



MASTER OF SCIENCE
IN ENGINEERING

Hes·so

Haute Ecole Spécialisée
de Suisse occidentale

Fachhochschule Westschweiz

University of Applied Sciences and Arts
Western Switzerland

Suivi de cours :

Réglage avancé

Department : EIE

Course unit : TSM-AdvContr

Author : Tristan Traiber

Teachers : Raoul Herzog

Assistants : - & -

Class : C3 - Lausanne

Date : 29 juin 2022

Table des matières

1 S1 - Introduction à l'espace d'état	10
1.1 Nouveaux concepts	10
1.2 Introduction - l'espace d'état	10
1.3 Variable d'état	10
1.3.1 Exemple 1 - Stockage de matière	11
1.3.2 Exemple 2 - Électricité	11
1.3.3 Exemple 3 - Mécanique	11
1.4 Espace d'état	12
1.5 Vecteur d'état	12
1.5.1 Continue	12
1.5.2 Discret	13
1.6 Lien avec un schéma bloc	13
1.7 Exemple : Espace d'état numérique	14
1.7.1 Règle de Mason	14
1.7.2 Schéma bloc « vectoriel » associé	15
1.8 Exemple de modélisation dans l'espace d'état	15
1.9 Exemple : système mécanique à 2 DDL (2 degrés de libertés)	16
1.10 Exemple "Balle de golf"	17
1.11 Taille des matrice A, B, C et D	18
1.12 schéma bloc "vectoriel" associé	19
1.13 Exemple Modélisation d'un moteur DC dans l'espace d'état	19
1.13.1 Modélisation dans l'espace d'état	20
1.14 Avantage de la représentation dans l'espace d'état	20
1.15 Système LTI représentables dans l'espace d'état	20
1.16 Interconnecter de plusieurs systèmes dans l'espace d'état	21
1.16.1 Mise en cascade	21
1.16.2 Mise en parallèle	21
1.16.3 Mise en contre-réaction	21
1.16.4 Concaténation des vecteurs d'état des sous systèmes	21
1.16.5 Exemple : mise en parallèle	22
1.16.6 Exemple : mise en cascade	22
1.17 Conversion "espace d'état" → "fonction de transfert"	23
1.17.1 Exemple double intégrateur	23
1.18 Transformée en \mathcal{Z}	24
1.19 Pôles = valeurs propres de A	24
1.20 Stabilité des systèmes	24
1.20.1 Exemple 1	25
1.20.2 Exemple 2	25
2 S2 - Algèbre Linéaire	26
2.1 Contenue	26
2.2 Conversion "espace d'état" ⇒ "fonction de transfert"	26
2.3 Sur-paramétrisation de la représentation dans l'esp. d'état	26
2.3.1 Exemple : système d'ordre 2	26
2.4 Transformations linéaires dans l'espace d'état	27

2.5	Transformations linéaires dans l'espace d'état	27
2.5.1	Exercice	28
2.6	Transformation : $tf \Rightarrow ss$: forme modale / décomposition en éléments simples	28
2.7	Rappel : valeurs propres / vecteurs propres	29
2.7.1	Valeur propre rapide	29
2.8	Exemple : calcul des valeurs/vecteurs propres	30
2.9	mécanique vibratoire - vecteurs propres = modes propres	30
2.9.1	Problème mécanique - Espace de <i>phases</i> → Espace d'états	31
2.10	Diagonalisation de A	31
2.10.1	Cas T non inversible :	31
2.10.2	Exemple de diagonalisation	32
2.11	Solution générale de la trajectoire numérique $x[k]$	32
2.12	Réponse impulsionnelle	33
2.13	Convolution discrète / matrice Toeplitz - <i>Convolution matricielle</i>	33
2.14	Solution générale de la trajectoire $x(t)$ temps continu	34
2.15	Définition de l'exponentielle matricielle : Taylor	34
2.16	Calcul de e^{At} par diagonalisation	35
2.17	produit de convolution	36
2.18	solution générale en utilisant Matlab	36
2.19	Intégrale numérique, approximation par une sécante	36
3	S3	37
3.1	Contenue	37
3.2	Rappels cours 2	37
3.2.1	Solution générale de la trajectoire $x(t)$ temps continu	37
3.3	Définition de l'exponentiel matricielle : Taylor	38
3.4	Exponentielle matricielle : unification	38
3.5	Modèle échantillonné du système à régler	38
3.6	Calcul de $H(z)$ basé sur la réponse impulsionnelle	39
3.7	Calcul du modèle échantillonné dans l'espace d'état	39
3.8	Calcul par Matlab	40
3.9	Retour d'état « state feedback »	40
3.10	Stabilité en B.F. - Méthode de synthèse du retour d'état par placement de pôles	41
3.10.1	Méthode	41
3.10.2	Exemple	41
3.11	Commandabilité	42
3.12	Critère algébrique pour la commandabilité	43
3.13	Exemples intuitifs	44
3.13.1	Autre exemple :	45
3.14	Exemple moins trivial	45
3.15	La forme commandable ($tf \Rightarrow ss$)	46
3.15.1	Schéma bloc de la forme commandable	47
4	S4	49
4.1	Contenue cours S4	49

4.2	Rappels cours 3	49
4.3	Retour d'état « <i>state feedback</i> »	49
4.4	Commandabilité	50
4.4.1	Critère algébrique pour la commandabilité	50
4.4.2	Forme commandable	51
4.5	Réalisation minimale	51
4.5.1	Exercice 4.2	52
4.6	Motivation : formes quadratiques	52
4.7	Rappel des formes quadratiques dans \mathbb{R}^n	52
4.8	Formes quadratiques définies	53
4.9	Matrices définies positives	53
4.10	Critère de Sylvester pour déterminer si $M = M^t > 0$	54
4.11	Propriété d'une matrice symétrique définie positive	54
4.12	Matrices semi-définies positives	54
4.13	Catégories de matrices	55
4.14	Motivation LQR (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)	55
4.15	Qualité du régime transitoire en boucle fermée	56
4.16	Le prix à payer	56
4.17	LQR (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)	57
4.18	Solution LQR analogique - équation de Riccati	57
4.19	Propriétés de la régulation LQR	58
4.20	Un choix pour la matrice de pondération Q	58
4.21	<i>Cheap control - expensive control</i>	59
4.22	DLQR (<i>Discrete Linear Quadratic Regulator</i>)	59
4.23	Solution LQR discret - équation de Riccati	60
4.24	Remarques	60
4.24.1	Exercice 10, p. 54 polycopié anglais	61
5	S5	63
5.1	Contenue	63
5.2	Rappel	63
5.2.1	LQR (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)	63
5.2.2	Solution LQR analogique / équation de Riccati	64
5.2.3	Cheap control / Expensive control	64
5.2.4	DLQR (<i>Discrete Linear Quadratic Regulator</i>)	65
5.2.5	Solution LQR discret / Équation de Riccati	65
5.3	Nomenclature anglo-saxonne	66
5.4	Rappel : boucle ouverte et boucle fermée	66
5.4.1	Boucle ouverte pour le retour d'état	67
5.5	Critère de Nyquist simplifié	67
5.5.1	Réflexions intuitives pour motiver le critère de Nyquist	68
5.5.2	Effet Larsen : feedback acoustique provoquant un sifflement	68
5.5.3	Réflexions intuitives	69
5.5.4	Explication mathématique	69
5.5.5	Boucle fermée marginalement stable → un sinus peut persister dans la boucle !	69

5.5.6	Boucle fermée marginalement stable	70
5.5.7	Réflexions intuitives	70
5.5.8	Définition : marge de gain et de phase	70
5.5.9	Critère de Nyquist simplifié	71
5.5.10	Lieu de Nyquist - Alternative au diagramme de Bode	71
5.5.11	Critère de Nyquist simplifié	71
5.5.12	Motivation pour le critère de Nyquist généralisé	72
5.5.13	Lieu de Nyquist complet de $\frac{k}{s-1}$	72
5.6	Critère de Nyquist	73
5.6.1	Critère de Nyquist simplifié (critère du revers) :	73
5.6.2	Critère de Nyquist généralisé :	73
5.7	critère de Nyquist généralisé	74
5.7.1	Vérification des pôles en boucle fermée	74
5.7.2	Rappel cours AAV	75
5.8	Régulateur LQR	76
5.8.1	Robustesse du régulateur LQR (retour d'état)	76
5.8.2	Régulation en correspondance LQR avec action intégrale	76
5.9	Observateur	78
5.9.1	Motivation observateur	78
5.9.2	Observateur pour monitorer des signaux difficilement mesurables	79
5.9.3	Idée naïve : observateur "trivial"	79
5.9.4	Dynamique de l'erreur de l'observateur trivial	80
5.9.5	Points faibles de l'observateur trivial	80
5.9.6	Structure de l'observateur complet	81
5.9.7	Dynamique de l'erreur de l'observateur complet	81
5.9.8	Rappel cours AAV - Design d'un régulateur robuste par loop-shaping manuel	82
6	S6 - Programme Advanced Control	84
6.1	Contenu	84
6.2	Rappel	84
6.2.1	Critère de Nyquist simplifié : marge de gain et de phase	84
6.2.2	Critère de Nyquist simplifié	85
6.2.3	Boucle ouverte pour le retour d'état	86
6.2.4	Robustesse du régulateur LQR (retour d'état)	86
6.2.5	Régulation en correspondance LQR avec action intégrale	87
6.3	Observateur	87
6.3.1	Motivation	87
6.3.2	Exemple : Observateur pour monitorer des signaux difficilement mesurables	88
6.4	Observateur "trivial"	89
6.4.1	Idée naïve : observateur "trivial"	89
6.4.2	Dynamique de l'erreur de l'observateur trivial	89
6.4.3	Points faibles de l'observateur trivial	90
6.5	Observateur complet	90
6.5.1	Structure de l'observateur complet	90

6.5.2	Dynamique de l'erreur de l'observateur complet	91
6.6	Dualité : synthèse retour d'état / synthèse observateur	92
6.7	Condition observabilité	92
6.7.1	Retrouver la condition initiale	92
6.7.2	Condition d'observabilité	93
6.8	Décomposition de Kalman	93
6.8.1	Réalisation minimale	93
6.8.2	décomposition de Kalman	94
6.9	Exemple - observateur comme filtre complémentaire	94
6.9.1	Application : filtre complémentaire	95
6.9.2	Observateur pour processus « intégrateur pur »	95
6.9.3	Fonctions de transfert du filtre	96
6.10	Interprétation stochastique de l'observateur	96
6.11	Principe de séparation	97
6.11.1	Rappel	97
6.11.2	Principe de séparation	97
6.11.3	Explication	98
6.11.4	Remarques importantes	98
6.12	« Model order reduction »	99
6.13	LTR : Loop Transfer Recovery	99
6.13.1	lieu de Nyquist en fonction de ρ	100
6.14	Résumé de la synthèse LQR - LQG - LTR	100
7	S7 - Programme Advanced Control, cours 7	102
7.1	Contenue	102
7.2	Rappel	102
7.2.1	Structure de l'observateur	102
7.2.2	Dynamique de l'erreur de l'observateur complet	103
7.2.3	Critère de l'observabilité	103
7.2.4	Observabilité	103
7.3	Application : palier magnétique	104
7.4	LTR : Loop Transfer Recovery	105
7.4.1	lieu de Nyquist en fonction de ρ	106
7.5	Application : observateur de vitesse	106
7.5.1	Problème de la dérivée numérique	107
7.5.2	Observateur de vitesse	109
7.5.3	Observateur de vitesse = filtre complémentaire	109
7.6	Implémentation de régulateurs	110
7.6.1	Conseil d'implémentation (1/2)	110
7.6.2	Discrétisation dans le temps	110
7.6.3	Rappel : Méthode de <i>Tustin</i>	111
7.6.4	Modèle échantillonné du système à régler	112
7.6.5	Calcul du modèle échantillonné dans l'espace d'état	112
7.7	Conseils pour l'implémentation (2/2)	113
7.7.1	Biquad - mise en cascade de fonctions de transfert d'ordre 2 .	113
7.8	Motivation : valeurs singulières d'une matrice	113

7.9	Rappel normes : à quoi ça sert	114
7.9.1	Normes de vecteurs	114
7.9.2	Normes de matrices	115
7.10	Décomposition en valeurs singulières (SVD)	115
8	S8 - Valeurs singulières et vecteurs singuliers	116
8.1	Contenu du cours	116
8.2	Rappel cours 7	116
8.2.1	Deux approches pour la synthèse d'un régulateur numérique .	116
8.2.2	Modèle échantillonné du système à régler	117
8.2.3	Motivation : valeurs singulières d'une matrice	117
8.3	Rappel normes : à quoi ça sert	118
8.3.1	Normes de vecteurs	118
8.4	Image du cercle unité (hypersphère unité)	119
8.5	Normes de matrices	119
8.6	Amplification maximale et minimale	120
8.6.1	Cas particuliers	120
8.6.2	repères orthonormés - matrices orthogonales	120
8.7	Factorisation (décomposition) SVD de matrices	122
8.7.1	Décomposition en valeurs singulières (SVD)	122
8.7.2	Explication « <i>vecteurs singuliers</i> »	123
8.7.3	Amplification directionnelle	123
8.7.4	Interprétation géométrique de la SVD	124
8.7.5	Conclusion	124
8.8	Effet de la transformation M	125
8.9	Définitions entre valeurs singulières (<i>svd</i>) et valeurs propres (<i>eig</i>)	126
8.10	Rang d'une matrice, conditionnement	126
8.11	Autre propriétés importantes de la <i>SVD</i>	126
8.12	diagramme de Bode multivariable (sigma plot)	127
9	S9	128
9.1	Contenu	128
9.2	Rappel cours 8	128
9.2.1	Image du cercle unité (hypersphère unité)	128
9.2.2	Amplification maximale et minimale	128
9.3	Factorisation (décomposition) SVD de matrices	129
9.3.1	décomposition en valeurs singulières (SVD)	129
9.3.2	amplification directionnelle	130
9.3.3	Rang d'une matrice, conditionnement	131
9.3.4	Autre propriétés importantes de la SVD	131
9.3.5	Diagramme de Bode multivariable (sigma plot)	132
9.4	Points d'équilibre / points de fonctionnement	133
9.5	Système non-linéaire d'ordre 1	133
9.5.1	Le calcul d'un point d'équilibre	134
9.6	Approximation locale par Taylor (linéarisation)	134
9.6.1	Nouvelle variable d'état : la "déviation" autour du point d'équilibre	134

9.6.2	Taylor multivariable	135
9.7	Stabilité locale des points d'équilibres d'un système non-linéaire d'ordre n	135
9.8	Linéarisation autour d'un point d'équilibre	135
9.8.1	Récapitulatif des système non-linéaire :	135
9.9	Linéarisation d'un système non-linéaire avec entrée	136
9.10	Synthèse d'un régulateur basé sur un modèle linéarisé	136
9.11	Linéarisation autour d'une trajectoire périodique	137
9.12	Redressement de la non-linéarité : exemple	137
9.12.1	Redressement de la nonl-inéarité : "feedback linearization" . .	138
9.13	Effets observés dans les systèmes non-linéaires	138
10 S10 - Système non-linéaire - Identification		140
10.1	Contenu	140
10.2	Rappel Cours S9	140
10.2.1	Linéarisation d'un système non-linéaire avec entrée	140
10.2.2	Redressement de la non-linéarité : "feedback linearization" .	141
10.2.3	Effets observés dans les systèmes non-linéaires	142
10.3	Calcul de $H(z)$ basé sur la réponse impulsionnelle	143
10.4	Propriétés du "modèle échantillonné"	143
10.5	Calcul du modèle échantillonné dans l'espace d'état avec un retard non multiple entier de la période d'échantillonnage	144
10.5.1	Sans retard	144
11 S11		145
11.1	Contenue	145
11.2	Rappel	145
11.2.1	Les quatre étapes de l'identification	145
11.3	Least squares (LS) : un problème d'optimisation bien maîtrisé . . .	146
11.3.1	Interprétation géométrique : moindres carrés	147
11.3.2	Solution moindres carrés (least squares)	148
11.4	Identification dans le domaine fréquentiel	148
11.4.1	Mesure du diagramme de Bode par balayage	149
11.4.2	Rappel : régime harmonique numérique	150
11.4.3	Identification fréquentielle	151
11.4.4	Exemple exercice 11.3	151
11.4.5	Minimisation de l'erreur absolue - problème	152
11.5	Régulateur robuste	152
11.5.1	tentative de définition "régulation robuste"	152
11.5.2	Rappel : Nombre d'encerclements nécessaires pour la stabilité en boucle fermée	153
11.5.3	Définition de la distance critique	154
11.5.4	Marges de stabilité	154
11.5.5	Rappel normes : à quoi ça sert	155
11.5.6	Normes pour matrices	156
11.5.7	Vecteurs - Matrices - Signaux - Systèmes LTI	156
11.5.8	Norme H_2 , lien temporel/fréquentiel : thrm. de Parseval . .	157

11.5.9 norme H_∞ = norme induite L_2 : <i>worst case</i>	158
12 S12 - Régulation robuste (suite)	159
12.1 Contenu	159
12.2 tentative de définition "régulation robuste"	159
12.3 Rappel : Nombre d'encercllements nécessaires pour la stabilité en boucle fermée	159
12.4 Définition de la distance critique	160
12.5 Marges de stabilité	160
12.6 Norme	161
12.7 Rappel normes : à quoi ça sert	162
12.8 Normes pour matrices	162
12.9 Vecteurs - Matrices - Signaux - Systèmes LTI	163
12.10Norme H_2 , lien temporel/fréquentiel : thrm. de Parseval	163
12.11norme H_∞ = norme induite L_2 : <i>worst case</i>	164
12.12Pic d'une fonction de transfert (norme infinie)	164
12.13norme H_∞ pour systèmes multivariables	165
12.14le "gang" des 4 fonctions de transfert en b.f.	166
12.14.1 Équivalent français	166
12.15 $L(s)$, $S(s)$ et $T(s)$ ont [1] comme unité physique	166
12.16Allures typiques du Bode de L , S , et T	167
12.17Lien entre distance critique et pic de sensibilité	167
12.18Théorème de Bode : limitations fondamentales	168
12.18.1 Exemple à montrer : waterbed effect	169
12.19Stabilité interne d'une boucle fermée :les 4 fonctions de transfert doivent être stable	170
12.19.1 Compensation pôle / zéro acceptable ou non ?	170

1 S1 - Introduction à l'espace d'état

1. Variable d'état
2. Représentation d'un système LTI dans l'espace d'état
3. Exemple temps continue et temps discret
4. Systèmes LTI représentables dans l'espace d'état
5. Interconnexion de systèmes dans l'espace d'état
6. Conversion espace d'état → fonction de transfert
7. Pôles, valeurs propres de la matrice système A, stabilité

1.1 Nouveaux concepts

La régulation avancée a besoin d'un certain nombre de concepts, tel que **l'espace d'état**.

Il s'agit d'une manière de représenter un système LTI.

Dans un premier temps, nous allons nous familiariser avec l'espace d'état **sans parler de régulation**.

1.2 Introduction - l'espace d'état

Représentations de systèmes **LTI** (linéaires et invariant dans le temps) :

domaine **fréquentiel** : fonction / matrice de transfert → domaine **temporel** : équations différentielles

L'espace d'état (state space) est une représentation dans le domaine temporel qui fait intervenir des variables que l'on appelle variables d'état $x_k(t)$, $k = 1 \dots N$. Chaque variable d'état est liée au :

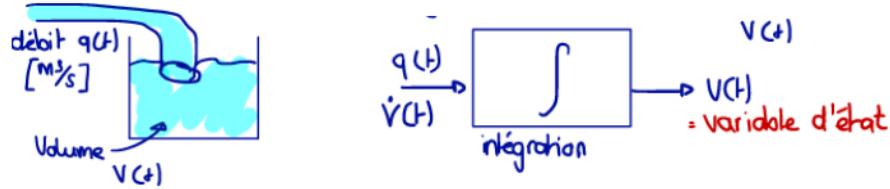
- stockage de matière, ou
- stockage d'énergie, ou
- stockage d'information (numérique)

1.3 Variable d'état

Les variables d'états sont tout les paramètres qui varie en fonction d'une référence (souvent en fonction du temps) Il faut donc trouver quelles paramètres **varie** :

1. Dérivée :
$$f(t) = c \cdot \frac{dx}{dt}$$
2. Intégral :
$$f(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

1.3.1 Exemple 1 - Stockage de matière



- la sortie d'un intégrateur correspond à une variable d'état
- une variable d'état porte une dérivée
- techniquement parlant, une variable d'état ne peut pas sauter
- le signal de **sortie** d'un système **peut** correspondre à une variable d'état
- le signal d'**entrée** n'est **jamais** une variable d'état

1.3.2 Exemple 2 - Électricité

Capacité :

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dU_c}{dt} \quad (1)$$

capacité :

$$C \frac{d}{dt} U_c(t) \quad E = \frac{1}{2} C U^2$$

Variable d'état : $u_c(t)$

$$U_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_c(\tau) d\tau$$

$i_c(t) \rightarrow \frac{1}{C} \rightarrow \int \rightarrow u_c(t)$

Inductance :

$$U_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad (2)$$

$$L \frac{d}{dt} i_L(t) \quad E = \frac{1}{2} L i^2$$

Variable d'état : $i_L(t)$

$$U_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

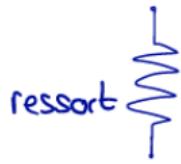
$U(t) \rightarrow \frac{1}{L} \rightarrow \frac{di_L}{dt} \rightarrow \int \rightarrow i(t)$

1.3.3 Exemple 3 - Mécanique

Énergie potentielle :

Avec ΔL : déplacement [m]

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta L^2 \quad (3)$$



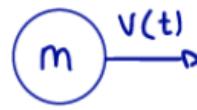
$$E_{pot} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta L^2$$

*ΔL déplacement (élongation)
= variable d'état*

Énergie cinétique :

Avec v : vitesse $[\frac{m}{s}]$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (4)$$



$$E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2$$

v variable d'état

Chaque degré de liberté (DDL) mécanique fait intervenir deux variables d'état :

1. **position**
2. **vitesse**

1.4 Espace d'état

Moyen mnémotechnique : Espace d'état → **SYS-EN-SOR-BY** (*600 sorbet*)

- A : Matrice de **système** $n \times p$
- B : Matrice d'**entrée** $n \times p$
- C : Matrice de **sortie** $r \times n$
- D : Matrice de **bypass** $r \times p$

1.5 Vecteur d'état

Toutes les variables d'état sont regroupées dans le vecteur d'état

1.5.1 Continue

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \rightarrow m : ordre du système \quad (5)$$

La représentation dans l'espace d'état d'un système correspond à un système d'équations différentielles, chacune de degré 1.

Elle peut être décrite avec l'aide de 4 matrices A, B, C, D :

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}} \quad (6)$$

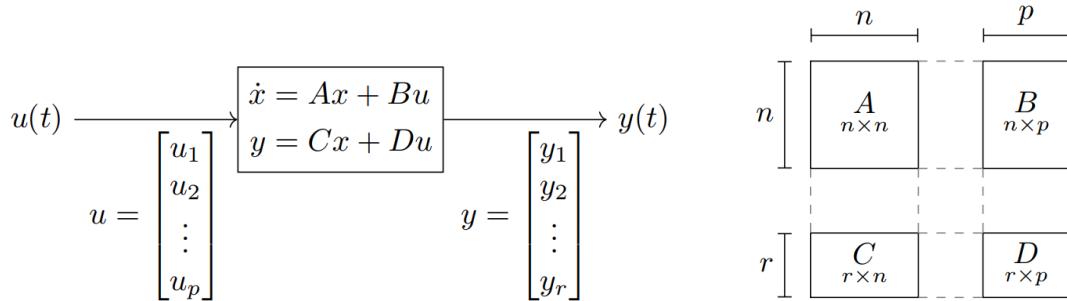
1.5.2 Discret

$$\vec{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix} \rightarrow n : \text{ordre du système} \quad (7)$$

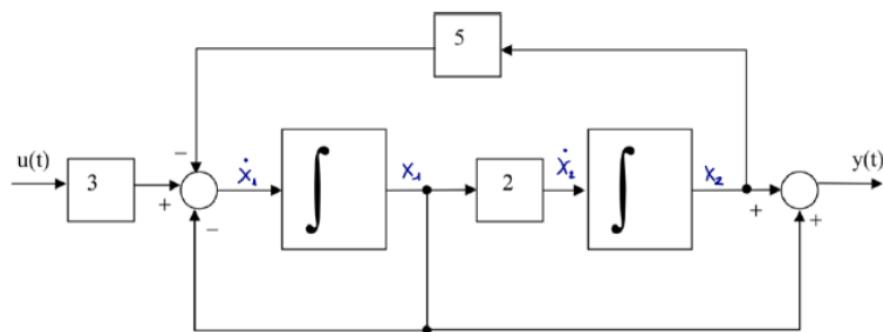
Elle peut être décrite avec l'aide de 4 matrices A, B, C, D :

$$\boxed{\begin{aligned}x[k+1] &= A_n x[k] + B_n u[k] \\ y[k] &= C_n x[k] + D_n u[k]\end{aligned}} \quad (8)$$

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{s} & = & \text{intégrer} \rightarrow \frac{1}{z} = \text{retarder} \\ s & = & \text{dériver} \rightarrow z = \text{avancer} \end{array} \quad (9)$$



1.6 Lien avec un schéma bloc

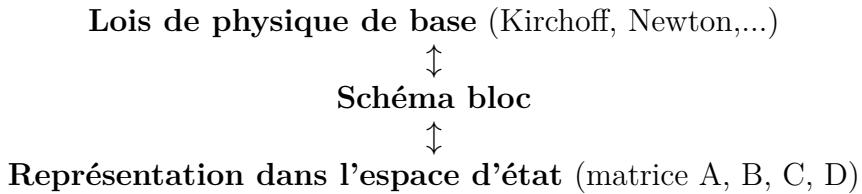


A partir d'un schéma bloc, on peut directement lire les matrices A, B, C et D. La numérotation des variables d'état est libre.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Bloc de base :

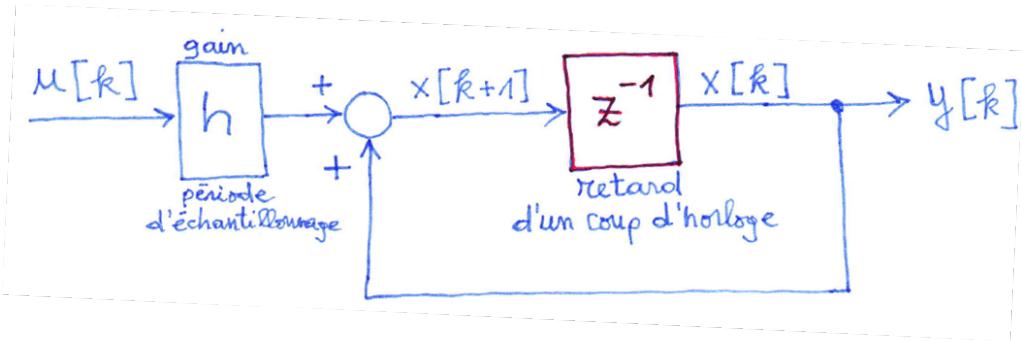
1. intégrateur
2. gains
3. sommateur / soustracteur



Système analogique (Matlab) :

- Domaine fréquentiel : $G = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$, tf = transfert function
- Domaine temporel : $G = \text{ss}(A, B, C, D)$, ss = state space

1.7 Exemple : Espace d'état numérique



A quoi correspond ce système ? Intégrateur numérique avec la méthode des rectangles !

$$\begin{aligned} A_n &= 1 & B_n &= h \\ C_n &= 1 & D_n &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

1.7.1 Règle de Mason

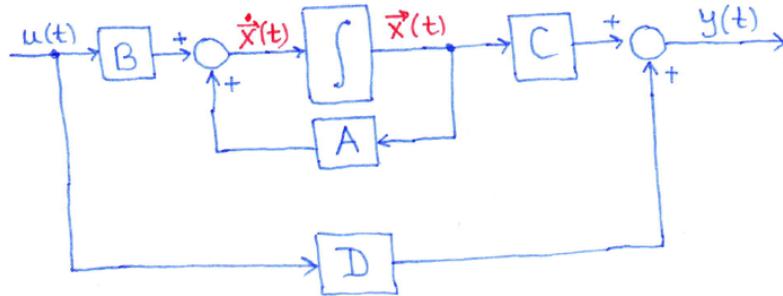
- Regarder la contre réaction
- Regarder la polarité de la somme de la contre réaction

$$G(z) = K \cdot \frac{A}{1 - (\text{pol}_{\text{sum}})A} = \frac{h \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{h}{z - 1}$$

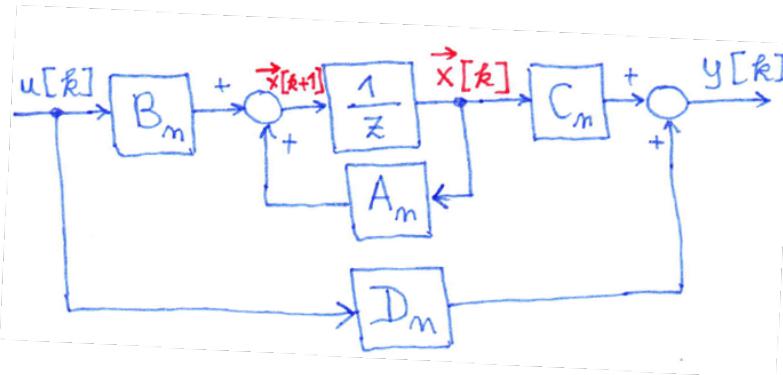
(11)

1.7.2 Schéma bloc « vectoriel » associé

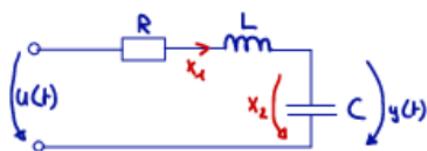
Temps continue



Temps discret



1.8 Exemple de modélisation dans l'espace d'état



deux variables d'état :

$x_1(t)$: courant dans l'inductance

$x_2(t)$: tension aux bornes de la capa

$$\text{Kirchhoff : } u(t) = R \cdot x_1(t) + L \cdot \dot{x}_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L} \cdot x_1 - \frac{1}{L} \cdot x_2 + \frac{1}{L} \cdot u$$

$$x_2 = \frac{1}{C} \int_0^t x_1(\tau) d\tau \Leftrightarrow x_1 = C \cdot \dot{x}_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

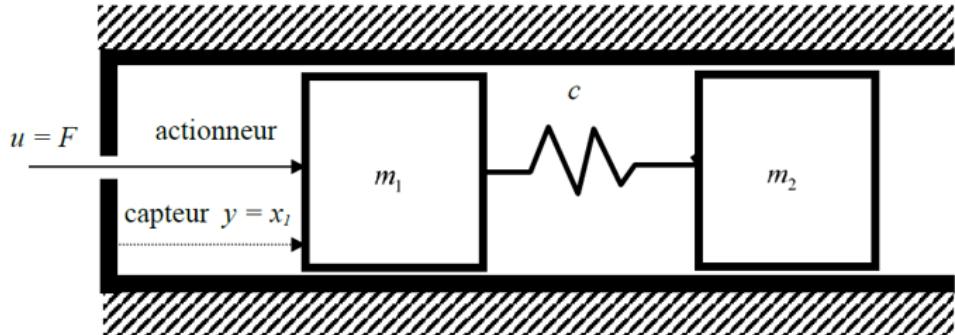
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 + 0 x_2 + 0 \cdot u$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$y = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot u$$

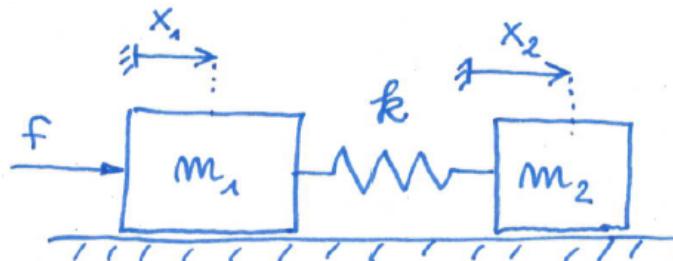
slide 9

1.9 Exemple : système mécanique à 2 DDL (2 degrés de libertés)



Deux degrés de libertés (DDL) \rightarrow 4 variables d'états

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$



Loi de Newton pour chaque masse (isoler les corps !)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = f - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (13)$$

Il faut d'abord trouver les relations qui décrivent l'espace d'état en isolant chaque dérivé de \$x\$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 &= v_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 &= \dot{v}_1 = \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 + \frac{1}{m_1}f \\ \dot{x}_4 &= \dot{x}_2 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2; \end{aligned} \quad (14)$$

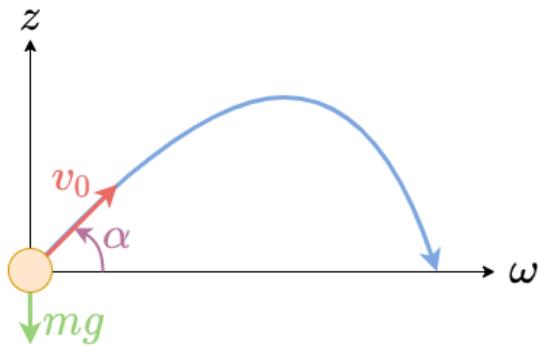
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{m_1 k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Si on s'intéresse au déplacement **des deux masses**, la **matrice de sortie C** devient :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

1.10 Exemple "Balle de golf"



Hypothèse : pas de frottement de l'aire
 Newton :

$$z = \frac{1}{m} (\sum F) \quad (17)$$

On constate qu'il y a **deux degré de liberté**, il faut donc **quatre variables d'états**

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \omega \\ z \\ v_\omega \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Nous pouvons directement trouver le vecteur initiale :

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Il faut d'abord trouver les relations qui décrivent l'espace d'état en isolant chaque dérivé de x :

$$\dot{x}_1 = \dot{\omega} = v_\omega = x_3$$

$$\dot{x}_2 = \dot{z} = v_z = x_4$$

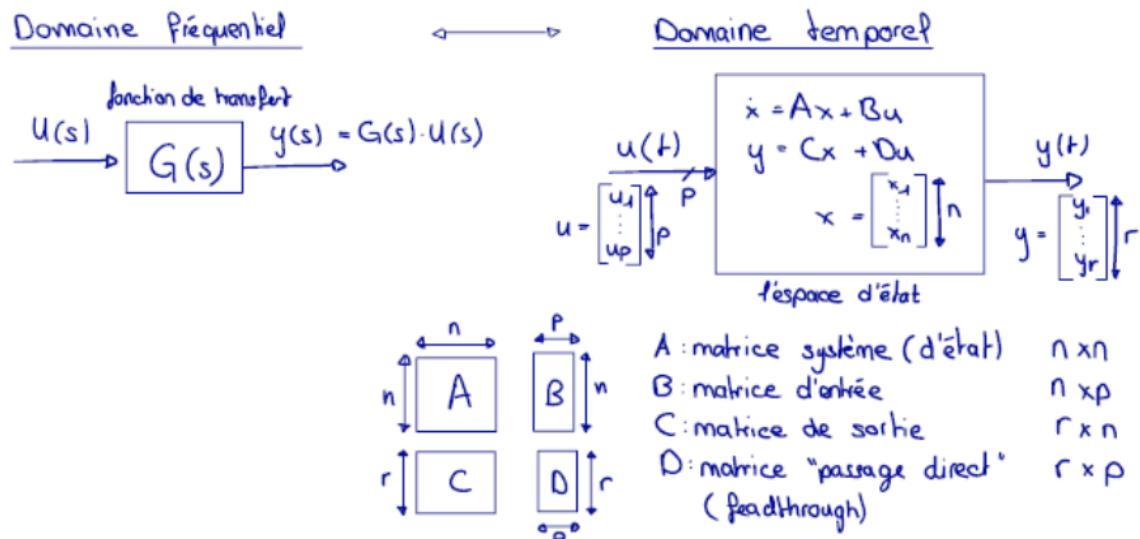
$$\dot{x}_3 = \dot{v}_\omega = acc_{horizontal} = 0 : \text{(mvt MRU)}$$

$$\dot{x}_4 = \dot{v}_z = acc_{vertical} = -g$$

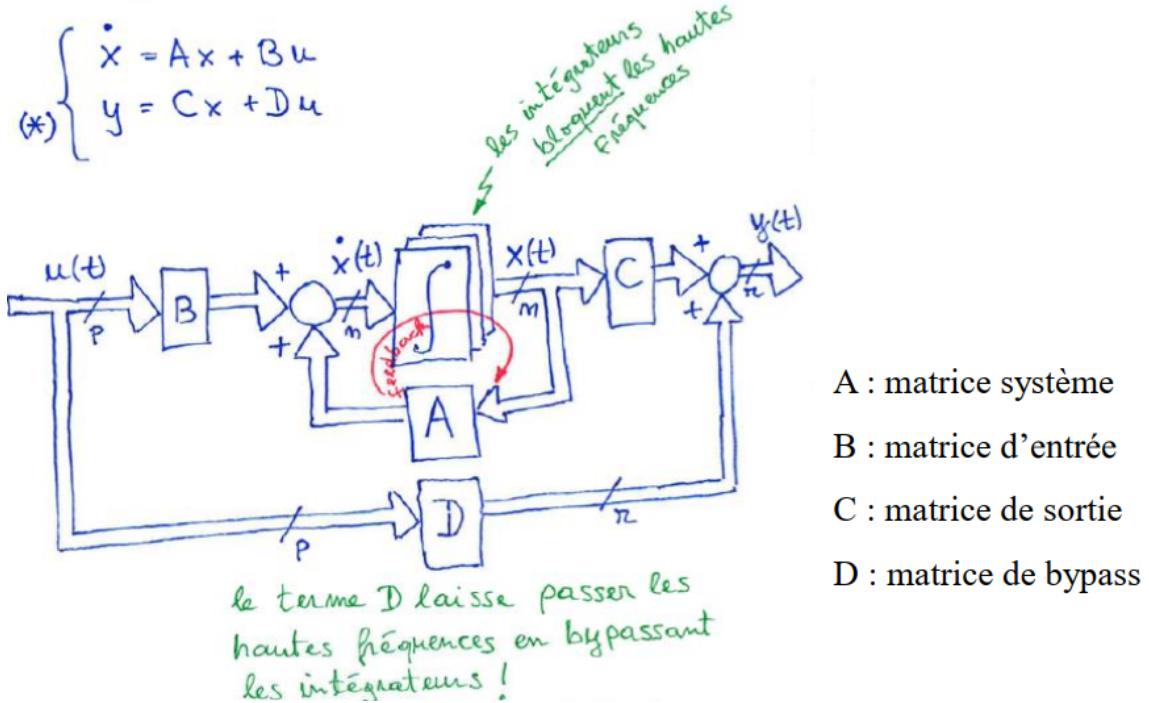
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

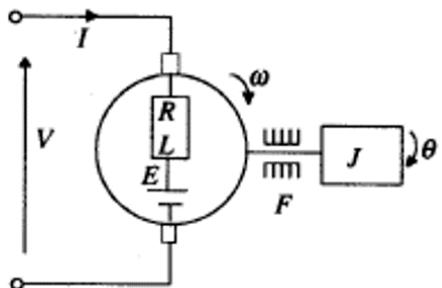
1.11 Taille des matrice A, B, C et D



1.12 schéma bloc "vectoriel" associé



1.13 Exemple Modélisation d'un moteur DC dans l'espace d'état



- Signal d'entrée : tension $u(t)$
- Signal de sortie : position angulaire $\theta(t)$

Choix du vecteur d'état :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Position angulaire} \\ \text{Vitesse angulaire} \\ \text{Courant dans le bobinage} \end{bmatrix} \quad (22)$$

1.13.1 Modélisation dans l'espace d'état

Couple entraînant : $T_{entr}(t) = K_t \cdot i(t)$

Tension induite : $u_i(t) = K_e \cdot \omega(t)$

Newton : $J\dot{\omega} = -R_f\omega + T_{entr} \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{R_f}{J}x_2 + \frac{K_t}{J}x_3$

Kirchoff : $u = Ri + L\frac{di}{dt} + u_i \Rightarrow \dot{x}_3 + \frac{1}{L}u$

Ce qui donne l'espace d'état :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{R_f}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & -\frac{K_e}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (23)$$

1.14 Avantage de la représentation dans l'espace d'état

- Permet de simuler le comportement à partir de conditions initiales non nulles
- Contrairement à la fonction de transfert, qui est une représentation I/O, la représentation dans l'espace fait apparaître des grandeurs internes, les variables d'état, ayant une signification physique utile
- La représentation dans l'espace d'état est de nature vectorielle/matricelle, bien adapté aux calculs sur ordinateur

1.15 Système LTI représentables dans l'espace d'état

Quels systèmes LTI ne sont pas représentables dans l'espace d'état ?

Systèmes à comportement **dérivateur**, resp. systèmes ayant une fonction de transfert à **degré relatif négatif** (gain haute fréquence infini).

On peut remédier en introduisant une matrice **E non inversible** à gauche.

système "descripteur" utilisé plutôt rarement, sauf pour calculer l'inverse d'un système.

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (24)$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

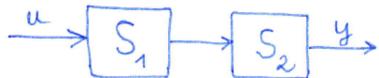
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Dérivateur : $y = \dot{u}$

1.16 Interconnecter de plusieurs systèmes dans l'espace d'état

1.16.1 Mise en cascade

mise en cascade



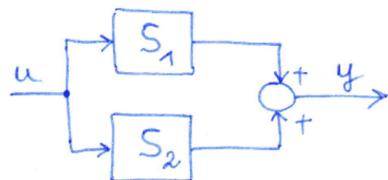
simple dans le domaine fréquentiel

$$S_{\text{tot}}(s) = S_2(s) \cdot S_1(s)$$

non commutatif pour matrices !

1.16.2 Mise en parallèle

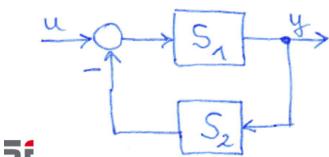
mise en parallèle



$$S_{\text{tot}}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

1.16.3 Mise en contre-réaction

mise en contre-réaction



$$S_{\text{tot}}(s) = (I + S_1(s)S_2(s))^{-1} S_1(s)$$

règle de Mason " $\frac{S_1(s)}{1 + S_1(s)S_2(s)}$ "

slide 22

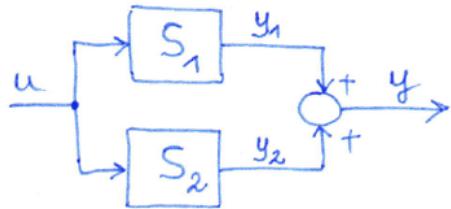
1.16.4 Concaténation des vecteurs d'état des sous systèmes

- Chaque sous-système a son propre vecteur d'état qui "vit dedans".
- Le vecteur d'état global est la concaténation de ces N sous-vecteurs.
- Les matrices d'état global se calculent en prenant en compte les équations des N sous-systèmes et les équations liées à leurs interconnexions.

$$\vec{x}_{\text{tot}}(t) = \begin{bmatrix} \vec{x}_1(t) \\ \vdots \\ \vec{x}_N(t) \end{bmatrix}$$

↑ m_1
↑ m_2
↑ m_N

1.16.5 Exemple : mise en parallèle



$$S_1 = \begin{cases} \dot{\vec{x}}_2 = A_1 \vec{x}_1 + 0 \vec{x}_2 + B_1 u \\ y_1 = C_1 \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + D_1 u \end{cases} \quad S_2 = \begin{cases} \dot{\vec{x}}_2 = 0 \vec{x}_1 + A_2 \vec{x}_2 + B_2 u \\ y_2 = 0 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 + D_2 u \end{cases}$$

Interconnexion : $y = y_1 + y_2$

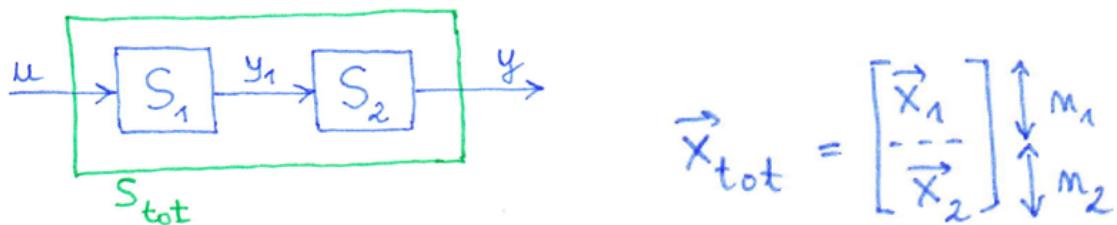
$$\vec{x}_{tot} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow m_1 \\ \downarrow m_2 \end{array}$$

On obtient ainsi typiquement des "matrices bloc" :

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & A_2 \end{bmatrix} \quad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_{tot} = A_{tot} \vec{x}_{tot} + B_{tot} u \\ y = C_{tot} \vec{x}_{tot} + D_{tot} u \end{cases} \quad C_{tot} = [C_1 \mid C_2] \quad D_{tot} = D_1 + D_2$$

1.16.6 Exemple : mise en cascade



Donné : $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$
Trouver : $A_{tot}, B_{tot}, C_{tot}, D_{tot} ?$

1.17 Conversion "espace d'état" → "fonction de transfert"

Rappel :

$$\frac{1}{S} : \text{Intgrateur} \quad S : \text{dérivateur} \quad (25)$$

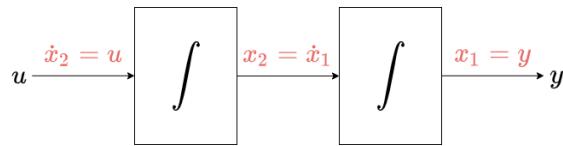
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &\downarrow \\ &\mathcal{L} \\ &\downarrow \\ S \cdot I \cdot X(S) &= AX(S) + BU(S) \\ (sI - A)X(S) &= BU(S) \\ X(S) &= (SI - A)^{-1}BU(S) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ Y(S) &= CX(S) + DU(S) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Rightarrow G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D \quad (27)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} = D \hat{=} \text{gain haute fréquence} \quad (28)$$

$$\text{gain statique } G(s=0) = -CA^{-1}B + D \quad (29)$$

1.17.1 Exemple double intégrateur



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{x}_2 &= u & \Rightarrow y &= Cx + Du \\ x_1 &= y \end{aligned} \quad (30)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (31)$$

Rappel : $G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D$

$$(SI - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{S^2} \begin{bmatrix} S & 1 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

$$C(SI - A)^{-1}B = \frac{1}{S^2} \begin{bmatrix} S & 1 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S^2} \\ \frac{1}{S^2} \end{bmatrix}$$

$$C(SI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{S^2} \\ \frac{1}{S^2} \end{bmatrix} + 0 = \frac{1}{S^2}$$

$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{S^2}$$

1.18 Transformée en \mathcal{Z}

$$\begin{cases} x[k+1] = A_n x[k] + B_u[k] \\ y[k] = C_n x[k] + D_n u[k] \end{cases} \quad \Downarrow \mathcal{Z} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} zIX(z) &= A_n X(z) + B_n U(z) \\ (zI - A_n)X_n(z) &= b_n U(z) \\ X_n(z) &= (zI - A)^{-1} B_n U(z) \\ Y(z) &= (C(zI - A)^{-1} B_n + D_n) U(z) \end{aligned} \quad (33)$$

Le gain statique est donné par :

$$G(z=1) = C_n(zI - A)^{-1} B_n + D_n \quad (34)$$

$$\boxed{\text{Rappel : } z = e^{s \cdot h}} \quad (35)$$

1.19 Pôles = valeurs propres de A

$$G(S) = C(SI - A)^{-1} B + D$$

La matrice inverse de $(SI - A)$ fait intervenir le **polynôme caractéristique** $\det(SI - A)$ au dénominateur. Une valeur de S qui annule le dénominateur est appelée **pôle** de la fonction ou matrice de transfert.

