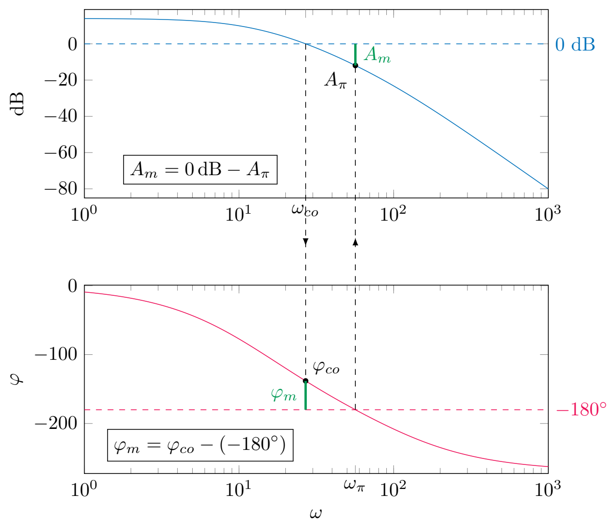
1 Fonctions de transfert

1.1 Marge de gain / marge de phase



1.2 Équations aux différences

$$\underset{\text{degré relatif}}{d} = \underset{\text{deg(denominateur)}}{n} - \underset{\text{deg(numérateur)}}{m}$$

Forme développée (Y en fonction de U)

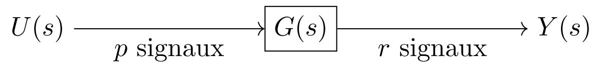
$$Y(z)\left(a_0 = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}\right) =$$
$$U(z)\left(b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \cdots + b_m z^{-d-m}\right)$$

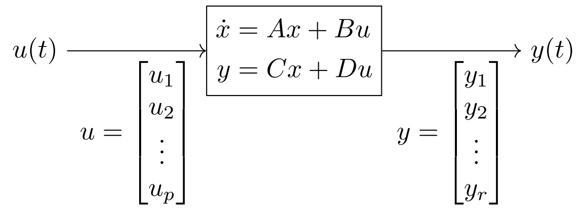
Forme fonction de transfert avec puissances de z négatives On peut aussi écrire sous la forme z^{-x}

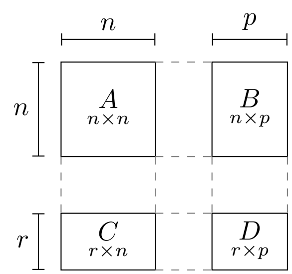
$$G(z) = \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \cdots + b_m z^{-d-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

2 Espaces d'états







2.1 Choix des variables d'état

- Condensateur : tension
- Bobine : courant

2.2 Forme modale

Matrice T construite à partir des vecteurs propres de A

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} = T^{-1}AT & \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT & \tilde{D} = D \end{array}}$$

2.3 $A, B, C, D \longrightarrow G$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(z) = C_n(zI - A_n)^{-1}B_n + D_n$$

2.3.1 Gain haute fréquence

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = D$$

2.3.2 Gain basse fréquence (gain statique)

$$G(0) = -CA^{-1}B + D$$

2.4 $G \longrightarrow A, B, C, D$

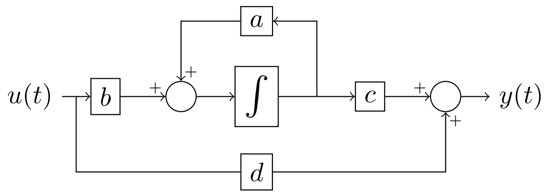
On utilise la forme commandable

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

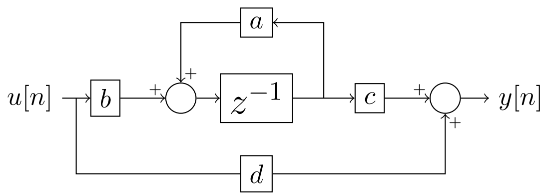
$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D = 0 \end{array}}$$

2.5 $G(s)/G(z) \longleftrightarrow A, B, C, D$

$$\boxed{d + \frac{b \cdot c}{s - a}} \qquad \boxed{\begin{matrix} A = [a] & B = [b] \\ C = [c] & D = [d] \end{matrix}}$$



$$\boxed{d + \frac{b \cdot c}{z - a}} \qquad \boxed{\begin{matrix} A_n = [a] & B_n = [b] \\ C_n = [c] & D_n = [d] \end{matrix}}$$



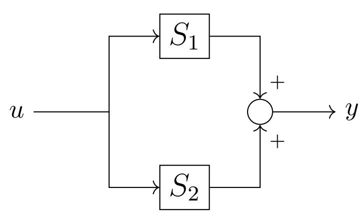
2.6 Mise en cascade

$$S_{tot} = S_2(s) \cdot S_1(s) \qquad \text{ordre important}$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_2D_1$$

