1 Systèmes d'équations non linéaires

1.1 Point fixe

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

F est une contraction si

$$||\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(x')|| \leq L||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|| \qquad ||\mathbf{x}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et donc **F** possède un seul point fixe (et y converge de toute façon).

$$\boxed{\max_{(x,y)\in D} ||\mathbf{J}(x,y)|| < 1 \longrightarrow \text{ contraction sur } D}$$

$$||\mathbf{J}(x,y)|| = \sqrt{F_x(x,y)^2 + F_y(x,y)^2 + G_x(x,y)^2 + G_y(x,y)^2}$$

Matrice de Jacobi :

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Résultat global mais difficile de trouver un domaine D... Il existe une version locale

$$\rho(\mathbf{J}(\mathbf{r})) < 1 \longrightarrow \text{ converge à l'intérieur d'un disque } D \text{ vers } \mathbf{r}$$

Avec ρ le rayon spectral (maximum des modules des valeurs propres de la matrice).

1.1.1 Ordre

Convergence linéaire

$$||\mathbf{e}_{k+1}|| \lessapprox ||\mathbf{J}(r,s)|| \cdot ||\mathbf{e}_k||$$

Si $\mathbf{J}(r,s)$ est nulle on a un ordre de convergence quadratique.

1.1.2 Estimation

1. A priori :

$$||\mathbf{r} - \mathbf{x}_k|| \leq \frac{L^k}{1-L}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$$

2. A posteriori :

$$||\mathbf{r} - \mathbf{x}_k|| \leq \frac{L}{1-L}|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}|$$

1.2 Méthode de Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{g(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k) - f(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)}{f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k) - f_y(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k)}}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{f(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k) - g(x_k, y_k)f_x(x_k, y_k)}{f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k) - f_y(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k)}}$$