Les **pôles** correspondent aux **valeurs propres** de A , c'est à dire les racines du **polynôme caractéristique** $\det(SI - A) = 0$.

Les **pôles** traduisent essentiellement le **comportement dynamique du système** :

- stable / instable
- rapide / lent
- oscillant / non oscillant

1.20 Stabilité des systèmes

Un système LTI est stable si sa réponse impulsionale revient à l'origine :

- Temps continu : Si la partie réel de tous les **pôles** du système se trouvent dans le **demi-plan gauche** du plan complexe $\boxed{\operatorname{Re}(P) < 0}$
- Temps discret : Si tous les **pôles** du système se trouvent à l'**intérieur du cercle unitaire** $\boxed{|z| < 1}$

La relation entre constante de temps et pôles pour temps continu :

$$\tau = \frac{-1}{\text{Re}(P)} \quad (36)$$

Avec $\text{Re}(P) =$ partie réelle d'un pôle du système → valeurs qui annule le dénominateur de la fonction de transfert.

1.20.1 Exemple 1

Pour une matrice triangulaire ou diagonale, les pôles correspondent aux éléments sur la diagonale :

matrice triangulaire

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

valeur propre

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$1) SI-A = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$2) \det(SI-A) = (s+1) \cdot (s+3)$$

$$(SI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1) \cdot (s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$3) C(SI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1) \cdot (s+3)} \cdot \begin{bmatrix} 2(s+3) & 2 \end{bmatrix}$$

$$4) C(SI-A)^{-1} B = \frac{2}{(s+1) \cdot (s+3)}$$

G(s) = C(SI-A)^{-1} B + D

$$G(s) = C \begin{pmatrix} (sI-A)^{-1} \\ B \end{pmatrix} + D$$

Rappels

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = M_{11}M_{22} - M_{21}M_{12}$$

Utilisation dans Matlab

```
%% passage de ss vers tf
A = [-1, 1;
       0, -3];
%
B = [0;
      1];
%
C = [2, 0];
%
D = 5;
%
Gss = ss(A, B, C, D);
Gtf = tf(Gss)
```

1.20.2 Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \det(SI-A) = \det \begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & s-3 \end{pmatrix} = (s-1)(s-3) - 1(-2) = \underbrace{s^2 - 4s + 5}_{\text{polynôme caractéristique}}$$

$$s^2 - 4s + 5 = 0 \rightarrow \text{Matlab roots}([1, -4, 5])$$

$$\rho_{1,2} = s_{1,2} = 2 \pm j \text{ (instable)}$$

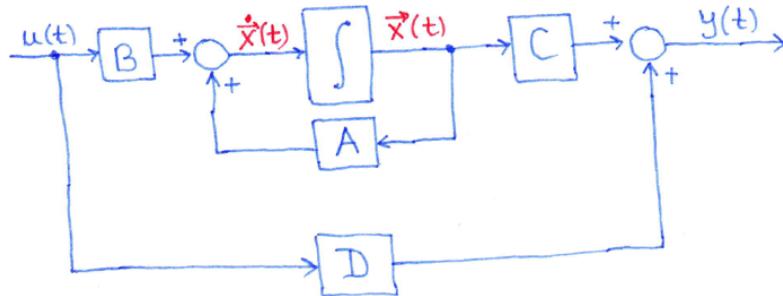
2 S2 - Algèbre Linéaire

2.1 Contenue

1. Sur-paramétrisation et non-univocité de [A, B, C, D]
2. Transformations linéaires dans l'espace d'état et exemple
3. Forme modale via décomposition en éléments simples
4. Rappel valeurs propres / vecteurs propres
5. Forme modale via diagonalisation de A
6. Solution générale de la trajectoire $x[k]$, systèmes LTI à temps discret et temps continu
 - contribution de la condition initiale
 - contribution du signal d'entrée (produit de convolution)

2.2 Conversion "espace d'état" \Rightarrow "fonction de transfert"

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= A\vec{x} + Bu \\ y &= C\vec{x} + Du\end{aligned}} \quad (37)$$



La fonction de transfert $G(s)$ est univoque

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (38)$$

2.3 Sur-paramétrisation de la représentation dans l'esp. d'état

2.3.1 Exemple : système d'ordre 2

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} : 5 \text{ paramètres} \quad (39)$$

La représentation dans l'espace d'état est fortement sur-paramétrée.

Deux systèmes identiques au niveau de la fonction de transfert peuvent avoir des matrices A, B, C complètement différentes.

On verra que c'est pas un inconvénient !

$$\begin{array}{rcl}
 A : 2 \times 2 & = & 4 \text{ paramètres} \\
 B : 2 \times 1 & = & 2 \text{ paramètres} \\
 C : 1 \times 2 & = & 2 \text{ paramètres} \\
 D : 1 \times 1 & = & 1 \text{ paramètre} \\
 \hline
 \Sigma & = & 9 \text{ paramètres}
 \end{array}$$

Le l'espace d'état est donc sur dimensionné : *Il y a 4 paramètre supplémentaire pour décrire le système.*

Il existe des formes particulières dans l'espace d'état, p.ex. forme modale, forme commandable, forme observable, etc, qui permettent de mettre en évidence des propriétés remarquables du système.

Quelles sont les possibilités d'obtenir une nouvelle représentation dans l'espace d'état à partir d'une existante ?

On peut permuter des variables d'état mais ce n'est pas très intéressant. Par contre, on peut introduire des nouvelles variables d'état à partir de variables d'état existantes en formant des combinaisons linéaires des anciennes.

2.4 Transformations linéaires dans l'espace d'état

On va appeler $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ les nouvelles variables d'état, regroupées dans le vecteur \tilde{x} :

$$x = T\tilde{x} \quad (40)$$

Avec T étant une matrice de transformation $n \times n$ inversible et constante.

$$\tilde{x} = T^{-1}x \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= T\dot{\tilde{x}} \\
 \dot{x} &= Ax + Bu \quad \Rightarrow \quad T\dot{\tilde{x}} = AT\tilde{x} + Bu \quad |T^{-1} \\
 \dot{\tilde{x}} &= T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}Bu \quad y = Cx + Du \\
 &\quad \Rightarrow \quad y = CT\tilde{x} + Du
 \end{aligned}$$

2.5 Transformations linéaires dans l'espace d'état

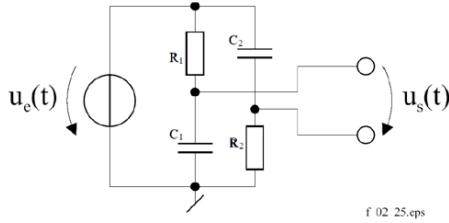
C'est simplement un changement de base en algèbre linéaire. Les propriété du système ne change pas, seulement sa représentation dans l'espace !

$$\begin{array}{lcl}
 \tilde{A} &= T^{-1}AT &; \quad \tilde{B} = T^{-1}B \\
 \tilde{C} &= CT &; \quad \tilde{D} = D
 \end{array} \quad (42)$$

Même si le contenu des matrices \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} est différent de A , B , C , cela représente le **même** système, **même** fonction de transfert, **même** pôles, **même** zéros, **même** gain statique, **même** gain haute fréquence (matrice D) !

2.5.1 Exercice

Exercice



f 02_25.eps

1. Modéliser le circuit électrique et trouver les matrices A, B, C, D
2. Calculer la fonction de transfert G(s) et analyser le cas $R_1C_1 = R_2C_2$
3. Introduire des nouvelles variables d'état correspondants à la somme et à la différence des tensions aux bornes des capacités.
4. Déterminer la matrice de transformation T correspondante
5. Déterminer les nouvelles matrices $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$
6. Que se passe-t-il si $R_1C_1 = R_2C_2$?

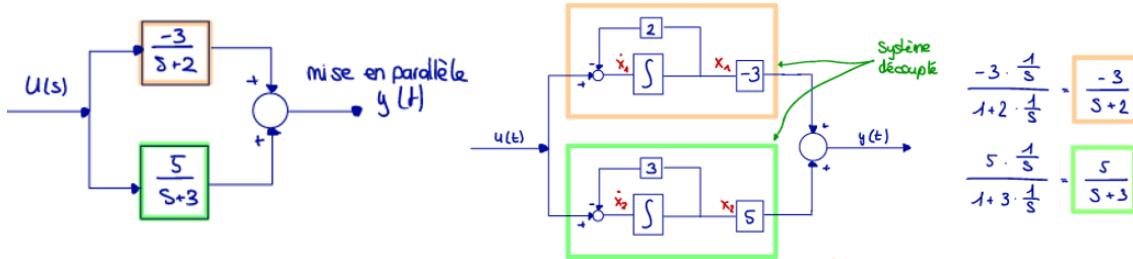
2.6 Transformation : tf \Rightarrow ss : forme modale / décomposition en éléments simples

C'est simplement une décomposition en élément simple :

exemple : $G(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+6} = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)}$ \rightarrow factoriser le dénominateur

résidus $\frac{R_1}{(s+2)} + \frac{R_2}{(s+3)} = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)}$ | $\cdot (s+2)$; poser $s=-2$
 $\cdot (s+3)$; poser $s=-3$

 $\Rightarrow R_1 = \frac{2(-2)+1}{-2+3} = -3$
 $\Rightarrow R_2 = \frac{2(-3)+1}{-3+2} = 5$



Attention : une somme de deux fonction de transfert $G_1(s) + G_2s$ est semblable à mise en parallèle de $G_1(s)$ et G_2s .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 0x_2 + 1u \\ \dot{x}_2 = 0x_1 - 3x_2 + 1u \\ y = -3x_1 + 5x_2 + 0u \end{cases} \quad (43)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

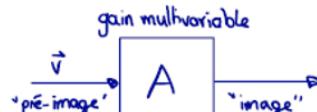
- Pour des pôles simples réels, la forme modale donne une matrice A **diagonale**.
- Pour des pôles complexes conjugués, et des pôles multiples, A prend une « **forme de Jordan** ».

2.7 Rappel : valeurs propres / vecteurs propres

Définition : les valeurs propres λ_k et les vecteurs propres \vec{v}_k sont définis de la manière suivante :

$$\underbrace{\vec{v}_1}_{\text{pré-image}} \parallel \underbrace{A\vec{v}_1}_{\text{image}} \Rightarrow A\vec{v}_1 = \underbrace{\lambda_1 \vec{v}_1}_{\text{scalaire}} \quad \vec{0} = (\lambda_1 I - A)\vec{v}_1$$

pour que $\vec{v}_1 \neq \vec{0} \Rightarrow$ il faut que $\det(\lambda_1 I - A) = 0$



- Un vecteur propre pré-image v est transformé par A en une image Av parallèle.
- Le facteur de proportionnalité λ est appelé valeur propre.
- Les valeurs propres peuvent être réels ou complexes conjugués.

2.7.1 Valeur propre rapide

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \boxed{\frac{a+d}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = m} \Rightarrow \text{Moyenne de la diagonal} \\ 2) \boxed{ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 = p} \Rightarrow \text{produit des pôles} \end{array} \right. \quad (45)$$

$$\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - p} \quad (46)$$

2.8 Exemple : calcul des valeurs/vecteurs propres

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

matrice triangulaire :
valeurs propres $\lambda_1 = -3; \lambda_2 = -5$

• vecteurs propres :

$$\lambda_1 : \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} \quad A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3v_{1x} + v_{1y} \\ -5v_{1y} \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} \Rightarrow -3v_{1x} = -3v_{1x} \Rightarrow \text{non défini}$$

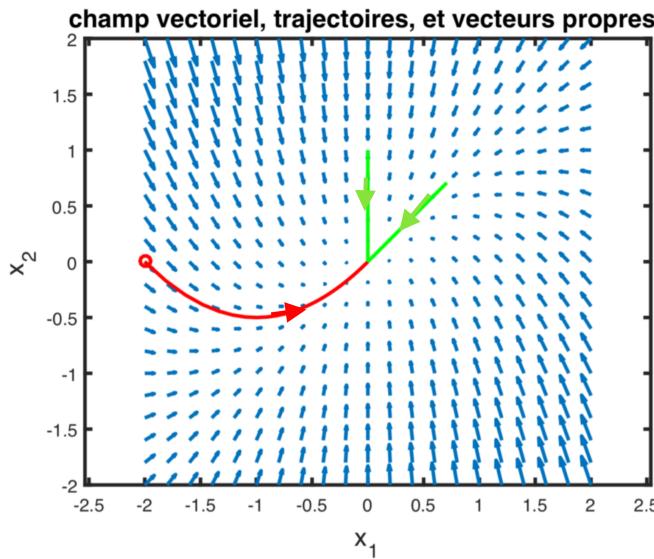
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 : \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} \quad A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3v_{2x} + v_{2y} \\ -5v_{2y} \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} \Rightarrow -3v_{2x} + v_{2y} = -5v_{2x} \Rightarrow 2v_{2x} = -v_{2y}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{il y a une infinité de solutions}) \quad \Delta \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ne donne pas de direction}$$

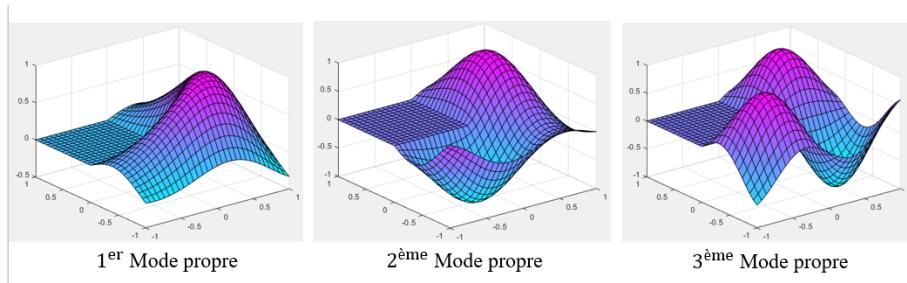
Matlab : $[V, \lambda] = \text{eig}(A)$

$$\dot{x} = Ax \quad \text{à chaque point } x \text{ on colle le vecteur vitesse } Ax \quad (47)$$



2.9 mécanique vibratoire - vecteurs propres = modes propres

Plaque en forme de L, encastrée sur 2 bords (logo Matlab)



Si on donne comme condition initiale un mode propre associé à une fréquence propre, tous les points de la structure vont vibrer à uniquement cette fréquence.
Si on donne une condition initiale arbitraire, on va observer un mélange des fréquences propres.

2.9.1 Problème mécanique - Espace de *phases* → Espace d'*états*

En mécanique :

$$\underbrace{M}_{\text{Inertie}} \ddot{q} + \underbrace{K}_{\text{Raideur}} q = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow x = \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_{\text{Coordonées généralisées}} \quad (48)$$

Passage du domaine mécanique "espace de phases" à l'espace d'états

2.10 Diagonalisation de A

Si les vecteurs propres sont tous linéairement indépendant, on peut les regrouper dans une matrice de transformation T

$$T = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (49)$$

Cette matrice de transformation T permet de diagonaliser A :

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (50)$$

En cas de valeurs propres complexes conjuguées, on préfère garder \tilde{A} réel en gardant un bloc 2×2 sur la diagonale.

En cas de vecteurs propres multiples, on arrive généralement pas à diagonaliser, il faudra se contenter de la « **forme de Jordan** ».

Attention : T peut être numériquement mal conditionné.

2.10.1 Cas T non inversible :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_1 = \lambda_2 &= 0 \\ A\vec{v} &= \lambda\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \vec{v} &= \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \\ A\vec{v} &= \begin{bmatrix} v_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \vec{v} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & v_y = 0 \rightarrow v_x = ? \end{aligned}$$

Pour palier à ce problème, on peut utiliser la forme de Jordan.

2.10.2 Exemple de diagonalisation

$$\text{et } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(SI-A) = \det \begin{pmatrix} S-4 & 1 \\ -6 & S+1 \end{pmatrix} = (S-4)(S+1) + 6 = S^2 - 3S + 2 = (S-2)(S-1)$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\lambda_1 : \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} = A\vec{v}_1 - \begin{bmatrix} 4v_{1x} - v_{1y} \\ 6v_{1x} - v_{1y} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} \Rightarrow 4v_{1x} - v_{1y} = 2v_{1x} \Rightarrow 2v_{1x} - v_{1y} = 0$$

$$6v_{1x} - v_{1y} = 2v_{1x} \Rightarrow 6v_{1x} - 3v_{1y} = 0 \Rightarrow 2v_{1x} - v_{1y} = 0$$

$$\text{On définit arbitrairement: } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 : \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} = A\vec{v}_2 - \begin{bmatrix} 4v_{2x} - v_{2y} \\ 6v_{2x} - v_{2y} \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} \Rightarrow 4v_{2x} - v_{2y} = v_{2y} \Rightarrow 3v_{2x} = v_{2y}$$

$$6v_{2x} - v_{2y} = v_{2y} \Rightarrow 6v_{2x} = 2v_{2y}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$3) T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(T) = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{inversible!}$$

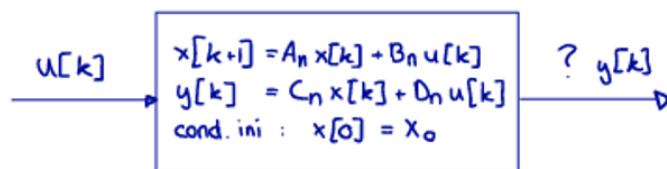
$$4) T^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 - 6 & -3 + 1 \\ 2 \cdot 4 + 6 & 2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 6-4 & 6-6 \\ -2+2 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Corriger l'exemple

2.11 Solution générale de la trajectoire numérique $x[k]$



La solution se trouve de manière récursive $x[0], x[1], x[2], \dots$

$$\begin{aligned}
 x[0] &= x_0 \text{ (connu)} \\
 x[1] &= A_n \cdot x_0 + B_n \cdot u[0] \\
 x[2] &= A_n \cdot x[1] + B_n \cdot u[1] = A_n^2 x_0 + A_n B_n u[0] + B_n u[1] \\
 x[3] &= A_n^3 \cdot x_0 + A_n^2 B_n u[0] + A_n B_n u[1] + B_n u[2] \\
 &\vdots \\
 x[k] &= A_n^k \cdot x_0 + A_n^{k-1} B_n u[0] + A_n^{k-2} B_n u[1] + \dots + B_n u[k-1]
 \end{aligned}$$

contribution de la condition initiale

contribution du signal d'entrée

→ principe de superposition

= produit de convolution
 $u[k] * g_r[k]$

2.12 Réponse impulsionale

$$u[k] = \delta[k] = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \quad \text{"Dirac numérique"}$$

On suppose $x[0] = 0$
 Donc $x[1] = A_n \cdot 0 + B_n \overbrace{u[0]}^{=1} = B_n$
 $x[2] = A_n \cdot B_n + B_n \overbrace{u[1]}^{=0} = A_n B_n$
 $x[3] = A_n^2 B_n$
 ...
 $x[k] = A_n^{k-1} B_n$ 'dernier' échantillon de la réponse impulsionale

La solution $x[k]$ fait intervenir deux contributions :

- Contribution de la condition initiale : $A_n^k \cdot x_0$ « solution homogène »
- contribution du signal d'entrée $u[k]$: produit de convolution entre $u[k]$ et la réponse impulsionale $x[k]$

Principe de superposition : les deux contributions s'additionnent !

2.13 Convolution discrète / matrice Toeplitz - *Convolution matricielle*

La convolution étant une opération linéaire, il est possible de la représenter comme l'effet d'une matrice agissant sur le signal d'entrée.

Cette matrice a une structure particulière, appelée "Toeplitz".

$$y = h * x = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & & \vdots & \vdots \\ h_3 & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & h_3 & \dots & h_1 & 0 \\ h_{m-1} & \vdots & \ddots & h_2 & h_1 \\ h_m & h_{m-1} & & \vdots & h_2 \\ 0 & h_m & \ddots & h_{m-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{m-1} & h_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & h_m & h_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.14 Solution générale de la trajectoire $x(t)$ temps continu

$$\begin{cases} \dot{x} = \overset{\text{scalaire}}{\overbrace{a}} \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^1 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{solution : } x(t) = e^{at}x_0 \quad (51)$$

solution générale de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
 avec condition initiale $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B u(\tau) d\tau$$

contribution de la condition initiale
 réponse impulsionnelle linéaire $u(t)$ à $x(t)$:
 contribution du signal d'entrée ; produit de convolution $u(t) * g_x(t)$

L'exponentielle matricielle e^{At} est appelée « matrice de transition »

Matlab : `expm(A*t)`

2.15 Définition de l'exponentielle matricielle : Taylor

Série de Taylor : composition de polynôme de degré $1 \rightarrow n$

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \frac{(At)^4}{4!} + \dots \quad A = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow At = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(At)^2 = At \cdot At = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc : $e^{At} = I + At$ car tout les termes supplémentaires sont nuls !
 Finalement :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Ce qui correspond à **un double intégrateurs**.

Solution classique : $x(t) = \begin{bmatrix} x_{10} \cdot \underbrace{t}_{\substack{\text{rampe} \\ \text{const.}}} + x_{10} \\ \underbrace{x_{20}}_{\text{const.}} \end{bmatrix}$

Preuve :

$$e^{At} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} + tx_{20} \\ x_{20} \end{bmatrix} \quad \& \quad \Sigma(t) = e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Il y a une infinité de termes dans la série de Taylor.

Si l'on coupe après le terme linéaire, on obtient une approximation qui correspond à la méthode **d'Euler** (approximer la dérivée par une sécante).

Pour une matrice diagonale, e^{At} est diagonale aussi, et les éléments de la diagonale correspondent à l'exponentielle habituelle (scalaire).

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{A_{nn}t} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Les termes dans l'exponentielle matricielle peuvent être des exponentielles, des sinus, des sinus amortis, et même des polynômes.

2.16 Calcul de e^{At} par diagonalisation

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT = \text{diagonal} = \tilde{A}_{\text{diag}} \\ A &= T\tilde{A}_{\text{diag}}T^{-1} \\ e^{At} &= e^{(T\tilde{A}_{\text{diag}}T^{-1})t} = \underbrace{I}_{\substack{\text{TT} \\ \text{I}}} + T\tilde{A}_{\text{diag}}T^{-1}t + \frac{(T\tilde{A}_{\text{diag}}T^{-1})^2 t^2}{2!} + \dots \\ &\quad \text{II} \\ (T\tilde{A}_{\text{diag}}T^{-1})^k &= T\tilde{A}_{\text{diag}}^k T^{-1} \\ (T\tilde{A}_{\text{diag}}T^{-1})^k &= T\tilde{A}_{\text{diag}}^k T^{-1} \\ e^{At} &= Te^{\tilde{A}_{\text{diag}}t}T^{-1}, \text{ et } e^{\tilde{A}_{\text{diag}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cette approche n'est que faisable si les vecteurs propres de A sont linéairement indépendants, et que la matrice de transformation T composée des vecteurs propres soit numériquement bien conditionnée.

2.17 produit de convolution

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = g_x(t) * u(t) \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad | \mathcal{L} \\ sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ \text{pour la réponse impulsionnelle, } u(t) &= \delta(t) : \text{Dirac} \\ \text{et } U(s) &= 1 \\ (sI - A)X(s) &= B \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}B \quad | \mathcal{L}^{-1} \\ x(t) &= e^{At}B =: q_x(t) \stackrel{\hat{=}}{\rightarrow} \text{réponse impulsionnelle} \end{aligned}$$

2.18 solution générale en utilisant Matlab

```

G = ss(A, B, C, D); % objet LTI
t = linspace(0, Tend, N); % axe de temps numérisé
u = [.....]; % signal d'entrée numérisé
x0 = [.....]; % condition initiale
[y, t, x] = lsim(G, u, t, x0); % calcul de la solution

```

Un des avantages de la représentation dans l'espace d'état, c'est de pouvoir prendre en compte des conditions initiales non nulles.

Beaucoup de fonctions Matlab font en interne les calculs sous forme ss, même si on donne pour le système une représentation tf.

Le calcul matriciel numérique offre beaucoup d'avantages !

2.19 Intégrale numérique, approximation par une sécante

$$\begin{aligned} \dot{x}Ax &\Rightarrow \dot{x} \simeq \frac{x[k+1] - x[k]}{h} \\ &\Rightarrow \frac{x[k+1] - x[k]}{h} \simeq Ax[k] \cdot h \\ x[k+1] \simeq x[k] + Ahx[k] &\Rightarrow x[k+1] \simeq (I + A \cdot h)x[k] \end{aligned} \quad (55)$$

3 S3

3.1 Contenue

1. Rappel cours 2, exercices série 2
2. Modèle échantillonné : application de la matrice de transition
3. Retour d'état par placement de pôles
4. Commandabilité
5. Forme commandable ($tf \Rightarrow ss$)

3.2 Rappels cours 2

- Valeurs propres, vecteurs propres de la matrice système A
- Diagonalisation de la matrice A
- Forme modale
- Solution générale de la trajectoire $x[k]$, temps discret
- Solution générale de la trajectoire $x(t)$, temps continu
- Matrice de transition, exponentielle matricielle

3.2.1 Solution générale de la trajectoire $x(t)$ temps continu

solution générale de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

avec condition initiale $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

contribution de la condition initiale ↑ contribution du signal d'entrée ; produit de convolution $u(t) * g_x(t)$

réponse impulsionnelle à $u(t)$ à $x(t)$:

L'exponentiel matricielle e^{At} est appelée « matrice de transition » Matlab : `expm(A*t)`

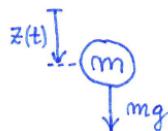
3.3 Définition de l'exponentiel matricielle : Taylor

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

Les puissances $(At)^2$, $(At)^3$, etc sont à calculer selon les règles de multiplication matricielle, pas élément par élément !

3.4 Exponentielle matricielle : unification

L'exponentielle matricielle permet d'unifier les 3 types d'allure temporelle :



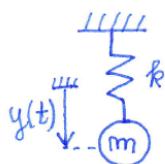
chute libre, type de fonction temporelle ?

fonctions polynomiales



décharge d'une capacité , type de fonction temporelle ?

fonctions exponentielles

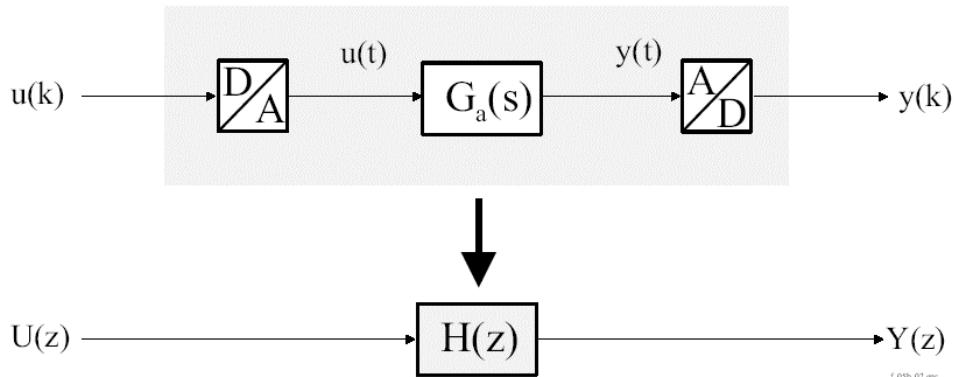


oscillations , type de fonction temporelle ?

fonctions sinus, cosinus

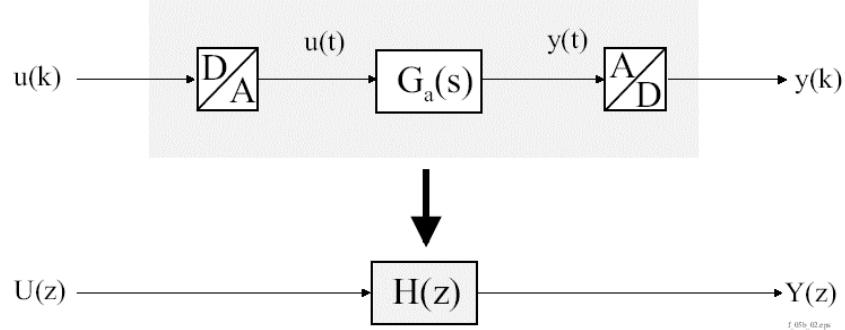
L'exponentielle matricielle peut générer les trois allures !

3.5 Modèle échantillonnable du système à régler



Trouver $H(z)$ à partir de $G_a(s)$: trouver la représentation dans l'espace d'état de H à partir de celle de G_a .

3.6 Calcul de $H(z)$ basé sur la réponse impulsionale



$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G_a(s)}{s} \right) \right\}$$

3.7 Calcul du modèle échantillonné dans l'espace d'état

Si l'on souhaite utiliser l'espace d'état dans le domaine numérique (modèle échantillonné) les matrices A et B doivent être adaptées à l'aide des relations :

$$A_d = e^{A_a \cdot h}$$

$$B_d = \int_0^h e^{A_a \cdot \tau} B d\tau$$

$$\begin{cases} \vec{x}[k+1] = A_d \vec{x}[k] + B_d u[k] \\ y[k] = C_d \vec{x}[k] + D_d u[k] \end{cases}$$

3.8 Calcul par Matlab

Ga = tf(num, den); % système à régler analogique

ou bien

Ga = ss(A, B, C, D);

H = c2d(Ga, h, 'zoh'); % modèle échantillonné

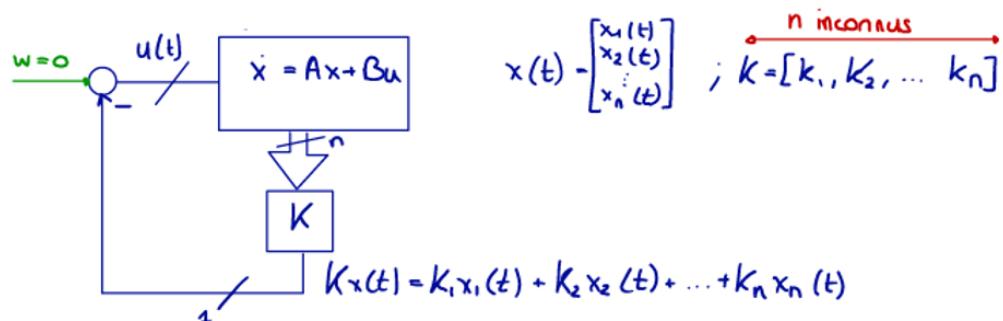
3.9 Retour d'état « state feedback »

les trois objectifs de la régulation :

1. Rendre la boucle fermée stable avec une « dynamique » appropriée
2. Bonne régulation de correspondance, le signal à régler devrait au mieux suivre la consigne
3. Bonne régulation de maintien; maintenir le signal à régler proche de la consigne

Hypothèse : une mesure complète du vecteur d'état est disponible.
Idée : reboucler l'état $x(t)$ sur l'entrée $u(t)$ avec un gain K .

Aussi dit : "Full Information"



3.10 Stabilité en B.F. - Méthode de synthèse du retour d'état par placement de pôles

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu && \text{système à régler} \\ u &= -Kx && \text{retour d'état avec un gain } K \text{ à déterminer} \\ \dot{x} &= Ax - BKx \\ \dot{x} &= \underbrace{(A - BK)}_{A_{bf}} x && \text{boucle fermée} \\ A_{bf} & && \text{matrice A de la boucle fermée}\end{aligned}$$

placement de pôles monovariable (single input)

Imposer les n valeurs propres (pôles) de A_{bf} pour déterminer les n inconnues de K . Comparaison des coefficients du polynôme caractéristique.

3.10.1 Méthode

1. On s'intéresse uniquement au système à régler : $\dot{x} = x + Bu$
2. On cherche un régulateur proportionnel dont le gain K rend le système stable : $u = -Kx$
3. On pose la relation en boucle fermée B.F. : $\dot{x} = \underbrace{A - BK}_{A_{bf}} x_{A_{bf}}$
4. On trouve le polynôme caractéristique : $\det(SI - A) = 0$
5. On fixe des pôles pour le système régulé
6. On trouve les valeurs de K à l'aide des pôles placé précédemment

3.10.2 Exemple

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} & \rho_{bf_1} = -2; \rho_{bf_2} = -3 & \leftarrow \text{choisi}, \text{trouver } K = [K_1, K_2] \\ & \text{système à régler instable} & & \end{aligned}$$

$$B \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \quad K$$

$$A_{bf} - A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ 5K_1 & 5K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-K_1 & 3-K_2 \\ -5K_1 & 2-5K_2 \end{bmatrix}$$

pôles en b.f. : $\det(SI - A_{bf}) = \det \begin{pmatrix} s+K_1-1 & K_2-3 \\ sK_1 & s+5K_2-2 \end{pmatrix} = 0$

$$(s+K_1-1)(s+5K_2-2) - 5K_1(K_2-3) = 0$$

$$s^2 + s(5K_2-2+K_1-1) + \underbrace{(K_1-1)(5K_2-2)}_{s^2 + s(K_1 + 5K_2 - 3)} - 5K_1(K_2-3) = 0$$

$$s^2 + s(K_1 + 5K_2 - 3) + \cancel{SK_1 - 2K_1 - 5K_2 + 2} - \cancel{SK_1K_2} + 15K_1 = 0$$

$$s^2 + s(K_1 + 5K_2 - 3) + 13K_1 - 5K_2 + 2 = 0 \rightarrow \text{polynôme caractéristique en b.f.}$$

$$\text{polynôme caract imposé : } (s - \rho_{\text{pôle}})(s - \rho_{\text{pôle}}) = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$$

$$\begin{aligned} K_1 + 5K_2 - 3 &= 5 \quad \rightarrow K_1 = 8 - 5K_2 \\ 13K_1 - 5K_2 + 2 &= 6 \quad \xrightarrow{\perp} 13(8 - 5K_2) - 5K_2 + 2 = 6 \\ 106 - 70K_2 &= 6 \\ 70K_2 &= 100 \\ K_2 &= \frac{100}{70} = \frac{10}{7} = 1,42 \\ K_1 &= 0,86 = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

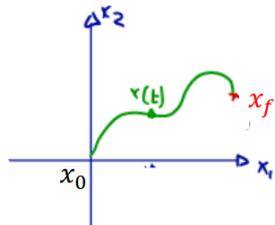
En comparant les coefficients du polynôme caractéristique imposé avec celui contenant les inconnues $K = [K_1, K_2, \dots, K_n]$, on obtient un système linéaire de n équations pour n inconnues (pour le cas mono-entrée).

On verra que ce système a une solution unique si le système est commandable.

Matlab :

```
K = place(A, B, p); % pas de pôles multiples, ou bien
K = acker(A, B, p); % numériquement moins stable
```

3.11 Commandabilité



Le système $\dot{x} = Ax + Bu$ est appelé **commandable**, s'il est possible de trouver un signal d'entrée $u(t)$, permettant d'atteindre depuis la condition initiale $x_0 = 0$ **n'importe quel** point final $x(t_f) = x_f$ dans un temps fini.

Chaque point dans l'espace d'état doit être **atteignable**, en agissant sur le signal de commande $u(t)$.

Comment peut-on déterminer si un couplet $[A, B]$ est commandable ?

3.12 Critère algébrique pour la commandabilité

système temps discret : $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$

$$x[0] = 0$$

$$x[1] = Bu[0]$$

après 1 coup d'horloge, on est dans le sous-espace engendré par le vecteur B

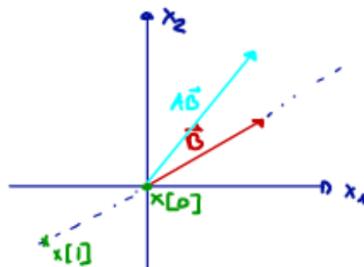
$$x[2] = Ax[1] + Bu[1] = ABu[0] + Bu[1]$$

après 2 coups d'horloge, on est dans le

sous-espace de dimension 2 engendré par les vecteurs B et AB .

On a « gagné » une dimension, pour autant que B et AB

soient linéairement indépendants



$$x[3] = Ax[2] + Bu[2] = A^2B u[0] + ABu[1] + Bu[2]$$

après 3 coups d'horloge, on se trouve dans un sous-espace de dimension 3 pour autant que les trois vecteurs, B , AB et A^2B soient linéairement indépendants.

Si tout se passe bien, on gagne à chaque coup d'horloge une dimension dans l'espace d'état. Après n coups d'horloge, on a gagné l'espace d'état complet, pour autant que les n vecteurs B , AB et A^2B ... $A^{n-1}B$ soient linéairement indépendants.

$$\underbrace{x[n]}_{x_f} = \underbrace{A^{n-1}B}_{\text{n inconnues}} u[0] + \dots + B u[n-1]$$

Comment peut-on déterminer le signal de commande $u[k]$ permettant d'atteindre après n coups d'horloge un point final x_f donné ?

$$u = \begin{bmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \vdots \\ u[1] \\ u[0] \end{bmatrix} \quad \text{n inconnues}$$

$$\text{matrice de commandabilité } P_c$$

Un système $[A, B]$ est commandable si sa matrice de commandabilité associée P_c a rang n.

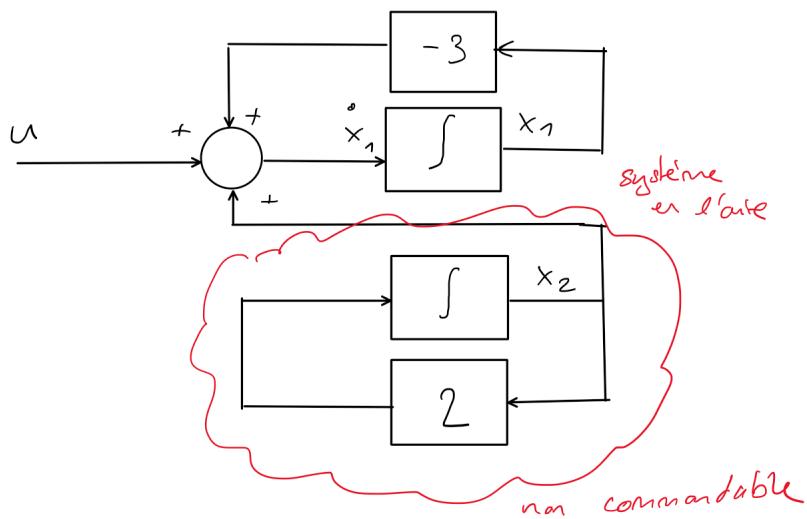
Pour le cas mono-entrée, la matrice de commandabilité est carrée, et la commandabilité revient à dire que $\det(P_c) \neq 0$

3.13 Exemples intuitifs

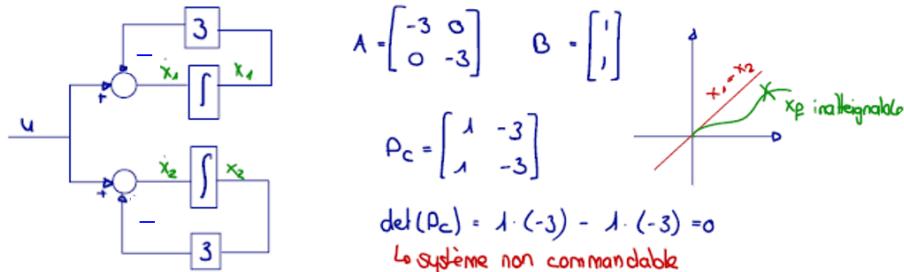
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_c = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(P_c) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-3) = 0$$

↳ \triangle système non commandable

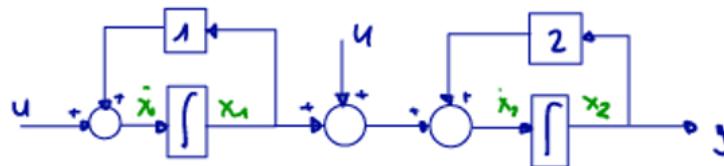
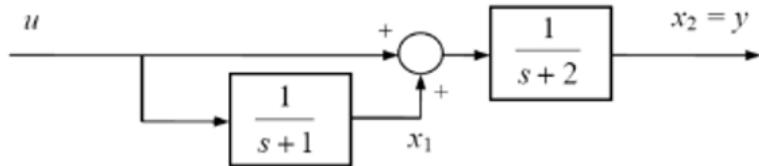
Dessiner le schéma bloc associé : on voit tout de suite qu'il y a un sous-système qui est dans l'air !



3.13.1 Autre exemple :



3.14 Exemple moins trivial



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(P_c) = -1 - (-1) = 0$$

↳ Système non commandable

Exemple de calcul de la matrice de commandabilité :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boxed{n=2} \quad (56)$$

$$P_c = \left[B \mid AB \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.15 La forme commandable ($\text{tf} \Rightarrow \text{ss}$)

Temporel

ss

$$A, B, C, D$$

Fréquentiel

tf

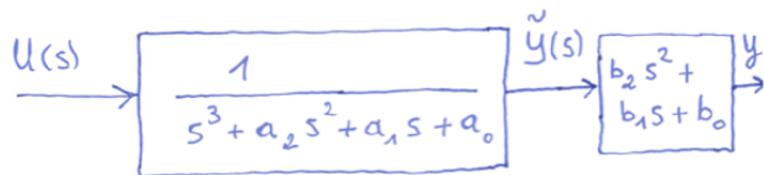
$$\Leftrightarrow G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

- Forme modale $\text{diag}(A)$
- Forme commandable

exemple: $G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$ (degré relatif $d = m - n = 3 - 2 = 1$)

au préalable :

- si le degré relatif $d=0$, diviser et extraire le gain à haute fréquence
- normaliser à 1 le coefficient de la puissance la plus élevée au dénominateur



$$(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) \cdot \tilde{Y}(s) = U(s) \quad | \mathcal{Z}^{-1}$$

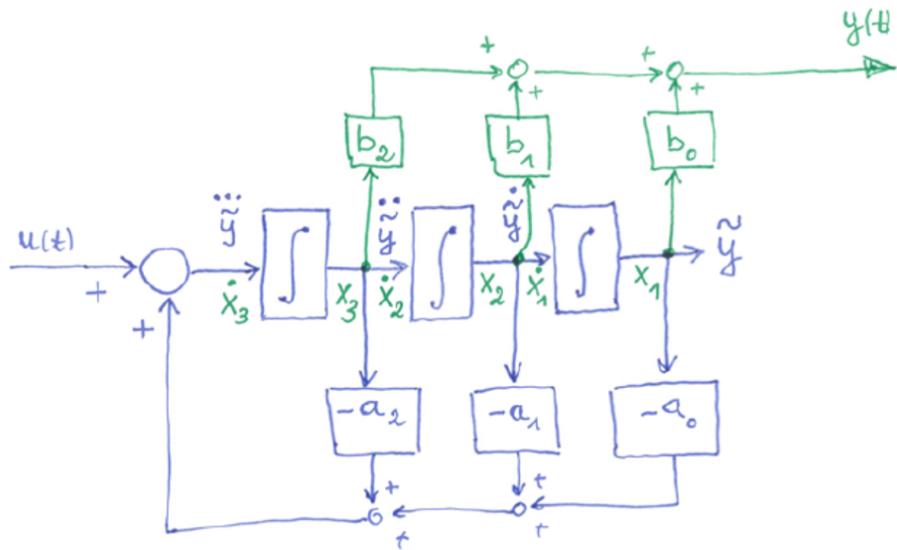
$$\ddot{\tilde{y}} + a_2 \ddot{\tilde{y}} + a_1 \dot{\tilde{y}} + a_0 \tilde{y} = u(t)$$

$$\ddot{\tilde{y}} = -a_2 \ddot{\tilde{y}} - a_1 \dot{\tilde{y}} - a_0 \tilde{y} + u(t) \quad | \mathcal{Z}^{-1}$$

$$\text{d'autre part: } Y(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) \cdot \tilde{Y}(s) \quad | \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y = b_2 \ddot{\tilde{y}} + b_1 \dot{\tilde{y}} + b_0 \tilde{y}$$

3.15.1 Schéma bloc de la forme commandable



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u \end{cases}$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3$$

des 1 sur la première "surdiagonale"

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

→ dernière ligne → coefficients du dénominateur, avec signe -, et dans le sens inverse

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

coefficients du numérateur dans le sens inverse

FORME COMMANDABLE

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D &= 0
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

↓

$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^3 + a_1 s + a_0}$

Degré relatif :
 $d = n-m = 3-2 = 1 = B$

4 S4

4.1 Contenue cours S4

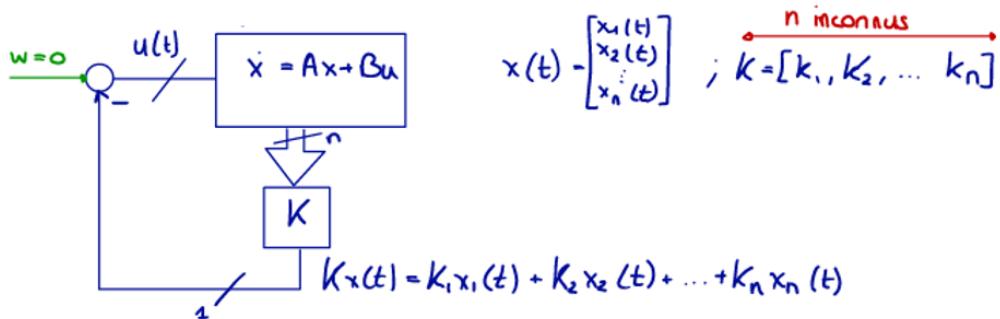
1. Rappel cours 3, exercices série 3
2. Réalisation minimale d'un système
3. Application de méthodes d'optimisation dans la régulation
4. Formes quadratiques
5. Retour d'état par la méthode LQR
6. Équation de Riccati, cas temps continu
7. Équation de Riccati, cas temps discret
8. Exemple ordre 1

4.2 Rappels cours 3

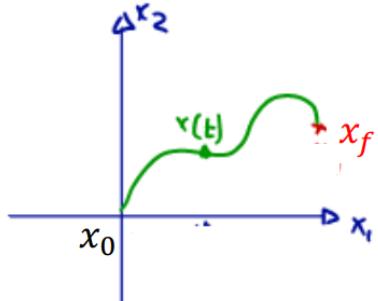
- Retour d'état
- Placement de pôles pour le dimensionnement du retour d'état
- Commandabilité
- Forme commandable

4.3 Retour d'état « *state feedback* »

Rendre la boucle fermée stable avec une « *dynamique* » appropriée



4.4 Commandabilité



Le système $\dot{x} = Ax + Bu$ est appelé **commandable**, s'il est possible de trouver un signal d'entrée $u(t)$, permettant d'atteindre depuis la condition initiale $x_0 = 0$ **n'importe quel** point final $x(t_f) = x_f$ dans un temps fini.

La commandabilité signifie que n'importe quel point de l'espace d'états est atteignable.

