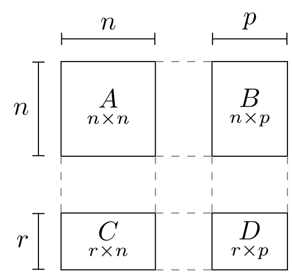
1 Espaces d'états

$$U(s) \xrightarrow[p \text{ signaux}]{} \boxed{G(s)} \xrightarrow[r \text{ signaux}]{} Y(s)$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}} \longrightarrow y(t)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$



1.1 Choix des variables d'état

Les variables d'état sont les variables qui ont leurs dérivée dans les équations.

- Condensateur : tension
- Bobine : courant

1.2 Forme modale

Matrice T construite à partir des vecteurs propres de A

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} = T^{-1}AT & \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT & \tilde{D} = D \end{array}}$$

1.3 $A, B, C, D \longrightarrow G$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
$$G(z) = C_n(zI - A_n)^{-1}B_n + D_n$$

1.3.1 Gain haute fréquence

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = D$$

1.3.2 Gain basse fréquence (gain statique)

Analogique :

$$G(s = 0) = -CA^{-1}B + D$$

Numérique :

$$G(z = 1) = -C(I - A)^{-1}B + D$$

1.4 $G \longrightarrow A, B, C, D$

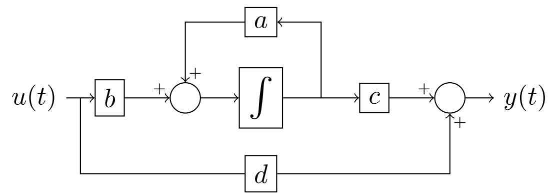
On utilise la forme commandable

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

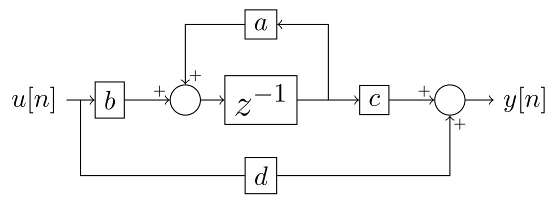
$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D = 0 \end{array}}$$

1.5 $G(s)/G(z) \longleftrightarrow A, B, C, D$

$$\boxed{d + \frac{b \cdot c}{s - a}} \qquad \boxed{\begin{matrix} A = [a] & B = [b] \\ C = [c] & D = [d] \end{matrix}}$$



$$\boxed{d + \frac{b \cdot c}{z - a}} \qquad \boxed{\begin{matrix} A_n = [a] & B_n = [b] \\ C_n = [c] & D_n = [d] \end{matrix}}$$



1.6 Conversion analogique vers numérique

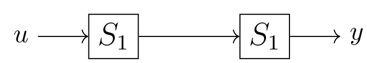
$$A_d = e^{A_a \cdot h}$$

$$B_d = \int_0^h e^{A_a \cdot \tau} B_a d\tau$$

$$C_d = C_a$$

$$D_d = D_a$$

1.7 Mise en cascade

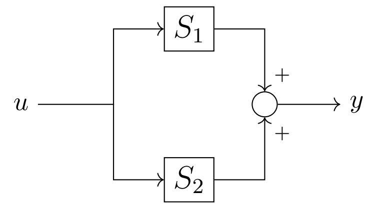


$$S_{tot} = S_2(s) \cdot S_1(s) \qquad \text{ordre important}$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_2D_1$$

1.8 Mise en parallèle

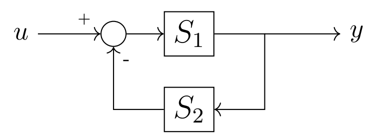


$$S_{tot}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1 + D_2$$

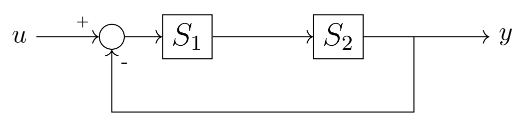
1.8.1 Mise en contre-réaction 1



$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -B_1 (C_2 - D_2 D_1 C_2) \\ B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & A_2 - B_2 (I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 - B_1 D_2 N D_1 \\ B_2 N D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} (I - D_1 D_2)^{-1} C_1 & -(I - D_1 D_2)^{-1} D_1 C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = (I - D_1 D_2)^{-1} D_1$$

1.8.2 Mise en contre-réaction 2



$$S_{tot}(s) = \left(I + S_1(s) S_2(s)\right)^{-1} S_1(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1 D_2$$

