

1 Équations non linéaires

1.1 Existence d'une solution

Solution $f(r) = 0$ entre a et b pour f continue

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

1.2 Bisection

1. $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \frac{a+b}{2}$
2. Répéter jusqu'à ce que $|a_k - b_k| \geq tol \cdot |b_k|$
 - (a) Si $f(x_k)f(a_k) < 0 : a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$
 - (b) Si $f(x_k)f(a_k) > 0 : a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$
 - (c) $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

L'erreur converge avec

$$|e_k| < \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

1. Robuste
2. Intervalles qui contiennent la solution
3. Majorant connu de l'erreur
4. Lente

1.3 Regula falsi

A l'exception du premier terme, on doit décider si on utilise x_{k-1} avec x_{k-2} ou x_{k-3}

$$x_k = \begin{cases} x_{k-2} - y_{k-2} \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{y_{k-1} - y_{k-2}} & y_{k-1} \cdot y_{k-2} < 0 \\ x_{k-3} - y_{k-3} \frac{x_{k-1} - x_{k-3}}{y_{k-1} - y_{k-3}} & y_{k-1} \cdot y_{k-3} < 0 \end{cases}$$

1.4 Sécante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Ordre de convergence de

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

1. Pas de connaissance de la dérivée
2. Une seule évaluation de f
3. Plus efficace que Newton (plus facile à calculer)

1.5 Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$|e_{k+1}| \approx \left| \frac{f''(r)}{f'(r)} \right| \cdot |e_k|^2$$

1. Très rapide
2. Peut ne pas converger

1.6 Point fixe

On veut une équation sous la forme :

$$x = F(x) \longrightarrow x_{k+1} = F(x_k)$$

Manipulation de f pour obtenir F

$$f(x) = x^5 + x^3 - x - 5 \longrightarrow F(x) = x^5 + x^3 - 5$$

$$C = |F'(r)|$$

Pour gagner une décimale il faut que

$$k \geq \frac{\ln(10)}{\ln(C)}$$

1.6.1 Théorème de Banach

Si

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad 0 < L < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

Alors il existe une seule solution r dans I

1. Fonction Lipschitzienne : qui satisfait la condition de Lipschitz avec n'importe quel L
2. Fonction contractante : qui satisfait la condition de Lipschitz et $0 < L < 1$

$$L_{\text{optimal}} = \max_{x \in I} |F'(x)|$$

1.6.2 Estimation

1. A priori :

$$|r - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

2. A posteriori :

$$|r - x_k| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}|$$

2 Systèmes d'équations non linéaires

2.1 Point fixe

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

\mathbf{F} est une contraction si

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}')\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et donc \mathbf{F} possède un seul point fixe (et y converge de toute façon).

$$\max_{(x,y) \in D} \|\mathbf{J}(x, y)\| < 1 \longrightarrow \text{contraction sur } D$$

$$\|\mathbf{J}(x, y)\| = \sqrt{F_x(x, y)^2 + F_y(x, y)^2 + G_x(x, y)^2 + G_y(x, y)^2}$$

Matrice de Jacobi :

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Résultat global mais difficile de trouver un domaine D ... Il existe une version locale

$$\rho(\mathbf{J}(\mathbf{r})) < 1 \longrightarrow \text{converge à l'intérieur d'un disque } D \text{ vers } \mathbf{r}$$

Avec ρ le rayon spectral (maximum des modules des valeurs propres de la matrice).

2.1.1 Ordre

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| \lesssim \|\mathbf{J}(r, s)\| \cdot \|\mathbf{e}_k\|$$

2.1.2 Estimation

1. A priori :

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{x}_k\| \leq \frac{L^k}{1 - L} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$$

2. A posteriori :

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{x}_k\| \leq \frac{L}{1 - L} |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}|$$