4.4.1 Critère algébrique pour la commandabilité

$$u = \begin{bmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \vdots \\ u[1] \\ u[0] \end{bmatrix} \quad \text{n inconnues}$$

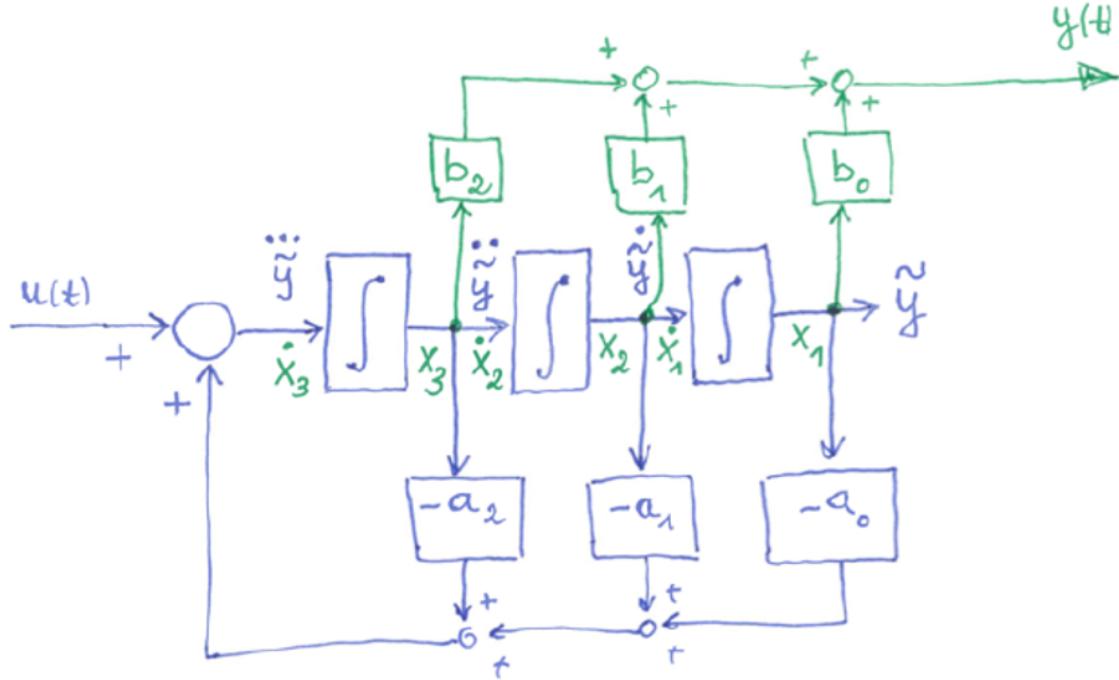
$$\begin{bmatrix} & & & & & n \\ \vdash & \vdash & \vdash & \vdash & \vdash & \dashv \\ B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B & \dashv \\ \vdash & \vdash & \vdash & \vdash & \vdash & \vdash \\ \hline & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \vdash \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_f \\ \vdash \end{bmatrix}$$

matrice de commandabilité P_c

Un système $[A, B]$ est commandable si sa matrice de commandabilité associée P_c est de rang n .

Si la matrice est rectangulaire, il faut qu'elle soit de rang n , ce qui signifie qu'il y a au moins n colonnes linéairement indépendantes. Pour rappel, n est le nombre de ligne du vecteur de commande \vec{u} .

4.4.2 Forme commandable



4.5 Réalisation minimale

Un système $[A, B, C, D]$ ayant n variables d'état est appelé une « *réalisation minimale* », si on n'arrive pas à trouver une autre réalisation avec moins de n variables d'état, donnant lieu au même comportement entrée-sortie.

Cette propriété importante est exigée pour l'application de toutes les méthodes de synthèse basée sur un modèle.

Un théorème important dit : Une réalisation $[A, B, C, D]$ est minimale si $[A, B]$ est commandable et $[A, C]$ observable (cette dernière propriété sera traitée prochainement).

Pour un système monovariable (SISO), on peut facilement depuis une fonction de transfert ayant aucun pôle et zéro en commun trouver une réalisation minimale (p.ex. forme commandable).

Pour les systèmes multivariables (MIMO), c'est beaucoup plus difficile, la théorie complète existe, mais n'est pas traitée ici.

4.5.1 Exercice 4.2

Trouver un schéma bloc et une réalisation minimale $[A, B, C, D]$ pour :

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+4)} \\ 1 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

4.6 Motivation : formes quadratiques

La régulation avancée est basée sur :

- L'utilisation explicite d'un **modèle** dans la synthèse du régulateur
- L'utilisation d'un critère **d'optimalité** (on cherche le meilleur compromis).
On veut minimiser une fonction coût.

Les fonctions coût qu'on vise à minimiser sont souvent des « *formes quadratiques* »

Pourquoi ?

Trouver le minimum d'une fonction revient à annuler sa dérivée, et le gradient d'une forme quadratique est une fonction linéaire \rightarrow solution analytique

4.7 Rappel des formes quadratiques dans \mathbb{R}^n

Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2 à plusieurs variables. Exemples :

$$\begin{aligned} Q(x) &= ax^2 \\ Q(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ Q(x, y, z) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz. \end{aligned}$$

La norme euclidienne au carré est un autre exemple d'une forme quadratique :

$$\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{58}$$

Une forme quadratique est définie avec l'aide d'une matrice M symétrique

Symétrique	Antisymétrique	
$M = M^T$	$M = -M^T$ $M = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} \\ -M_{12} & 0 \end{bmatrix}$ $x^T M x = 0$	(59)

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^T M x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11}x_1 & M_{12}x_2 \\ M_{21}x_1 & M_{22}x_2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$x^T M x = \underbrace{M_{11}x_1^2 + 2M_{12}x_1x_2 + M_{22}x_2^2}_{\text{Polynôme homogène de degré 2}}$$

Cas général :

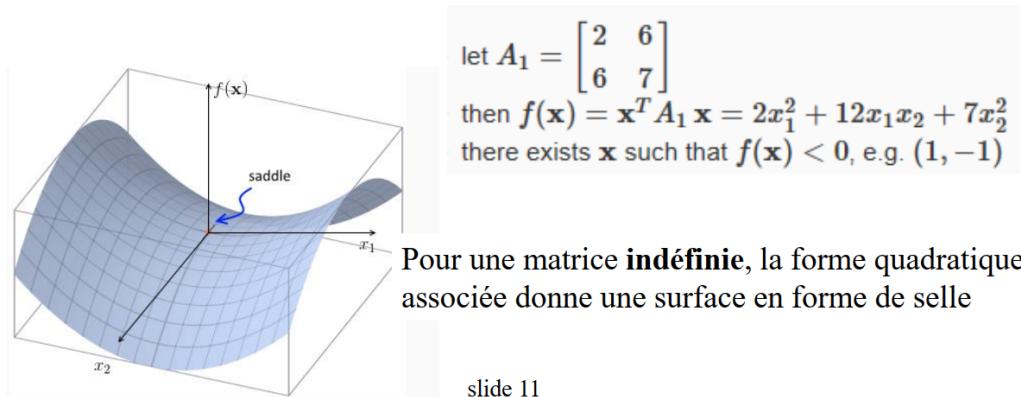
$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j = x^T M x \quad (61)$$

Une matrice antisymétrique avec diagonale nulle ne génère aucune contribution à la forme quadratique.

4.8 Formes quadratiques définies

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 18x_2^2$$

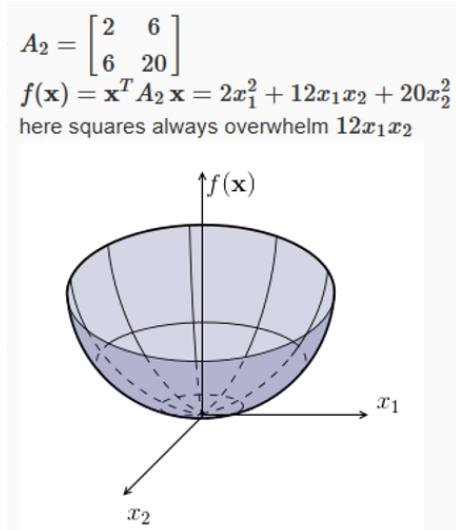
On aimerait savoir si le résultat est positif pour tout vecteur x .



4.9 Matrices définies positives

On écrit $M > 0$ si $x^T M x > 0, \forall x \neq 0$

La forme quadratique donne une surface courbée vers le haut partout :



4.10 Critère de Sylvester pour déterminer si $M = M^t > 0$

Une matrice symétrique est définie positive, si tous les mineurs diagonaux principaux sont positifs, en partant du coin supérieur gauche. Exemple :

$$M = \begin{bmatrix} 21 & -25 & -2 \\ -25 & 59 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ?}$$

$$21 > 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 21 & -25 \\ -25 & 59 \end{bmatrix} \right) = 614 > 0$$

$$\det(M) = 256 > 0 \quad \text{donc } M > 0 !$$

4.11 Propriété d'une matrice symétrique définie positive

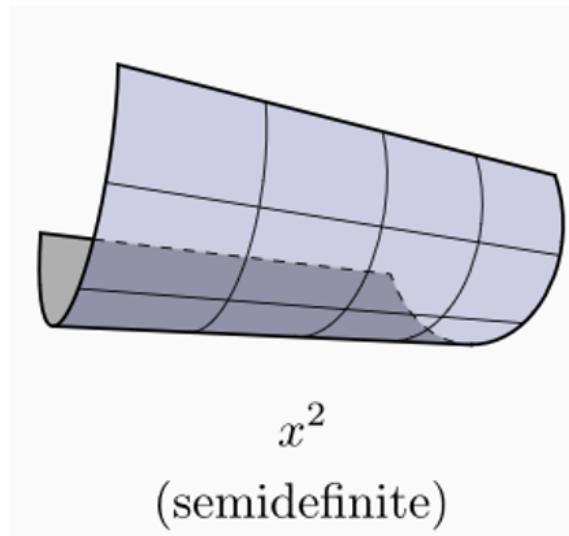
Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont réels et positifs.

Cette propriété est une condition nécessaire et suffisante.

4.12 Matrices semi-définies positives

On écrit $M \geq 0$ si $x^T M x \geq 0, \forall x \neq 0$

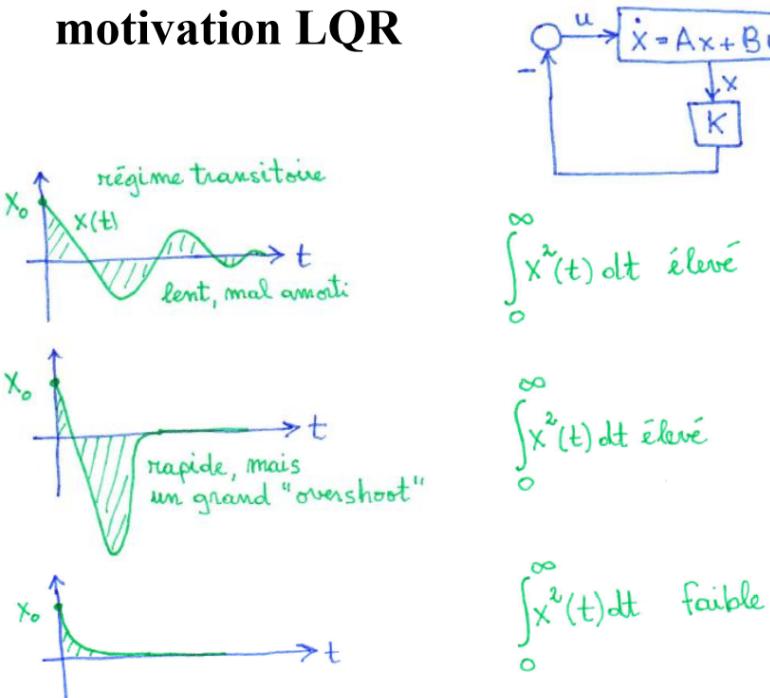
La forme quadratique donne une surface courbée vers le haut presque partout, mais il y a des directions dans lesquelles la courbure est nulle !



4.13 Catégories de matrices

- Semi-définie positive : Forme quadratique $x^T M x \geq 0$, courbure positive
- Définie positive : Forme quadratique positive pour chaque x , courbure positive
- Semi-définie négative : Forme quadratique $x^T M x \leq 0$, courbure négative
- Définie négative : Courbure négative partout
- Indéfinie (point de selle) : Forme de selle, courbe positive et négative

4.14 Motivation LQR (*Linear Quadratic Regulator*)



La quantité $\int_0^\infty x^2(t) dt$ traduit les défauts du régime transitoire.

4.15 Qualité du régime transitoire en boucle fermée

$\int_0^\infty x'(t) Q x(t) dt$ traduit les défauts du régime transitoire

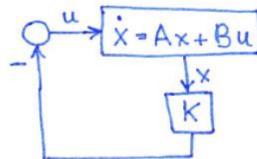
D'autant plus faible, d'autant mieux, à première vue ...

La matrice $Q = Q' \geq 0$ permet de pondérer l'allure du régime transitoire des différentes variables d'état.

Une boucle fermée instable se traduit par $\int_0^\infty x'(t) Q x(t) dt \rightarrow \infty$!

4.16 Le prix à payer ...

le prix à payer ...



Le retour d'état permet d'améliorer de manière significative le régime transitoire de la boucle fermée, et de diminuer $\int_0^\infty x'(t) Q x(t) dt$

Un régulateur "agressif" permet d'atteindre une valeur **arbitrairement faible** de $\int_0^\infty x'(t) Q x(t) dt$!!!

Mais au prix d'une énergie nécessaire $\int_0^\infty u^2(t) dt$ **énorme** pour le signal de commande u(t) !

Pour un système multi-entrées, l'énergie des signaux de commande devient

$$\int_0^\infty \mathbf{u}'(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt$$

slide 19

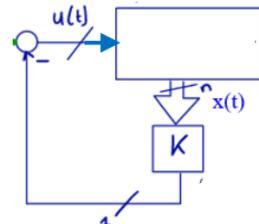
4.17 LQR (*Linear Quadratic Regulator*)

LQR (Linear Quadratic Regulator)

$\dot{x} = Ax + Bu$ modèle du système à régler donné

$u = -Kx$. retour d'état à déterminer

processus physique



choix de la fonction coût à minimiser (indice de performance)

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

J dépend du gain K et de la condition initiale x_0

où Q et R sont des matrices de pondération que l'utilisateur choisit

$Q \geq 0$ pondère le régime transitoire (rapidité)

$R > 0$ pondère l'énergie nécessaire du signal de contrôle u

Le choix de Q et R donne le compromis visé !

4.18 Solution LQR analogique - équation de Riccati

Rappel :

- Q : Pondère le régime transitoire (**rapidité**)
- R : Pondère l'énergie nécessaire du signal de contrôle u (**Consommation**)

Il faut donc faire un compromis entre Q et R .

On peut démontrer que la solution optimale pour K est donnée par :

$$K = R^{-1}B^TP$$

où P est l'unique matrice symétrique définie positive n x n qui remplit l'équation de Riccati algébrique (ARE) suivante :

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP = -Q.$$

L'équation de Riccati est une équation matricielle avec un terme carré. Il y a plusieurs solutions P, mais qu'une seule avec $P > 0$

commandes Matlab :

- lqr : analogique
- dlqr : numérique

slide 21

4.19 Propriétés de la régulation LQR

1. Si le système [A, B] est commandable, l'équation de Riccati a une solution unique $P > 0$, et donc un gain unique K pour le retour d'état.
2. Ce gain K stabilise la boucle fermée.
3. La fonction coût J dépend de la condition initiale x_0 , mais le gain K est indépendant de la condition initiale.
On peut montrer que $J_{\text{opt}} = x_0^t P x_0$.
4. On va montrer que le régulateur LQR est particulièrement robuste, (marge de phase > 60°, inégalité de Kalman).

4.20 Un choix pour la matrice de pondération Q

Au lieu de pénaliser le régime transitoire du vecteur d'état $x(t)$, on peut aussi pénaliser un signal de sortie mesuré $y(t)$.

$$J = \int_0^\infty (y^t y + u^t R u) dt$$

avec $y = C x$

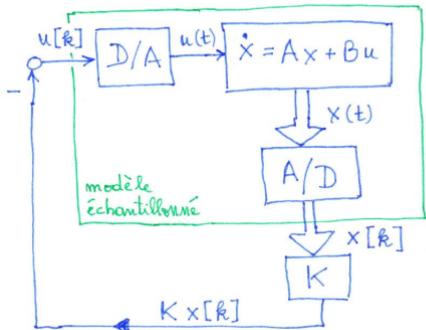
$$y^t y = x^t C^t C x = x^t Q x$$

donc $Q = C^t C \geq 0$!

4.21 Cheap control - expensive control

- Le cas extrême : $R = 0$ est appelé « cheap control »
→ Le gain du retour d'état va tendre vers infini !
- L'autre cas extrême : $Q = 0$ est appelé « expensive control »
→ Il montre une propriété remarquable, voir exercice 10 du polycopié anglais « state regulator », énoncé page 54.

4.22 DLQR (*Discrete Linear Quadratic Regulator*)



modèle échantillonné :

$$x[k+1] = A_n x[k] + B_n u[k]$$

$$x[0] = x_0$$

Fonction coût à minimiser (indice de performance) :

$$J(K, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} x'[k]^t Q x[k] + u'[k]^t R u[k]$$

où $Q \geq 0$ et $R > 0$ sont des matrices de pondération que l'utilisateur choisit

4.23 Solution LQR discret - équation de Riccati

On peut démontrer que la solution optimale pour \mathbf{K} est donnée par :

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}$$

où \mathbf{P} est l'unique matrice symmétrique définie positive n x n qui remplit l'équation de Riccati algébrique discrète (DARE) suivante :

$$\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} - \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}(\mathbf{R} + \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} = 0$$

L'équation de Riccati a plusieurs solutions P, mais qu'une seule avec $P > 0$, et cette solution donne lieu à un retour d'état K qui stabilise la boucle fermée.

4.24 Remarques

1. La fonction coût optimale J_{opt} dépend de la condition initiale \mathbf{x}_0 .
C'est une forme quadratique dans laquelle apparaît la solution P de l'équation de Riccati algébrique : $J_{\text{opt}} = \mathbf{x}_0^t \mathbf{P} \mathbf{x}_0$
2. Le gain optimal \mathbf{K}_{opt} ne dépend pas de \mathbf{x}_0 !
3. La synthèse du régulateur LQR est déterminée de manière "offline".
Le gain K obtenu est constant.
(A ne pas confondre avec MPC (model predictive control), où le régulateur correspond à un algorithme qui optimise en temps réel !)

4.24.1 Exercice 10, p. 54 polycopié anglais

Exercise 10. Optimal control II

Given is a scalar system

$$\dot{x} = ax + bu$$

with a simplified algebraic Riccati equation: $2ap - \frac{1}{r}b^2p^2 + q = 0$.

- Find a controller $u = -kx$ by minimizing the performance index J

$$J = \int_0^\infty (qx^2 + ru^2)dt, \quad q > 0, \quad r > 0.$$

Capture rectangulaire

- Find a controller $u = -kx$ which stabilizes the system using minimal control energy ($q = 0$).

- Solving the Riccati equation

$$\left(-\frac{1}{r}b^2\right)p^2 + 2ap + q = 0$$

results in the two solutions

$$p = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4\frac{1}{r}b^2q}}{-2\frac{1}{r}b^2} = \frac{r}{b^2} \left(a \mp \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{r}} \right).$$

We are only interested in the positive solution. Because $q \geq 0$ and $r > 0$

$$b^2\frac{q}{r} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{r}}.$$

The positive solution is

$$p = \frac{r}{b^2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{r}} \right).$$

The optimal feedback gain k according to equation (10) is

$$k = r^{-1}bp = \frac{1}{b} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q}{r}} \right).$$

2. If $q \rightarrow 0$, the Riccati equation becomes

$$-\frac{1}{r}b^2 p^2 + 2ap = \left(-\frac{1}{r}b^2 p + 2a \right) p = 0$$

with the two solutions

$$p_1 = \frac{2ar}{b^2}, \quad p_2 = 0.$$

It follows that the solution p of the Riccati equation is

$$p = \begin{cases} 0 & \text{if } a \leq 0 \\ \frac{2ar}{b^2} & \text{if } a > 0 \end{cases}.$$

The feedback gain $k = r^{-1}bp$ is then

$$k = \begin{cases} 0 & \text{if } a \leq 0 \\ \frac{2a}{b} & \text{if } a > 0 \end{cases}.$$

The interpretation of this result is: if the system is stable ($a \leq 0$), then we need no control input to stabilize the system (the system operates in open loop). For an unstable system, the feedback k moves the unstable pole $a > 0$ to

$$a - bk = a - b \frac{2a}{b} = -a.$$

5 S5

5.1 Contenue

1. Rappel cours 4, exercices série 4
2. Rappel : critère de Nyquist simplifié, marges de gain et de phase
3. Critère de Nyquist généralisé
4. Robustesse LQR, l'inégalité de Kalman
5. Régulation de correspondance avec LQR, incorporation action I
6. Introduction observateurs

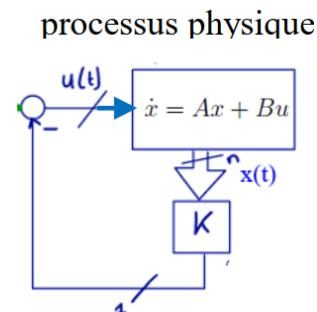
5.2 Rappel

5.2.1 LQR (Linear Quadratic Regulator)

LQR (Linear Quadratic Regulator)

$\dot{x} = Ax + Bu$ modèle du système à régler donné

$u = -Kx$. retour d'état à déterminer



choix de la fonction coût à minimiser (indice de performance)

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

où $Q \geq 0$ et $R > 0$ sont des matrices de pondération que l'utilisateur choisit

$Q \geq 0$: Semi-défini positif
 $R > 0$: défini positif

5.2.2 Solution LQR analogique / équation de Riccati

On peut démontrer que la solution K est donnée par :

$$K = R^{-1}B^TP$$

où P est l'unique matrice symétrique définie positive $n \times n$ qui remplit l'équation de Riccati algébrique (ARE) suivante :

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP = -Q.$$

L'équation de Riccati algébrique est une équation matricielle avec un terme carré. Il y a plusieurs solutions P , mais qu'une seule avec $P > 0$

commandes Matlab :

lqr : analogique
dlqr : numérique

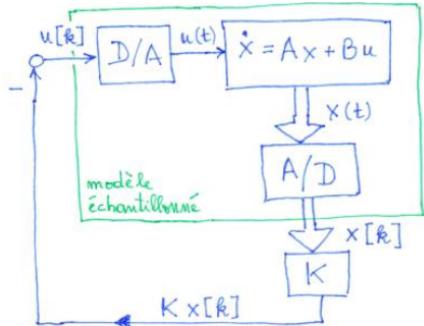
5.2.3 Cheap control / Expensive control

On souhaite régler un système avec une minimum d'énergie.

Il y a deux cas de figure :

1. Le cas extrême $R = 0$ est appelé « *cheap control* » Le gain du retour d'état va tendre vers **infini** !
2. L'autre cas extrême $Q = 0$ est appelé « *underlineexpensive control* » Les pôles déjà stables en boucle ouverte restent inchangés en b.f. Un pôle instable en b.o. miroite autour de l'axe imaginaire.

5.2.4 DLQR (Discrete Linear Quadratic Regulator)



modèle échantillonné :

$$x[k+1] = A_n x[k] + B_n u[k]$$

$$x[0] = x_0$$

fonction coût à minimiser (indice de performance)

$$J(K, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} x'[k] Q x[k] + u'[k] R u[k]$$

où $Q \geq 0$ et $R > 0$ sont des matrices de pondération que l'utilisateur choisit

5.2.5 Solution LQR discret / Équation de Riccati

On peut démontrer que la solution optimale pour K est donnée par :

$$K = (R + B' P B)^{-1} B' P A$$

où P est l'unique matrice symétrique définie positive $n \times n$ qui remplit l'équation de Riccati algébrique discrète (DARE) suivante :

$$A' P A - P - A' P B (R + B' P B)^{-1} B' P A + Q = 0$$

L'équation de Riccati a plusieurs solutions P , mais qu'une seule avec $P > 0$, et cette solution donne lieu à un retour d'état K qui stabilise la boucle fermée.

5.3 Nomenclature anglo-saxonne

$P(s)$: plant = système à régler = $G_a(s)$

$C(s)$: controller = régulateur = $G_c(s)$

$L(s)$: open loop = boucle ouverte = $G_o(s)$

$r(t)$: reference signal = consigne = $w(t)$

$T(s)$: closed loop (complementary sensitivity function) = $G_{yw}(s)$

$P(s)$: plant = système à régler = $G_a(s)$

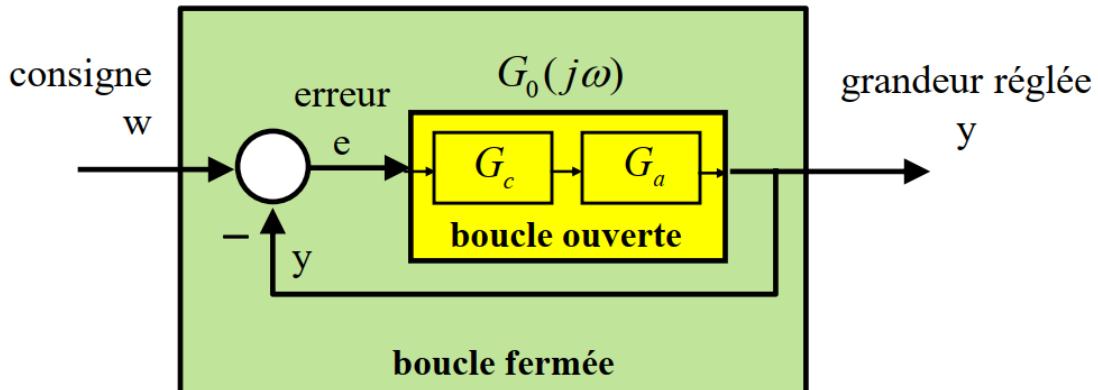
$C(s)$: controller = régulateur = $G_c(s)$

$L(s)$: open loop = boucle ouverte = $G_o(s)$

$r(t)$: reference signal = consigne = $w(t)$

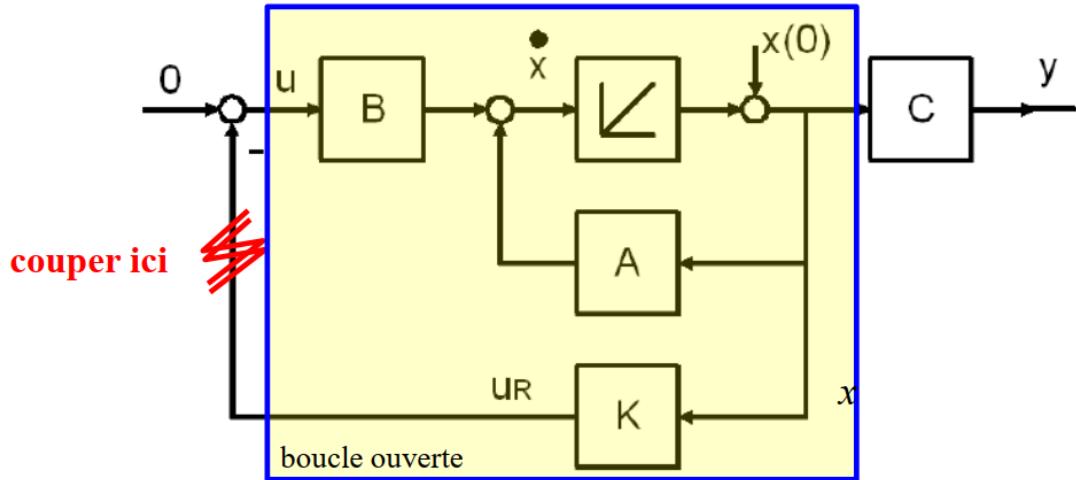
$T(s)$: closed loop = boucle fermée = $G_{yw}(s)$

5.4 Rappel : boucle ouverte et boucle fermée



$$G_{yw}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

5.4.1 Boucle ouverte pour le retour d'état



$$L(s) = K(sI - A)^{-1}B$$

5.5 Critère de Nyquist simplifié

à quoi sert le critère de Nyquist ?

- 1) condition de **stabilité en boucle fermée** basée sur un **critère en boucle ouverte** !
- 2) outil important pour **l'analyse** des systèmes réglés
 - ➔ marge de gain A_m , marge de phase φ_m
- 3) outil important pour la **synthèse** des systèmes réglés
 - ➔ choix de K_p pour obtenir une marge de phase souhaitée

5.5.1 Réflexions intuitives pour motiver le critère de Nyquist

boucle ouverte : $G_0(s) = G_c(s) \cdot G_a(s)$

boucle fermée :

$$G_{yw}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

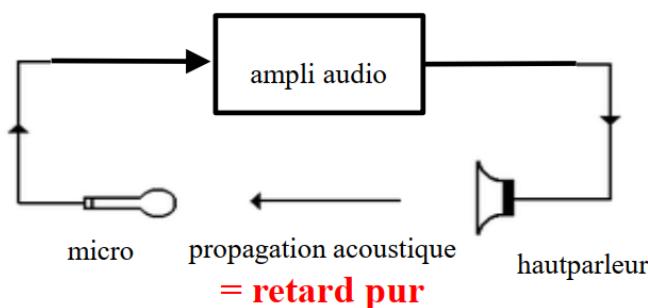
- 1) Qu'est-ce qui se passe si $G_o(j\omega)$ devient -1 pour une pulsation $\omega = \omega_{cr}$? Division par zéro !
- 2) Comment peut-on examiner si la **boucle fermée est stable** depuis le diagramme de Bode **de la boucle ouverte** ?

5.5.2 Effet Larsen : feedback acoustique provoquant un sifflement

Par expérience, la fréquence du sifflement (effet Larsen) dépend de la distance qui sépare le hautparleur du micro, donc du retard pur créé par la propagation acoustique $v_{son} \approx 340$ [m/s].

Quelle est la fréquence du sifflement ?

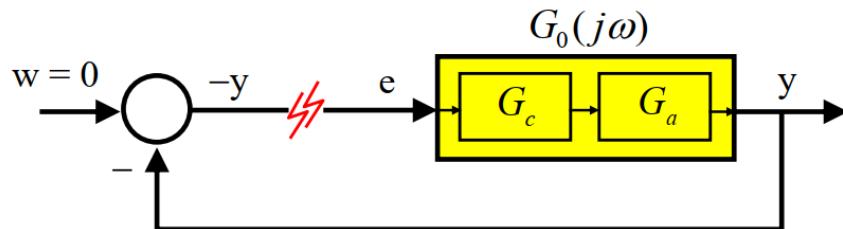
Quelle est la condition pour qu'un signal revient inchangé ?



5.5.3 Réflexions intuitives

« expérience de pensée »

couper la boucle, injecter un sinus à l'entrée du régulateur,
observer le retour $-y$



Admettons qu'il y ait une pulsation ω_{cr} pour laquelle $G_0(j \omega_{cr})$ soit -1 .

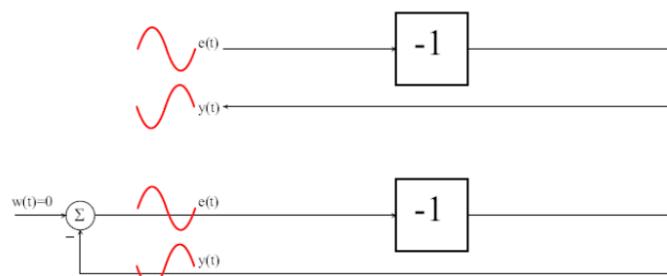
- boucle ouverte $G_0(j \omega_{cr}) = -1 \rightarrow$ boucle fermée $G_{yw}(j \omega_{cr}) = \infty$
- $j \omega_{cr}$ est un pôle en boucle fermée situé sur l'axe imaginaire
- boucle fermée est **marginalement stable**

5.5.4 Explication mathématique

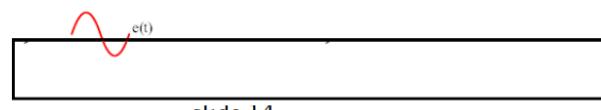
$$\boxed{G_{yw}(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}} \quad (62)$$

$$\boxed{G_o s = -1 \Rightarrow G_{yw}(s) = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0} \rightarrow \infty}$$

5.5.5 Boucle fermée marginalement stable → un sinus peut persister dans la boucle !

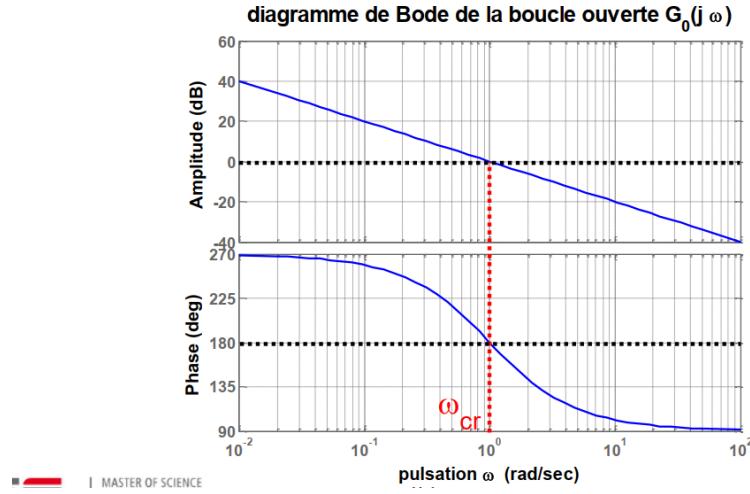


oscillation non amortie en boucle fermée !



5.5.6 Boucle fermée marginalement stable

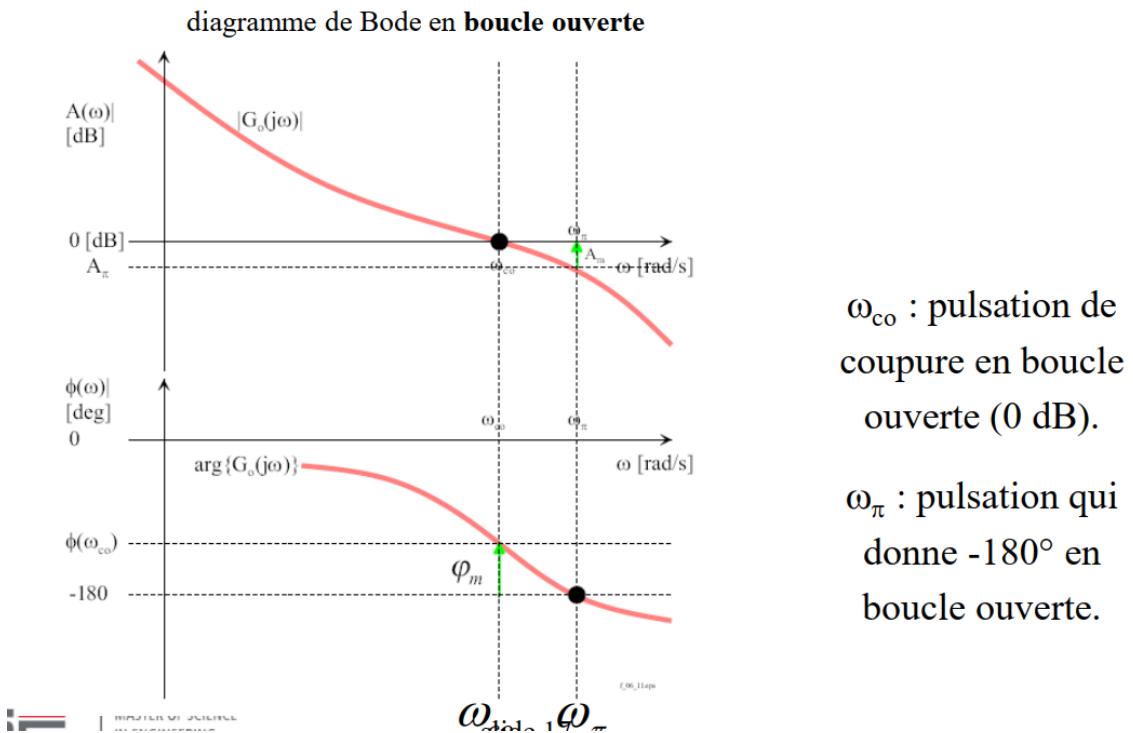
lorsque $G_o(j\omega_{cr}) = -1$ pour une pulsation quelconque ω_{cr}
 „le point critique“



5.5.7 Réflexions intuitives

Pour avoir un amortissement en boucle fermée (stabilité), il faut que le signal contre-réactionné y soit **plus petit** que le signal injecté dans la boucle.

5.5.8 Définition : marge de gain et de phase



5.5.9 Critère de Nyquist simplifié

ϕ_m doit être positive en dB et A_m doit être positif en dB.

5.5.10 Lieu de Nyquist - Alternative au diagramme de Bode

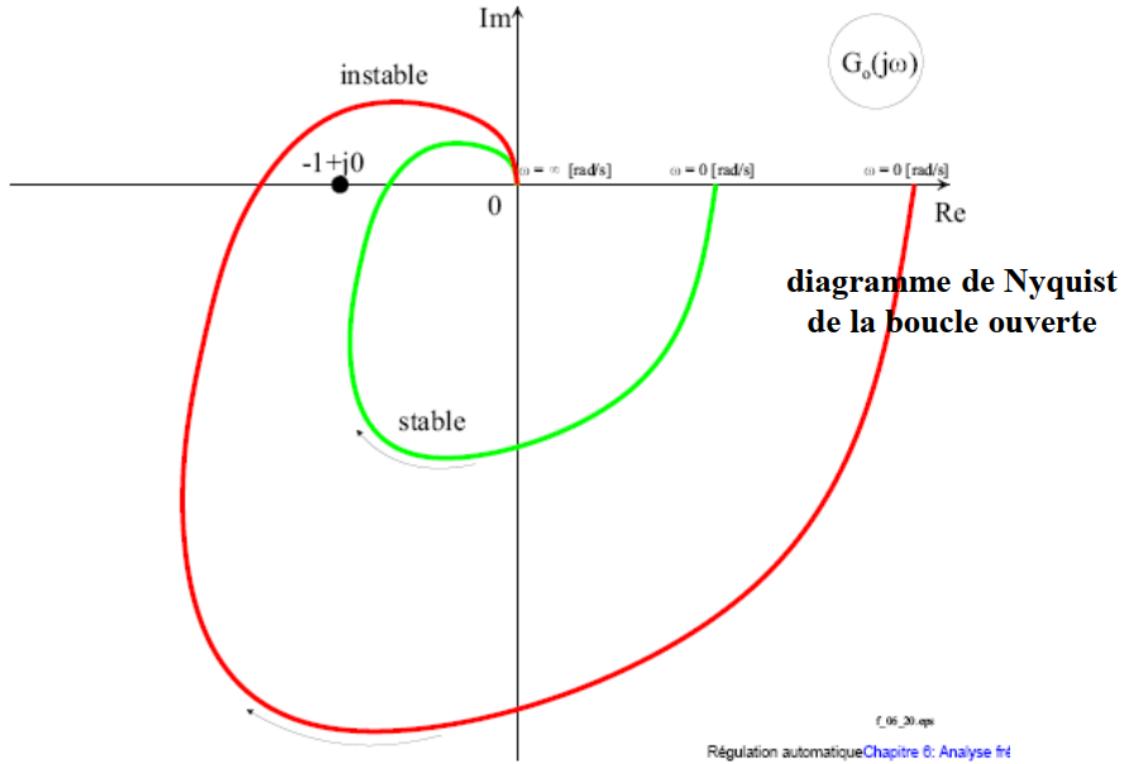
Au lieu des 2 plots séparés du diagramme de Bode (amplitude et phase), ayant comme abscisse la pulsation, le **lieu de Nyquist** est **un seul plot**.

Le lieu de Nyquist est la courbe paramétrique de $G_o(j\omega)$ dans le plan complexe.

Pour chaque valeur de la pulsation ω cela donne un point $G_o(j\omega)$ dans le plan complexe.

En parcourant ω de zéro à ∞ la valeur de $G_o(j\omega)$ varie, et cela donne une courbe paramétrique orientée, appelée de le "lieu de Nyquist".

5.5.11 Critère de Nyquist simplifié

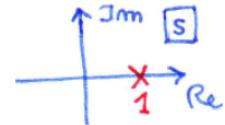


La boucle fermée est stable si **le lieu de Nyquist n'encercle pas le point critique**. Donc si **le point critique est à gauche du lieu de Nyquist**. Que valable si la boucle ouverte est stable !

5.5.12 Motivation pour le critère de Nyquist généralisé

$$G_o(s) = \frac{k}{s-1}$$

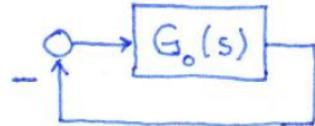
boucle ouverte instable



Calculons le pôle en boucle fermée pour déterminer la stabilité en b.f. :

MASON : $1 + G_o(s) = 0$

$$1 + \frac{k}{s-1} = 0 \quad | \cdot (s-1)$$



$$s - 1 + k = 0$$

$$s = 1 - k =: P_{bf}$$

$$\text{b.f. stable} \Leftrightarrow P_{bf} < 0 \Leftrightarrow k > 1$$

Dans cette exemple s : est le pôle en boucle fermé du système.

5.5.13 Lieu de Nyquist complet de $\frac{k}{s-1}$

$$G_o(j\omega) = \frac{k}{j\omega - 1}, \quad -\infty < \omega < \infty$$

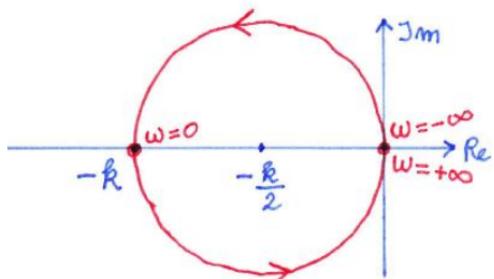
points particuliers :

$$G_o(0) = -k$$

$$G_o(\infty) = 0$$

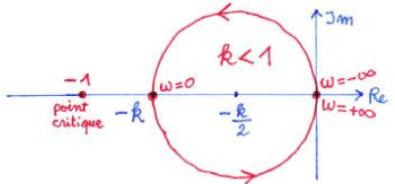
Le lieu de Nyquist complet donne un cercle avec rayon $k/2$ et centre $-k/2$ (axe réel négatif)

$$\begin{aligned} \text{dist}\left(-\frac{k}{2}, G_o(j\omega)\right) &= \left| -\frac{k}{2} - G_o(j\omega) \right| \\ &= \left| \frac{-\frac{k}{2}(j\omega - 1) - k}{j\omega - 1} \right| = \frac{\frac{k}{2}\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2}} \stackrel{!}{=} \frac{k}{2} \end{aligned}$$



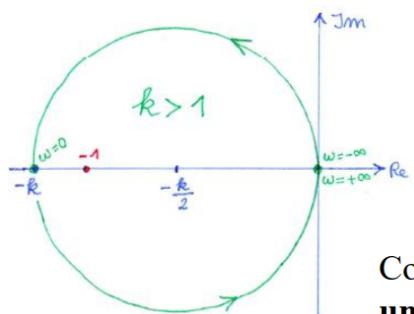
Ici, le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique si ω est croissant.

On cherche à trouver la valeur de K qui permet que le lieu de Nyquist encercle le point critique :



Si $k < 1$, le point critique **-1** n'est **pas** encerclé

Le calcul du pôle en b.f. a montré que la b.f. est instable dans le cas $k < 1$!



Si $k > 1$, le point critique **-1** est encerclé **une seul fois** (sens trigonométrique).

Le calcul du pôle en b.f. a montré que la b.f. est stable dans le cas $k > 1$!

Conclusion : pour une boucle ouverte possédant **un seul** pôle instable, la b.f. est stable si le lieu de Nyquist encercle le point critique **-1 une seule fois** dans le sens trigonométrique.

Attention : Cette conclusion n'est valable que pour cette exemple particulier.

5.6 Critère de Nyquist

5.6.1 Critère de Nyquist simplifié (critère du revers) :

- Valable stables ou instables en b.o.
- Critère basé sur le nombre d'encerclements de $G_o(j\omega)$ autour du point critique -1 pour les systèmes stables ou instables en b.o.
- Critère basé sur le nombre d'encerclements de $G_o(j\omega)$ autour du point critique -1

5.6.2 Critère de Nyquist généralisé :

- valable pour tous les systèmes **stables ou instables en b.o.**
- Critère basé sur le nombre d'encerclements de $G_o(j\omega)$ autour du point critique -1 .

La boucle fermée est stable si et seulement si le nombre d'encerclements du point critique dans le sens trigonométrique correspond au nombre de pôles instables en boucle ouverte.