1.9 Commandabilité

$$\boxed{P_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}$$

Pour des systèmes monoentrée :

$$\det(P_c) \neq 0 \longrightarrow \text{Commandable}$$

Pour des systèmes multi-entrées (généralisation) :

$$\text{rang}(P_c) == n \longrightarrow \text{Commandable}$$

Faire une permutation avec T ne change pas la commandabilité du système. La nouvelle matrice $\tilde{P}_c$ est donnée par $T^{-1}P_c$

1.10 Observabilité

$$\boxed{P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\text{rang}(P_0) = n \longrightarrow \text{Observable}}$$

En monosortie on peut utiliser $\det(P_0) \neq 0 \longrightarrow$ Observable

1.11 Trajectoire

1.12 Système numérique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \qquad B_n \qquad C_n \qquad D_n$$

Et la condition initiale x_0. On chercher à trouver les valeurs de $x[0], x[1], x[2], \cdots$

$$x[k] = A_n^k x[0] + A_n^{k-1}B_n u[0] + A_n^{k-2}B_n u[1] + \cdots + B_n u[k-1]$$

On a la contribution de la condition initiale et un produit de convolution $u[k] * g_x[k]$

1.12.1 Réponse impulsionnelle

Si on suppose que la condition initiale est nulle et qu'on excite le signal avec un dirac numérique, alors on a

$$\boxed{x[k] = A_n^{k-1}B_n}$$

1.13 Système analogique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \qquad B_n \qquad C_n \qquad D_n$$

Et la condition initiale x_0

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

1.13.1 Exponentielle matricielle (ou matrice de transition)

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots}$$

Si A est diagonale, on peut simplifier en écrivant

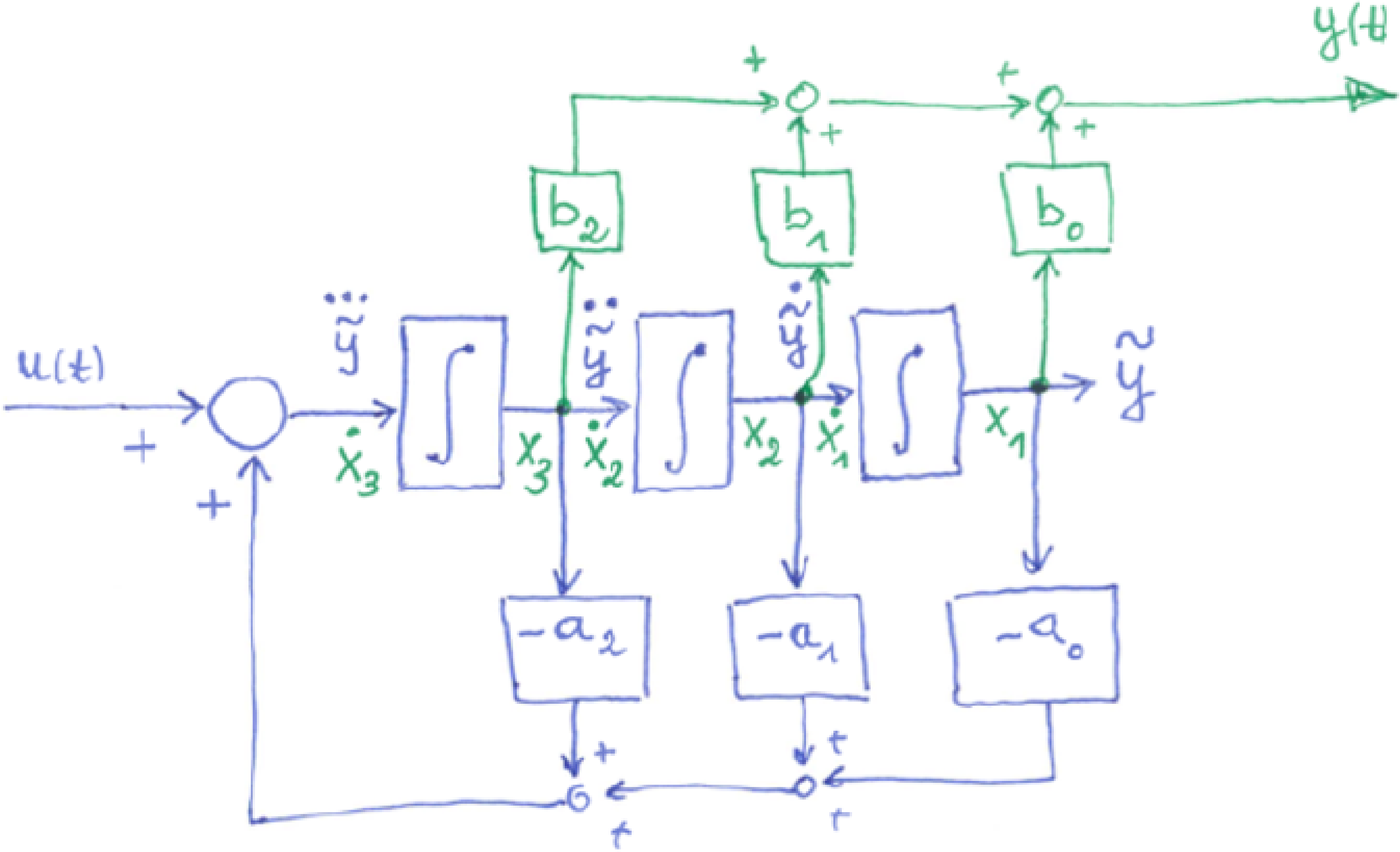
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{bmatrix}$$

