Série 4. Exercices

1. Calculer avec la méthode de Romberg des approximations des intégrales
$$\int_0^\pi e^x \cos x \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \sqrt{x} \, dx \; .$$
Donner pour chacune des deux intégrales le triangle de Romberg (5 colonnes) avec les erreurs. Expliquer la différence de la vitesse de convergence.

2. Vous devez évaluer numériquement les intégrales données ci-dessous avec une **très grande précision** et un coût de calcul aussi petit que possible:
$$\textbf{(1)} \int_0^\pi e^{\sin^2 x} \, dx \quad \textbf{(2)} \int_0^2 p_3(t) \, dt \quad \textbf{(3)} \int_0^2 e^{-x^2/2} \, dx$$
où le signal $p_3(t)$ est un **polynôme cubique** qui a été échantillonné. On connaît les valeurs
$$p_3(0) = 7.0\,, \quad p_3(0.5) = 6.625\,, \quad p_3(1) = 5.0\,, \quad p_3(1.5) = 2.875 \quad \text{et} \quad p_3(2) = 1.0\,.$$
   (a) Donner pour chaque intégrale la méthode d'intégration que vous utilisez. Justifiez votre réponse.
   (b) Calculer numériquement les intégrales **(1)** et **(2)** avec les méthodes proposées dans la partie (a).

3. Calculer les intégrales ci-dessous avec la méthode de Romberg, la méthode du trapèze, la méthode composite de Simpson (formule pour S_c à la page 37 avec $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$) et la méthode de Gauss (nombre de noeuds $n = 2, 4, 6, 8, 10$ et 12). Comparer le nombre d'évaluations de $f(x)$ pour obtenir la même précision.

   Indication: Vous trouverez les noeuds et les poids pour l'intégration de Gauss dans un notebook *Mathematica* ou dans un fichier *Matlab*.

   (a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(10) \doteq 1.151292546$

   (b) $\displaystyle\int_0^{0.95} \frac{1}{1-x} \, dx = \ln(20) \doteq 2.995732274$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - 0.5 \cdot \sin^2 x}} \, dx \doteq 1.8540746773$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8 \cdot \sin^2 x}} \, dx \doteq 2.2572053268$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - 0.96 \cdot \sin^2 x}} \, dx \doteq 3.0161124925$

   Les intégrales (c), (d) et (e) sont des intégrales elliptiques du premier ordre.

4. Démontrer que les polynômes de Legendre $P_1(x)$ et $P_3(x)$ sont orthogonaux, c'est-à-dire démontrer que
$$\int_{-1}^1 P_1(x) \cdot P_3(x) \, dx = 0 \; .$$