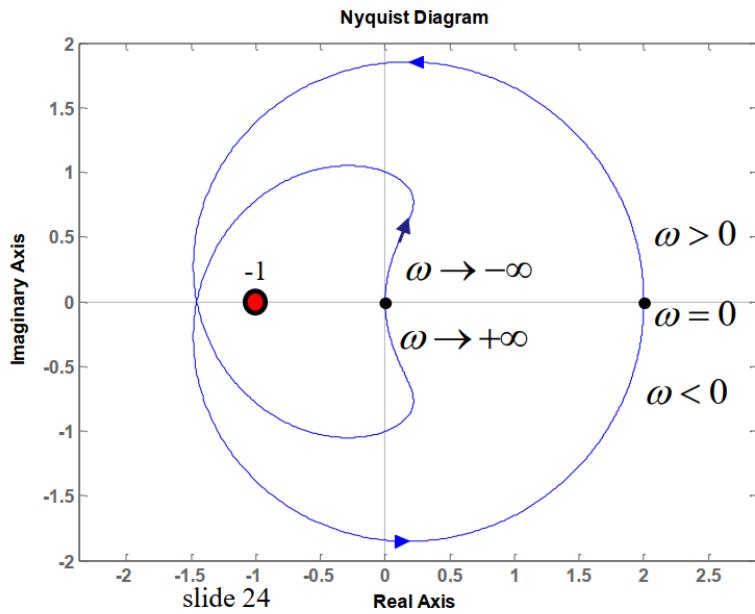
5.7 critère de Nyquist généralisé

La boucle **fermée** est stable, si et seulement si le nombre **d'encerclements** du lieu de Nyquist complet de la **boucle ouverte** $L(j\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$ autour du point critique $s = -1$ correspond **exactement** aux nombre de pôles **instables** N_p en boucle ouverte. Les encerclements sont comptés dans le sens trigonométrique.

exemple : boucle ouverte

$$L(s) = \frac{10(s+1)(s+2)}{(s+10)(s-1)^2}$$

$N_p = 2$
pôles instables en b.o.
= nombre d'encerclements
 \Rightarrow b.f. stable



5.7.1 Vérification des pôles en boucle fermée

$$L(s) = \frac{10(s+1)(s+2)}{(s+10)(s-1)^2} \quad \text{boucle ouverte}$$

```
>> L = zpk([-1, -2], [-10, 1, 1], 10)
```

```
Zero/pole/gain:  
10 (s+1) (s+2)  
-----  
(s+10) (s-1)^2
```

```
>> L = zpk([-1, -2], [-10, 1, 1], 10)
```

```
Zero/pole/gain:  
10 (s+1) (s+2)  
-----  
(s+10) (s-1)^2
```

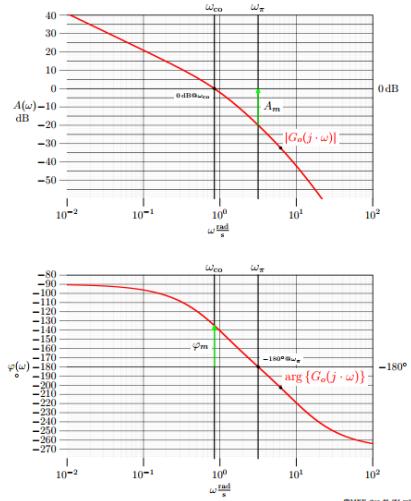
en boucle fermée !

```
___ >> pole(feedback(L, 1))
```

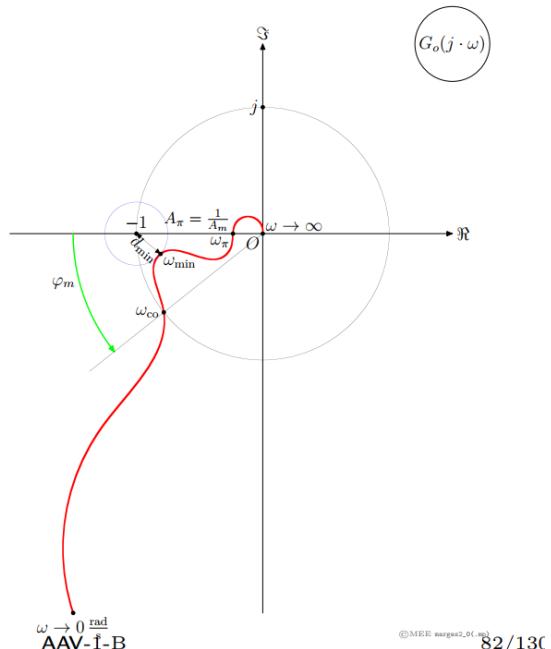
5.7.2 Rappel cours AAV

Lieu de Nyquist

- Lieu de Nyquist, marges de phase et de gain, distance minimale



©Michel ETIQUE, 2019-2020



Lieu de Nyquist

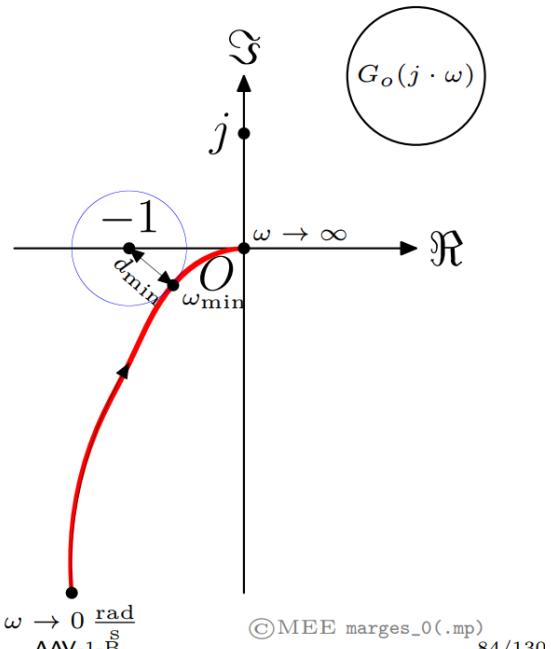
- Fonction de sensibilité

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dG_{yw}}{G_{yw}}}{\frac{dG_a}{G_a}} &= S(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} \\ &= G_{ew}(s) = \frac{E(s)}{W(s)} \end{aligned}$$

- Reporté Distance minimum entre le lieu de Nyquist de $G_o(j \cdot \omega)$ et le point critique $-1 + j \cdot 0$:

$$d_{\min} = \frac{1}{\max \{|S(j \cdot \omega)|\}} = \|S\|_{\infty}^{-1}$$

$$d_{\min}|_{\text{dB}} = -\|S\|_{\infty}|_{\text{dB}}$$

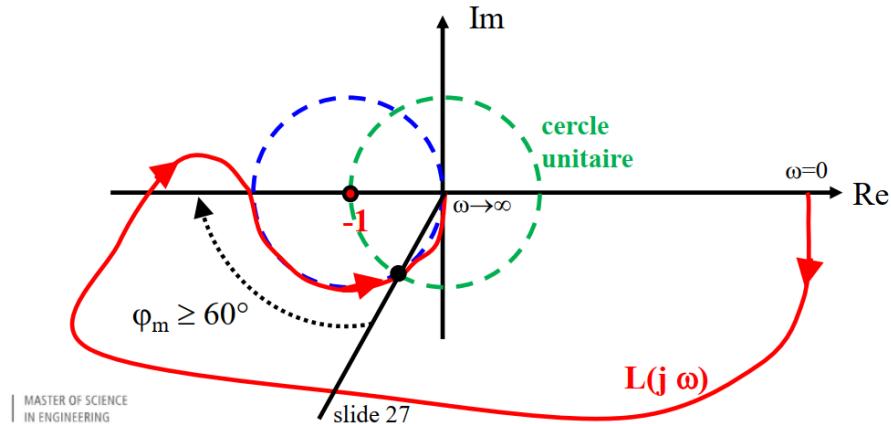


©Michel ETIQUE, 2019-2020

5.8 Régulateur LQR

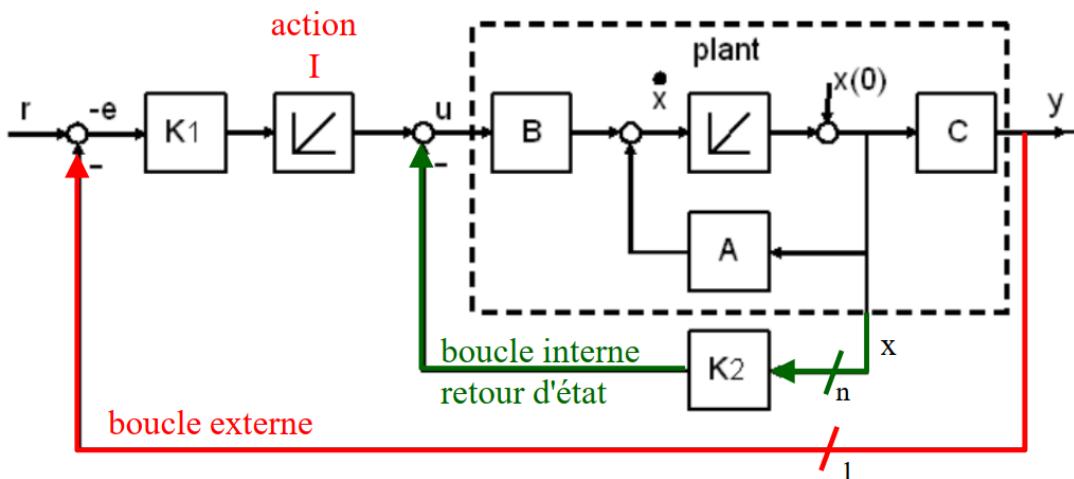
5.8.1 Robustesse du régulateur LQR (retour d'état)

Inégalité de Kalman : $|1 + L(j\omega)| \geq 1$ pour chaque pulsation $\omega \Leftrightarrow$ distance entre le lieu de Nyquist $L(j\omega)$ et le point critique $|1 + L(j\omega)| \geq 1 \Leftrightarrow$ marge de phase $\phi_m \geq 60^\circ$ et marge de gain $0.5 \leq Am < \infty$.



5.8.2 Régulation en correspondance LQR avec action intégrale

régulation en cascade



1. Faire d'abord la synthèse LQR de K_2 (vecteur ligne), puis après celle de K_1 (scalaire).
La boucle extérieure devrait être plus lente que la boucle intérieure.
Inconvénient : la synthèse de K_1 peut compromettre la synthèse LQR de K_2
2. Mieux : Faire une seule synthèse simultanée pour K_1 et K_2 !
Idée principale : l'action intégrale rajoute une variable d'état, ce qui agrandit la taille de A et de B

$$2 = y - r \text{ Attention au } \underline{\text{signe}} !$$

Sa dérivée temporelle donne :

$$\dot{e} = \dot{y} - \overbrace{\dot{r}^0}^{\hat{r}^0} = y = \dot{C}\dot{x}$$

Définir deux variables intermédiaires, z et w , comme :

$$z = \dot{x} \text{ et } w = \dot{u}$$

un nouveau système en résulte :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{e}} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \hat{A} \\ 0 & C \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} \hat{e} \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \hat{w}$$

If the system (\hat{A}, \hat{B}) is controllable, then some feedback gain \hat{K} which stabilizes (8) can be designed e.g. by pole placement or using the LQR method

$$\hat{u} = -\hat{K}\hat{x}.$$

$$\hat{u} = w = -\hat{K} \cdot \hat{x} = -[K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} = -K_1 e - K_2 z$$

and by integration the final control law

$$u(t) = -K_1 \int_0^t e(\tau) d\tau - K_2 x(t)$$

5.9 Observateur

5.9.1 Motivation observateur

1. Le retour d'état nécessite la mesure de **toutes** les variables d'état
 - a) cher et compliqué, car beaucoup de capteurs nécessaires
 - b) peut poser des problèmes de fiabilité dû au nombre de capteurs
 - c) parfois pas faisable s'il y a des variables d'état qui sont difficiles à mesurer

→ **idée 1 : estimer les variables d'état manquantes, puis utiliser ces signaux estimés pour le retour d'état**

→ **idée 2 : cet observateur/estimateur nécessite la connaissance d'un modèle du processus physique et intègre ce modèle**

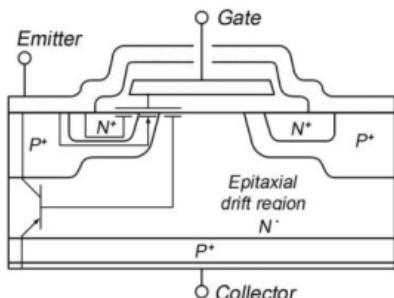
2. Il y a des applications où on dispose de plusieurs mesures **bruitées**, p.ex. IMU (Inertial Measurement Unit) avec accéléromètres 3 axes, gyroscope 3 axes, magnétomètres 3 axes, signaux GPS, etc.

→ **idée 3 : un observateur permet de "consolider" toutes ces informations imparfaites, et de fournir une information consolidée plus précise et moins bruitée "sensor fusion".**

Il y a donc une vision **déterministe** d'un observateur, et une vision **stochastique**. Dans le contexte stochastique, l'observateur est appelé aussi "**filtre de Kalman**".

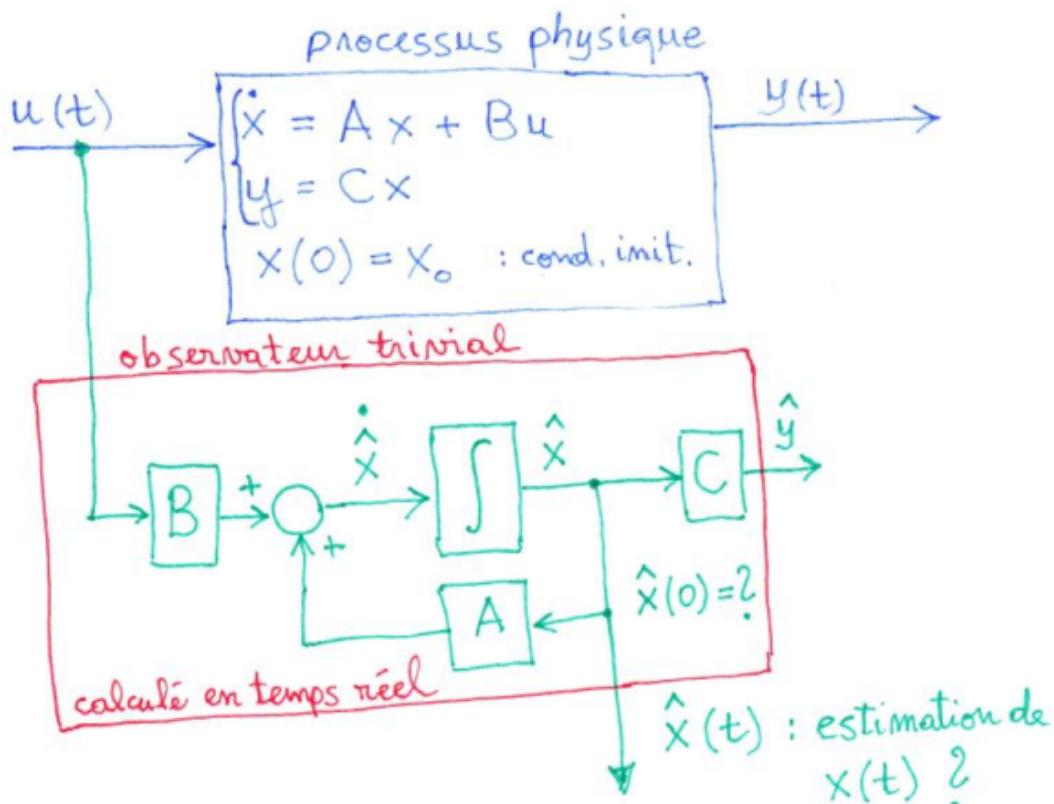
5.9.2 Observateur pour monitorer des signaux difficilement mesurables

Exemple : température directement sur la puce d'un transistor de puissance.



On connaît le courant instantané $i(t)$, et on peut mesurer la température à l'extérieur du boîtier. Avec l'aide d'un **modèle thermique** (modèle dynamique) on peut estimer la température instantanée sur la puce.

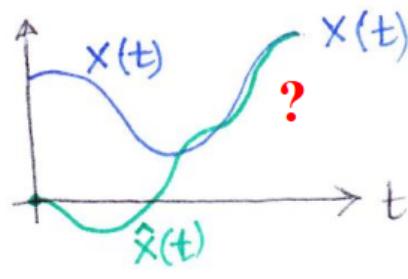
5.9.3 Idée naïve : observateur "trivial"



5.9.4 Dynamique de l'erreur de l'observateur trivial

dynamique de l'erreur $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) \\ \Rightarrow \dot{x}_e &= A x_e \end{aligned}$$



- La dynamique de l'erreur est indépendante du signal de commande $u(t)$.
- $x_e(t) = e^{At}x_{e,0}$: sous quelle condition l'observateur trivial converge ?
- Converge que si le processus est stable, i.e. si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative

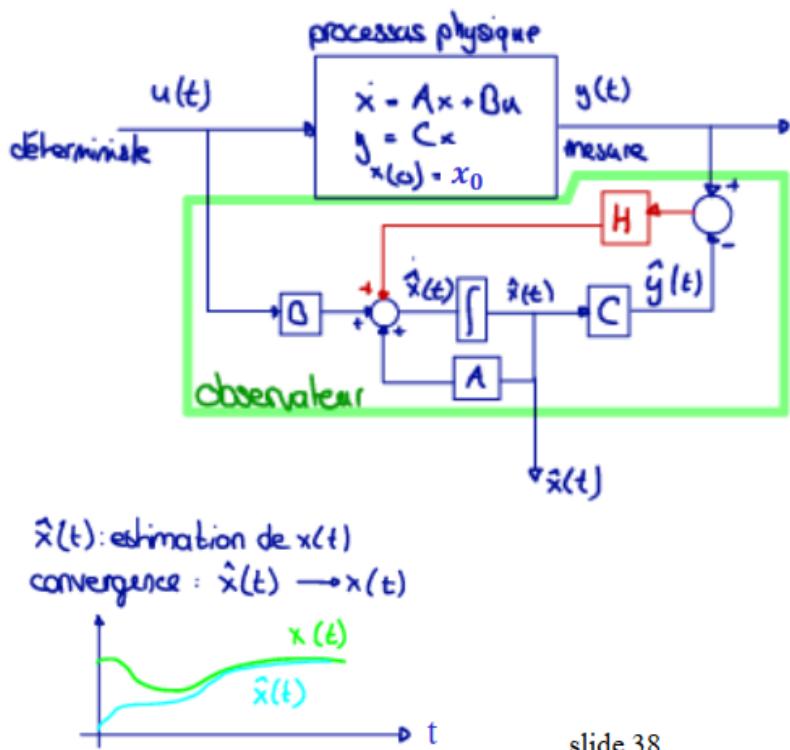
5.9.5 Points faibles de l'observateur trivial

- le signal de sortie mesuré $y(t)$ du processus n'est pas utilisé !
 - on est complètement tributaire de la dynamique du processus, aucun moyen d'influencer le régime transitoire de l'observateur.
- ==> Pour ces raisons l'observateur trivial n'est jamais utilisé !**

Faire appel aux deux grands principes de la régulation :

- 1. Comparer ce que l'on a avec ce que l'on veut !**
- 2. Utiliser un feedback de l'erreur, c-à-d un reboulement pour corriger le tir !**

5.9.6 Structure de l'observateur complet



$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

5.9.7 Dynamique de l'erreur de l'observateur complet

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad : \text{processus} \quad (1)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y}) \quad : \text{observateur}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + HC(x - \hat{x}) \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) - HC(x - \hat{x})$$

$$x_e := x - \hat{x}$$

$$\dot{x}_e = (A - HC)x_e$$

$$\dot{x}_e = (A - HC)x_e \quad \text{avec} \quad x_e = x - \hat{x}$$

- Pour le choix $H = 0$ on retombe sur l'observateur trivial !
- L'observateur converge si la matrice $A - HC$ est stable, c-à-d si les valeurs propres de $A_{\text{obs}} := A - HC$ ont toutes une partie réelle négative.
- Le gain H de l'observateur est à déterminer : "synthèse de l'observateur". Le choix de H va déterminer la dynamique de l'observateur.
- **Le placement de pôles est une possibilité pour la synthèse de l'observateur.**

5.9.8 Rappel cours AAV - Design d'un régulateur robuste par loopshaping manuel

Design d'un régulateur robuste par loopshaping manuel

Si l'on satisfait la condition de performance robuste

$$\|W_2 \cdot G_{yw} + W_1 \cdot S\|_\infty < 1$$

alors

- lorsque $|W_1| \gg 1 > |W_2|$:

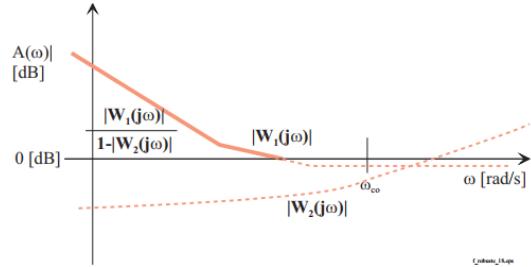
$$|G_o| > \frac{|W_1|}{1 - |W_2|}$$

- lorsque $|W_1| < 1 \ll |W_2|$:

$$|G_o| < \frac{1 - |W_1|}{|W_2|}$$

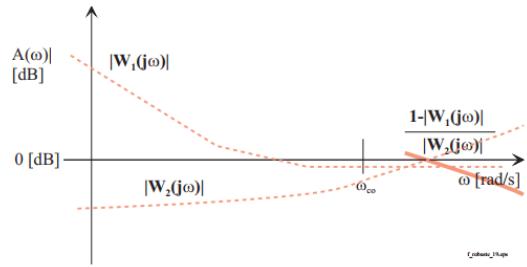
Procédure :

- 1) Tracer $\frac{|W_1|}{1 - |W_2|}$ dans la gamme de pulsations où $|W_1| > 1 > |W_2|$



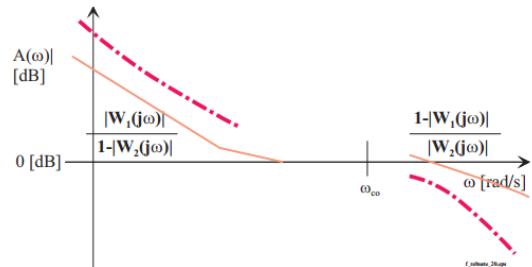
Procédure :

- 2) Tracer $\frac{1-|W_1|}{|W_2|}$ dans la gamme de pulsations où $|W_1| < 1 < |W_2|$



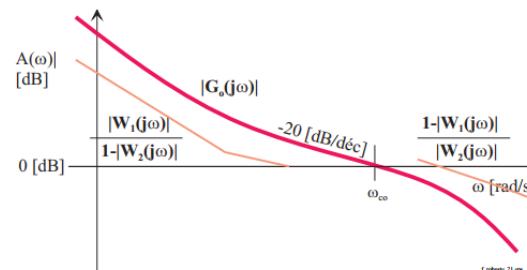
Procédure :

- 3) Tracer ce qui va être le gain $|G_o|$, de sorte que
- ▶ $|G_o| > \frac{|W_1|}{1-|W_2|}$ à basse fréquence et
 - ▶ $|G_o| < \frac{1-|W_1|}{|W_2|}$ à haute fréquence



Procédure :

- 4) Joindre les 2 tronçons par une courbe douce ($-20 \frac{\text{dB}}{\text{décade}}$ lorsque $|G_o| \approx 1$)



- 5) Partant de $G_o(s)$ et connaissant $G_a(s)$, une 1^{ère} solution pour le régulateur est :

$$G_c(s) = \frac{G_o(s)}{G_a(s)}$$

Il faut encore vérifier que

$$\| |W_2 \cdot G_{yw}| + |W_1 \cdot S| \|_\infty < 1$$

6 S6 - Programme Advanced Control

6.1 Contenue

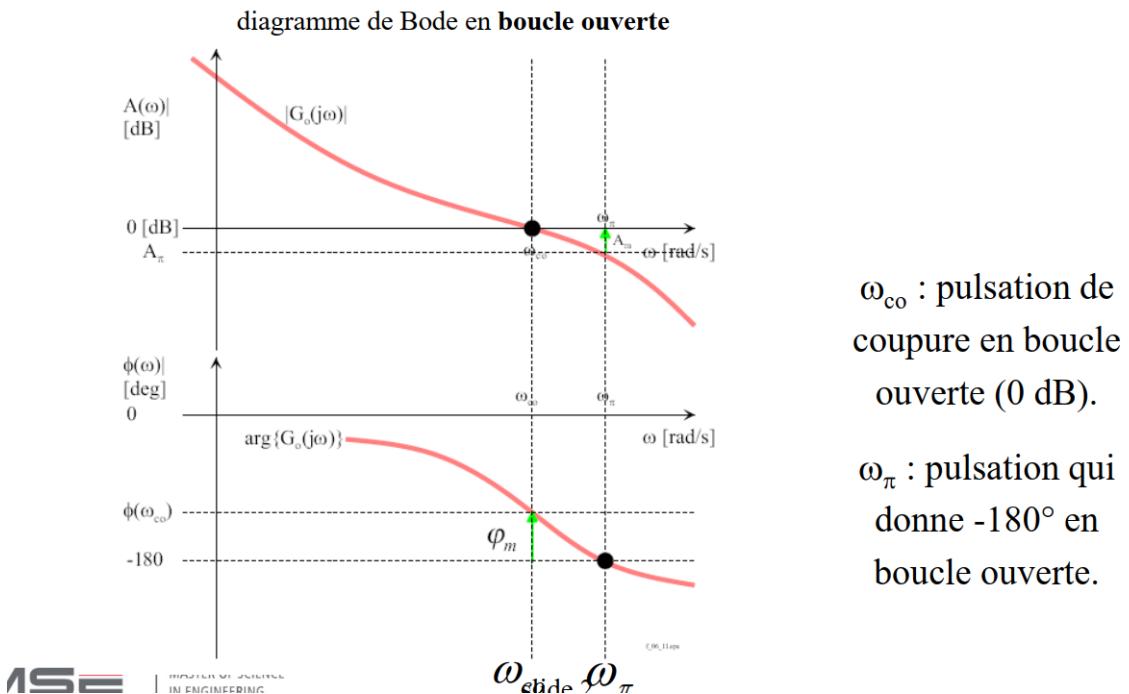
- 1. Rappel cours 5, exercices série 5**
- 2. Structure d'un observateur**
- 3. Synthèse du gain de l'observateur / dualité**
- 4. Observabilité**
- 5. Interprétation de l'observateur comme filtre complémentaire**
- 6. Principe de séparation**
- 7. Loop transfer recovery (LTR)**

6.2 Rappel

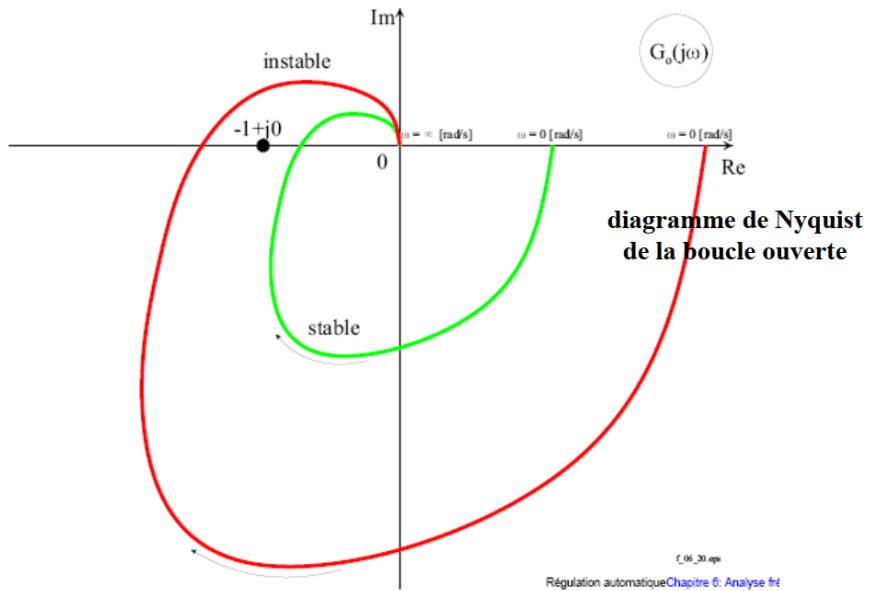
6.2.1 Critère de Nyquist simplifié : marge de gain et de phase

Par diagramme de Bode :

$$\phi_m = \arg(G_o(j\omega_{co})) + \pi \longrightarrow |G_o(j\omega_{co})| = 1$$



6.2.2 Critère de Nyquist simplifié



La boucle fermée est stable si le lieu de Nyquist n'encerle pas le point critique. Que valable si la boucle ouverte est stable !

critère de Nyquist simplifié (critère du revers) :

→ valable seulement pour les systèmes **stables en boucle ouverte**

$G_0(j\omega)$ doit laisser le point critique -1 à sa gauche lorsque $\omega \uparrow$

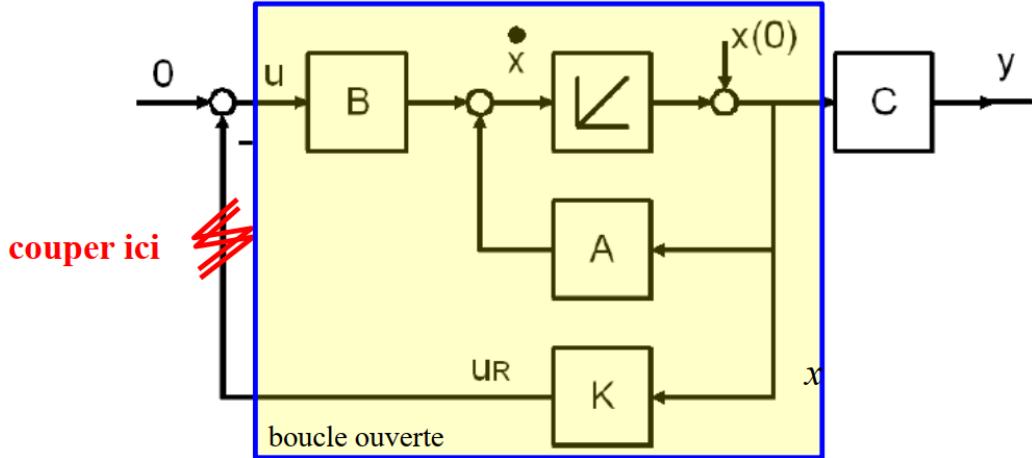
critère de Nyquist généralisé :

→ valable pour tous les systèmes **stables ou instables en b.o.**

critère basé sur le nombre d'encerclements de $G_0(j\omega)$ autour du point critique -1 .

La boucle fermée est stable si et seulement si le nombre d'encerclements du point critique -1 dans le sens trigonométrique correspond au nombre de pôles instables en boucle ouverte.

6.2.3 Boucle ouverte pour le retour d'état

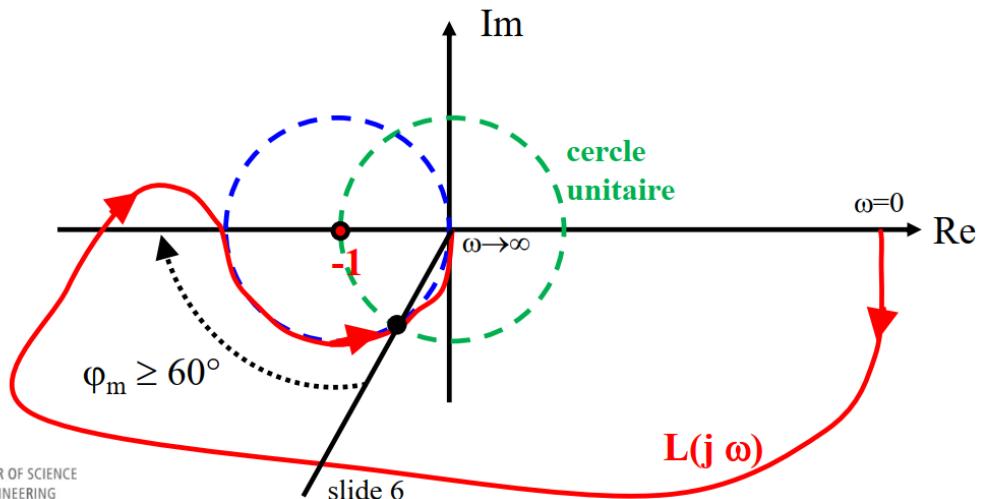


$$L(s) = K(sI - A)^{-1}B.$$

6.2.4 Robustesse du régulateur LQR (retour d'état)

inégalité de Kalman : $|1 + L(j\omega)| \geq 1$ pour chaque pulsation ω
 \Leftrightarrow distance entre le lieu de Nyquist $L(j\omega)$ et le point critique ≥ 1
 \Leftrightarrow marge de phase $\varphi_m \geq 60^\circ$ et marge de gain $0.5 \leq A_m < \infty$.

Cette propriété ne tient plus pour un régulateur à observateur !

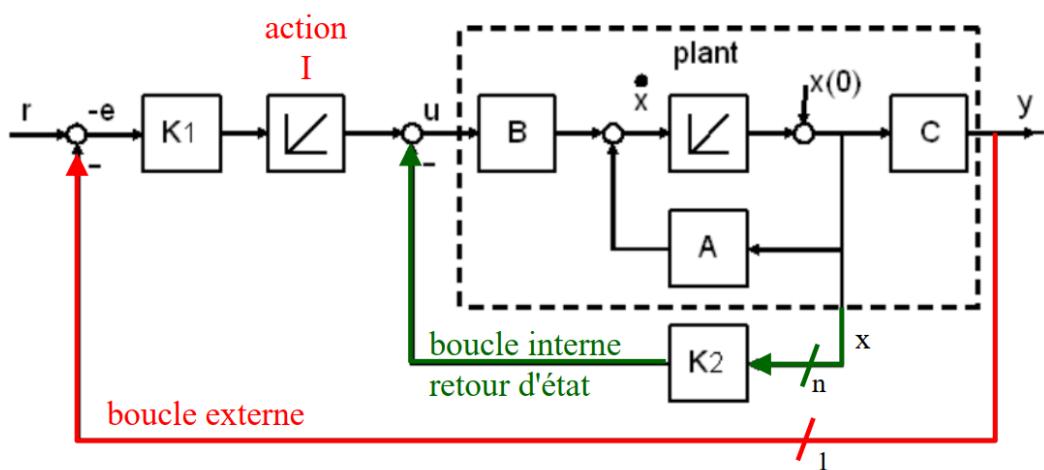


$$d_{\text{crit}} = \min_{\omega} \underset{\text{point crit.}}{\text{dist}}(\underbrace{-1}_{\omega}, L(j\omega))$$

Afin d'assurer une bonne **robustesse** :
 ⇒ Avec synthèse **LQR** : → $d_{\text{crit}} = 1$

6.2.5 Régulation en correspondance LQR avec action intégrale

régulation en cascade



6.3 Observateur

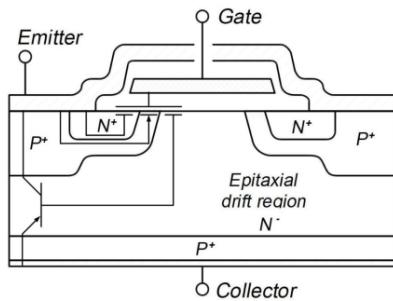
6.3.1 Motivation

1. Le retour d'état nécessite la mesure de **toutes** les variables d'état
 - 1.1 Cher et compliqué, car beaucoup de capteurs nécessaires
 - 1.2 Peut poser des problèmes de fiabilité dû au nombre de capteurs
 - 1.3 Parfois pas faisable s'il y a des variables d'état qui sont difficiles à mesurer
 - Idée 1 : estimer les variables d'état manquantes, puis utiliser ces signaux estimés pour le retour d'état
 - idée 2 : cet observateur/estimateur nécessite la connaissance d'un modèle du processus physique et intègre ce modèle
2. Il y a des applications où on dispose de plusieurs mesures bruitées, p.ex. IMU (Inertial Measurement Unit) avec accéléromètres 3 axes, gyroscope 3 axes, magnétomètres 3 axes, signaux GPS, etc.
 - Idée 3 : un observateur permet de "consolider" toutes ces informations imparfaites, et de fournir une information consolidée plus précise et moins bruitée "sensor fusion".

Il y a donc une vision **déterministe** d'un observateur, et une vision stochastique. Dans le contexte **stochastique**, l'observateur est appelé aussi "**filtre de Kalman**"

6.3.2 Exemple : Observateur pour monitorer des signaux difficilement mesurables

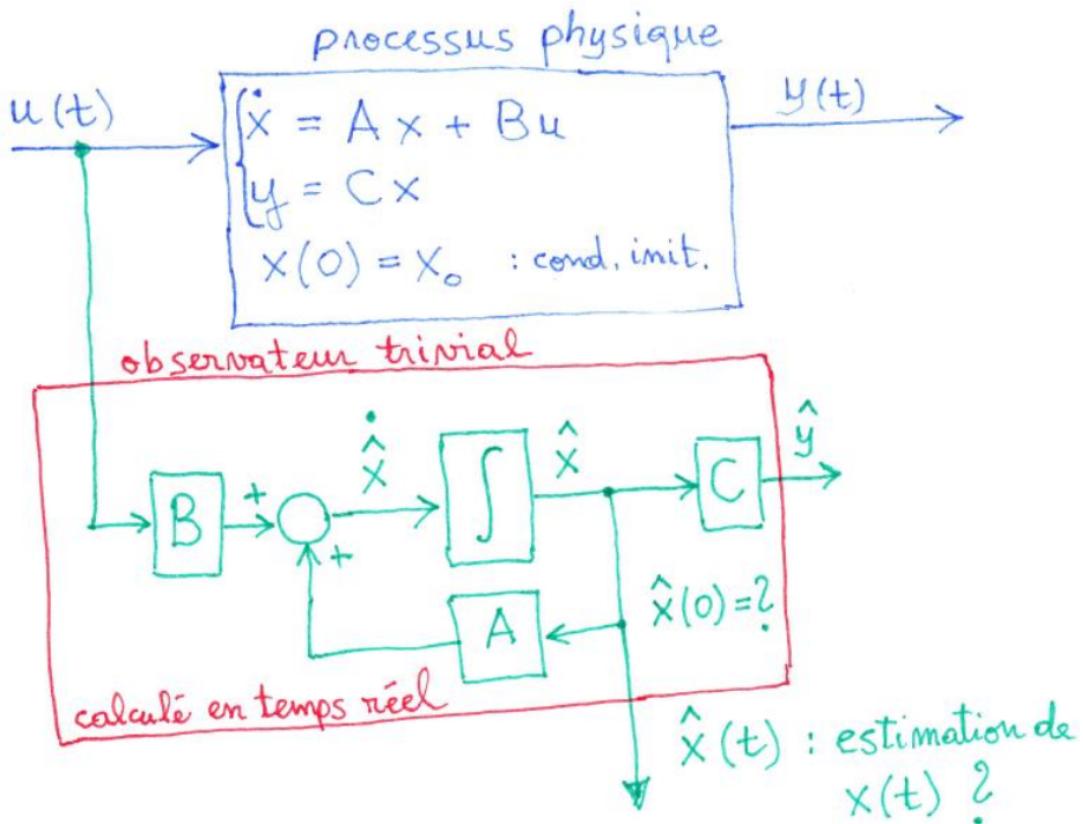
Exemple : température directement sur la puce d'un transistor de puissance.



On connaît le courant instantané $i(t)$, et on peut mesurer la température à l'extérieur du boîtier. Avec l'aide d'un **modèle thermique** (modèle dynamique) on peut estimer la température instantanée sur la puce.

6.4 Observateur "trivial"

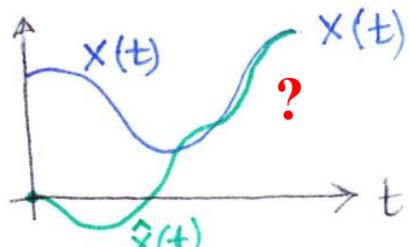
6.4.1 Idée naïve : observateur "trivial"



6.4.2 Dynamique de l'erreur de l'observateur trivial

dynamique de l'erreur $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) \\ \Rightarrow \dot{x}_e &= Ax_e \end{aligned}$$



- La dynamique de l'erreur est indépendante du signal de commande $u(t)$.
- $x_e(t) = e^{At}x_{e,0}$: sous quelle condition l'observateur trivial converge ?
- Converge que si le processus est stable, i.e. si toutes les valeurs propres

*Il faut que les valeurs propres de la matrice A soit négatif
→ Système stable !*

6.4.3 Points faibles de l'observateur trivial

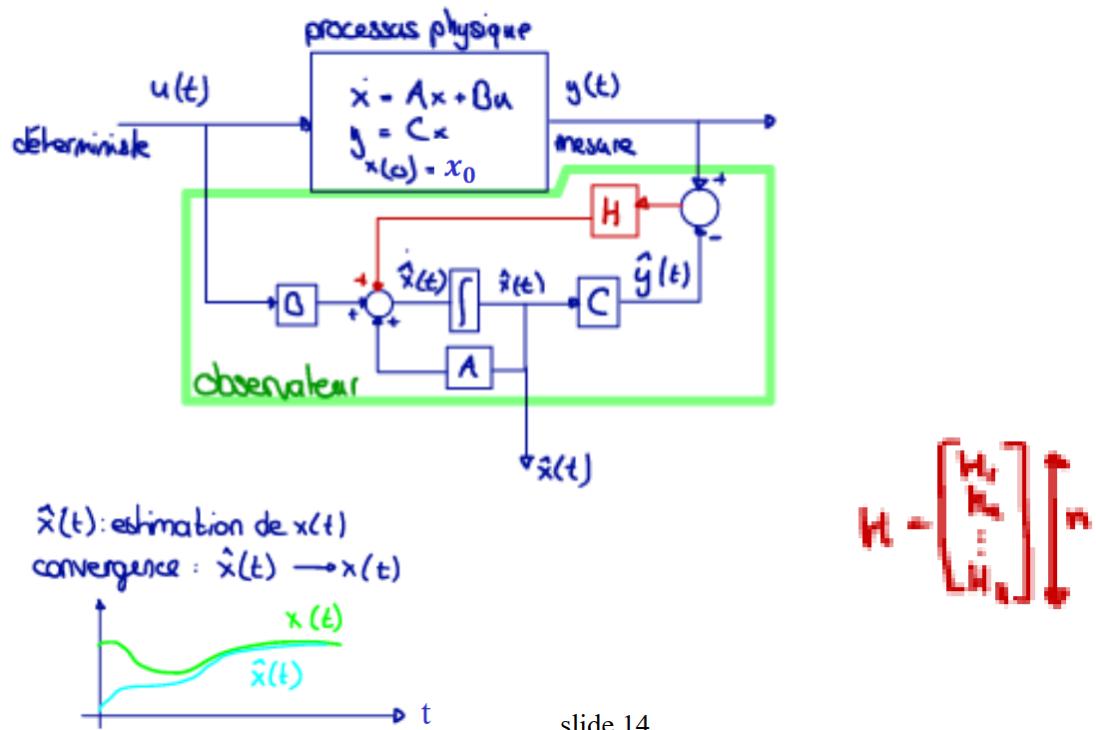
- Le signal de sortie mesuré $y(t)$ du processus n'est pas utilisé !
 - On est complètement tributaire de la dynamique du processus, aucun moyen d'influencer le régime transitoire de l'observateur.
- ⇒ Pour ces raisons l'observateur trivial n'est jamais utilisé !

Solution :

1. Comparer ce que l'on a avec ce que l'on veut !
2. Utiliser un **feedback** de l'erreur, c-à-d un **reboulement** pour corriger le tir !

6.5 Observateur complet

6.5.1 Structure de l'observateur complet



6.5.2 Dynamique de l'erreur de l'observateur complet

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu \quad : \text{processus} \quad (1)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y}) \quad ; \text{ observateur}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + HC(x - \hat{x}) \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) - HC(x - \hat{x})$$

$$x_e := x - \hat{x}$$

$$\dot{x}_e = (A - HC)x_e$$

Comparaison retour d'état et observateur :

	vec. lig.
Retour d'état	: $A_{bf} = A - B \overbrace{K}^{\text{vec. lig.}}$
Observateur	: $A_{obs} = A - \underbrace{H}_{\text{vec. col.}} C$

$$\dot{x}_e(A - HC)x_e \quad \text{avec} \quad x_e = x - \hat{x}$$

- Pour le choix $H = 0$ on retombe sur l'observateur trivial !
- L'observateur converge si la matrice $A - HC$ est stable, c-à-d si les valeurs propres de $A_{obs} = A - HC$ ont toutes une partie réelle négative.
- Le gain H de l'observateur est à déterminer : "synthèse de l'observateur". Le choix de H détermine la dynamique de l'observateur.
- Le placement de pôles est une possibilité pour la synthèse de l'observateur.

6.6 Dualité : synthèse retour d'état / synthèse observateur

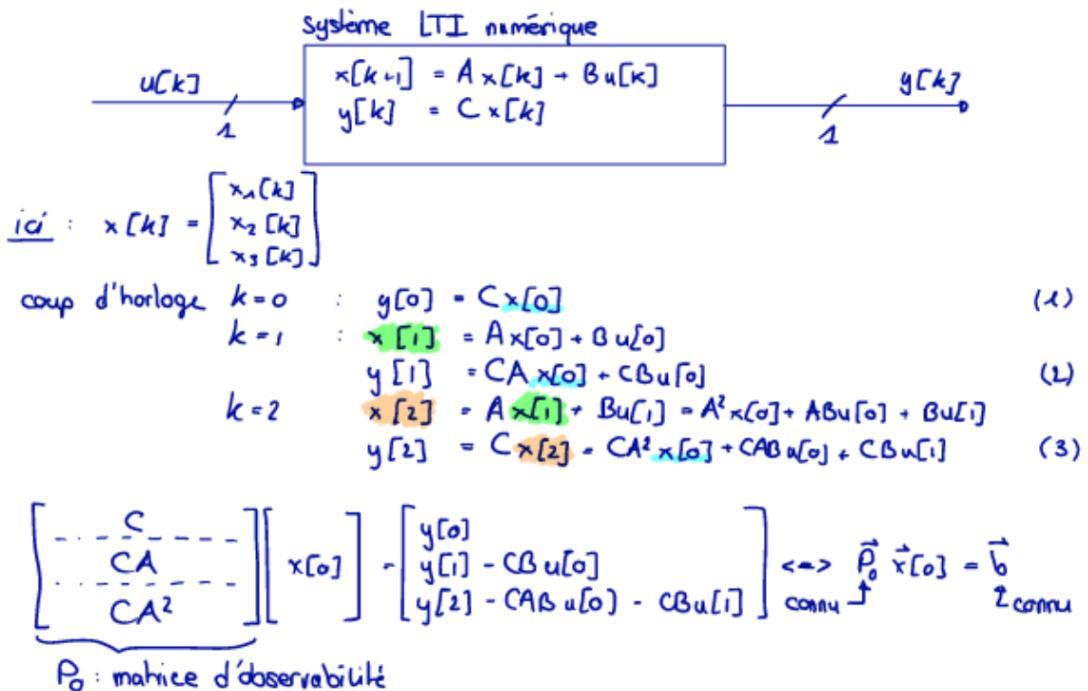
$$\begin{aligned}
 & \text{eig}(A - HC) & K = \text{place}(A, B, \lambda); \\
 = & \text{eig}(A^t - (HC)^t) & H = \text{place}(A^t, C^t, \lambda)^t; \\
 = & \text{eig}(A^t - C^t H^t) \\
 & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 & \text{eig}(A - B^t K)
 \end{aligned}$$

Interprétation stochastique : $LQG = \text{Linear Quadratic Gaussian}$

- \mathbf{Q} : covariance du bruit de processus
- \mathbf{R} : covariance du bruit de mesure gain optimal
- \mathbf{H} de l'observateur pour minimiser la variance de l'erreur

6.7 Condition observabilité

6.7.1 Retrouver la condition initiale



6.7.2 Condition d'observabilité

$$\text{rank}[P_o] = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Un système est **observable** si le **rang** de la **matrice d'observabilité** est **n**

$$\Rightarrow \text{rank}(P_o) = n$$

En **monovariable** (SISO) : si $\det(P_o) \neq 0$

6.8 Décomposition de Kalman

6.8.1 Réalisation minimale

Chaque **système LTI** peut se décomposer après un changement de variables en :

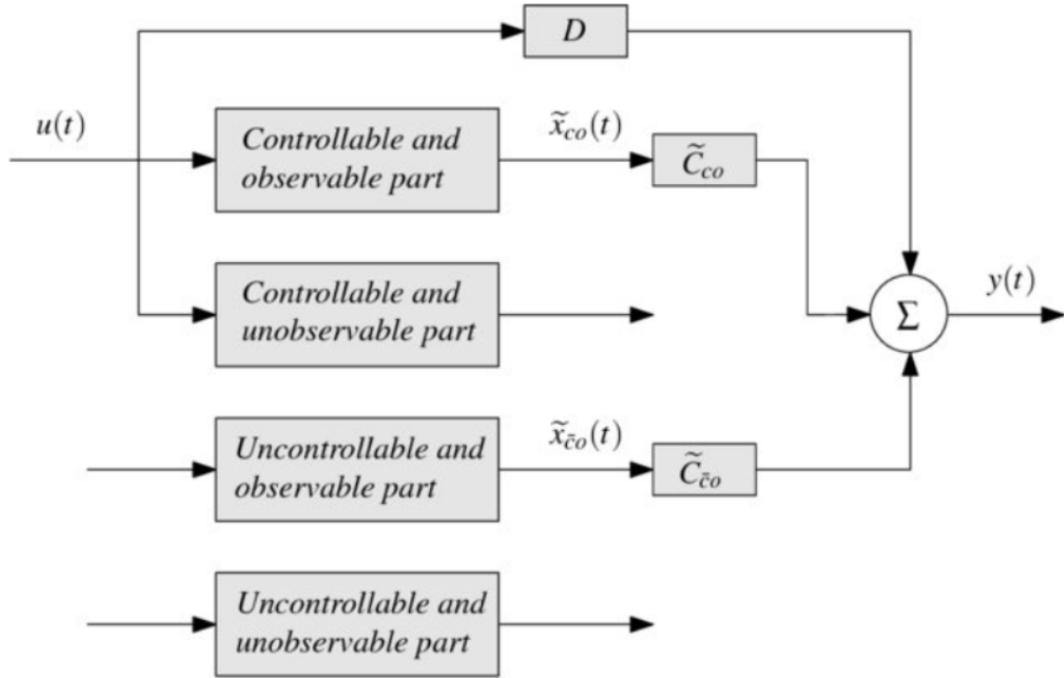
- Une partie qui est **commandable et observable**
- Une partie qui n'est **pas commandable**, mais **observable**
- Une partie qui est **pas observable** mais **commandable**
- Une partie qui est **ni commandable, ni observable**

Les parties non commandable et/ou non observable ne contribuent rien au comportement entrée-sortie ; les variables d'état associées peuvent être écartées.

On appelle une « **réalisation minimale** » d'une matrice de transfert une représentation dans l'espace d'état avec un nombre de variables d'état minimal.