Calcul par diagonalisation Si A est diagonalisable, alors

$$\boxed{e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}}$$

Ceci permet de simplifier les calculs en utilisant la propriété de l'exponentielle lorsque $\tilde{A}$ est diagonal

1.14 Forme commandable



On obtient donc finalement

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D = 0 \end{array}}$$

Voir **??**

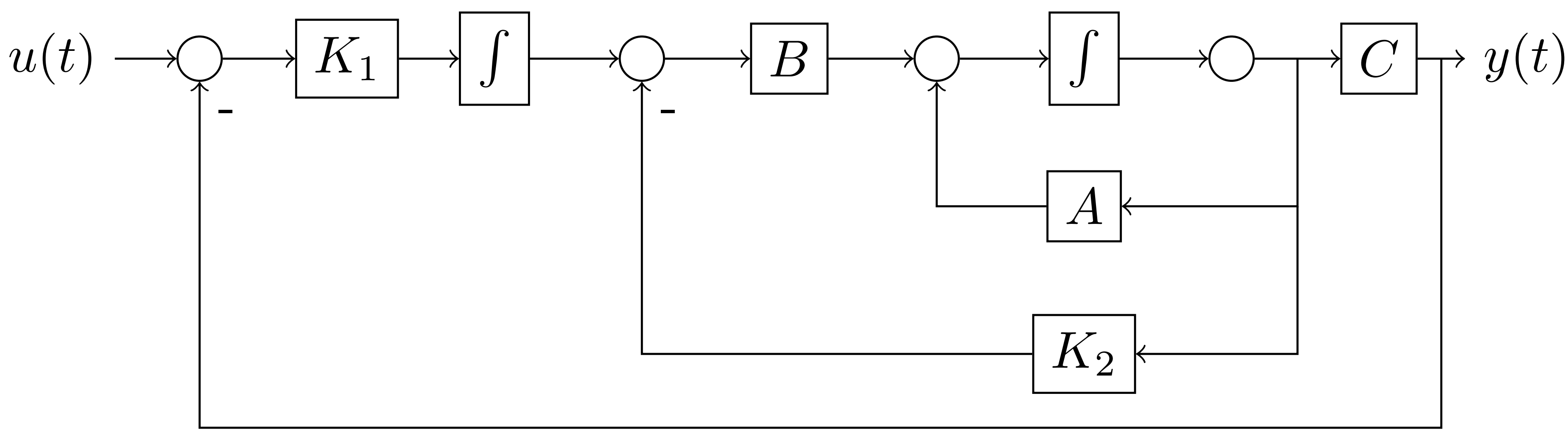
1.15 Modèle échantillonné

$$\boxed{H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G_a(s)}{s}\right)\Big|_{t=kh}\right)}$$

1.15.1 Représentation dans l'espace d'état

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_n = e^{Ah} & B_n = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau \\ C_d = C & D_n = D \end{array}}$$

1.16 Action intégrale sur la commande



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$$

1.17 Placement de pôles

Il faut que le polynôme caractéristique de la boucle fermée (par exemple $sI - A_{bf} = sI - (A - BK)$) corresponde aux pôles que l'ont souhaite

$$\det(sI - A_{bf}) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

1.18 Retour d'état

$$A_{bf} = A - BK$$