2.7 Mise en parallèle

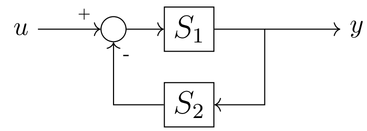


$$S_{tot}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1 + D_2$$

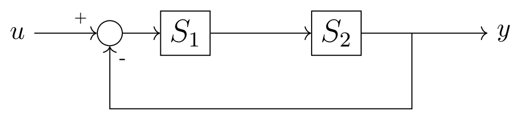
2.7.1 Mise en contre-réaction 1



$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1D_2(I - D_1D_2)^{-1}C_1 & -B_1(C_2 - D_2D_1C_2) \\ B_2(I - D_1D_2)^{-1}C_1 & A_2 - B_2(I - D_1D_2)^{-1}D_1C_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 - B_1D_2ND_1 \\ B_2ND_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} (I - D_1D_2)^{-1}C_1 & -(I - D_1D_2)^{-1}D_1C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = (I - D_1D_2)^{-1}D_1$$

2.7.2 Mise en contre-réaction 2



$$S_{tot}(s) = (I + S_1(s)S_2(s))^{-1}\, S_1(s)$$

$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1D_2$$

2.8 Commandabilité

$$\boxed{P_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}$$

Pour des systèmes monoentrée :

$$\det(P_c) \neq 0 \longrightarrow \text{Commandable}$$

Pour des systèmes multi-entrées (généralisation) :

$$\text{rang}(P_c) == n \longrightarrow \text{Commandable}$$

Faire une permutation avec T ne change pas la commandabilité du système. La nouvelle matrice $\tilde{P}_c$ est donnée par $T^{-1}P_c$

2.9 Observabilité

$$\boxed{P_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\text{rang}(P_0) = n \longrightarrow \text{Observable}}$$

En monosortie on peut utiliser $\det(P_0) \neq 0 \longrightarrow$ Observable

2.10 Trajectoire

2.11 Système numérique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \qquad B_n \qquad C_n \qquad D_n$$

Et la condition initiale x_0. On chercher à trouver les valeurs de $x[0], x[1], x[2], \cdots$

$$x[k] = A_n^k x[0] + A_n^{k-1}B_nu[0] + A_n^{k-2}B_nu[1] + \cdots + B_nu[k-1]$$

On a la contribution de la condition initiale et un produit de convolution $u[k] * g_x[k]$

2.11.1 Réponse impulsionnelle

Si on suppose que la condition initiale est nulle et qu'on excite le signal avec un dirac numérique, alors on a

$$\boxed{x[k] = A_n^{k-1}B_n}$$

2.12 Système analogique

Soit un système numérique avec les matrices

$$A_n \qquad B_n \qquad C_n \qquad D_n$$

Et la condition initiale x_0

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

2.12.1 Exponentielle matricielle (ou matrice de transition)

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots}$$

Si A est diagonale, on peut simplifier en écrivant

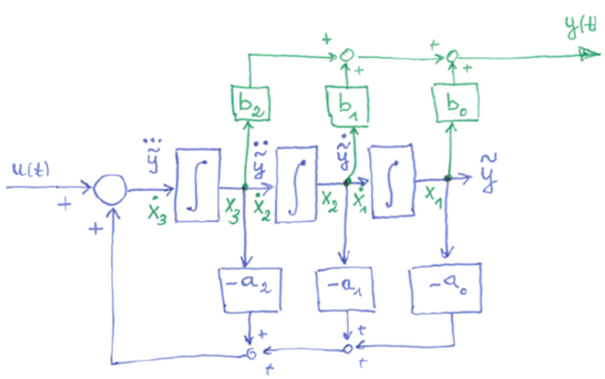
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{bmatrix}$$

Calcul par diagonalisation Si A est diagonalisable, alors

$$\boxed{e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}}$$

Ceci permet de simplifier les calculs en utilisant la propriété de l'exponentielle lorsque $\tilde{A}$ est diagonal

2.13 Forme commandable



On obtient donc finalement

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} & D = 0 \end{array}}$$

Voir **??**

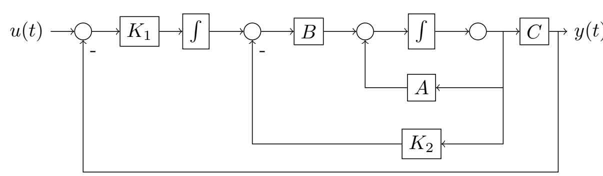
2.14 Modèle échantillonné

$$\boxed{H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G_a(s)}{s}\right)\bigg|_{t=kh}\right)}$$

2.14.1 Représentation dans l'espace d'état

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_n = e^{Ah} & B_n = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau \\ C_d = C & D_n = D \end{array}}$$