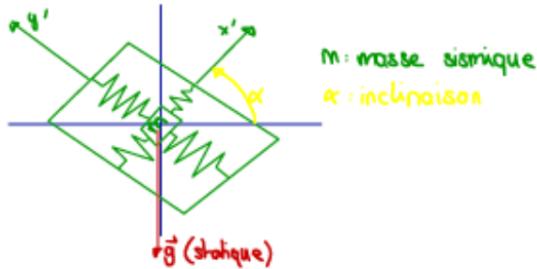
Une telle réalisation minimale est commandable et observable !

6.8.2 décomposition de Kalman



6.9 Exemple - observateur comme filtre complémentaire

Navigation inertielle en utilisant un accéléromètre (inclinomètre) et un gyromètre



1. **L'accéléromètre** basé sur une masse sismique qui mesure la gravité (composante DC) et les composantes dynamiques de l'accélération.
→ Le signal fourni $y(t)$ n'est que fiable à **basse fréquence**.
2. **Le gyromètre** mesure une vitesse de rotation $u(t)$.
Pour connaître l'angle il faudrait intégrer $u(t)$, mais ceci risque de créer une dérive (instable).
→ Le signal fourni $u(t)$ n'est que fiable à **haute fréquence**.

6.9.1 Application : filtre complémentaire

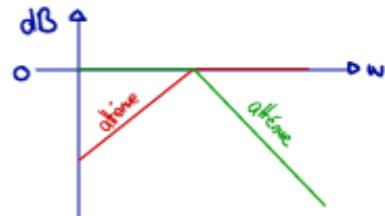
- $U(s)$: gyromètre (vitesse)
- $Y(s)$: accéléromètre (inclinomètre)
- $\hat{Y}(s)$: information consolidée
- α : angle d'inclinaison

$$\underbrace{F_1(s)}_{\substack{\text{HP filter} \\ \text{intégrateur}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{\substack{\text{intégrateur}}} \cdot U(s) + \underbrace{F_2(s)}_{\substack{\text{LP filter}}} \cdot Y(s) = \underbrace{\hat{y}(s)}_{\substack{\text{est. dyn. de } \alpha}}$$

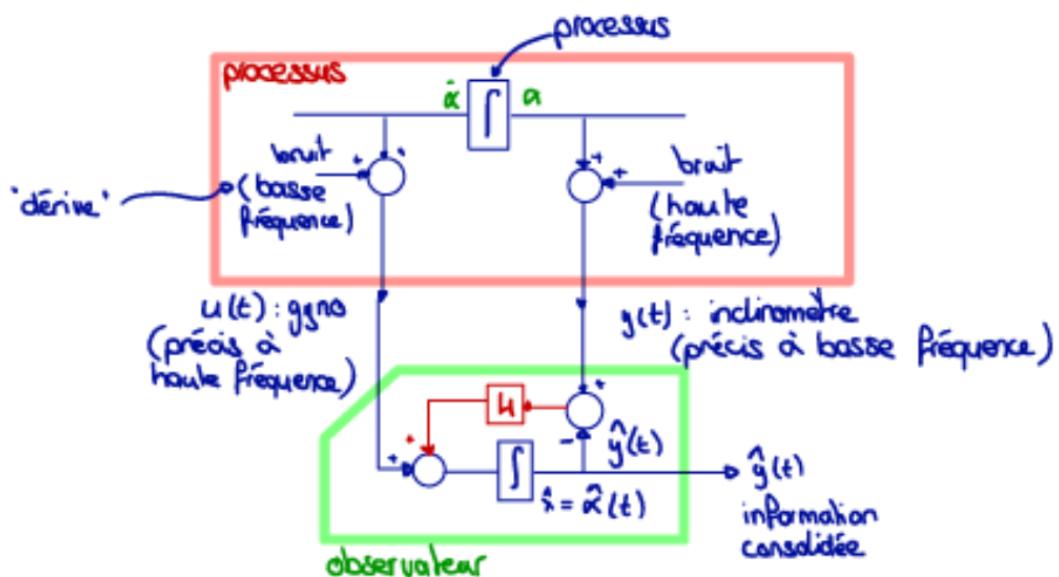
$\Rightarrow [F_1(s)] + [F_2(s)] = 1$ (filtre complémentaire)

$$\underbrace{F_1(s)}_{\substack{\text{filtre} \\ \text{pass-haut}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{\substack{\text{intégrateur}}} \cdot U(s) + \underbrace{F_2(s)}_{\substack{\text{filtre} \\ \text{pass-bas}}} \cdot Y(s) = \underbrace{\hat{y}(s)}_{\substack{\text{estimation dynamique} \\ \text{de l'inclinaison } \alpha}}$$

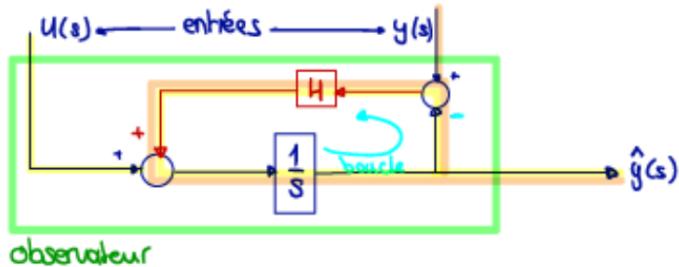
$$\boxed{F_1(s)} + \boxed{F_2(s)} = 1 \quad (\text{filtre complémentaire})$$



6.9.2 Observateur pour processus « intégrateur pur »



6.9.3 Fonctions de transfert du filtre



$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= \frac{1}{s+H} U(s) + \frac{H}{s+H} y(s) \\ &= F_1(s) \cdot \frac{1}{s} \cdot U(s) + F_2(s) \cdot y(s)\end{aligned}\quad \left| \begin{array}{l} F_1(s) = \frac{s}{s+H} \\ F_2(s) = \frac{H}{s+H} \end{array} \right.$$

Filtre complémentaire :

$$F_1(s) + F_2(s) = \frac{s}{s+H} + \frac{H}{s+H} = \frac{s+H}{s+H} = 1$$

passer-tout
gain stat=0

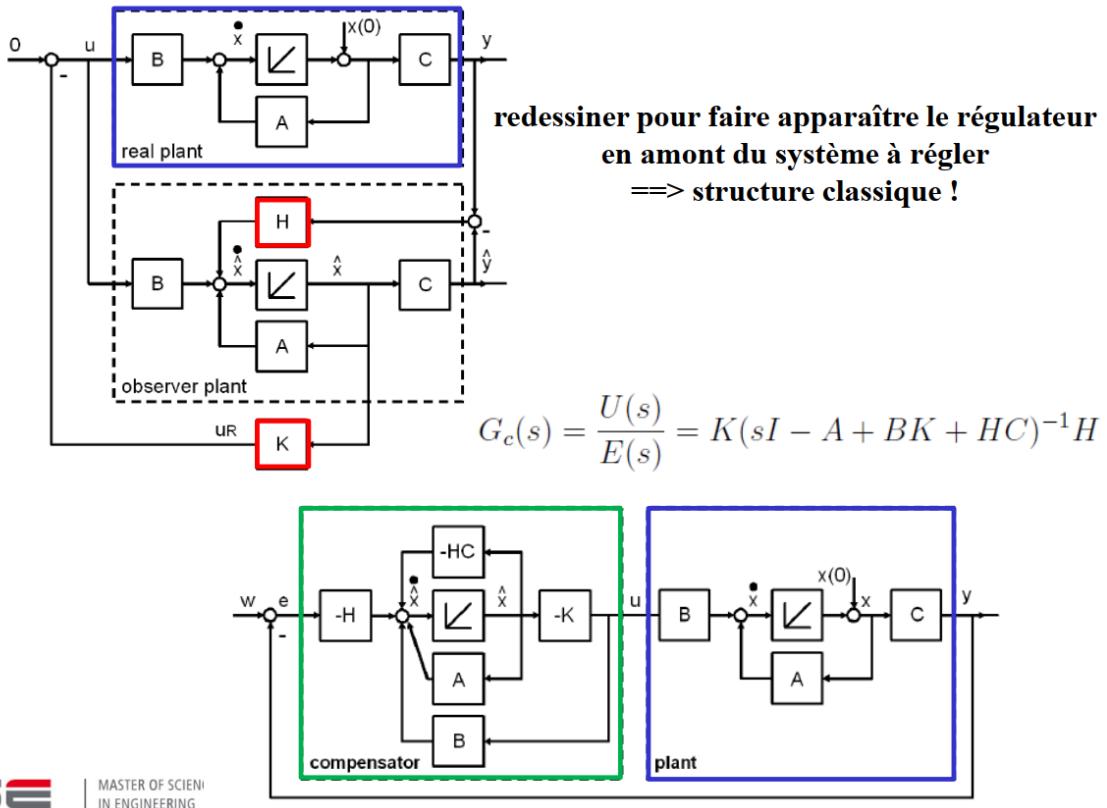
passer-bas
gain stat=1

$$\begin{aligned}F_1(j\omega) &= \frac{j\omega/H}{1 + j\omega/H} \\ F_2(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega/H}\end{aligned}\quad \boxed{\omega_{co} = H}$$

slide 25

6.10 Interprétation stochastique de l'observateur

1. S'il y a **peu de bruit** sur la mesure $y(t)$, et que je peux faire confiance, je peux choisir un **gain élevé H** pour l'observateur.
Ce **gain élevé H** donne une **pulsation de coupure élevée** du filtre.
2. D'autre part, si la mesure de $y(t)$ est **très bruitée**, et que je peux faire plus confiance au modèle, je peux choisir une valeur **faible pour le gain H** .
Dans ce cas, le filtre aura une **pulsation de coupure basse**.



6.11 Principe de séparation

6.11.1 Rappel

$$\frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{H}{s}} = \frac{1}{s + H}$$

$$\frac{\frac{H}{s}}{1 + \frac{H}{s}} = \frac{H}{s + H}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

6.11.2 Principe de séparation

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

La matrice A en boucle fermée est bloc triangulaire :

$$\det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + HC \end{bmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\det(sI - A + BK)}_{\text{pôles du retour d'état}} \cdot \underbrace{\det(sI - A + HC)}_{\text{pôles de l'observateur}} = 0$$

Les pôles de la boucle fermée sont composés des pôles de la synthèse du retour d'état et des pôles de la synthèse de l'observateur !

6.11.3 Explication

$$Processus = \dot{x} = Ax + Bu$$

$$Feedback = u = -K\hat{x}$$

$$Observateur = \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + HC(x - \hat{x})$$

$$x_{tot} = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad 2 \cdot n \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = Ax + Bu + HC(x - \hat{x}) \end{cases}$$

$$\dot{x}_{tot} = A_{tot} \quad \text{avec} \quad A_{tot} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix}$$

on peut ensuite calculer les valeurs propre de A_{tot} → pôles du systèmes

Alternative :

$$x_e = x - \hat{x} \Rightarrow \hat{x} = x - x_e \quad \rightarrow \text{remplacer le } \hat{x} \text{ par } x_e$$

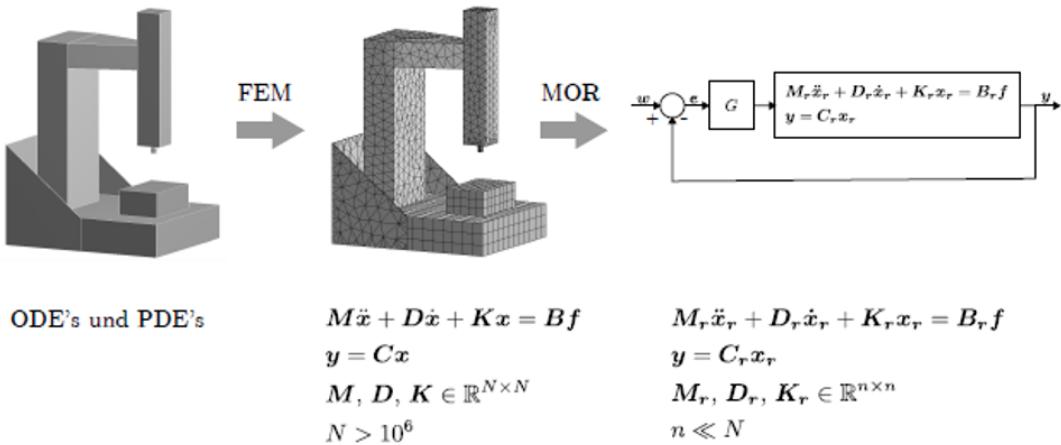
$$\Rightarrow x_{tot} = \begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A_{tot} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix}}_{\text{Matrice Triangulaire}}$$

Les **valeurs propres** de A_{tot} sont les **valeurs propres** de $A - BK$ et les **valeurs propres** de $A - HC$

6.11.4 Remarques importantes

- Le principe de séparation n'est que valable si le modèle est parfaitement connu.
- réglage par **retour d'état LQR** est **robuste** si toutes les variables d'état sont mesurées (pas besoin d'observateur).
Marges de stabilité : $\boxed{\phi_m > 60^\circ, A_m = [0.5 \dots \infty]}$
- En utilisant un observateur, **cette propriété de robustesse est perdue**. La méthode **LTR** essaye de récupérer cette propriété, mais au dépens d'un gain H de l'observateur important (amplification du bruit).
- Il y a des systèmes à régler **intrinsèquement** difficile à régler, où **aucune** méthode de synthèse fournit une bonne robustesse !
Exemple : systèmes avec déphasage nonminimal (zéros positifs)

6.12 « Model order reduction »



6.13 LTR : Loop Transfer Recovery

méthode de choix des pondérations Q et R de l'observateur, permettant de récupérer la bonne robustesse du retour d'état
 $\phi_m > 60^\circ$, $A_m = [0.5 \dots \infty]$.

$$Q = \rho BB^T \text{ and } R = 1 \quad \rho \rightarrow \infty : \text{observateur rapide}$$

Fonctionne que pour les systèmes à régler à déphasage minimal
 (pas de zéros dans le demiplan droit).

LTR (*Loop Transfer Recovery*) est une méthode de choix des pondérations Q et R de l'observateur, permettant de récupérer la bonne robustesse du retour d'état :

$$\boxed{\phi_m > 60^\circ, A_m = [0.5 \dots \infty]}$$

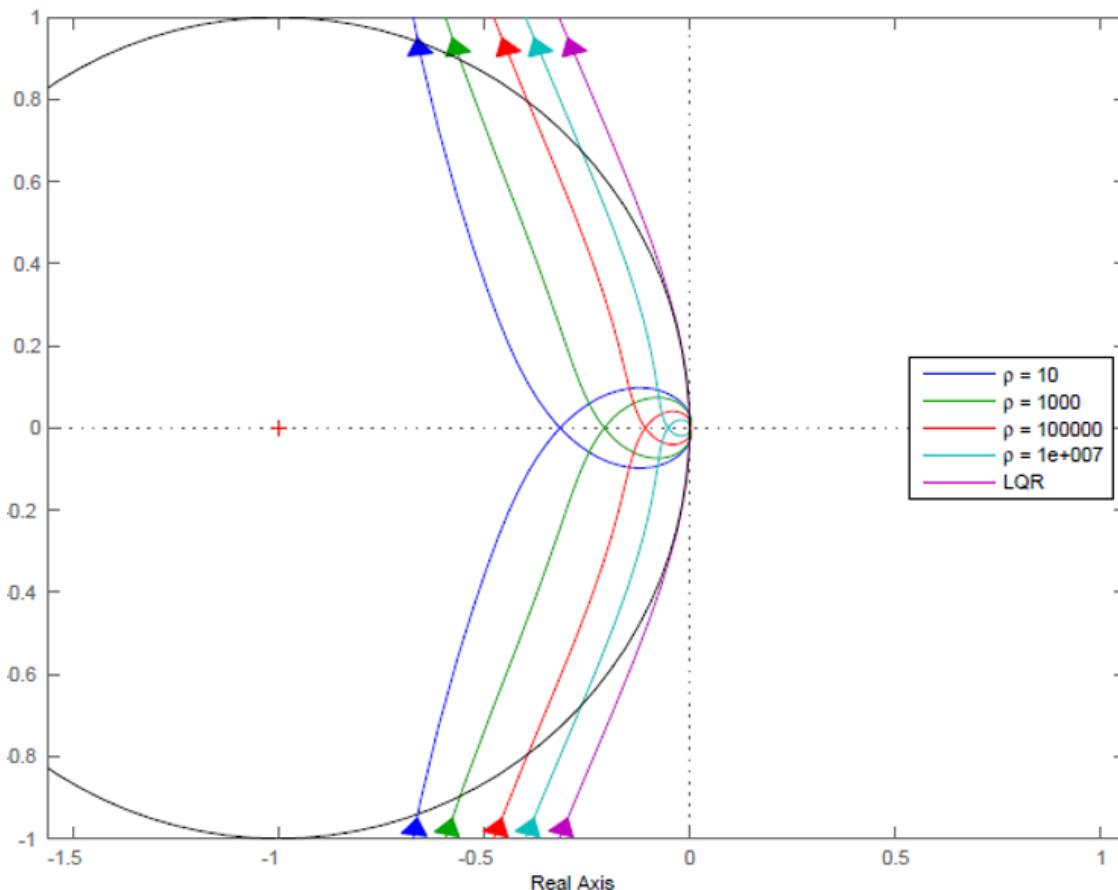
$$Q = \rho BB^T \text{ et } R = 1 \quad \rho \rightarrow \infty : \text{Observateur rapide}$$

Attention : Ne fonctionne que pour les système à déphasage minimale !

- Système à déphasage minimal :
 ⇔ Pas de zéro dans le demi-plan droite.
 Boucle ouverte :

$$\hat{G}_0(s) = C(sI - A)^{-1}B \cdot K(sI - A + BK + HC)^{-1}H$$

6.13.1 lieu de Nyquist en fonction de ρ



6.14 Résumé de la synthèse LQR - LQG - LTR

- Basé sur un modèle dans l'espace d'état **suffisamment précis**
(nécessite une bonne modélisation plus identification des paramètres)
- Condition nécessaire : le système doit être **suffisamment bien commandable et observable**
- Basé sur un critère d'optimisation **quadratique**
(il existe bien d'autres critères)
- On "joue" avec les pondérations Q et R du critère, pas directement avec les paramètres du régulateur.
En règle générale, plusieurs itérations sont nécessaires.

- Méthode assez systématique et bien documentable (contrairement au loop shaping manuel (p.ex. utilitaire Matlab sisotool), où on bidouille les paramètres du régulateur).
- La méthode garantit que la **boucle fermée nominale** est stable !
- La méthode fonctionne également pour les systèmes multivariables(MIMO)

La méthode LQR / LQG / LTR n'apporte rien pour :

- Des systèmes monovariables de faible ordre (p.ex. ordre 2), car on peut aussi bien faire avec un PID classique
- Des systèmes mal connus ayant beaucoup d'incertitudes de modélisation

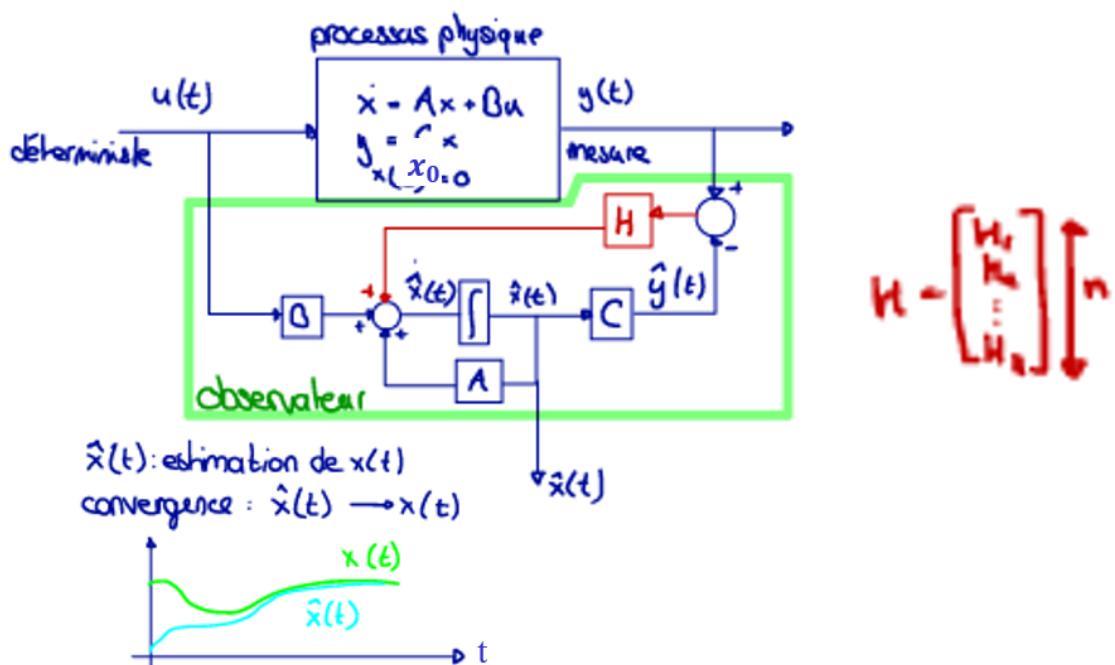
7 S7 - Programme Advanced Control, cours 7

7.1 Contenue

1. Rappel cours 6, exercices série 6
2. Application d'un observateur pour l'estimation de vitesse
3. Implémentation de régulateurs
4. Valeurs singulières, décomposition SVD

7.2 Rappel

7.2.1 Structure de l'observateur

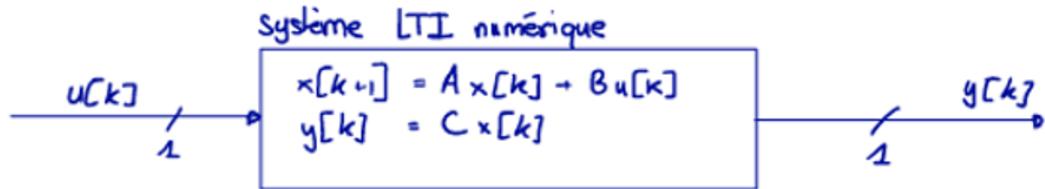


7.2.2 Dynamique de l'erreur de l'observateur complet

$$\dot{x}_e = (A - HC)x_e \quad \text{avec} \quad x_e = x - \hat{x}$$

- L'observateur converge si la matrice $A - HC$ est stable, c-à-d si les valeurs propres de $A_{\text{obs}} := A - HC$ ont toutes une partie réelle négative.
- Le gain H de l'observateur est à déterminer : "synthèse de l'observateur", soit par placement de pôles ou bien par LQG (linear quadratic gaussian), c-à-d Riccati.

7.2.3 Critère de l'observabilité



Un système est observable, s'il est toujours possible de calculer la condition initiale $x[0]$ du vecteur d'état à partir des mesures $y[0], y[1], \dots, y[n-1]$ du signal de sortie sur une durée de n coups d'horloge.

7.2.4 Observabilité

$$\text{rank}[P_o] = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Un système est **observable** si le **rang** de la **matrice d'observabilité** P_o est n
En monovariable (SISO) : si $\det(P_o) \neq 0$

Observabilité :

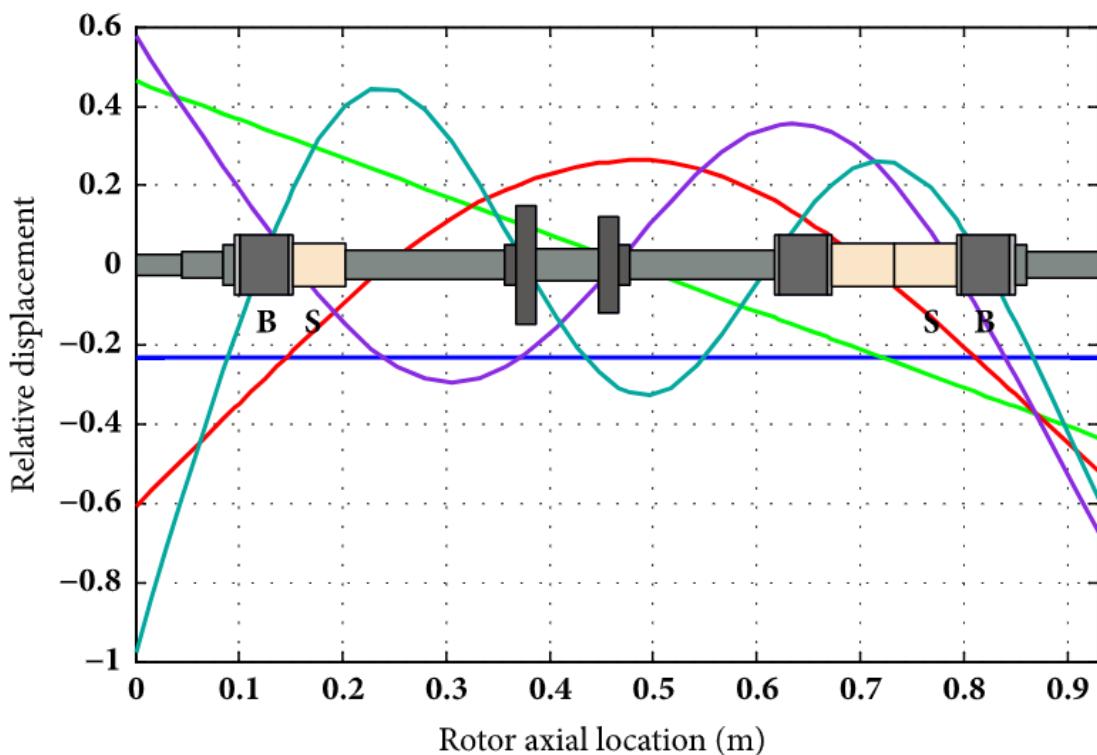
Où doit-on placer le **capteur** ("*Observateur*")

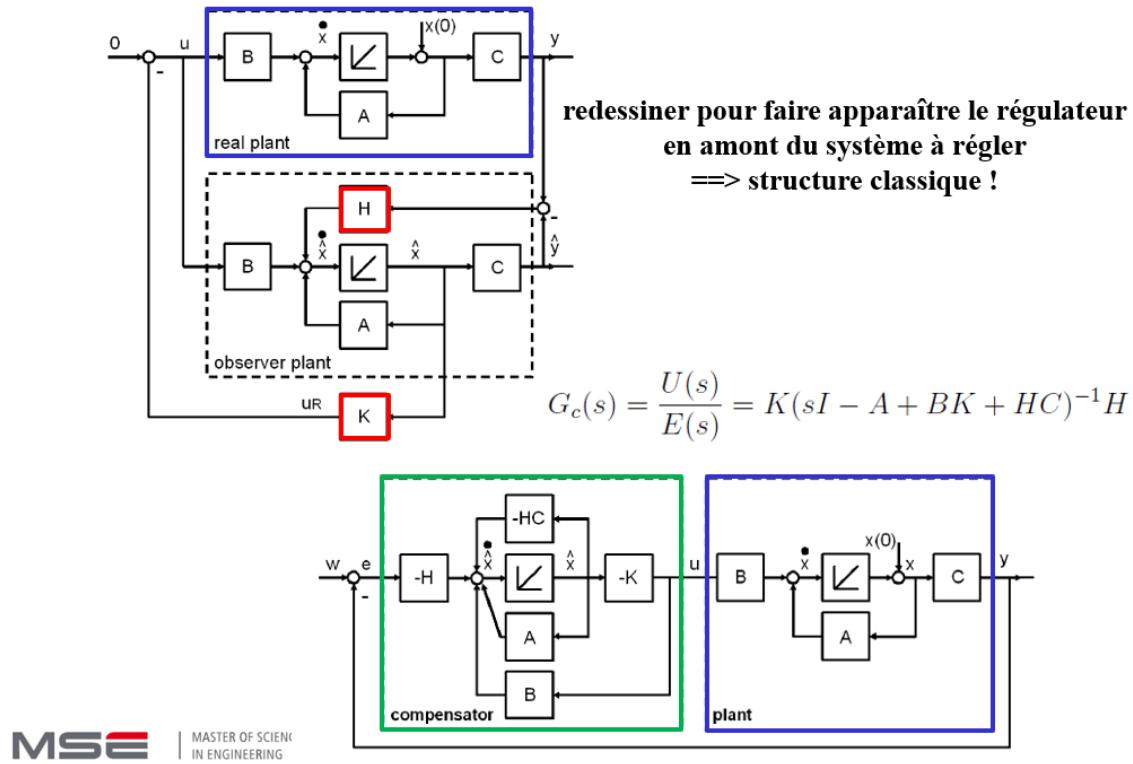
Commandabilité :

Où doit-on placer l'**actionneur** ("*Commande*")

7.3 Application : palier magnétique

Où placer les capteurs pour que les modes propres qui nous intéressent soient bien observables ?





7.4 LTR : Loop Transfer Recovery

méthode de choix des pondérations Q et R de l'observateur, permettant de récupérer la bonne robustesse du retour d'état $\phi_m > 60^\circ$, $A_m = [0.5 \dots \infty]$.

$$Q = \rho BB^T \text{ and } R = 1 \quad \rho \rightarrow \infty : \text{observateur rapide}$$

Fonctionne que pour les systèmes à régler à déphasage minimal
(pas de zéros dans le demiplan droit).

LTR (*Loop Transfer Recovery*) est une méthode de choix des pondérations Q et R de l'observateur, permettant de récupérer la bonne robustesse du retour d'état :

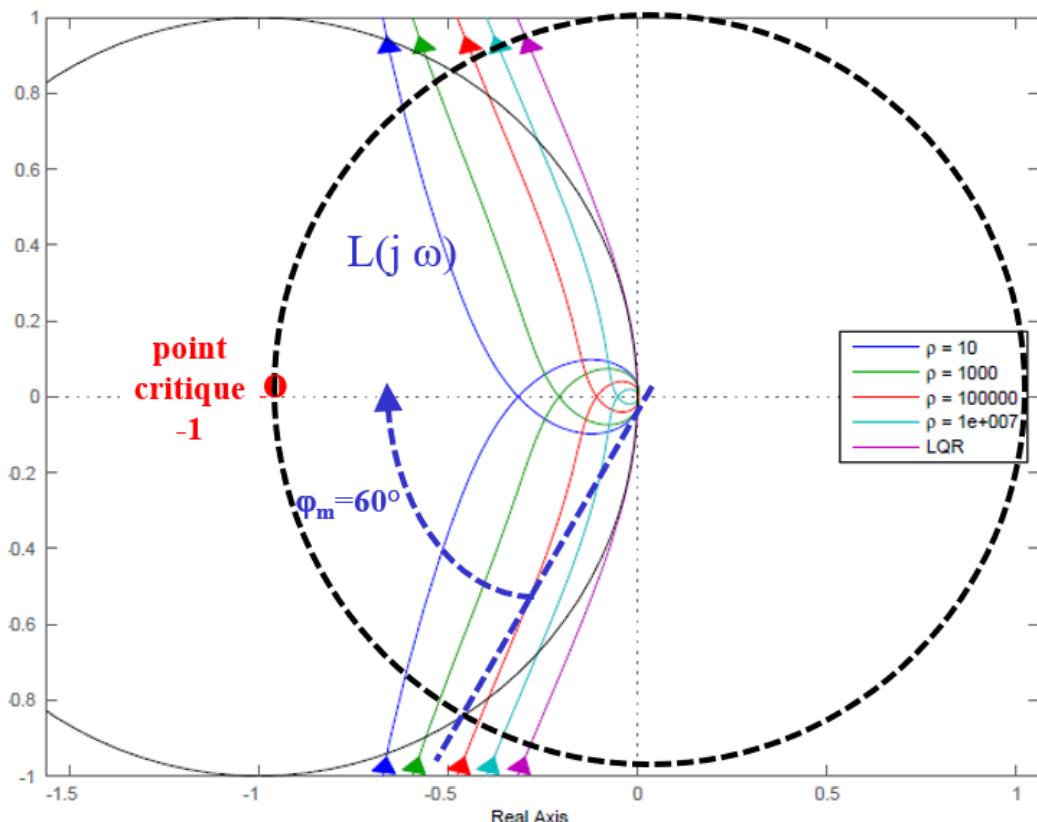
$$\boxed{\phi_m > 60^\circ, A_m = [0.5 \dots \infty]}$$

$$Q = \rho BB^T \text{ et } R = 1 \quad \rho \rightarrow \infty : \text{Observateur rapide}$$

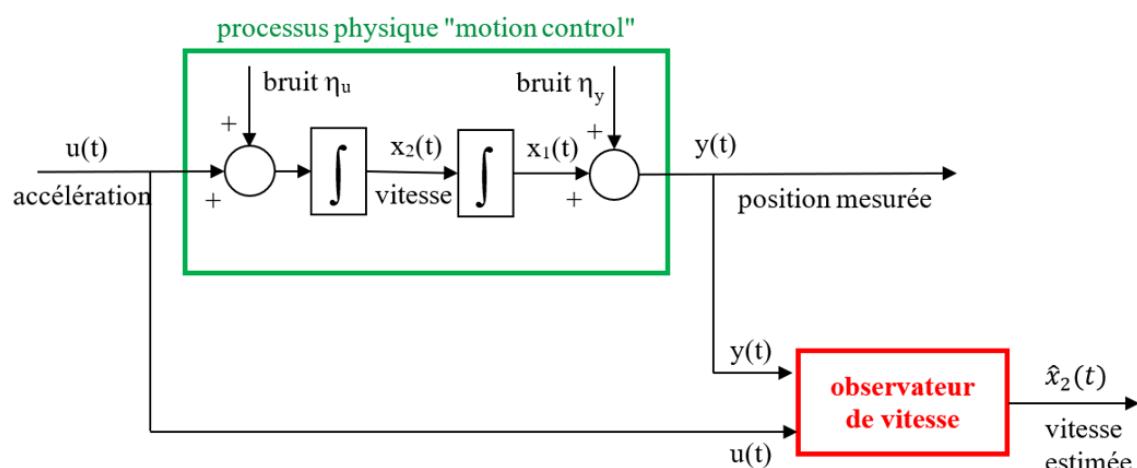
Attention : Ne fonctionne que pour les système à déphasage minimale !

Système à déphasage minimal :
 \Leftrightarrow Pas de zéro dans le demi-plan droit.

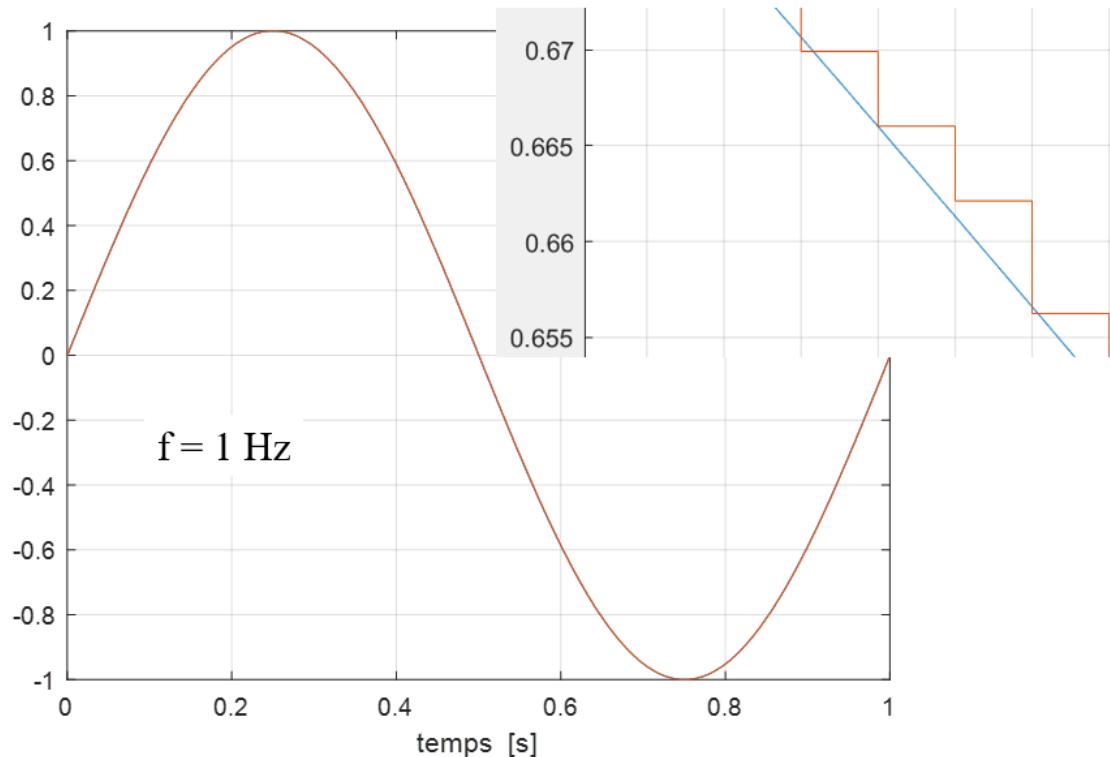
7.4.1 lieu de Nyquist en fonction de ρ

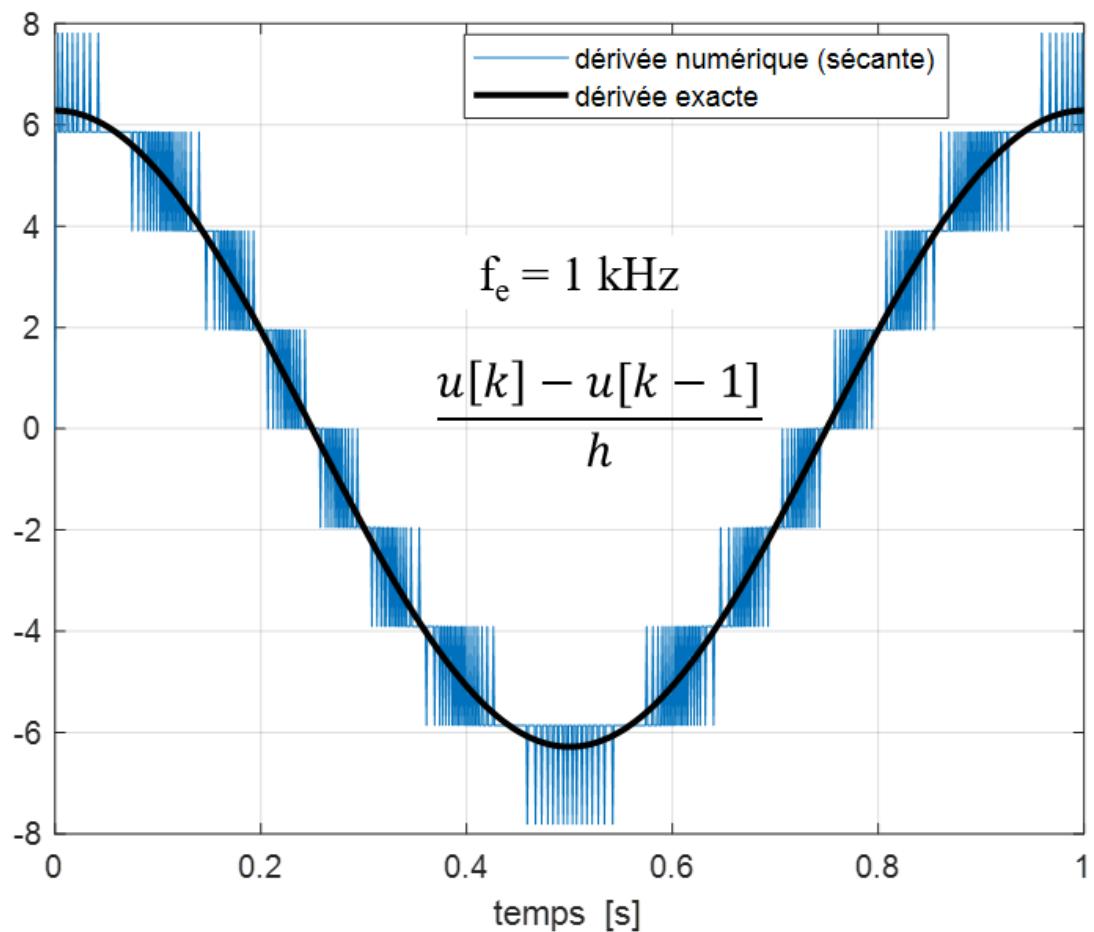


7.5 Application : observateur de vitesse

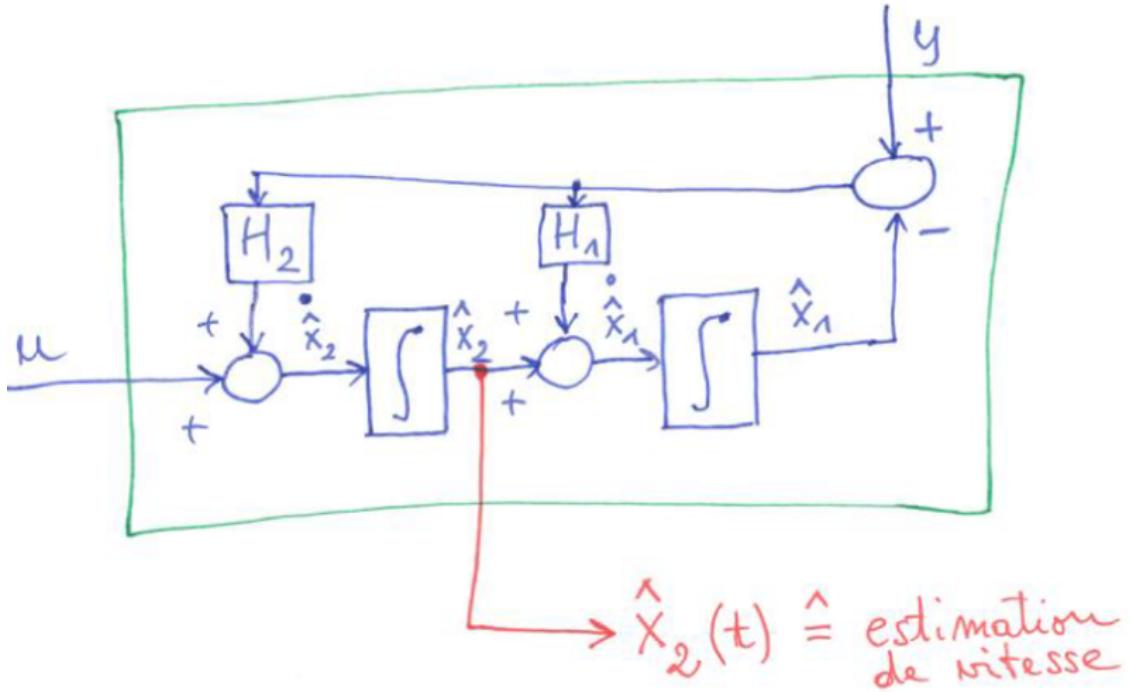


7.5.1 Problème de la dérivée numérique





7.5.2 Observateur de vitesse



7.5.3 Observateur de vitesse = filtre complémentaire

Après un petit calcul (Exercice 8.1) :

$$\hat{X}_2(s) = \frac{s + H_1}{s^2 + sH_1 + H_2} U(s) + \frac{H_2 s}{s^2 + sH_1 + H_2} Y(s)$$

$$= \frac{1}{s} F_1(s) U(s) + s \cdot F_2(s) Y(s)$$

$$F_1(s) = \frac{s(s + H_1)}{s^2 + sH_1 + H_2} \quad F_2(s) = \frac{H_2}{s^2 + sH_1 + H_2}$$

$$F_1(s) + F_2(s) = 1$$

$F_1(s)$: Filtre passe haut	(gain statique : $F_1(0) = 0$)
$F_2(s)$: Filtre passe bas	(gain statique : $F_2(0) = 1$)
$F_1(s) + F_2(s)$: Filtre complémentaire	($F_1(s) + F_2(s) = 1$)

Pour la synthèse des gains H_1 et H_2 , on peut p.ex. faire un placement de pôles, et par soucis de simplicité placer un double pôle réel négatif.

En jouant sur ce double-pôles, on modifie la pulsation de coupure des filtres complémentaires $F_1(s)$ et $F_2(s)$.

Cas extrêmes :

1. **Double pôle très négatif** \Rightarrow pulsation de coupure très élevée \Rightarrow gains H_1 et H_2 très élevés $\Rightarrow F_1(s) = 0, F_2(s) = 1$.
On obtient le déivateur de $y(t)$!
2. **Double pôle proche de 0** \Rightarrow pulsation de coupure très basse \Rightarrow gains H_1 et H_2 très bas $\Rightarrow F_1(s) = 1, F_2(s) = 0$.
On obtient l'intégrateur de $u(t)$!

7.6 Implémentation de régulateurs

7.6.1 Conseil d'implémentation (1/2)

Aujourd'hui, environ 99% des implémentations de régulateurs sont **numériques**.
Avec de rares **exceptions** :

1. **Bandé passante très élevée**, où même des solutions FPGA seraient trop lentes
2. **Exigences très faible bruit**
 - Choix de la période d'échantillonnage t_s
 - Problèmes liés à la numérisation dans le **temps**
 - Problèmes liés à la quantification des **signaux**
(No. bits des convertisseurs, word length, fixed point / floating point)
 - Problèmes liés à la quantification des **paramètres**
(word length, fixed point / floating point)

7.6.2 Discrétisation dans le temps

Il existe deux approches possibles :

A : D'abord faire une synthèse "**analogique**" c-à-d "temps continu", et après coup, **numériser** le **régulateur** avec la méthode "**Tustin**" = "*méthode des trapèzes*"

→ **Matlab** : `Gc_num = c2d(Gc, h, 'tustin');`

Fonctionne bien si la fréquence d'échantillonnage est élevée par rapport à la dynamique du système

B : D'emblée travailler avec le modèle échantillonné du système à régler :

→ **Matlab** : `H = c2d(Ga, h, 'zoh');`

D'abord numériser le système à régler, ensuite faire la synthèse en numérique.
En règle générale plus précis, donne des meilleurs résultats si la fréquence d'échantillonnage est faible.

Peut poser des problèmes numériques si la fréquence d'échantillonnage est très élevée.

