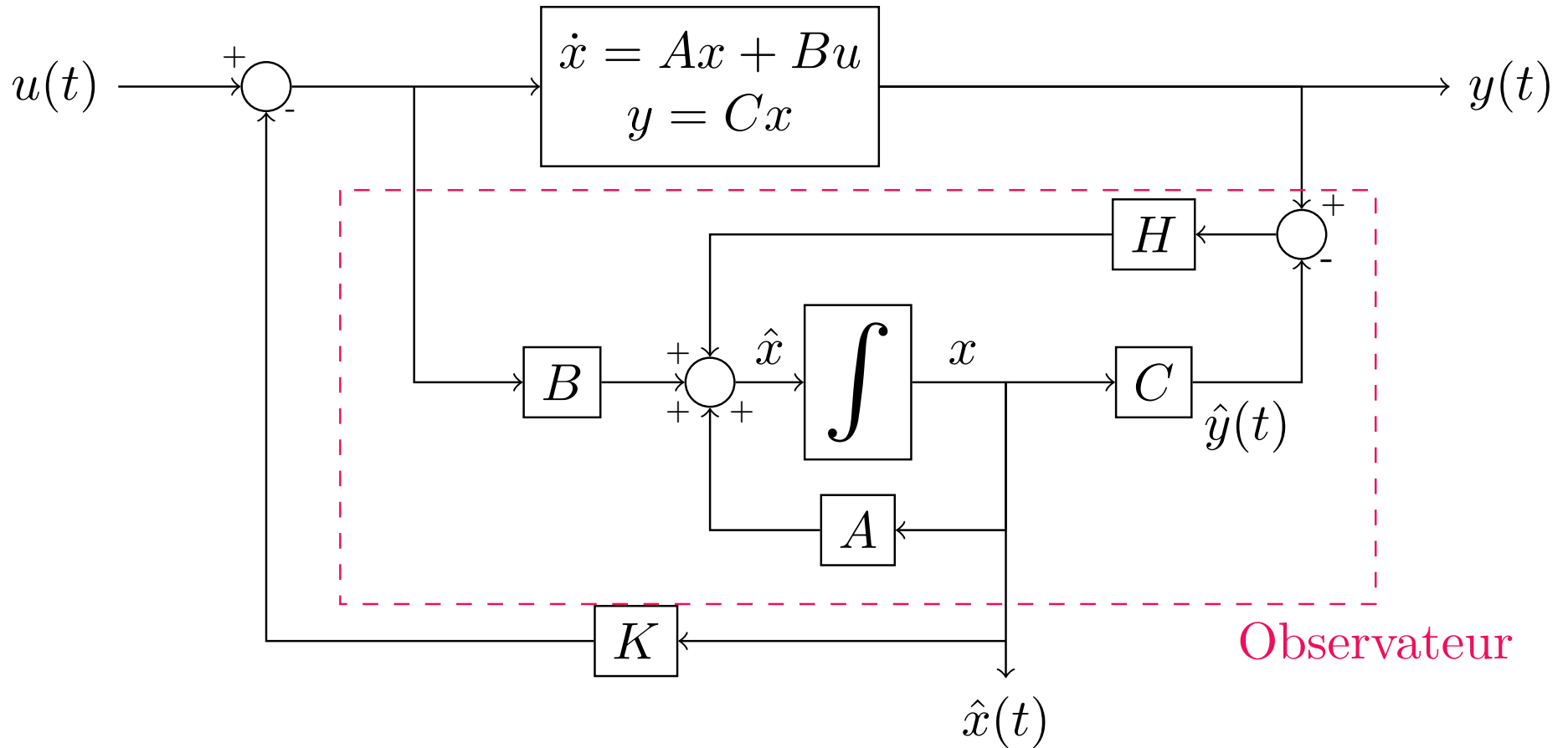
### 1.17 Retour d'état

$$A_{bf} = A - BK$$

### 1.18 Observateur

Matrice  $A$  de l'observateur (pour le calcul des pôles)

$$A_{obs} = A - HC$$





---

La fonction de transfert du régulateur est

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K (sI - A + BK + HC)^{-1} H$$

### 1.18.1 Trajectoire

$$\boxed{\hat{x}[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + H(y[k] - \hat{y}[k])}$$