2.15 Action intégrale sur la commande



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$$

2.16 Placement de pôles

Il faut que le polynôme caractéristique de la boucle fermée (par exemple $sI - A_{bf} = sI - (A - BK)$) corresponde aux pôles que l'ont souhaite

$$\det(sI - A_{bf}) = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)$$

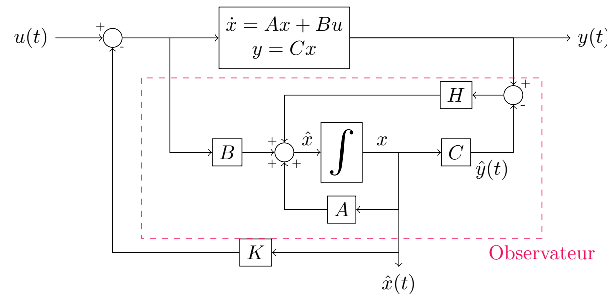
2.17 Retour d'état

$$A_{bf} = A - BK$$

2.18 Observateur

Matrice A de l'observateur (pour le calcul des pôles)

$$A_{obs} = A - HC$$



La fonction de transfert du régulateur est

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K\,(sI - A + BK + HC)^{-1}\,H$$

2.18.1 Filtre

Si il faut exprimer un filtre, par exemple $\hat{X}_2 = \cdots$, il faut commencer par décrire $\hat{X}_1$ en fonction du reste puis résoudre le système (en tout cas dans l'exercice 8.1).
Les pôles de l'observateur dans ce cas peuvent se baser sur le dénominateur de la fonction de transfert (si elle est donnée ou calculée).

2.18.2 Trajectoire

$$\boxed{\hat{x}[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + H\left(y[k] - \hat{y}[k]\right)}$$

3 Régulateurs

3.1 Méthode de la sécante

$$\boxed{\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[k] - x[k-1]}{h}}$$

$$G_s(z) = \frac{1 - z^{-1}}{h} = \frac{z-1}{hz}$$

3.2 Méthode des rectangles

$$\boxed{\int_0^t x dt \approx h \sum_{l=0}^{k-1} e[l]}$$

$$G_I(s) = \frac{h}{z-1}$$

3.3 PID

En temps discret et avec méthode de la sécante et des rectangles

$$y[k] = K_p \left(e[k] + \frac{1}{T_i} h \sum_{l=0}^{k-1} e[l] + T_d \frac{e[k] - e[k-1]}{h} \right)$$

4 Autres

4.1 Inversion de matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4.2 Valeurs propres

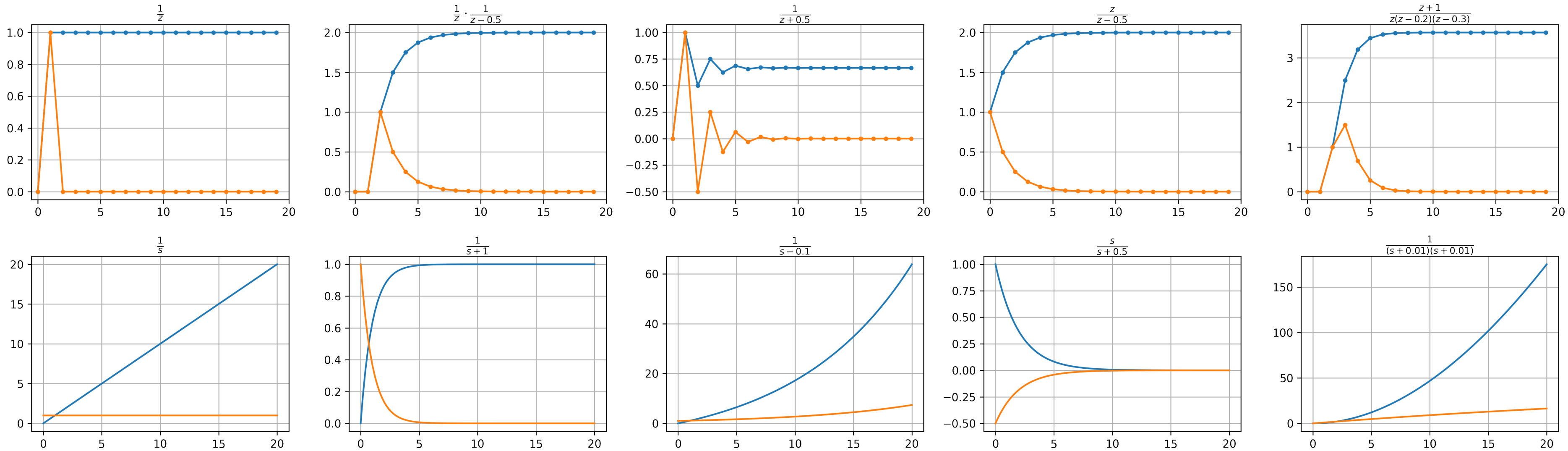
$$|\lambda_i I - A| = 0$$

fonction en s et en z

4.3 Vecteurs propres

Chercher tous les vecteurs v_i qui respectent

$$(\lambda_i I - A) v_i = \vec{0}$$



5 A trier

5.1 Identification

Avec deux bodes, on peut identifier lequel est $G(s)$ et lequel est $\frac{1}{G(s)}$ en regardant une valeur (en dB) de x qui devient $-x$