7.6.3 Rappel : Méthode de *Tustin*

Approximation par une somme de trapèze :

$$u \longrightarrow \boxed{\int = \frac{1}{s}} \longrightarrow y$$

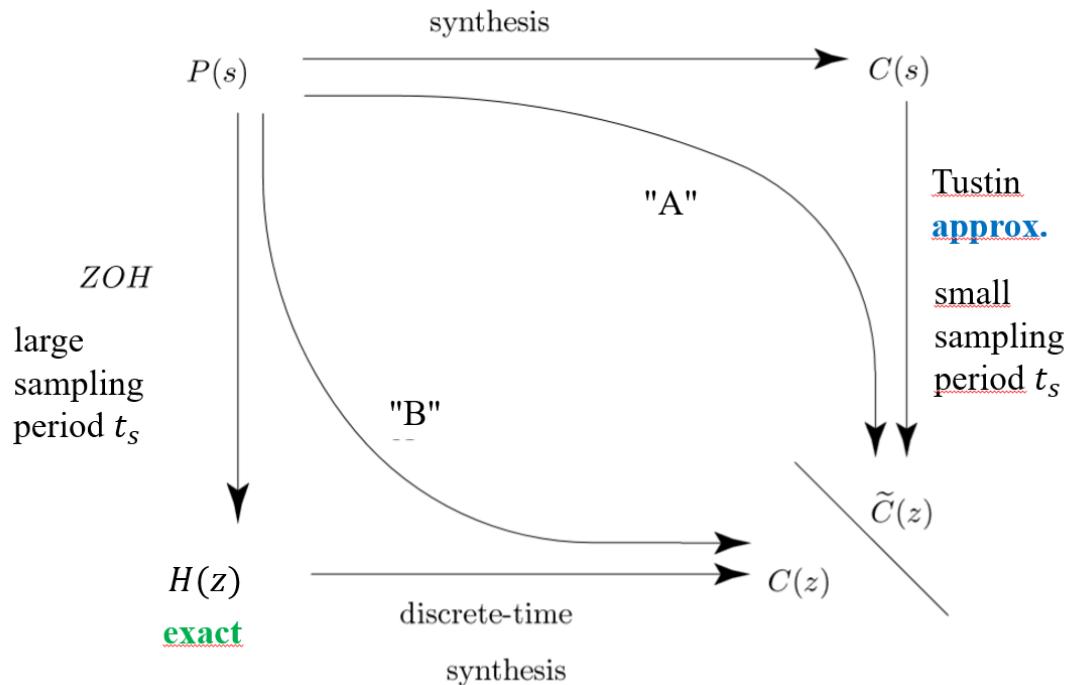
$$\boxed{y_k = y_{k-1} + h \cdot \frac{u_k + u_{k-1}}{2}}$$

- On remplace $\boxed{\frac{1}{s}}$ par $\frac{f(z+1)}{2(z-1)}$
- Remplacer \boxed{S} par $\frac{2(z-1)}{h(z+1)}$

$$\boxed{G_{ca} = tf(\dots, \dots)}$$

MatLab : `c2d(gca,h,'tustin');`

$$u[k] \longrightarrow \boxed{D/A} \longrightarrow \boxed{G_a(s)} \xrightarrow{u(t)} \boxed{A/D} \xrightarrow{y(t)} y[k]$$

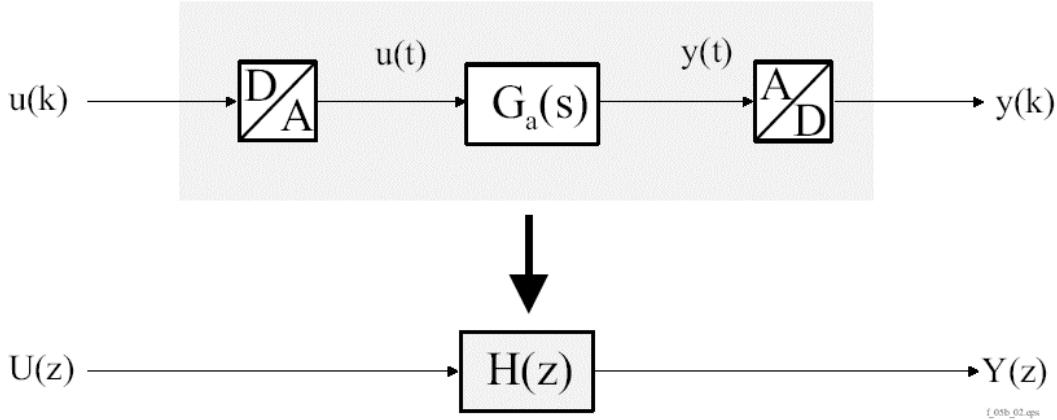


$$\boxed{y[k] \longrightarrow H(z) \longrightarrow y[k]}$$

Attention :

- Si h est très petit → privilégié la méthode A
- Si h est plutôt grand → privilégié la méthode B

7.6.4 Modèle échantillonné du système à régler



Trouver $H(z)$ à partir de $G_a(s)$

7.6.5 Calcul du modèle échantillonné dans l'espace d'état

$$A_d = e^{A_a \cdot h}$$

$$B_d = \int_0^h e^{A_a \cdot \tau} B \, d\tau$$

$$\begin{cases} \vec{x}[k+1] = A_d \vec{x}[k] + B_d u[k] \\ y[k] = C_d \vec{x}[k] + D_d u[k] \end{cases}$$

$$A_d = e^{A_a \cdot h}$$

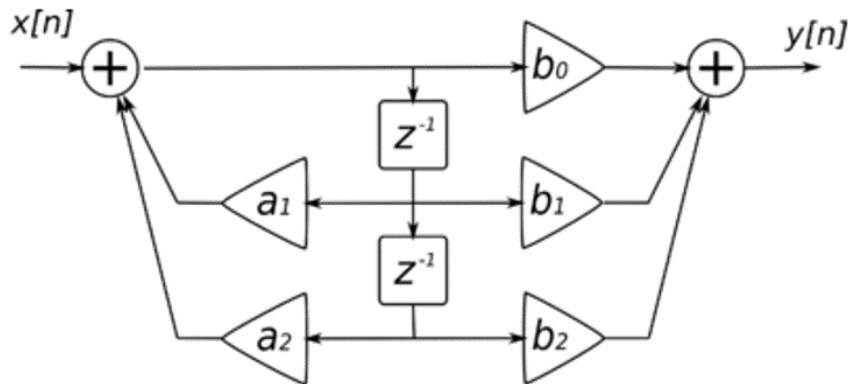
$$B_d = \int_0^h e^{A_a \cdot \tau} B \, d\tau$$

$$\begin{cases} \vec{x}[k+1] = A_d \vec{x}[k] + B_d u[k] \\ y[k] = C_d \vec{x}[k] + D_d u[k] \end{cases}$$

7.7 Conseils pour l'implémentation (2/2)

- Simuler d'abord l'effet de quantification (word length) [Matlab/Simulink](#) : "fixed point toolbox" avant d'implémenter.
- Simuler également l'effet de bruit de mesure et l'effet d'incertitude dans les paramètres du système à régler (erreurs de modélisation) avant d'implémenter.
- La génération de code automatique peut simplifier l'implémentation ([Matlab Coder/Embedded Coder/Simulink Coder](#))
- Si le régulateur comprend un intégrateur pur (action I), séparez celui-ci, et implémenter de manière séparée avec anti-windup et monitorage (seuil pour déclencher warning etc.)
- Éviter les "formes canoniques commandable/observable" c-à-d ne pas travailler avec les coefficients des polynômes surtout si l'ordre du régulateur est élevé. Le problème numérique fût observé la première fois par *Wilkinson*.
- Implémentation dans l'espace d'état avec des matrices pleines est nettement mieux conditionné, mais le temps de calcul est lourd.
- Bon compromis : implémentation "*BIQUAD*" : mise en cascade de systèmes d'ordre 2, regroupement de pôles et zéros proches dans le même étage *BIQUAD*

7.7.1 Biquad - mise en cascade de fonctions de transfert d'ordre 2



L'avantage de l'implémentation *Biquad* est qu'elle est numériquement plus stable.

Numériquement stable :

Un système est numériquement stable si la matrice du système comporte le moins possible, et au mieux aucun zéros. Cela évite les erreurs d'arrondis dû aux méthodes de résolutions numériques.

7.8 Motivation : valeurs singulières d'une matrice

- Comment déterminer si un système est bien commandable ?
(notion quantitative, pas seulement oui/non)

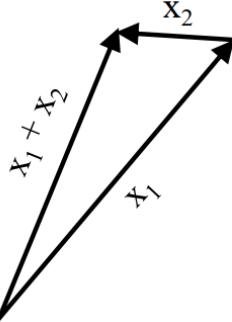
- Comment déterminer de manière robuste le rang d'une matrice ?
(le résultat devrait pas dépendre de petites erreurs de modélisation)
- Déterminer si l'inversion d'une matrice est bien conditionnée ?
- Pour un système multivariable (MIMO) qu'est-ce qu'il faudrait tracer dans le diagramme de Bode comme équivalent du module ?

valeurs singulières d'une matrice = amplification directionnelle !

7.9 Rappel normes : à quoi ça sert...

- **longueur** $\|\mathbf{x}\|$ d'un vecteur \mathbf{x}
 - **distance** entre deux vecteurs $\text{dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$
(notion de proximité, **métrique** ...)
 - norme **euclidienne** liée à la notion d'énergie
 - normes sont indispensables, p.ex. pour formuler des
 - problèmes **d'optimisation**
 - problèmes **d'approximation**
- axiomes

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x}$
 - inégalité du **triangle** : $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|$
 - étirement : $\|k \mathbf{x}\| = |k| \|\mathbf{x}\|$

k : scalaire
- 

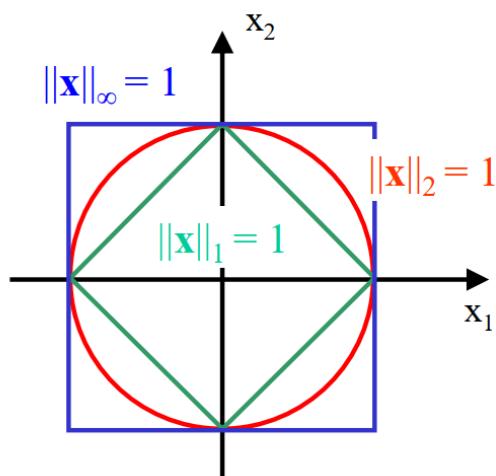
7.9.1 Normes de vecteurs

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots$$

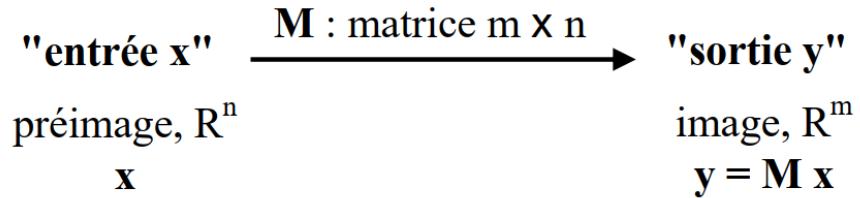
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots}$$

$$= \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (\text{norme euclidienne, produit scalaire})$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots)$$



7.9.2 Normes de matrices



norme induite : amplification maximale = val. sing. maximale

$$\|\mathbf{M}\|_2 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{M} \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sigma_1 = \sigma_{\max}$$

σ_1 valeur singulière la plus élevée, demi axe paraboloïde la plus élevé \rightarrow amplification maximal !

7.10 Décomposition en valeurs singulières (SVD)

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad [\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{M})$$

$m \times n$ ($m \times m$) ($m \times n$) ($n \times n$)

Avec : \mathbf{U} et \mathbf{V} : matrices orthogonales (unitaires)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{U} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{S} &= \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{n \text{ col.}} \\ m \text{ lignes} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Valeurs singulières :
 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$

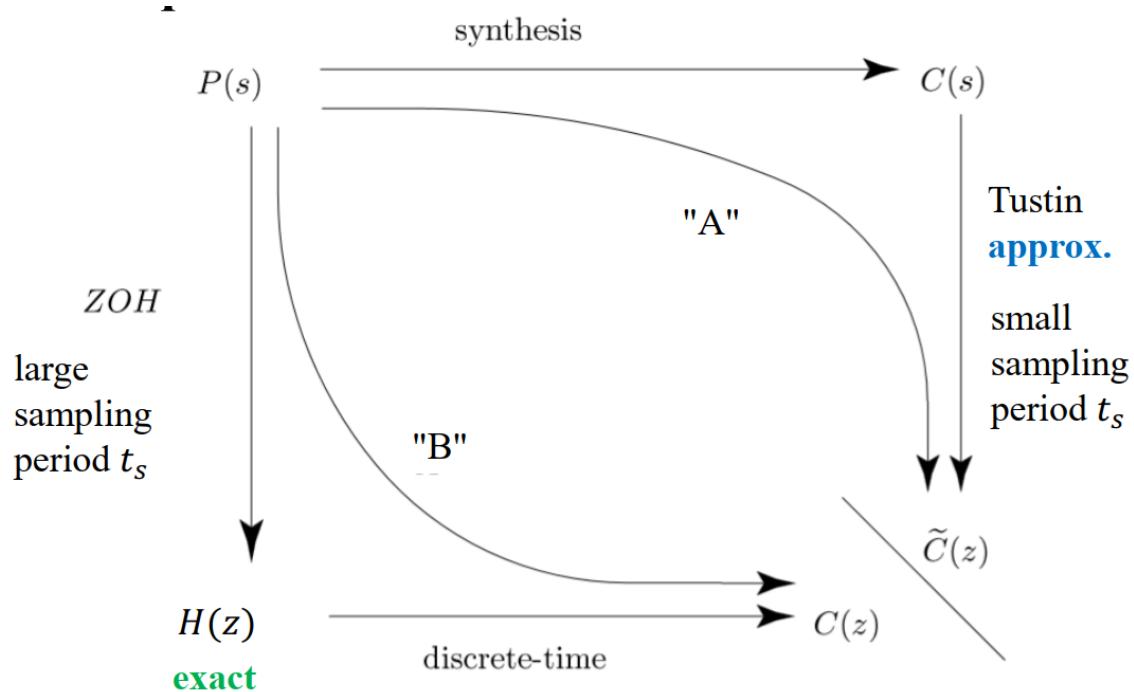
8 S8 - Valeurs singulières et vecteurs singuliers

8.1 Contenu du cours

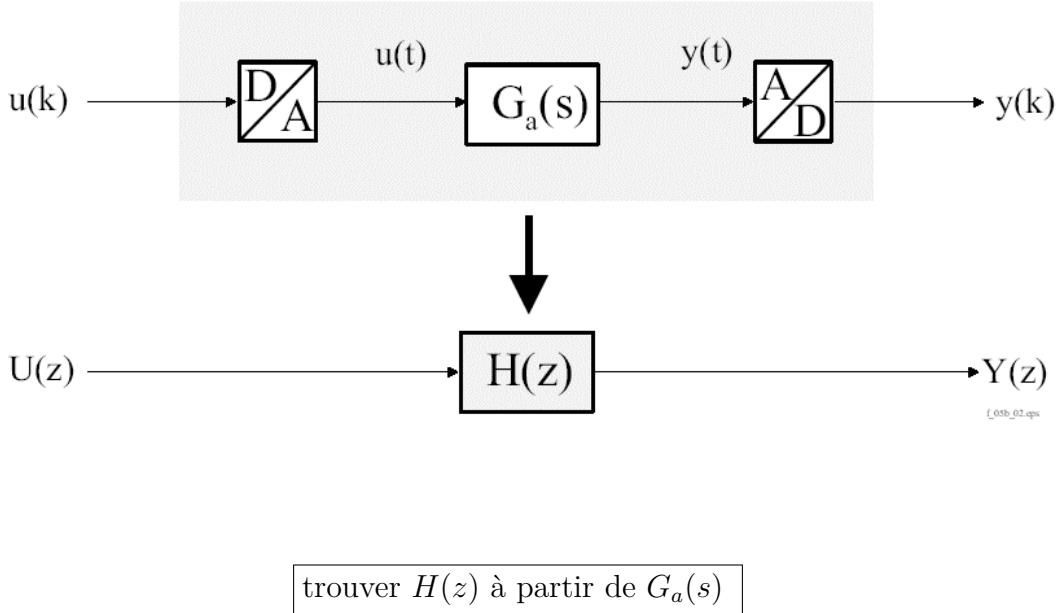
1. Rappel cours 7, exercices série 7
2. Valeurs singulières, décomposition SVD
3. Introduction systèmes non-linéaires
 - Points d'équilibre
 - Linéarisation autour d'un point d'équilibre

8.2 Rappel cours 7

8.2.1 Deux approches pour la synthèse d'un régulateur numérique



8.2.2 Modèle échantillonné du système à régler



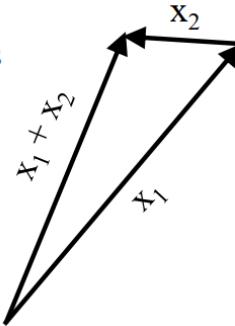
8.2.3 Motivation : valeurs singulières d'une matrice

- Comment déterminer si un système est bien commandable ?
(notion quantitative, pas seulement oui/non)
- Comment déterminer de manière robuste le rang d'une matrice ?
(le résultat devrait pas dépendre de petites erreurs de modélisation)
- Déterminer si l'inversion d'une matrice est bien conditionnée ?
- Pour un système multivariable (MIMO) qu'est-ce qu'il faudrait tracer dans le diagramme de Bode comme équivalent du module ?

valeurs singulières d'une matrice = amplification directionnelle !

8.3 Rappel normes : à quoi ça sert...

- **longueur** $\|\mathbf{x}\|$ d'un vecteur \mathbf{x}
 - **distance** entre deux vecteurs $\text{dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$
(notion de proximité, **métrique** ...)
 - norme **euclidienne** liée à la notion d'énergie
 - normes sont indispensables, p.ex. pour formuler des
 - problèmes **d'optimisation**
 - problèmes **d'approximation**
- axiomes**
- $$\left[\begin{array}{l} \bullet \|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \\ \bullet \text{inégalité du triangle : } \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\| \\ \bullet \text{étirement : } \|k\mathbf{x}\| = |k| \|\mathbf{x}\| \end{array} \right. \quad k : \text{scalaire}$$

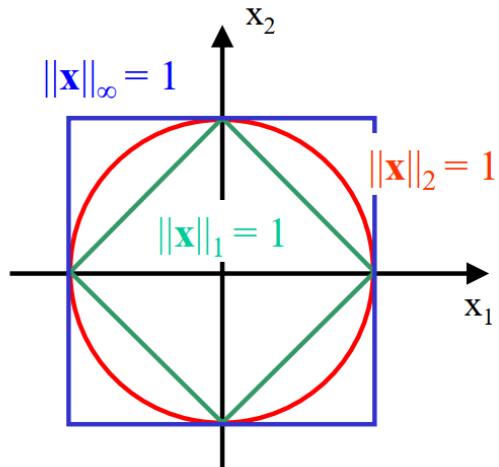


8.3.1 Normes de vecteurs

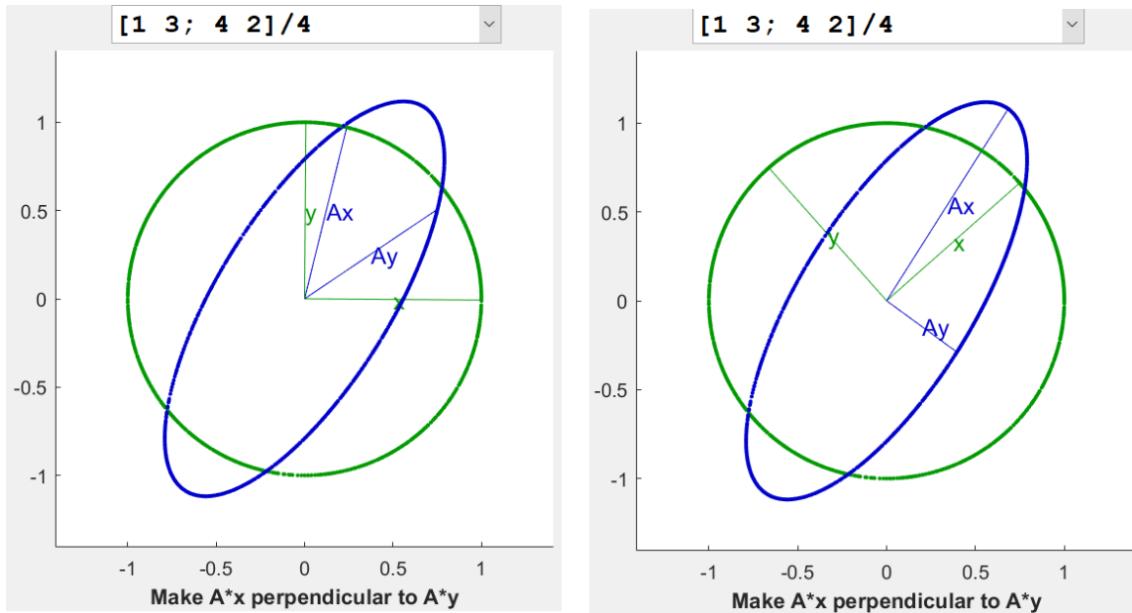
$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots} \\ &= \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (\text{norme euclidienne, produit scalaire}) \end{aligned}$$

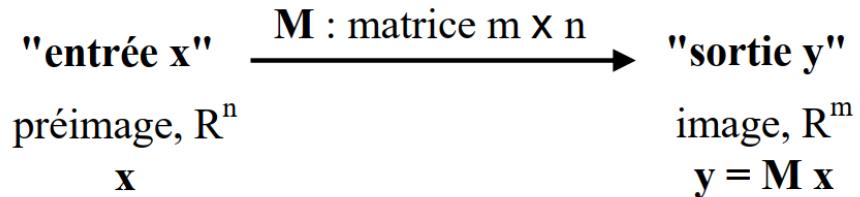
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots)$$



8.4 Image du cercle unité (hypersphère unité)



8.5 Normes de matrices



norme induite : amplification maximale = val. sing. maximale

$$\|\mathbf{M}\|_2 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{M} \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sigma_1 = \sigma_{\max}$$

$\boxed{\sigma_1}$: Valeur singulière la plus élevée, demi axe paraboloïde la plus élevé \rightarrow amplification maximal !

8.6 Amplification maximale et minimale

Définition équivalente de l'amplification maximale = σ_{\max}

$$\sigma_{\max}(M) = \max_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_2$$

Définition de l'amplification minimale = σ_{\min}

$$\sigma_{\min}(M) = \min_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_2$$

8.6.1 Cas particuliers

$$M \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

$$x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow x \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Un cas particulier d'une matrice est un vecteur ligne ou vecteur colonne.

Un cas particulier d'un vecteur est un scalaire.

Que se passe-t-il si on applique notre nouvelle définition de la norme d'une **matrice** à un vecteur ou bien à un scalaire ?

$$\sigma(3) = 3 \quad \sigma(-3) = 3 \quad \sigma(m) = |m|, \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{\|x \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{\cancel{|x|} \|\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\|_2}{\cancel{|x|}} = \|\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

La valeur singulière σ_{\max} généralise la valeur absolue et la norme euclidienne !

8.6.2 repères orthonormés - matrices orthogonales

Repères orthonormés :

Un repère orthonormés est un ensemble de vecteurs qui sont mutuellement perpendiculaire dont chaque vecteur est un vecteur unité (norme unitaire).

L'idée est de généraliser la propriété :

$$\vec{v}_i^T \vec{v}_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq k \\ 1 & \text{pour } i = k \end{cases}$$

Un moyen de condenser cette information est de construire une matrice dont les colonnes sont formées d'un ensemble de vecteur $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{Repère orthonormé} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}}$$

$$\text{Matrice orthogonale} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}}$$

Exemple matrice de rotation :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}}$$

$$\vec{v}_i \perp \vec{v}_k \quad i \neq k \quad \Rightarrow \vec{v}_i^T \vec{v}_k = 0 \quad i \neq k$$

$$\|\vec{v}_i\| = 1 \Leftrightarrow \vec{v}_i^T \vec{v}_i = 1$$

$$\vec{v}_i^T \vec{v}_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq k \\ 1 & \text{pour } i = k \end{cases} \quad V = \left[\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \dots \mid \vec{v}_n \right]$$

$$\begin{aligned} \text{repère orthonormé} &\Leftrightarrow \boxed{V^T V = \mathbf{I}} \\ \text{matrice orthogonale} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^T V V^{-1} &= I V^{-1} \\ \boxed{V^T = V^{-1}} & \end{aligned}$$

8.7 Factorisation (décomposition) SVD de matrices

Une factorisation (décomposition) d'une matrice permet d'exprimer la matrice comme **produit** de matrices ayant des **propriétés particulières**.

Il existe de nombreuses factorisations de matrices, p.ex. LU, QR, etc ayant beaucoup d'applications pratiques.

La **SVD** (singular value decomposition) est la factorisation suivante :

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \ \mathbf{S} \ \mathbf{V}^T$$

$$m \times n \quad (m \times m) (m \times n) (n \times n)$$

\mathbf{U} : orthogonal, comportant en colonnes les vecteurs singuliers "image"

\mathbf{V} : orthogonal, comportant en colonnes les vecteurs singuliers "pré-image"

\mathbf{S} : diagonal, comportant sur la diagonale les valeurs singulières

8.7.1 Décomposition en valeurs singulières (SVD)

MatLab : `[U, S, V] = svd(M);`

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad [\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{M})$$

$$m \times n = (m \times m)(m \times n)(n \times n)$$

Avec : \mathbf{U} et \mathbf{V} : matrices orthogonales (unitaires)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{U} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I} \\ \text{Valeurs singulières : } \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \\ \mathbf{S} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{m \text{ lignes}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{SVD : } \mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n] \quad : \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I} \\ \mathbf{U} = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n] \quad : \quad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \end{array}$$

Constat :

$$\mathbf{M}\vec{v}_1 = \sigma_1\vec{u}_1 \quad : \text{amplification max}$$

$$\mathbf{M}\vec{v}_2 = \sigma_2\vec{u}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{M}\vec{v}_n = \sigma_n\vec{u}_n \quad : \text{amplification min}$$

8.7.2 Explication « *vecteurs singuliers* »

Les n colonnes de \mathbf{V} définissent un repère orthonormal dans l'espace **pré-image** R^n

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$$

Les m colonnes de \mathbf{U} définissent un repère orthonormal dans l'espace **image** R^m

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m]$$

On peut facilement montrer que l'image $\mathbf{M} \mathbf{v}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1$,
 $\mathbf{M} \mathbf{v}_2 = \sigma_2 \mathbf{u}_2$, etc.

8.7.3 Amplification directionnelle

Selon le choix de la **direction** du vecteur d'entrée (préimage) \mathbf{x} , la matrice \mathbf{M} amplifie **différemment** la norme du vecteur image $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{M} \mathbf{x}\|$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

$\|\mathbf{M}\|_2 = \sigma_1 = \bar{\sigma}$ **amplification maximale = norme euclidienne induite de M**

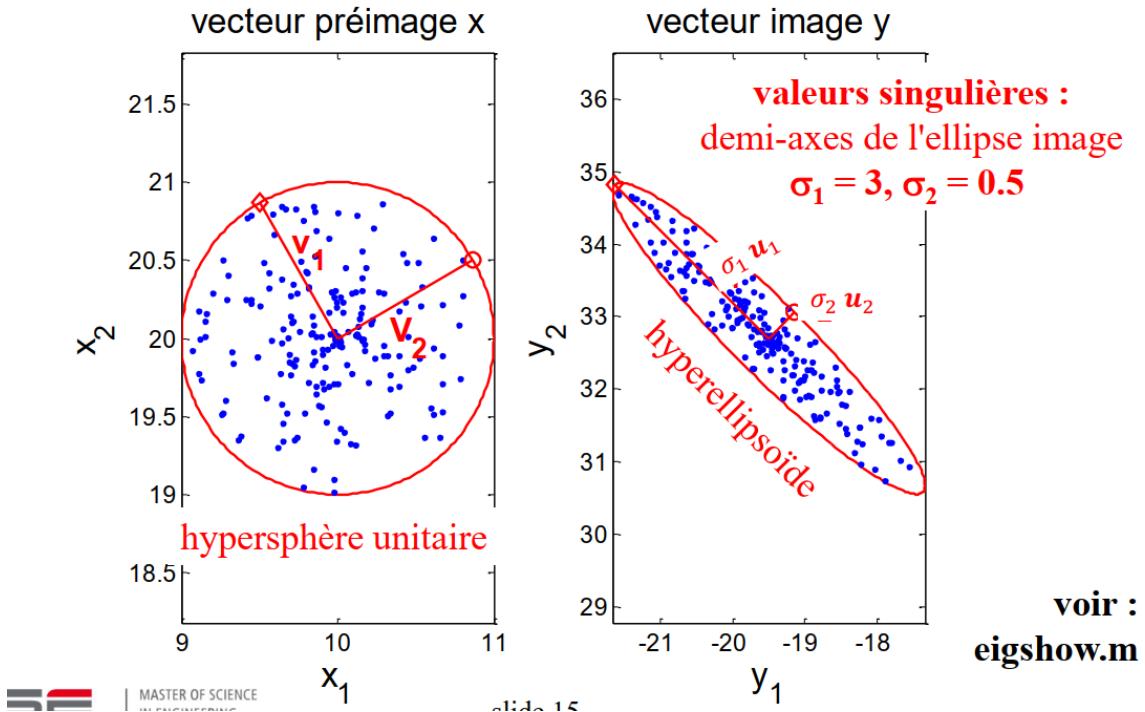
$\sigma_n = \underline{\sigma}$ **amplification minimale**

$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m]$ vecteurs singuliers **gauches**

$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ vecteurs singuliers de **sortie**

vecteurs singuliers **droits**
vecteurs singuliers **d'entrée**

8.7.4 Interprétation géométrique de la SVD



Interprétation géométrique de la SVD :

- En multipliant par une matrice \mathbf{M} de taille $m \times n$, la hypersphère unité dans \mathbb{R}^n est transformée en hyperellipsoïde dans \mathbb{R}^m .
- La longueur des demi-axes de cet hyperellipsoïde correspondent aux valeurs singulières $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots$
- La direction des demi-axes de l'hyperellipsoïde est donné par le repère orthonormé $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots$ correspondant aux colonnes de \mathbf{U}
- Le repère **pré-image** orthonormé est donné par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$ correspondant aux colonnes de \mathbf{V}
- L'image de \vec{v}_1 correspond à $\mathbf{M}\vec{v}_1 = \sigma_1\vec{u}_1$, etc.

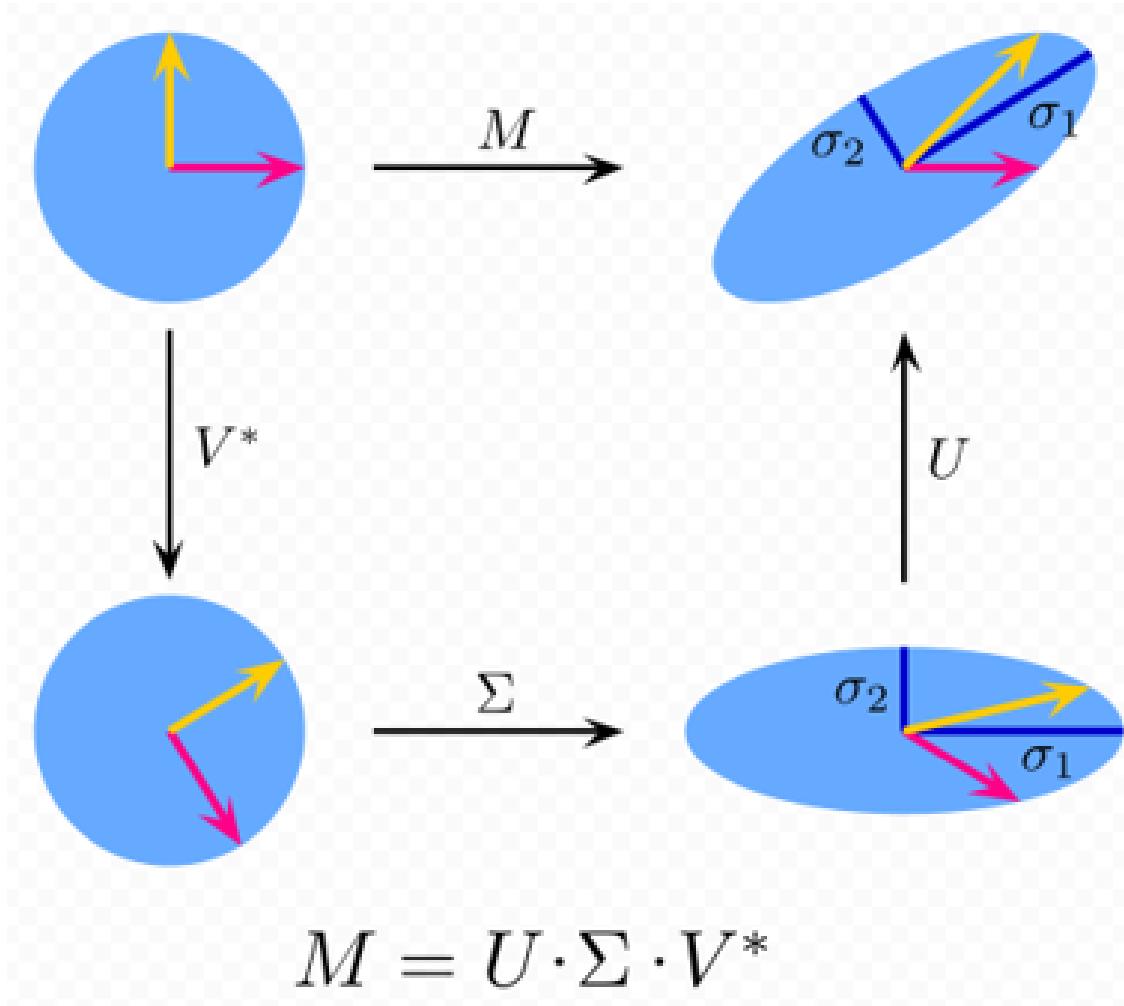
8.7.5 Conclusion

La **décomposition en valeurs singulières** (ou **SVD**, de l'anglais *singular value decomposition*) est un outil important de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes.

Les valeurs singulières et les vecteurs singulier permet de donner une valeurs quantitative permettent de décrire l'observabilité ou la commandabilité d'un système.

Cette outil est particulièrement utile pour la régulation, le traitement de signal, la statistique et l'intelligence artificielle pour la classification.

8.8 Effet de la transformation M



$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{U}}_{\text{Rot}} \underbrace{\mathbf{S} \mathbf{V}^T}_{\text{Etirement}} \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Rot}}$$

La transformation définie par M déforme le **cercle unitaire** bleu ci-dessus à gauche en une **ellipse** dans le coin supérieur droit de l'image.

La transformation M peut alors être décomposée en une **rotation** V^* suivie d'une **compression ou étirement** Σ le long des axes de coordonnées suivie en fin d'une nouvelle **rotation** U .

Les valeurs singulières σ_1 et σ_2 correspondent aux longueurs des grand et petit axes de l'ellipse.

8.9 Différences entre valeurs singulières (*svd*) et valeurs propres (*eig*)

- Les valeurs propres n'existent que pour des matrices carrées, alors que les valeurs singulières existent pour des matrices rectangulaires
- Les valeurs singulières sont toujours réelles et **positives**, alors que les valeurs propres peuvent être négatives ou complexes
- Pour des matrices carrés symétriques et positives définis, les deux notions "**valeurs singulières**" et "**valeurs propres**" coïncident !
- $\text{svd} = \sqrt{\text{eig}(M^T M)} \iff \text{svd} = \text{sqrt}(\text{eig}(M^T M))$

8.10 Rang d'une matrice, conditionnement

Rappel : L'inverse d'une matrice orthogonale est égale à sa transposé !

- Le rang d'une matrice = nombre de valeurs singulières non-nulles.
- Si p.ex. la valeur singulière la plus petite σ_{\min} est **presque nulle**, l'image de la hyper-sphère unité dans l'espace pré-image donne une hyper-ellipse « écrasée », et la matrice est proche d'une **perte de rang**.
- Le conditionnement d'une matrice est défini par le ratio entre la plus grande et la plus petite valeur singulière.

$$\text{cond}(M) = \frac{\sigma_{\max}(M)}{\sigma_{\min}(M)}$$

- Pour une matrice carré inversible, les valeurs singulières de l'inverse d'une matrice correspondent aux valeurs réciproques des valeurs singulières de la matrice d'origine.

$$\sigma_{\max}(M^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(M)}$$

Pour savoir si une matrice est inversible, il faut toujours utiliser les valeurs singulières !!!

Ne jamais utiliser le déterminant !

8.11 Autre propriétés importantes de la *SVD*

lien entre valeurs singulières et valeurs propres :

- Valeurs singulières applicable pour n'importe quelle taille de matrice
- Valeurs propres que applicable pour des matrices de taille carrée
- les valeurs singulières sont des nombres réels positifs ≥ 0
- Les valeurs propres peuvent être réels (pos/nég) ou complexes
- $\sigma_k(M) = \sqrt{\lambda_k(M^T M)}$
ce qui explique que les valeurs singulières sont ≥ 0

- $\det(M) = \prod_{k=1 \dots n} \sigma_k(M)$ pour une matrice carrée M ce qui explique que le déterminant peut être très loin de zéro alors que la matrice n'est presque pas inversible

8.12 diagramme de Bode multivariable (sigma plot)

Pour une matrice de transfert $G(j\omega)$ d'un système multivariable (MIMO), les valeurs singulières de G dépendent de la fréquence (resp. pulsation).

On les affiche en dB sur une axe logarithmique en rad/s ou Hz.

Command Matlab : [sigma\(sys\)](#)

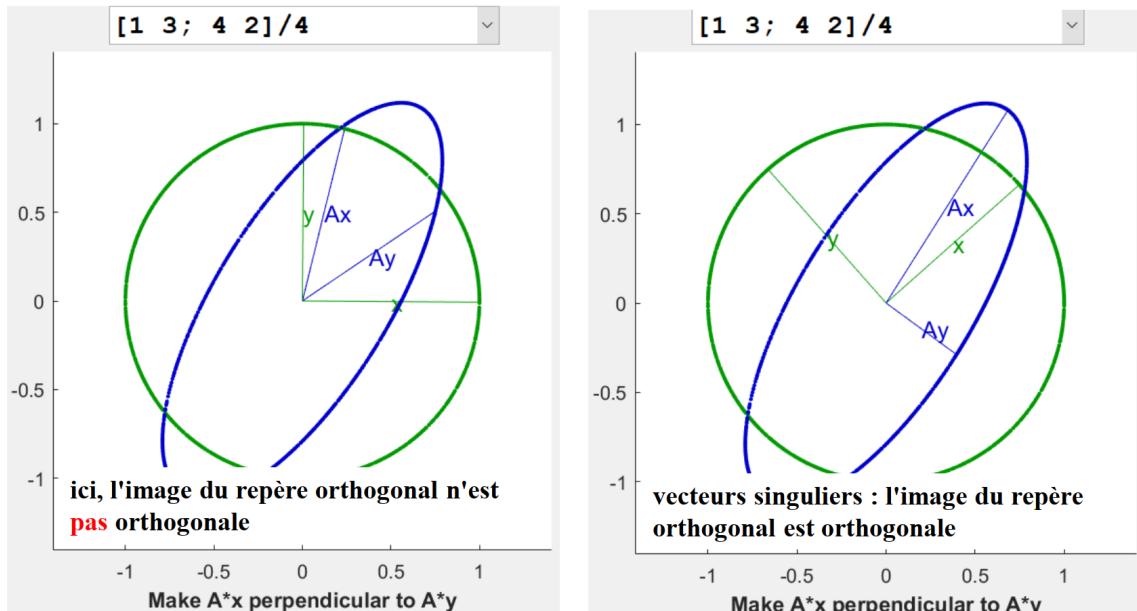
9 S9

9.1 Contenu

1. Rappel cours 8 : décomposition SVD, exercices série 8
2. Systèmes non-linéaires
 - points d'équilibre (points de fonctionnement)
 - linéarisation autour d'un point d'équilibre (Taylor multi-variable)
 - redressement (compensation) de la non-linéarité par feedback
 - effets spéciaux de systèmes non-linéaires

9.2 Rappel cours 8

9.2.1 Image du cercle unité (hypersphère unité)



9.2.2 Amplification maximale et minimale

Définition équivalente de l'amplification maximale = σ_{max}

$$\sigma_{max}(M) = \max_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_2$$

Définition de l'amplification minimale = σ_{min}

$$\sigma_{min}(M) = \min_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_2$$

9.3 Factorisation (décomposition) SVD de matrices

SVD (Singular value decomposition) : https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition

SVD (Décomposition en valeurs singulières) : https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9composition_en_valeurs_singuli%C3%A8res

La **SVD** (singular value decomposition) est la factorisation suivante :

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \ \mathbf{S} \ \mathbf{V}^T$$

$m \times n$ ($m \times m$) ($m \times n$) ($n \times n$)

\mathbf{U} : orthogonal, comportant en colonnes les vecteurs singuliers "image"

\mathbf{V} : orthogonal, comportant en colonnes les vecteurs singuliers "pré-image"

\mathbf{S} : diagonal, comportant sur la diagonale les valeurs singulières, triées par ordre descendant

9.3.1 décomposition en valeurs singulières (SVD)

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \ \mathbf{S} \ \mathbf{V}^T \quad [\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{M});$$

$m \times n$ ($m \times m$) ($m \times n$) ($n \times n$)

\mathbf{U} et \mathbf{V} : matrices orthogonales (unitaires)

$$\mathbf{U}^T \ \mathbf{U} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{V}^T \ \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

valeurs singulières :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Réécriture de la relation

$$M = USV^T$$

$$M = \begin{matrix} & U & S & V^T \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ mtxorthomtxdiagmtxorthotransp & & & \end{matrix}$$

avec : $U = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \dots \quad \vec{u}_n]$

$$M\vec{x} = \sigma_1 \underbrace{\vec{u}_1 \vec{v}_1^T \vec{x}}_{\substack{\text{mtx rang 1} \\ \text{scalair}}} + \sigma_2 \underbrace{\vec{u}_2 \vec{v}_2^T \vec{x}}_{\substack{\text{mtx rang 1} \\ \text{scalair}}} + \dots + \sigma_n \underbrace{\vec{u}_n \vec{v}_n^T \vec{x}}_{\substack{\text{mtx rang 1} \\ \text{scalair}}}$$

9.3.2 amplification directionnelle

amplification directionnelle

Selon le choix de la **direction** du vecteur d'entrée (préimage) \mathbf{x} , la matrice \mathbf{M} amplifie **différemment** la norme du vecteur préimage $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{M} \mathbf{x}\|$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

$\|M\|_2 = \sigma_1 = \bar{\sigma}$ **amplification maximale = norme euclidienne induite de M**

$\sigma_n = \underline{\sigma}$ **amplification minimale**

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{u}_m] \quad \begin{array}{l} \text{vecteurs singuliers \textcolor{red}{gauches}} \\ \text{vecteurs singuliers de \textcolor{red}{sortie}} \end{array}$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_n] \quad \begin{array}{l} \text{vecteurs singuliers \textcolor{red}{droits}} \\ \text{vecteurs singuliers \textcolor{red}{d'entrée}} \end{array}$$

9.3.3 Rang d'une matrice, conditionnement

- Le **rang** d'une matrice = nombre de valeurs singulières non-nulles.
- Si p.ex. la valeur singulière la plus petite σ_{\min} est **presque zéro**, l'image de la hyper-sphère unité dans l'espace préimage donne une hyper-ellipse « écrasée », et la matrice est proche d'une **perte de rang**.
- Le **conditionnement** d'une matrice est défini par le ratio entre la plus grande et la plus petite valeur singulière.

$$\text{cond}(M) = \frac{\sigma_{\max}(M)}{\sigma_{\min}(M)}$$

- Pour une matrice carré inversible, les valeurs singulières de l'inverse d'une matrice correspondent aux valeurs réciproques des valeurs singulières de la matrice d'origine.

$$\sigma_{\max}(M^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(M)}$$

Exercice

$$M = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \quad M = USV^T$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Trouver la décomposition SVD de la matrice **inverse** : $M^{-1} = \tilde{U} \tilde{S} \tilde{V}^T$

$$\tilde{U} = \quad \tilde{S} = \quad \tilde{V} =$$

9.3.4 Autre propriétés importantes de la SVD

lien entre valeurs singulières et valeurs propres :

- valeurs singulières applicable pour n'importe quelle taille de matrice
- valeurs propres que applicable pour des matrices de taille carrée
- les valeurs singulières sont des nombres réels positifs ≥ 0

- les valeurs propres peuvent être réels (pos/nég) ou complexes
- $\sigma_k(M) = \sqrt{\lambda_k(M^T M)}$
Ce qui explique que les valeurs singulières sont ≥ 0
- $\det(M) = \prod_{k=1 \dots n} \sigma_k(M)$ pour une matrice carrée M
Ce qui explique que le déterminant peut être très loin de zéro alors que

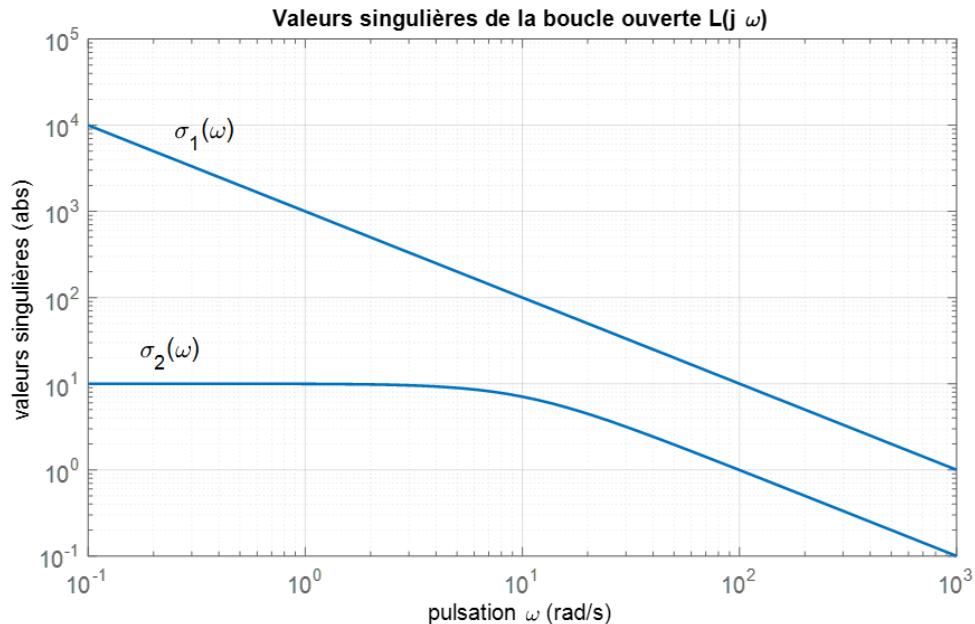
9.3.5 Diagramme de Bode multivariable (sigma plot)

Pour une matrice de transfert $H(j\omega)$ d'un système multivariable (MIMO), les valeurs singulières de G dépendent de la fréquence (respectivement la pulsation).

On les affiche en [dB] ou bien sur un axe vertical logarithmique.
L'axe horizontal est logarithmique, soit en [rad/sec] ou [Hz].

Command Matlab : [sigma\(sys\)](#)

L'information de la phase est perdue.
L'information des directions d'amplification est perdue.



$$G)s = \begin{bmatrix} \frac{10^3}{s} & 0 \\ 0 & \frac{10}{1+\frac{s}{10}} \end{bmatrix}$$

Équivalent à :

- Inversion :

$$G)s = \begin{bmatrix} \frac{10}{1+\frac{s}{10}} & 0 \\ 0 & \frac{10^3}{s} \end{bmatrix}$$

— Déphasage :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{1+\frac{s}{10}} e^{-Tr_1 s} & 0 \\ 0 & \frac{10^3}{s} e^{-Tr_2 s} \end{bmatrix}$$

— Changement de direction :

$$G(s) = U(s) \begin{bmatrix} \frac{10}{1+\frac{s}{10}} e^{-Tr_1 s} & 0 \\ 0 & \frac{10^3}{s} e^{-Tr_2 s} \end{bmatrix} V^T(s)$$

Avec : $UV^T = I$ et $UV^T = I$

Manière la plus simple de représenter un système multivariable, il y a cependant une perte d'information. En effet, on ne connaît ni la phase, ni, la direction dans lequel il y a l'amplification maximal (il nous manque les vecteurs singulier).

9.4 Points d'équilibre / points de fonctionnement

On appelle \vec{x}_e un **point d'équilibre** du système dynamique non-linéaire :

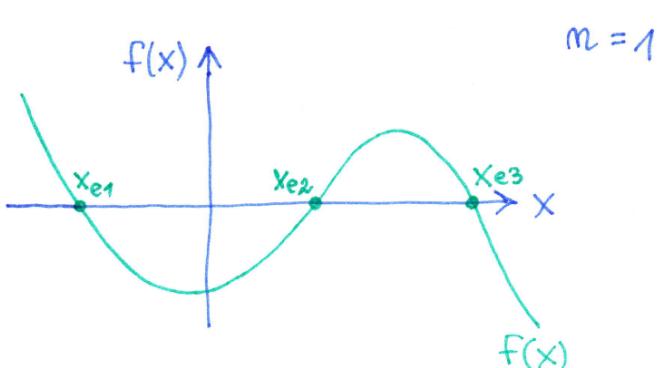
$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

si $\vec{f}(\vec{x}_e) = \vec{0}$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), u(t)) \quad \vec{f}(\vec{x}_e, u_e) = \vec{0}$$

Le "point de fonctionnement" dépend de l'entrée : $\vec{x}_e(u_e)$

9.5 Système non-linéaire d'ordre 1



Un système non-linéaire peut avoir **plusieurs** points d'équilibres !

Exemple : pendule → un point d'équilibre **stable en bas** et un point d'équilibre **instable en haut**.

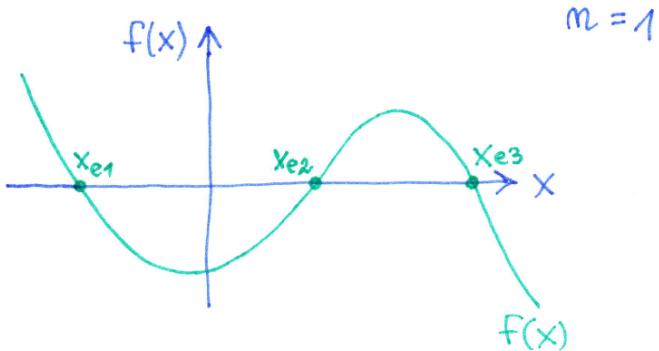
9.5.1 Le calcul d'un point d'équilibre

Résolution d'un système "implicite" : $\vec{f}(\vec{x}_e) = \vec{0}$
Trouver le zéro de la fonction $f(x)$!

Souvent pas de solution analytique !

Méthode numérique itérative de Newton-Raphson permet de trouver le zéro d'une fonction à partir d'une valeur de départ approximative ("initial guess")

9.6 Approximation locale par Taylor (linéarisation)



La tangente approxime localement la fonction $f(x)$

9.6.1 Nouvelle variable d'état : la "déviation" autour du point d'équilibre

Rappel : x_e correspond au point d'équilibre, donc la dérivé temporel de x_e est nul !

$$\begin{aligned}\vec{\Delta x} &= \vec{x} - \vec{x}_e \\ \dot{\vec{\Delta x}} &= \dot{\vec{x}} - \vec{0} = \dot{\vec{x}}\end{aligned}$$

Taylor mono-variable :

$$f(x_e + \Delta x) \approx f(x_e) + \frac{df}{dx}(x_e) \cdot \Delta x + \dots$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ \dot{\Delta x} &\approx \underbrace{f(x_e)}_0 + \underbrace{\frac{df}{dx}(x_e)}_a \Delta x\end{aligned}$$

Finalement le système devient linéaire :

$$\dot{\Delta x} = a \cdot \Delta x$$

9.6.2 Taylor multivariable

$$\vec{f}(\vec{x}_e + \Delta\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_e) + \nabla \vec{f} \Big|_{\vec{x}_e} \Delta\vec{x}$$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$
matrice jacobienne évaluée à x_e

$$\vec{f}(\vec{x}_e + \Delta\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_e) + \underbrace{\nabla \vec{f} \Big|_{\vec{x}_e}}_{\text{mtx jacobienne}} \Delta\vec{x}$$

9.7 Stabilité locale des points d'équilibres d'un système non-linéaire d'ordre n

$$\dot{\Delta\vec{x}} = A\Delta\vec{x}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

9.8 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

- Si le système linéarisé est asymptotiquement stable (toutes les valeurs propres de A dans le demi-plan gauche), alors le point d'équilibre x_e du système non-linéaire est localement stable.
- Si le système linéarisé est instable (une ou plusieurs valeurs propres de A dans le demi-plan droit), alors le point d'équilibre x_e du système non-linéaire est également instable.
- Si le système linéarisé est marginalement stable (valeurs propres de A sur l'axe imaginaire), alors on ne peut rien conclure sur le comportement du système non-linéaire.

9.8.1 Récapitulatif des système non-linéaire :

Système non-linéaire :

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

Linéarisation autour d'un point de fonctionnement (point d'équilibre) :

$$\vec{f}(\vec{x}_e) = \vec{0}$$

Système linéarisé : $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_e$

$$\dot{\Delta\vec{x}} = A\Delta\vec{x}$$

1. Système linéarisé stable \Rightarrow point d'équilibre du système non-linéaire est localement stable
2. Système linéarisé instable \Rightarrow point d'équilibre du système non-linéaire est localement instable
3. Système linéarisé marginalement stable \Rightarrow aucune conclusion possible

9.9 Linéarisation d'un système non-linéaire avec entrée

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{f}(\vec{x}, u) & \vec{f}(\vec{x}_e, u_e) &= \vec{0} \\ A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \Big|_{\vec{x}_e, u_e} &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] & B = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u} \Big|_{\vec{x}_e, u_e} &= \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\Delta\vec{x} + B\Delta u$$

9.10 Synthèse d'un régulateur basé sur un modèle linéarisé

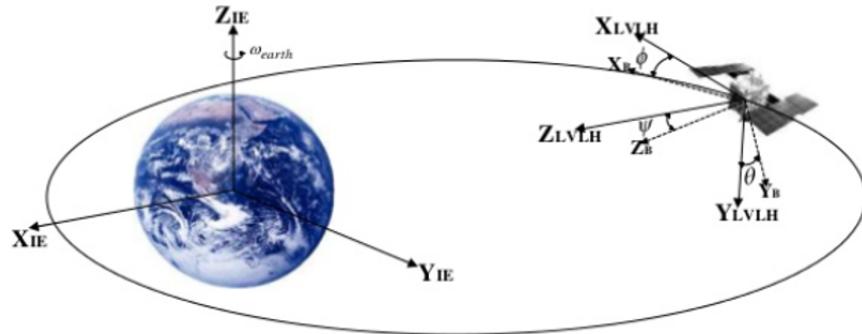
Que faire si le point de fonctionnement (point d'équilibre) varie ?

S'il varie lentement, on peut changer les paramètres du régulateur en fonction du point de fonctionnement "gain scheduling" !

Si le système non-linéaire est bien connu, on peut aussi essayer de "redresser" les non-linéarités. Approche en deux étapes :

1. En utilisant un *feedback/feedforward* non-linéaire, rendre le système linéaire.
On essaye de compenser les non-linéarités
2. On obtient un nouveau système à régler qui est linéaire.
Méthodes de synthèse linéaire

9.11 Linéarisation autour d'une trajectoire périodique

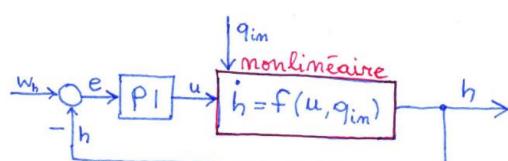
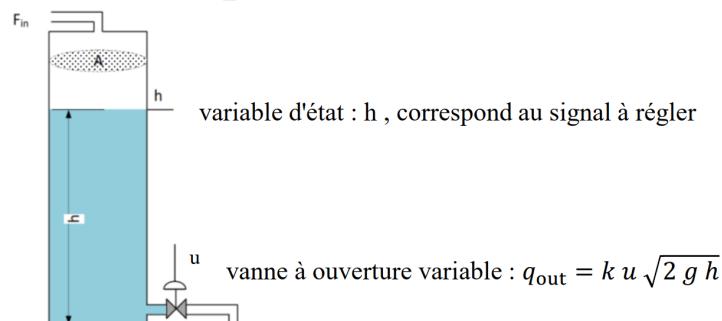


$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{\Delta x}(t)$$

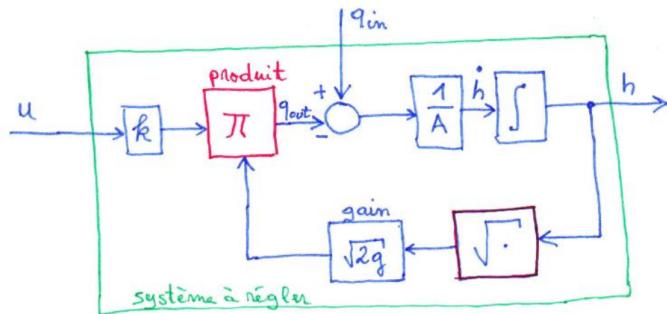
Le système linéarisé n'est plus LTI (linear time invariant), mais LTV (linear time variant), resp. LTP (linear time periodic).

9.12 Redressement de la non-linéarité : exemple

perturbation : débit entrant q_{in}



Problème :
le comportement dynamique
de la boucle fermée dépendra
du point de fonctionnement
c-à-d de la hauteur h !



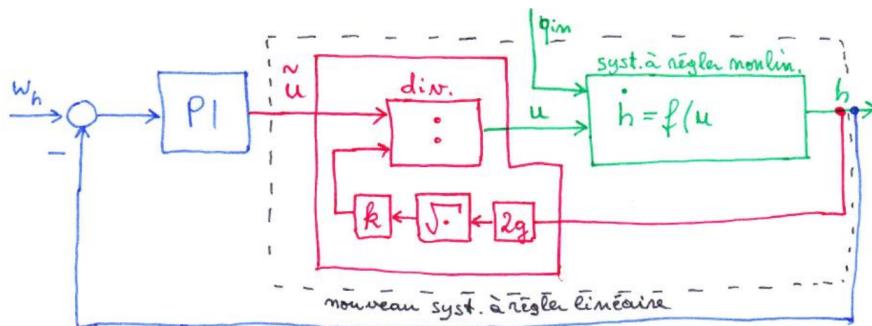
Idée : introduire un nouveau signal de commande \tilde{u}

$$u = \frac{\tilde{u}}{k \sqrt{2gh}}$$

$$q_{in} = k u \sqrt{2gh} = k \frac{\tilde{u}}{k \sqrt{2gh}} \sqrt{2gh}$$

$$q_{in} = \tilde{u} \text{ (linéaire)}$$

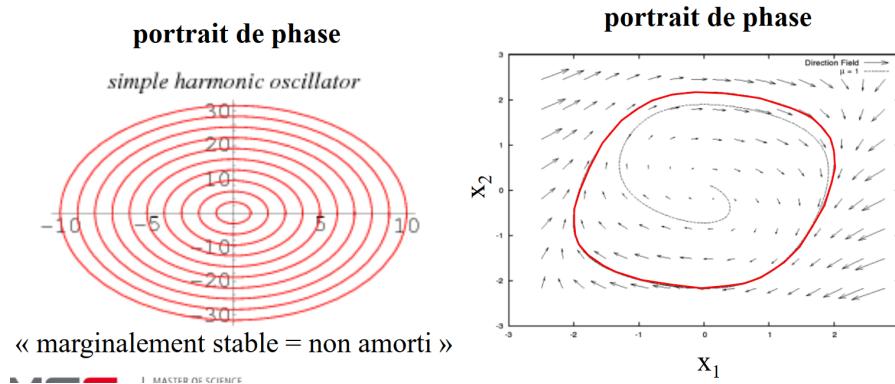
9.12.1 Redressement de la non-linéarité : "feedback linearization"



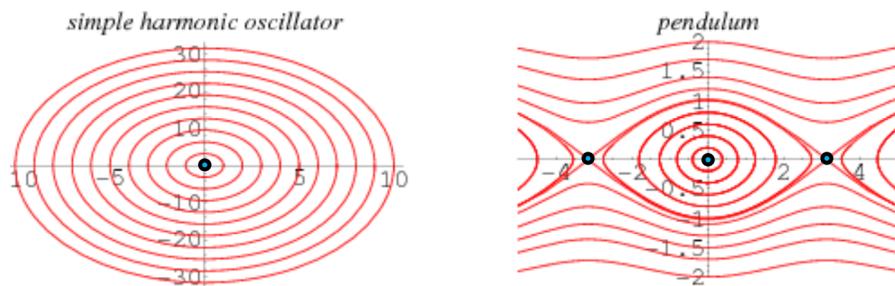
9.13 Effets observés dans les systèmes non-linéaires

systèmes linéaires	systèmes nonlinéaires
principe de superposition valable	NON !
domaine fréquentiel , fonctions de transfert, pôles, zéros	NON !
régime harmonique établi : réponse à la même fréquence	harmoniques (multiples) et/ou sub-harmoniques
comportement indépend du point de fonctionnement	comportement dépend du point de fonctionnement
nombre de points d'équilibre : normalement 1 = l'origine (exceptionnellement ∞ si A non inversible)	plusieurs points d'équilibre possibles
stabilité = notion globale	stabilité locale bassin d'attraction à déterminer

systèmes linéaires	systèmes nonlinéaires
oscillateur linéaire non amorti : amplitude de l'oscillation dépend de la condition initiale	cycles limites : amplitude de l'oscillation indépendant de la condition initiale



systèmes linéaires	systèmes nonlinéaires
oscillateur linéaire non amorti : la période d'oscillation est indépendante de la condition initiale	oscillateur nonlinéaire non amorti la période d'oscillation dépend de la condition initiale



10 S10 - Système non-linéaire - Identification

10.1 Contenu

1. Rappel cours 9, exercices série 9
2. Modèle échantillonné dans l'espace d'état avec un retard non multiple entier de h
3. Identification

10.2 Rappel Cours S9

10.2.1 Linéarisation d'un système non-linéaire avec entrée

Rappel :

Un point d'équilibre signifie que la dérivé \dot{x} qui correspond au point de fonctionnement $\vec{f}(\vec{x}_e, u_e)$ est nul. Soit : $\boxed{\vec{f}(\vec{x}_e, u_e) = \vec{0}}$

$$\begin{array}{ccc} \text{Système non-linéaire} & & \text{Sytème linéarisé} \\ \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, u) & \longrightarrow & \dot{\vec{x}} = A\Delta x + B\Delta u \end{array}$$

Méthode en résumé

1. Trouver les points d'équilibre du système : $\boxed{\vec{f}(\vec{x}_e, \vec{u}_e) = \vec{0}}$
2. Calculer les Jacobien du système :

$$A = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} = J_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad B = \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} = J_B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u} \end{bmatrix}$$

3. Linéariser le système au autours des points d'équilibre en évaluant le Jacobien du système au point d'équilibre x_{e1}, x_{e2}, \dots

$$J \Big|_{x_{en}} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \Bigg|_{x_{en}}$$

4. Le système linéaire trouvé est décrit par :

$$\boxed{\dot{\vec{x}} = A\Delta x + B\Delta u}$$

5. Est-ce que le point d'équilibre évalué x_{ek} est localement stable ?

Rappel : Si le **système linéarisé** est **globalement stable** → Le **système non-linéaire** est **localement stable** au point d'équilibre évalué.

Le système linéarisé est stable si ces valeurs propres λ_k se trouvent dans le demi plan gauche ⇒ $\boxed{\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0}$.

6. **Astuce** : Si la matrice du système linéarisé est triangulaire \rightarrow les valeurs propres correspondent à la diagonal de la matrice :

$$\lambda_k \Rightarrow \det(\lambda I - M) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda - a & 0 & 0 \\ b & \lambda - c & 0 \\ d & e & \lambda - f \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = c \\ \lambda_3 = f \end{cases}$$

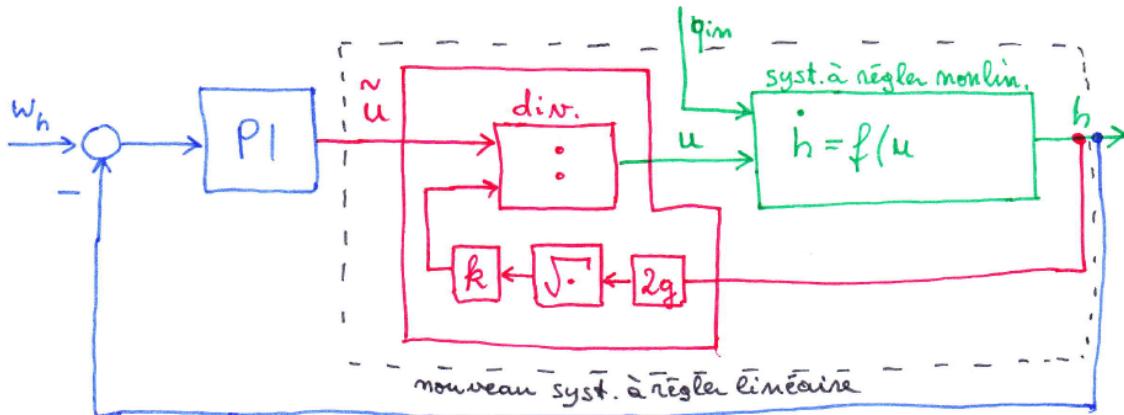
$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, u) \quad \vec{f}(\vec{x}_e, u_e) = \vec{0}$$

$$A = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_e, u_e} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \frac{\partial f_m}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{array} \right]_{\vec{x}_e, u_e}$$

$$B = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial u} \right|_{\vec{x}_e, u_e} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u} \end{array} \right]_{\vec{x}_e, u_e} \quad \dot{\Delta \vec{x}} = A \Delta \vec{x} + B \Delta u$$

slide 2

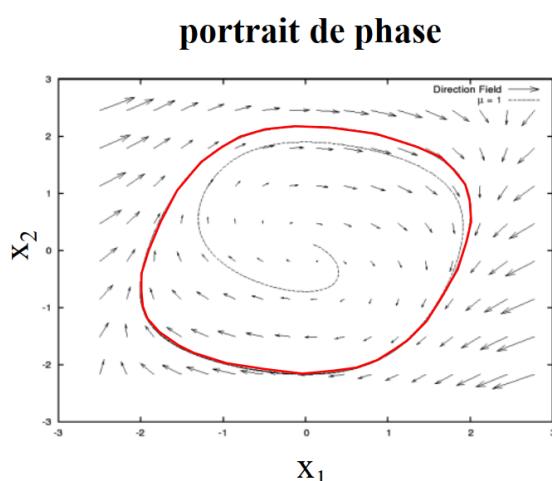
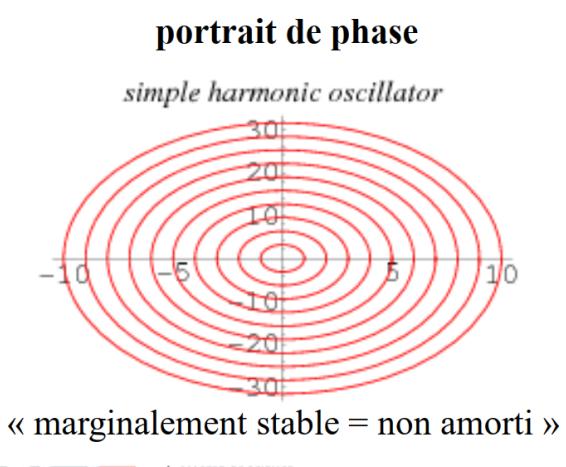
10.2.2 Redressement de la non-linéarité : "feedback linearization"



10.2.3 Effets observés dans les systèmes non-linéaires

systèmes linéaires	systèmes nonlinéaires
principe de superposition valable	NON !
domaine fréquentiel , fonctions de transfert, pôles, zéros	NON !
régime harmonique établi : réponse à la même fréquence	harmoniques (multiples) et/ou sub-harmoniques
comportement indépend du point de fonctionnement	comportement dépend du point de fonctionnement
nombre de points d'équilibre : normalement 1 = l'origine (exceptionnellement ∞ si A non inversible)	plusieurs points d'équilibre possibles
stabilité = notion globale	stabilité locale bassin d'attraction à déterminer

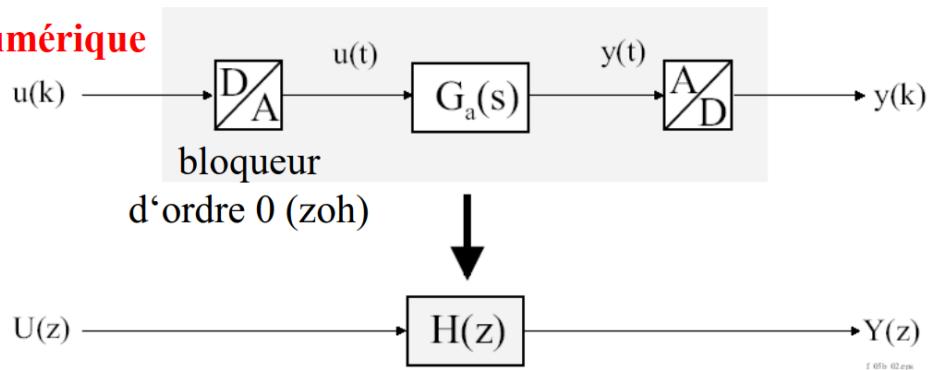
systèmes linéaires	systèmes nonlinéaires
oscillateur linéaire non amorti : amplitude de l'oscillation dépend de la condition initiale	Cycles limites : amplitude de l'oscillation indépendant de la condition initiale



On peut observer le phénomène de cycles limites dans les systèmes numériques. En effet les convertisseur AD/DA sont non linéaire et on peut observer un comportement de cycles limites sur les bits de poids faible.

10.3 Calcul de $H(z)$ basé sur la réponse impulsionale

Dirac numérique



$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G_a(s)}{s} \right) \right\}$$

10.4 Propriétés du "modèle échantillonné"

1. Les pôles analogiques s se transforment selon $z = e^{(hs)}$
Il n'y a pas de formule pour la transformation des zéros.
2. Le gain statique est préservé : $H(z = 1) = G_a(s = 0)$
3. Le modèle échantillonné $H(z)$ est linéaire en $G_a(s)$
Une somme $G_{a1}(s) + G_{a2}(s)$ donne $H_1(z) + H_2(z)$
Attention : Pas valable pour un produit !
4. Un retard pur d'un multiple entier N de périodes d'échantillonnages côté analogique, e^{-Nh} donne lieu à un facteur z^{-N} dans le modèle échantillonné.

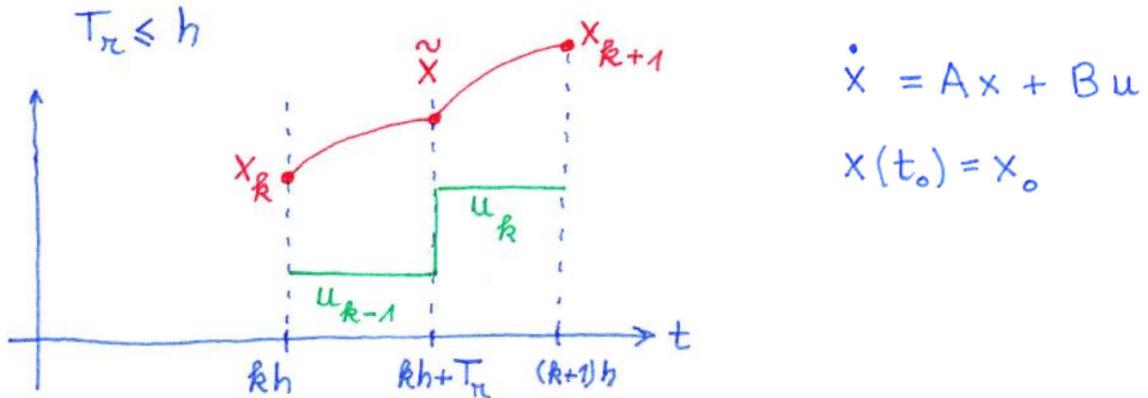
Retard pur analogique : Difficile à traiter $\Rightarrow [e^{-T_r \cdot j\omega} = e^{-T_r \cdot s}]$

$$e^{-T_r \cdot s} \underset{\text{approx Padé}}{\approx} \frac{1 - \frac{T_r}{2} \cdot s}{1 - \frac{T_r}{2} \cdot s}$$

$$|e^{-j\omega T_r}| = 1 \quad |e^{j\phi}| = 1$$

$$\phi = \arg(e^{-T_r \cdot j\omega}) = -T_r \cdot \omega$$

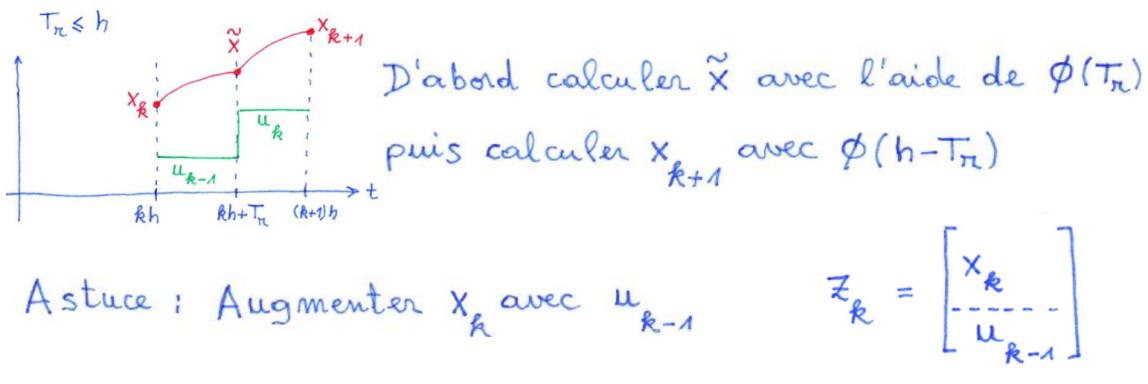
10.5 Calcul du modèle échantillonné dans l'espace d'état avec un retard non multiple entier de la période d'échantillonnage



matrice de transition $\phi(t) = e^{At}$

$$x(t) = \phi(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

On convolu le signal d'entrée u par la condition initiale.



$$z_{k+1} = A_m z_k + B_m u_k \quad \text{Trouver } A_m \text{ et } B_m !$$

10.5.1 Sans retard

$$\{x[k+1] = A_n x[k] + B_n u[k] y[k] = c_n x[k]$$

$$A_n = e^{Ah}$$

$$B_n = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$$

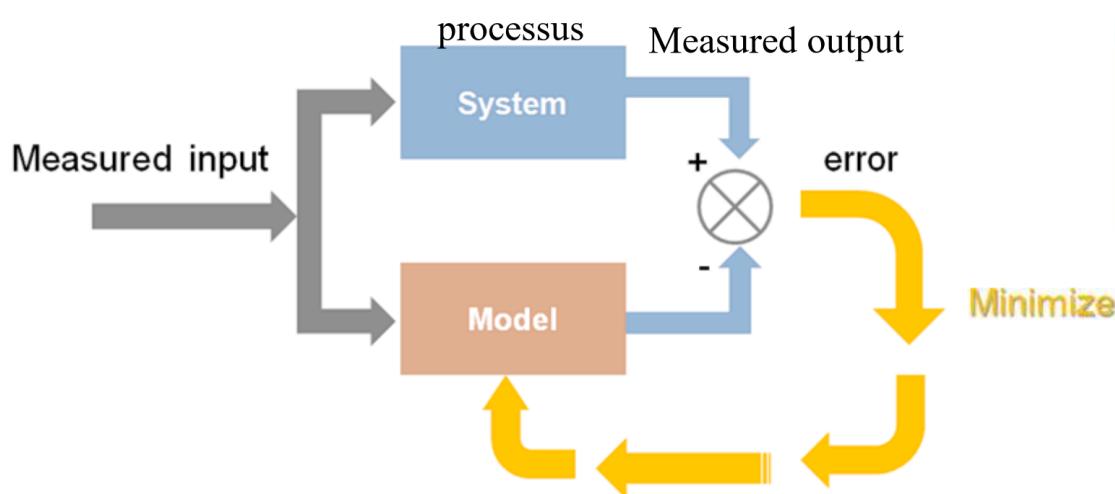
$$C_n = C$$

11 S11

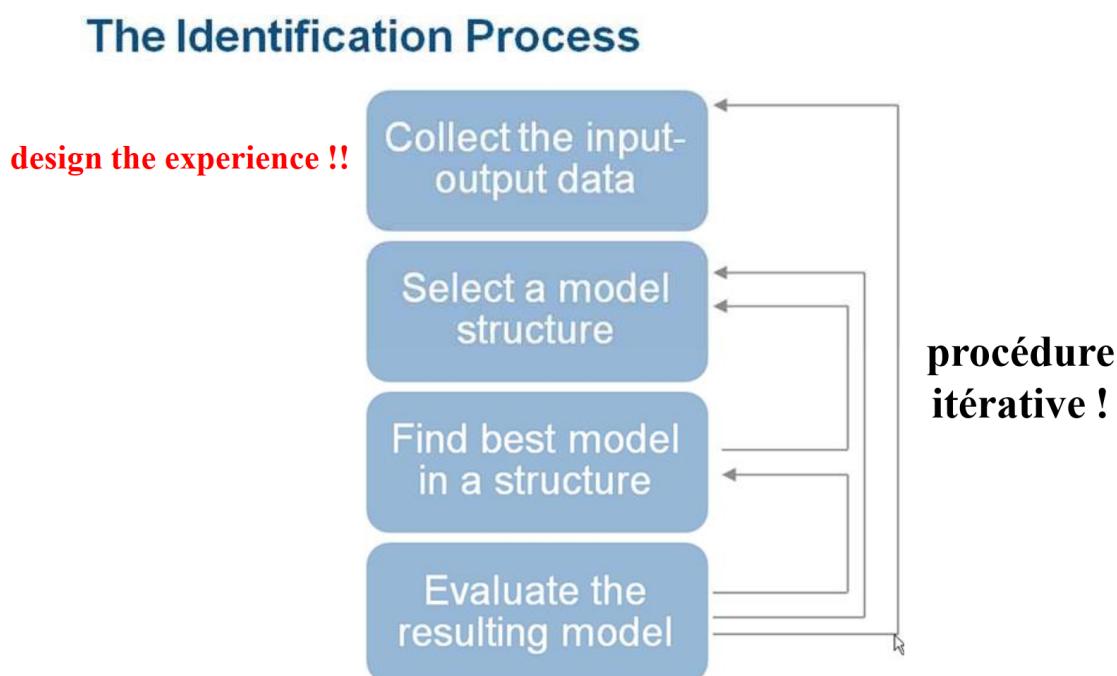
11.1 Contenu

1. Rappel cours 10, exercices série 10
2. Identification fréquentielle
3. Régulation robuste

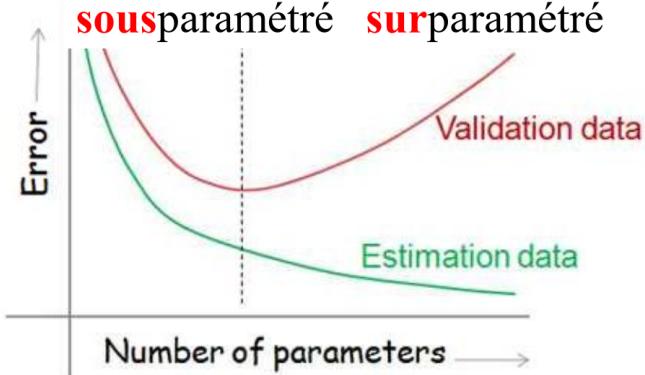
11.2 Rappel



11.2.1 Les quatre étapes de l'identification



A large enough model can reproduce a measured output arbitrarily well. We must verify that model is relevant for other data – data that was not used for estimation, but was collected for the same system.



Il faut impérativement diviser les mesures dans deux groupes séparées :

1. Mesures utilisées pour l'estimation
2. Mesures utilisées pour la validation

11.3 Least squares (LS) : un problème d'optimisation bien maîtrisé

Paramètres à identifier regroupés dans un vecteur inconnu $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$

Mesures donnent lieu à une matrice rectangulaire Φ ayant plus de lignes que de colonnes, et un vecteur y .

Système linéaire **surdéterminé**; on essaie de minimiser le résidu $\Phi\theta - y$ dans le sens des moindres carrés.

$$\min_{\theta} \|\Phi\theta - y\|_2$$

Solution : le vecteur résidu est perpendiculaire à l'hyperplan engendré par les colonnes de la matrice Φ .

11.3.1 Interprétation géométrique : moindres carrés

Paramètres à identifier regroupés dans un vecteur inconnu :

Paramètres inconnus : $\vec{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{bmatrix}$

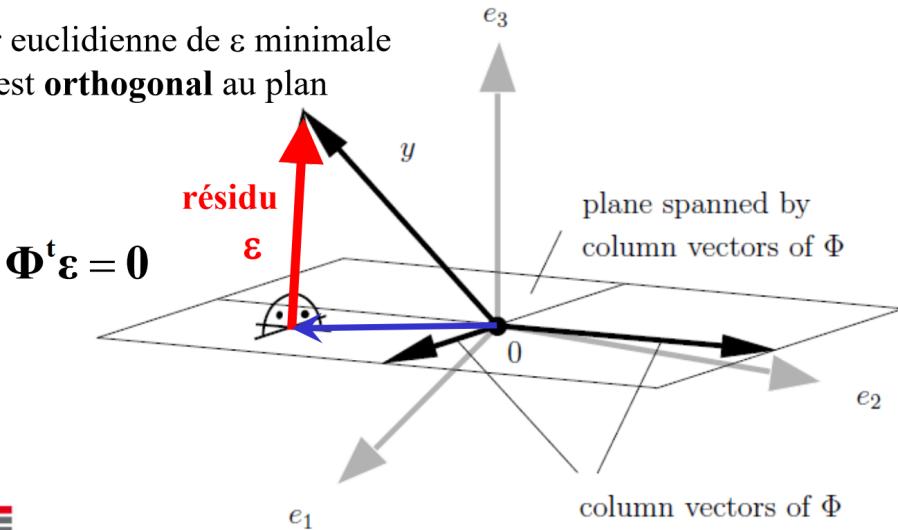
Mesures donnent lieu à une matrice rectangulaire Φ ayant plus de lignes que de colonnes, et un vecteur y .

Système linéaire **surdéterminé**; on essaie de minimiser le résidu $\Phi\Theta - y$ dans le sens des moindres carrés.

$$\min_{\Theta} \| \Phi\Theta - y \|_2$$

Solution : le vecteur résidu est perpendiculaire à l'hyperplan engendré par les colonnes de la matrice Φ .

longueur euclidienne de ε minimale
si ε est **orthogonal** au plan



Vecteur résidu : $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{\varepsilon} \perp \vec{\Phi}_1 \quad \vec{\Phi}_1 : 1^{\text{er}} \text{ colonne de } \Phi$$

$$\vec{\varepsilon} \perp \vec{\Phi}_2 \quad \vec{\Phi}_e : 2^{\text{e}} \text{ colonne de } \Phi$$

$$\vec{\Phi}_1^T \cdot \vec{\varepsilon} = 0$$

$$\vec{\Phi}_2^T \cdot \vec{\varepsilon} = 0$$

⋮

$$\boxed{\Phi^T \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{0}}$$

11.3.2 Solution moindres carrés (least squares)

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi^T \varepsilon \\ &= \Phi^T(y - \Phi\theta) \\ &= \Phi^T y - \Phi^T \Phi \theta \\ \Phi^T \Phi \theta &= \Phi^T y \\ \theta &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \end{aligned}$$

Matlab :

```
theta = inv(Phi'*Phi)*Phi' * y % 'naive' implementation
theta = pinv(Phi) * y % less operations
theta = Phi\y % avoiding explicit inversion
```

déconseillé

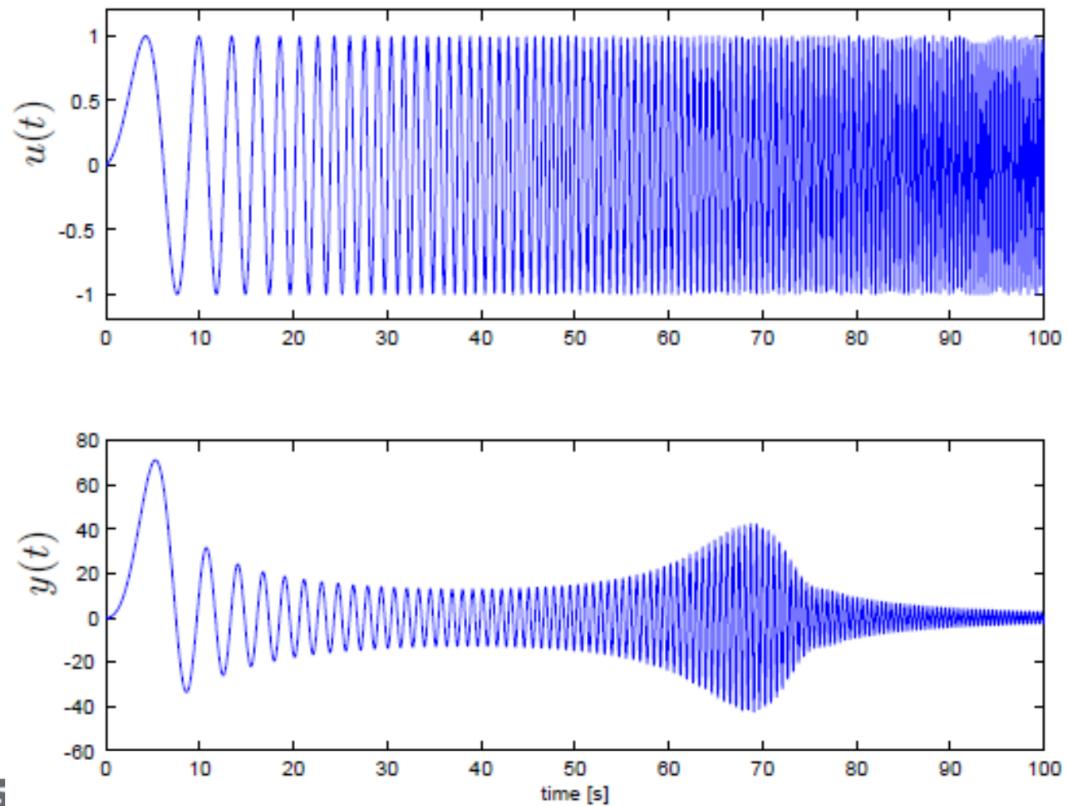
numériquement préférable

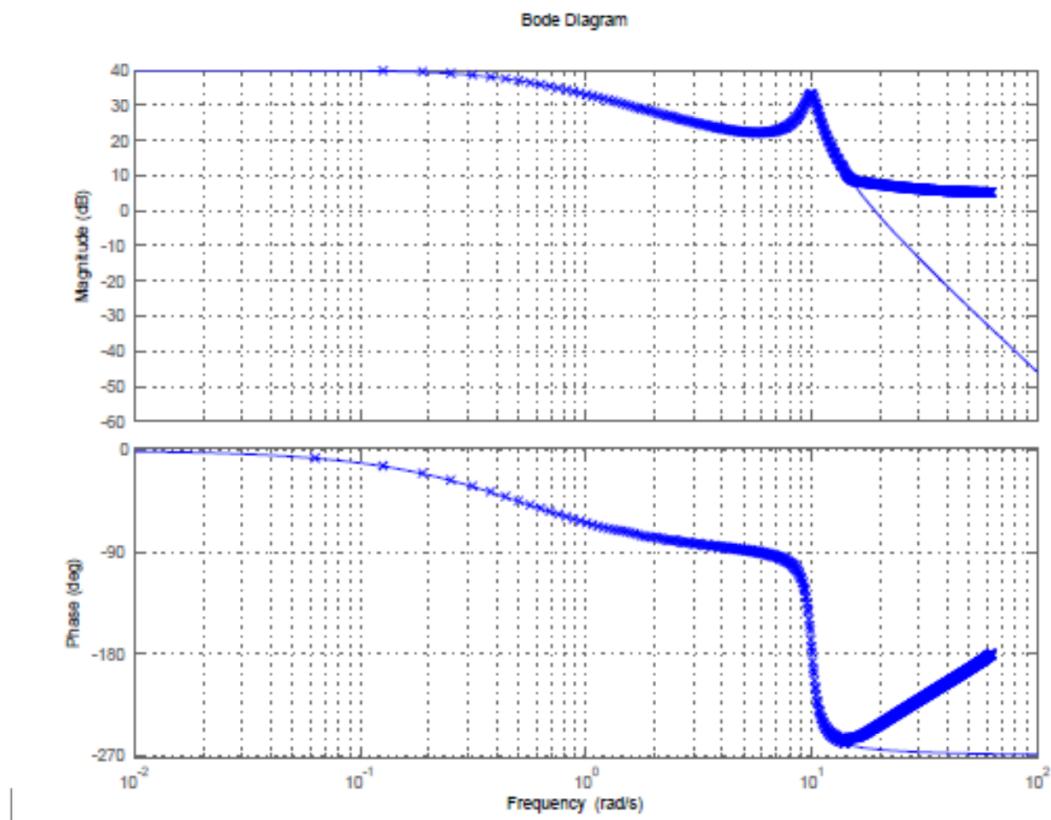
11.4 Identification dans le domaine fréquentiel

Mesure du diagramme de Bode :

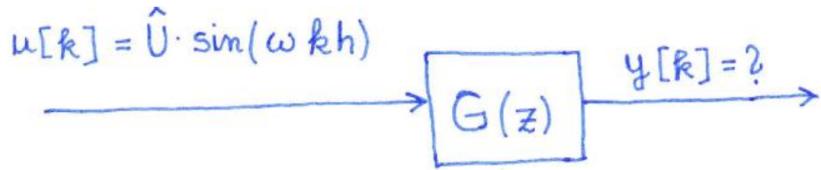
1. Appliquer fréquence par fréquence, attendre le régime harmonique établi, mesurer le ratio des amplitudes et le déphasage.
⇒ Prend beaucoup de temps pour peu de points fréquentiels
2. Appliquer un signal d'excitation "riche" en fréquences, p.ex. **SBPA** (suite binnaire pseudo-aléatoire), appliquer une **FFT** sur le signal d'entrée et de sortie, puis diviser.
3. Appliquer un balayage fréquentiel "*sine sweep*"

11.4.1 Mesure du diagramme de Bode par balayage





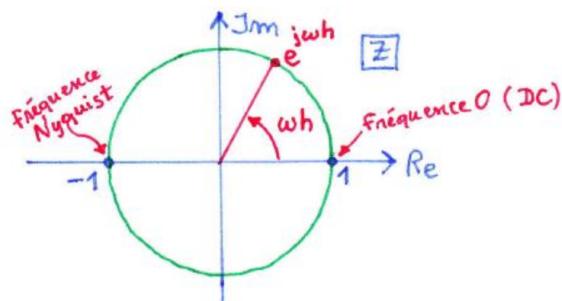
11.4.2 Rappel : régime harmonique numérique



$$y[k] = \hat{Y} \cdot \sin(\omega_k h + \varphi)$$

$$\hat{Y} = \hat{U} \cdot |G(e^{j\omega h})|$$

$$\varphi = \arg(G(e^{j\omega h}))$$



11.4.3 Identification fréquentielle

On dispose de mesures de la fonction de transfert numérique à certaines pulsations, donc on connaît les nombres complexes

$$G_k = G(e^{j\omega_k h})$$

On propose une fonction rationnelle pour $G(z)$, avec des coefficients inconnus au numérateur et au dénominateur.

On peut facilement formuler un problème aux moindres carrés pour déterminer les paramètres inconnus.

Voir : Exercice 11.3

11.4.4 Exemple exercice 11.3

$$G(z) = \frac{K}{z(z+a)} = \frac{y(z)}{U(z)}$$

Paramètres inconnus : $\vec{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 3\Theta_1 + 5\Theta_2 = 1 \\ \Theta_1 + 7\Theta_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Nb. éq.} = n$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \Phi\vec{\Theta} = \vec{y} \\ \Theta = \Phi^{-1}y \end{cases} \quad \Phi\vec{\Theta} - \vec{y} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{résidu}}$$

$$\min_{\vec{\Theta}} \| \underbrace{\Phi\vec{\Theta} - \vec{y}}_{\vec{r}} \|_2 \quad \vec{r} = \Phi\vec{\Theta} - \vec{y} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad \| \vec{r} \|_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}$$

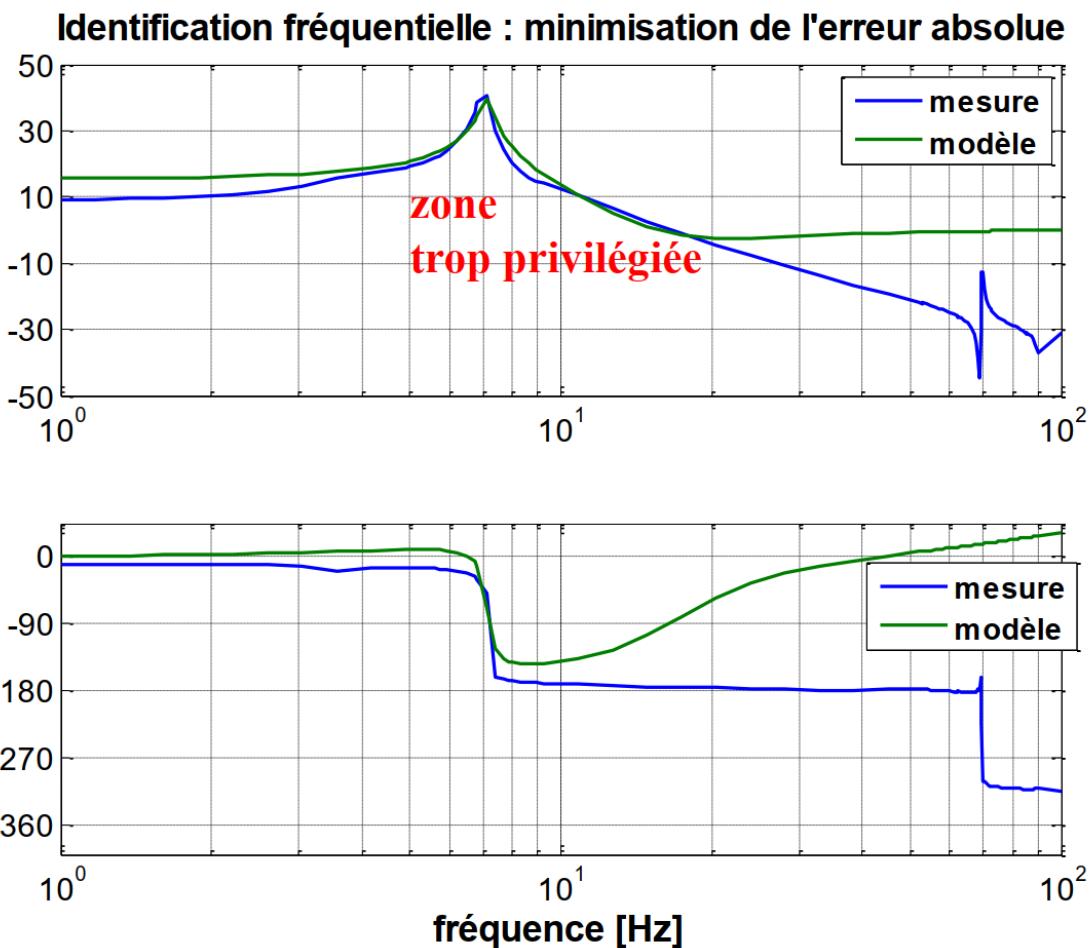
Θ_{opt} ? :

$$\Phi : n \times p \quad \Phi^T : p \times n \quad \Phi^T \Phi : p \times p \text{ (carrée)}$$

$$\text{Theta} = \begin{bmatrix} K \\ a \end{bmatrix} :$$

$$\begin{aligned}
 u[k] &\xrightarrow[\text{connu}]{G(z)} y[k] \xrightarrow[\text{mesure bruitée}]{} \\
 u[k] &= \{1, 1, 1, \dots\} \\
 z^2 y(z) + z a y(z) &= K U(z) \quad |z^{-2}| \\
 y(z) + a z^{-1} y(z) &= K z^{-2} U(Z) |Z^{-1}| \\
 &\downarrow \\
 y[k] + a y[k-1] &= K u[k-2]
 \end{aligned}$$

11.4.5 Minimisation de l'erreur absolue - problème



11.5 Régulateur robuste

11.5.1 tentative de définition "régulation robuste"

Ensemble d'outils permettant d'effectuer :

1. L'analyse des propriétés d'une boucle fermée avec un système à régler comprenant des **incertitudes**.

2. la **synthèse** d'un régulateur **fixe** (non adaptatif) pour une **famille** de systèmes à régler avec des **incertitudes** (paramétriques et non-paramétriques) telle qu'un certain niveau de performance en boucle fermée soit **préservé** pour toute la famille des systèmes à régler.

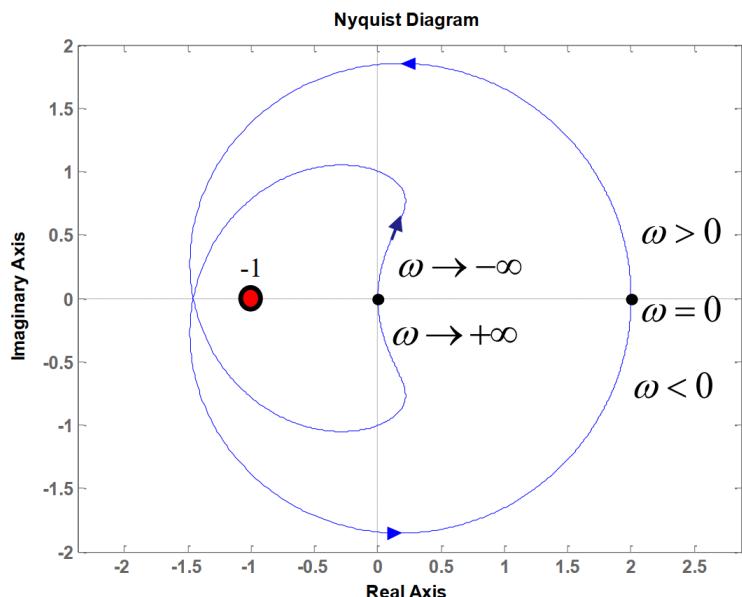
11.5.2 Rappel : Nombre d'encercllements nécessaires pour la stabilité en boucle fermée

Critère de Nyquist généralisé :

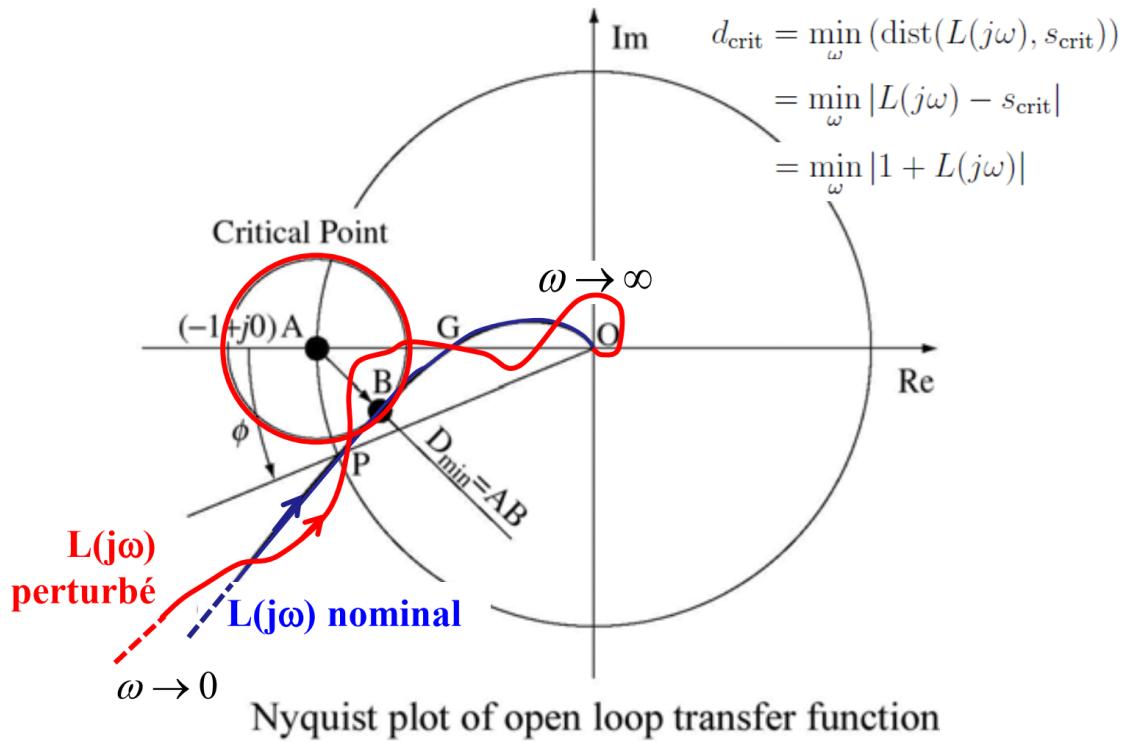
⇒ valable pour tous les systèmes stables ou instables en b.o.
La **boucle fermée** est **stable** si et seulement si le **nombre d'encercllements du point critique** -1 dans le sens trigonométrique correspond au **nombre de pôles instables en boucle ouverte**.

$$L(s) = \frac{10(s+1)(s+2)}{(s+10)(s-1)^2}$$

$N_p = 2$
pôles instables en b.o.
= nombre d'encercllements
⇒ b.f. stable



11.5.3 Définition de la distance critique



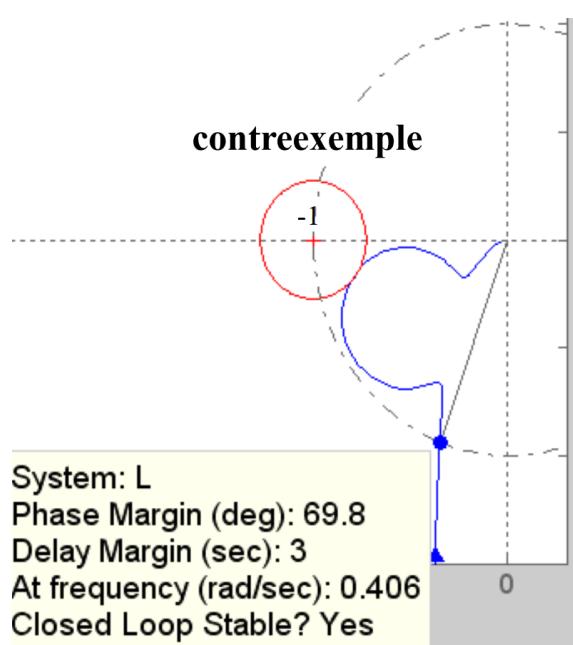
11.5.4 Marges de stabilité

Une **distance critique** confortable (p.ex $d_{\text{crit}} > 0.5$) implique des bonnes marges de gain et de phase.

$$A_m > \frac{1}{1 - d_{\text{crit}}}$$

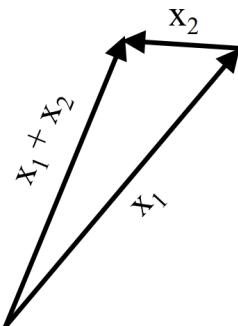
$$\phi_m > 2 \arcsin \left(\frac{d_{\text{crit}}}{2} \right)$$

Attention : Le contraire n'est pas vrai !

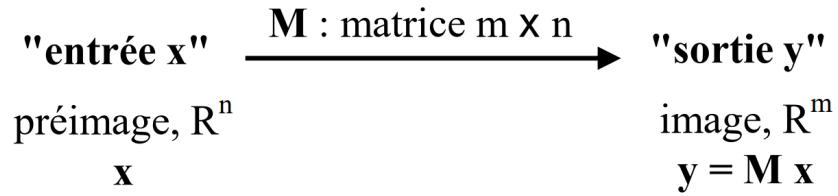


11.5.5 Rappel normes : à quoi ça sert

- **longueur** $\|\mathbf{x}\|$ d'un vecteur \mathbf{x}
 - **distance** entre deux vecteurs $\text{dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$
(proximité, notion de **métrique** ...)
 - norme **euclidienne** liée à la notion d'énergie
 - normes sont indispensables pour formuler des
 - problèmes **d'optimisation**
 - problèmes **d'approximation**
- axiomes**
- $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x}$
 - inégalité du **triangle** : $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|$
 - étirement : $\|k \mathbf{x}\| = |k| \|\mathbf{x}\|$
 k : scalaire



11.5.6 Normes pour matrices



norme induite pour matrices : amplification maximale

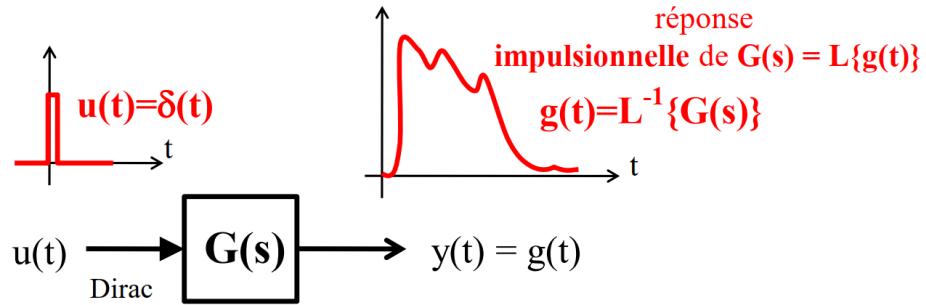
$$\|M\|_2 = \max_x \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_1(M)$$

valeur singulière maximale de M

11.5.7 Vecteurs - Matrices - Signaux - Systèmes LTI

vecteur dans R^n $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dimension finie normes : somme finie $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \dots, \ \cdot\ _\infty$	signaux temporels discrets monovariable/multivariable $u[k] = \sin(\omega k h)$ dimension infinie $u \in \ell_\infty, u \notin \ell_2$ normes : somme infinie $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \dots, \ \cdot\ _\infty$	signaux temporels analogiques $u_1(t) = \sin(\omega t), u_2(t) = e^{-t}$ $u_1 \in L_\infty, u_1 \notin L_2$ $u_2 \in L_2$ normes : intégrale, bornes ∞ $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \dots, \ \cdot\ _\infty$
matrices normes induites = amplification max $\ M\ _2 = \max_x \frac{\ Mx\ _2}{\ x\ _2}$	systèmes LTI : fonctions/matrices de transfert, opérateurs norme H_2 : énergie contenue dans la réponse impulsionnelle du système norme H_∞ : peak dans le diagramme de Bode du gain = norme induite L2 = amplification "worst case" de l'énergie	

11.5.8 Norme H_2 , lien temporel/fréquentiel : thrm. de Parseval



La norme H_2 de $G(s)$ correspond à la norme L_2 de sa
réponse impulsionnelle $g(t)$ = énergie de la réponse impulsionnelle

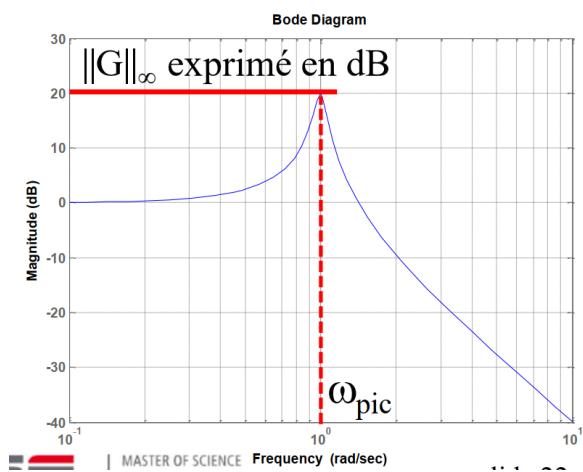
$$\|G\|_2 \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt} = \|g\|_2$$

L'énergie d'un signal dans le domaine temporelle est égale à l'énergie dans le domaine fréquentiel, soit plus précisément :

*La norme H_2 de $G(s)$ correspond à la norme L_2 de sa réponse impulsionnelle
 $g(t)$ = énergie de la réponse impulsionnelle*

11.5.9 norme H_∞ = norme induite L_2 : *worst case*

$$\|G\|_\infty \stackrel{\Delta}{=} \max_{\omega} |G(j\omega)| \quad \begin{matrix} \text{fréquentiel} \\ \text{temporel} \end{matrix} = \max_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad \begin{matrix} \text{= amplification maximale} \\ \text{d'énergie} \end{matrix}$$



Matlab :
[nG, om_pic] = norm(G, inf)

12 S12 - Régulation robuste (suite)

12.1 Contenu

1. Rappel cours 11, exercices série 11
2. Incertitudes structurées (paramétriques) et non structurées
3. Introduction à la régulation robuste H_∞

12.2 tentative de définition "régulation robuste"

Ensemble d'outils permettant d'effectuer :

1. L'**analyse** des propriétés d'une boucle fermée avec un système à régler comprenant des **incertitudes**.
2. la **synthèse** d'un régulateur **fixe** (non adaptatif) pour une **famille** de systèmes à régler avec des **incertitudes** (paramétriques et non-paramétriques) telle qu'un certain niveau de performance en boucle fermée soit **préservé** pour toute la famille des systèmes à régler.

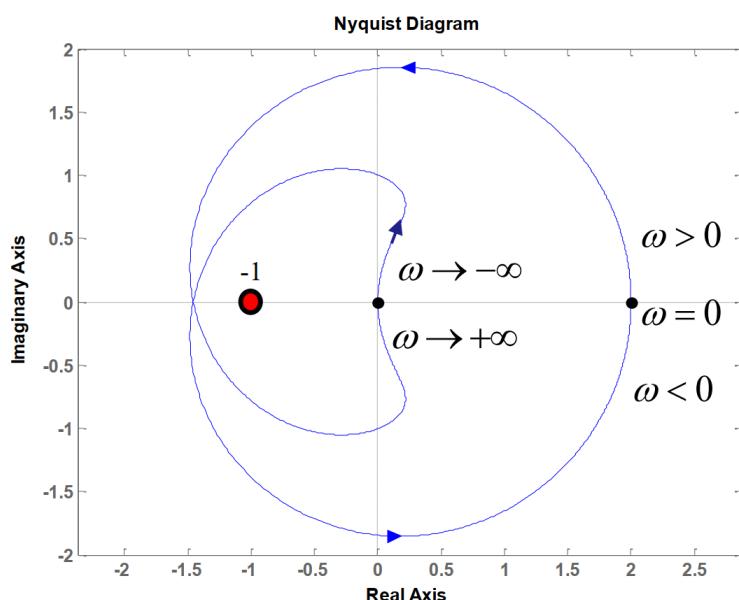
12.3 Rappel : Nombre d'encercllements nécessaires pour la stabilité en boucle fermée

Critère de Nyquist généralisé :

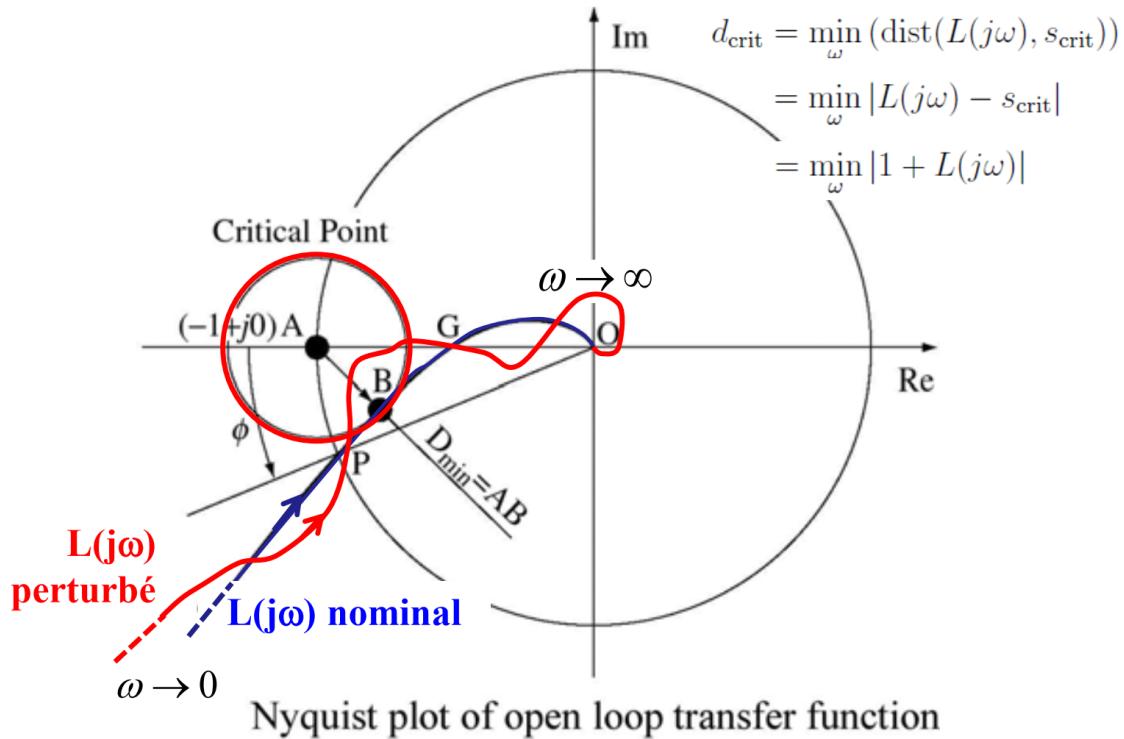
⇒ valable pour tous les systèmes stables ou instables en b.o.
La **boucle fermée** est **stable** si et seulement si le **nombre d'encercllements du point critique** -1 dans le sens trigonométrique correspond au **nombre de pôles instables en boucle ouverte**.

$$L(s) = \frac{10(s+1)(s+2)}{(s+10)(s-1)^2}$$

$N_p = 2$
pôles instables en b.o.
= nombre d'encercllements
⇒ b.f. stable



12.4 Définition de la distance critique



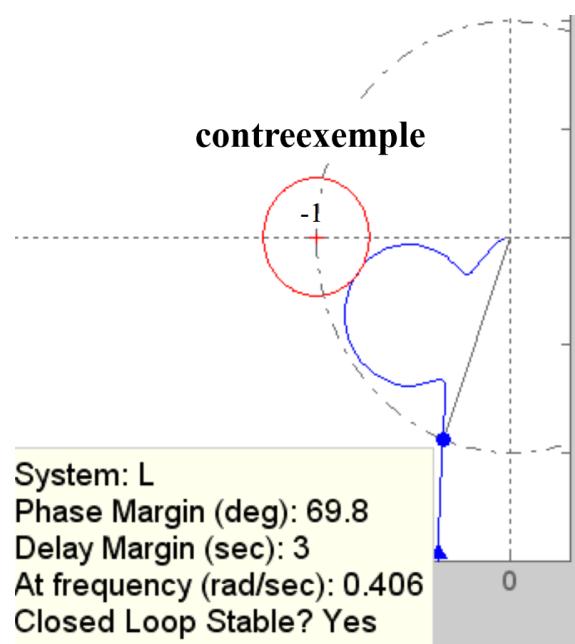
12.5 Marges de stabilité

Une **distance critique** confortable (p.ex $d_{\text{crit}} > 0.5$) implique des bonnes marges de gain et de phase.

$$A_m > \frac{1}{1 - d_{\text{crit}}}$$

$$\phi_m > 2 \arcsin \left(\frac{d_{\text{crit}}}{2} \right)$$

Attention : Le contraire n'est pas vrai !



12.6 Norme

$$G(\bar{z}) = \overline{G(z)}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{pré-image} & & \\ \vec{x} & \xrightarrow{M} & \vec{y} = M\vec{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{vecteurs} & & \text{vecteurs} \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

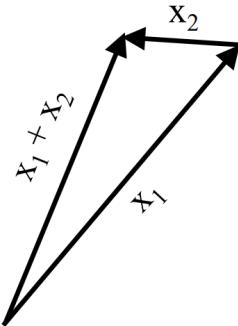
$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = g(t)$$

12.7 Rappel normes : à quoi ça sert

- **longueur** $\|\mathbf{x}\|$ d'un vecteur \mathbf{x}
- **distance** entre deux vecteurs $\text{dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$
(proximité, notion de **métrique** ...)
- norme **euclidienne** liée à la notion d'énergie
- normes sont indispensables pour formuler des
 - problèmes **d'optimisation**
 - problèmes **d'approximation**

axiomes

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \\ \bullet \text{inégalité du triangle} : \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\| \\ \bullet \text{étirement} : \|k \mathbf{x}\| = |k| \|\mathbf{x}\| \\ \quad k : \text{scalaire} \end{array} \right]$$



12.8 Normes pour matrices

$$\begin{array}{ccc} \text{"entrée } \mathbf{x}" & \xrightarrow{\mathbf{M} : \text{matrice } m \times n} & \text{"sortie } \mathbf{y}" \\ \mathbf{x} & \text{préimage, } \mathbb{R}^n & \mathbf{y} = \mathbf{M} \mathbf{x} \\ & & \text{image, } \mathbb{R}^m \end{array}$$

norme **induite** pour matrices : amplification maximale

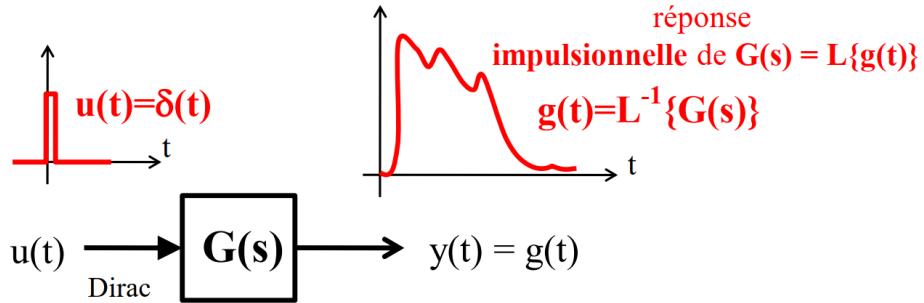
$$\|\mathbf{M}\|_2 = \max_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{M} \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sigma_1(\mathbf{M})$$

valeur singulière
maximale de \mathbf{M}

12.9 Vecteurs - Matrices - Signaux - Systèmes LTI

vecteur dans \mathbf{R}^n $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dimension finie normes : somme finie $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \dots, \ \cdot\ _\infty$	signaux temporels discrets monovariable/multivariable $u[k] = \sin(\omega k h)$ dimension infinie $u \in \ell_\infty, u \notin \ell_2$ normes : somme infinie $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \dots, \ \cdot\ _\infty$	signaux temporels analogiques $u_1(t) = \sin(\omega t), u_2(t) = e^{-t}$ $u_1 \in L_\infty, u_1 \notin L_2$ $u_2 \in L_2$ normes : intégrale, bornes ∞ $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \dots, \ \cdot\ _\infty$
matrices normes induites = amplification max $\ \mathbf{M}\ _2 = \max_{\mathbf{x}} \frac{\ \mathbf{M} \mathbf{x}\ _2}{\ \mathbf{x}\ _2}$	systèmes LTI : fonctions/matrices de transfert, opérateurs norme \mathbf{H}_2 : énergie contenue dans la réponse impulsionnelle du système norme \mathbf{H}_∞ : peak dans le diagramme de Bode du gain = norme induite L2 = amplification "worst case" de l'énergie	

12.10 Norme H_2 , lien temporel/fréquentiel : thrm. de Parseval



La norme \mathbf{H}_2 de $G(s)$ correspond à la norme \mathbf{L}_2 de sa **réponse impulsionnelle** $g(t) =$ énergie de la réponse impulsionnelle

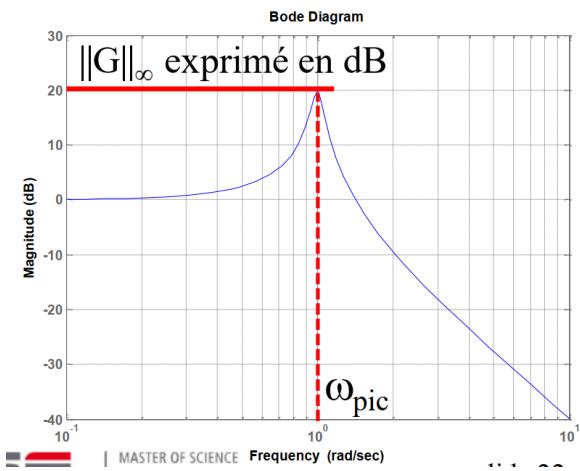
$$\|G\|_2 \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt} = \|g\|_2$$

L'énergie d'un signal dans le domaine temporelle est égale à l'énergie dans le domaine fréquentiel, soit plus précisément :

La norme H_2 de $G(s)$ correspond à la norme L_2 de sa réponse impulsionale
 $g(t) = \text{énergie de la réponse impulsionale}$

12.11 norme H_∞ = norme induite L_2 : *worst case*

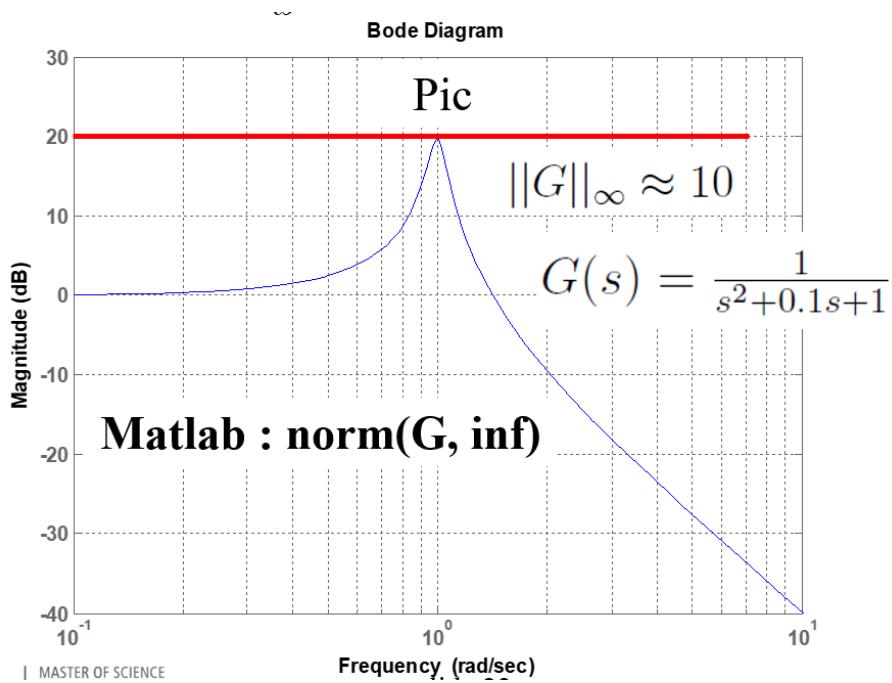
$$\|G\|_\infty \stackrel{\Delta}{=} \max_{\omega} |G(j\omega)| \quad \begin{matrix} \text{fréquentiel} \\ \text{= amplification maximale} \end{matrix} \quad \max_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad \begin{matrix} \text{temporel} \\ \text{d'énergie} \end{matrix}$$



Matlab :
`[nG, om_pic] = norm(G, inf)`

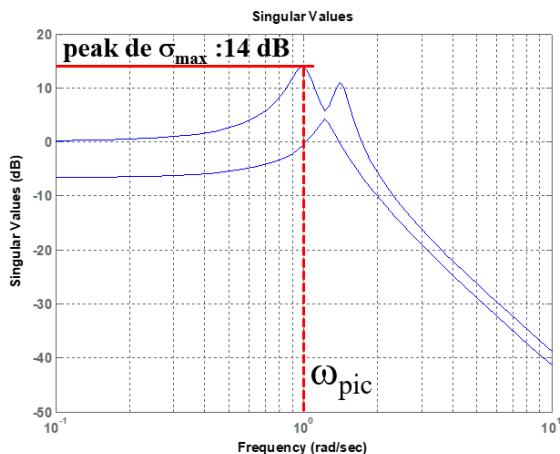
12.12 Pic d'une fonction de transfert (norme infinie)

$$\|G\|_\infty = \max_{\omega} |G(j\omega)|$$



12.13 norme H_∞ pour systèmes multivariables

$$\| G \|_\infty \stackrel{\Delta}{=} \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \max_u \frac{\| y \|_2}{\| u \|_2}$$

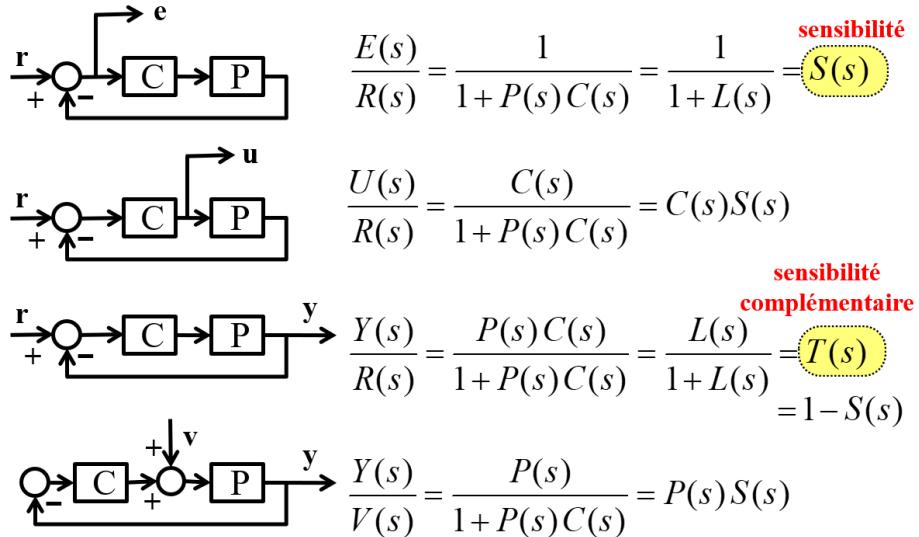


Exemple d'un système **G**
avec 2 entrées et 2 sorties
matrice de transfert 2x2 **G(jω)**

```
>> sigma(G); % plotter Bode
>> [nG, om_pic]=norm(G, inf);
>> 20*log10(nG)

ans =
14.1261
```

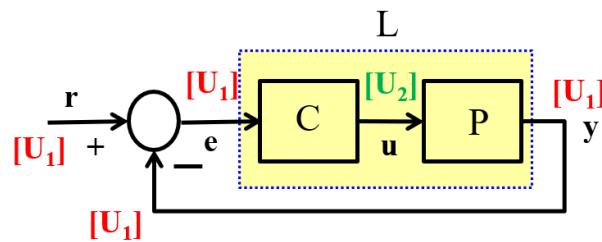
12.14 le "gang" des 4 fonctions de transfert en b.f.



12.14.1 Équivalent français

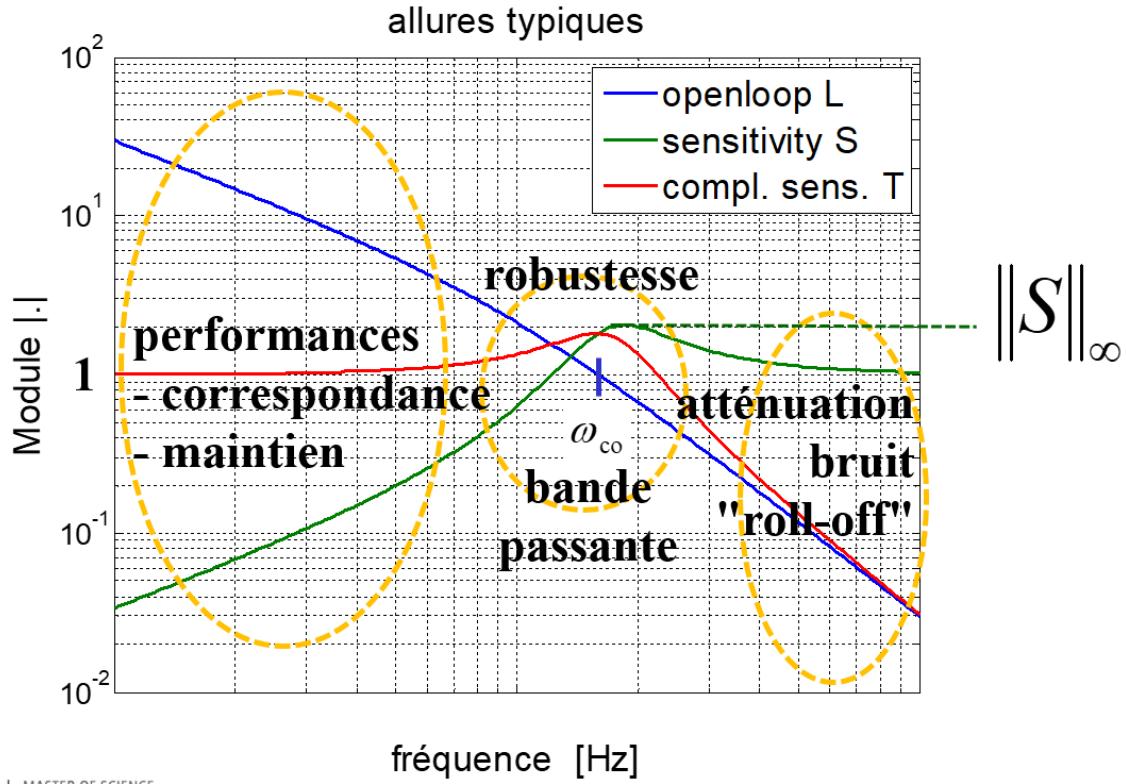
$$\begin{aligned} G_{ew}(s) &= \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G_a(s)G_c(s)} = \frac{1}{1 + G_o(s)} = S(s) \\ G_{uw}(s) &= \frac{U(s)}{W(s)} = \frac{G_c(s)}{1 + G_a(s)G_c(s)} = G_c(s)S(s) \\ G_{yw}(s) &= \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_a(s)G_c(s)}{1 + G_a(s)G_c(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = T(s) = 1 - S(s) \\ G_{yv}(s) &= \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)G_c(s)} = G_a(s)S(s) \end{aligned}$$

12.15 $L(s)$, $S(s)$ et $T(s)$ ont [1] comme unité physique



$$C : \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad P : \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

12.16 Allures typiques du Bode de L , S , et T



12.17 Lien entre distance critique et pic de sensibilité

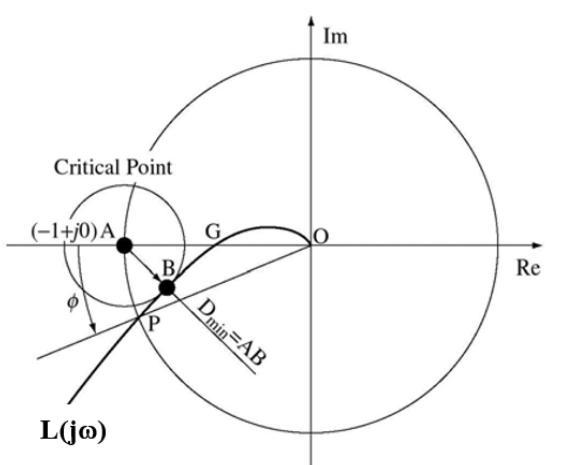


Fig. 9 Nyquist plot of open loop transfer function

$$d_{\text{crit}} = \min_{\omega} \{\text{dist}(L(j\omega), -1)\}$$

$$d_{\text{crit}} = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$

$$d_{\text{crit}} = \frac{1}{\max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right|}$$

$$d_{\text{crit}} = \frac{1}{\|S\|_{\infty}}$$

Définition de la distance critique :

$$d_{\text{crit}} = \min_{\omega} |1 + \underbrace{L(j\omega)}_{G(j\omega)}| = \frac{1}{\max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right|} = \frac{1}{\|S\|_{\infty}}$$

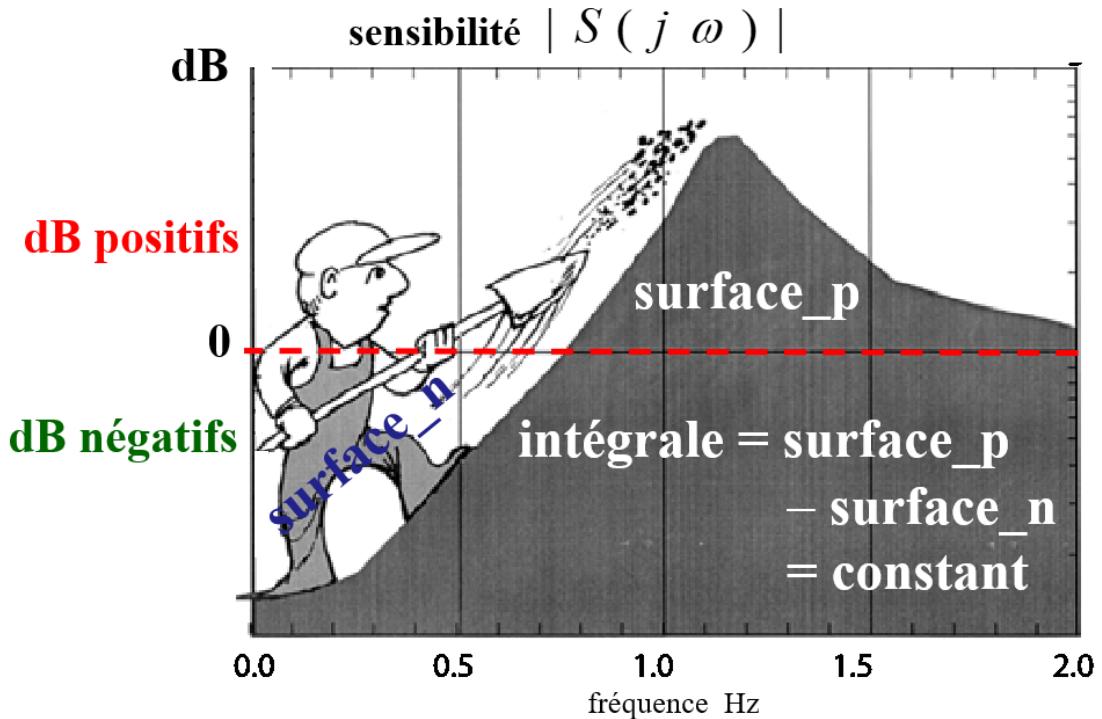
D'autant plus **petit** la norme infinie (pic) de la fonction de **sensibilité** S , d'autant plus **éloigné** le **lieu de Nyquist** de L par rapport au **point critique** -1 , et d'autant plus **robuste** est la boucle fermée.

12.18 Théorème de Bode : limitations fondamentales

$$\int_0^\infty \ln|S(j\omega)|d\omega = \begin{cases} 0 \\ \pi \cdot \Re(\text{pôles instables de } L(s)) \end{cases}$$

Limitations fondamentales :

- Cette limitation est valable indépendamment du régulateur choisi !
- Conflit d'objectif (trade-off) entre performance et robustesse
- Système à régler instable plus difficile à régler qu'un système stable
- D'autant plus à droite le pôle instable, d'autant plus grave l'instabilité, et d'autant moins Robuste la boucle fermée



Un système à réglé instable est d'autant plus difficile à régler que le pôles instable est rapide :

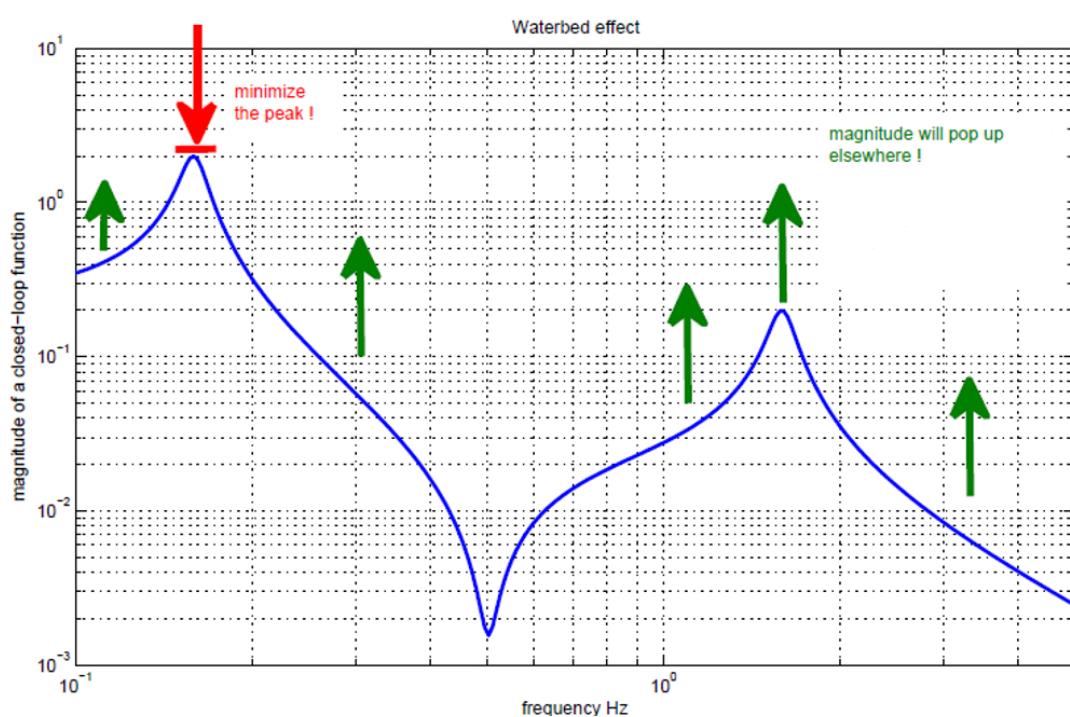
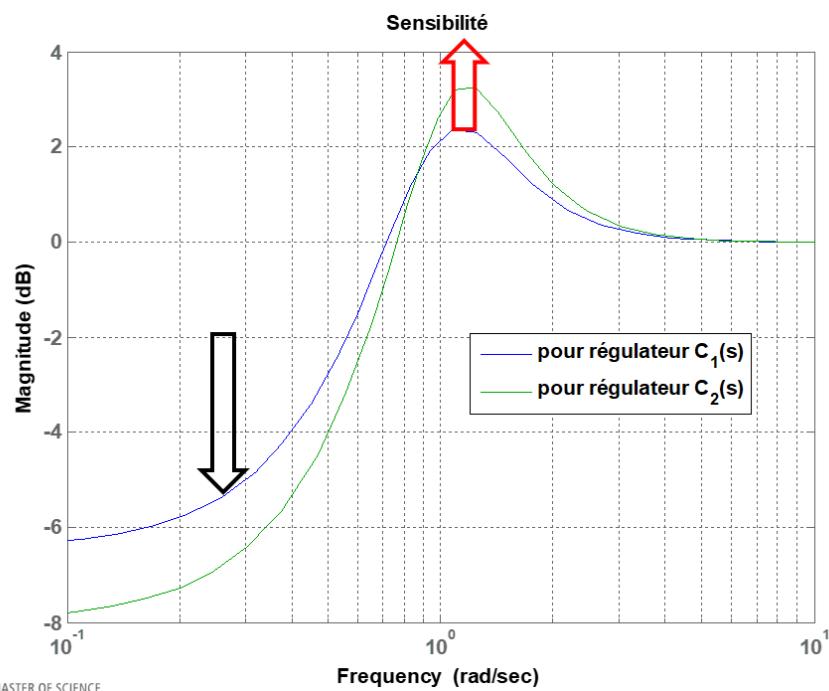
Exemple pendule inverse :

Les pôles du système sont : $p1 = \sqrt{\frac{mg}{l}}$ et $p2 = -p1 = -\sqrt{\frac{mg}{l}}$
Avec l : longueur du bras du pendule.

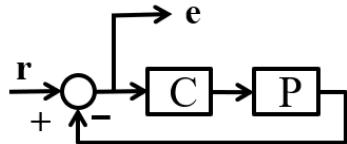
On peut noter le comportement suivant : $\begin{cases} l \text{ diminue : } l \searrow \Rightarrow \sqrt{\frac{mg}{l}} \nearrow \\ l \text{ augmente : } l \nearrow \Rightarrow \sqrt{\frac{mg}{l}} \searrow \end{cases}$

Donc, plus le système à réglé instable est rapide, plus il est difficile à régler.

12.18.1 Exemple à montrer : waterbed effect

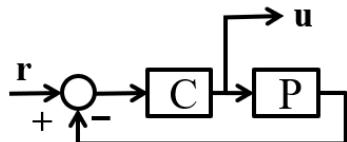


12.19 Stabilité interne d'une boucle fermée :les 4 fonctions de transfert doivent être stable



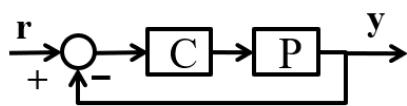
$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

feedback(1, L)



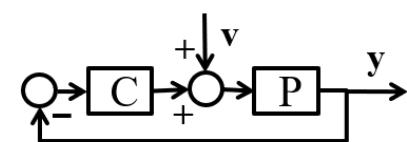
$$\frac{C(s)}{1 + L(s)}$$

feedback(C, P)



$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

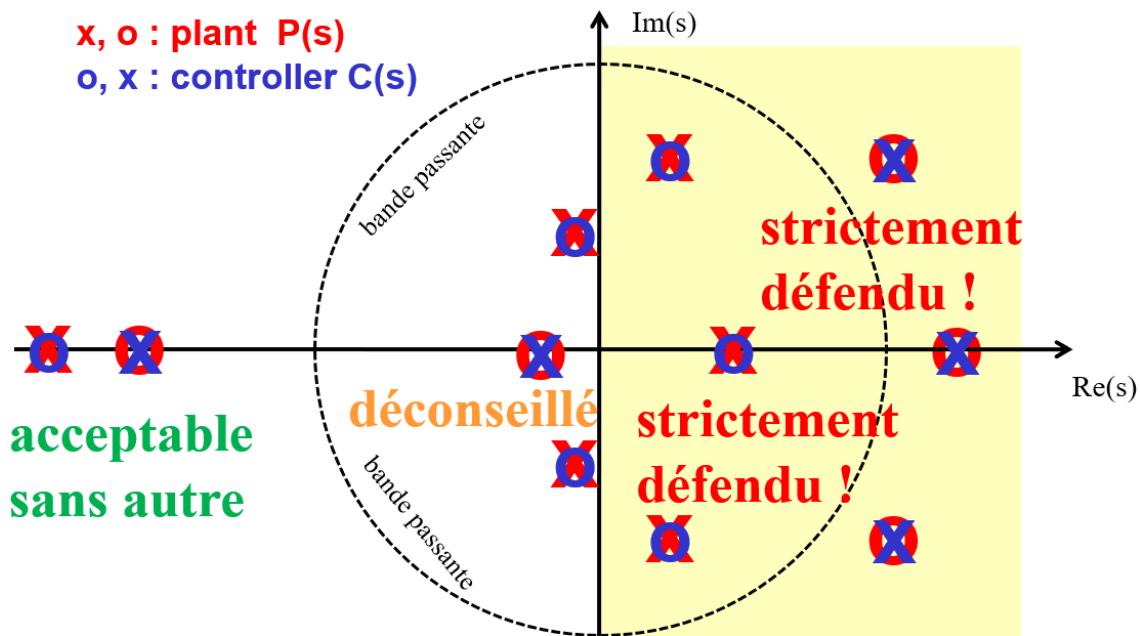
feedback(L, 1)



$$\frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

! ne pas utiliser
 $T = L / (1 + L)$;
feedback(P, C)

12.19.1 Compensation pôle / zéro acceptable ou non ?



- Il est strictement défendu d'essayer de compenser les pôles instables d'un système à régler à l'aide du régulateur.
- Il est fortement déconseillé de compenser les pôles et zéros proche de l'axe imaginaire (à l'intérieur de la bande passante)