

Série 3. Exercices

1. On veut évaluer numériquement l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \doteq 1.851937052$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

on définit $f(0) = 1$.

- (a) Utiliser l'algorithme pour la formule composite du trapèze. Effectuer 5 étapes.
- (b) Utiliser la formule de Simpson simple.
- (c) Utiliser la formule de Simpson composite avec $n = 4$ polynômes.

2. L'intégrale

$$\int_0^2 e^{-x^2/2} dx$$

ne peut plus être évaluée symboliquement avec des fonctions élémentaires.

- (a) Formule composite du trapèze: quel doit être le pas h pour trouver une approximation dont l'erreur est majorée par 10^{-5} . Déterminer cette approximation.

Indication:

$$M_2 := \max_{0 \leq x \leq 2} |f''(x)| = 1$$

- (b) Formule composite de Simpson: quel doit être le pas h pour trouver une approximation dont l'erreur est majorée par 10^{-5} . Déterminer cette approximation.

Indication:

$$M_4 := \max_{0 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| = 3$$

3. Le but de cet exercice est de vérifier l'importance de l'hypothèse de régularité sur $f(x)$ pour les estimations d'erreur. Calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{2}{5}$$

en utilisant les formules de Newton-Cotes **non-composites** pour $n = 1, 2, 3$ et 4. Comme $f(x)$ est seulement de classe $C^1([0, 1])$, (une fois continûment différentiable) on ne s'attend pas à une amélioration significative de la précision quand n augmente.

4. Nous considérons l'intégrale

$$\int_{-5}^5 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x \doteq 2.7468$$

Utiliser les formules de Newton-Cotes **non-composites** pour $n = 1, 2, 3$ et 4 pour trouver une approximation de cette intégrale.

Vous allez constater que bien que la fonction $f(x)$ soit infiniment dérivable, la précision de l'approximation n'augmente pas beaucoup en augmentant la valeur de n . Cela est dû au fait que la fonction possède des singularités dans le plan complexe pour $x = \pm j$. Nous avons déjà rencontré cette fonction dans le chapitre sur l'interpolation (exemple de Runge).

De toute façon, ce n'est pas du tout une bonne idée d'utiliser une formule de Newton-Cotes avec un degré n élevé. Cela aurait en effet les mêmes conséquences négatives que pour l'interpolation avec des noeuds équidistants.

5. Donner l'algorithme de la formule de Simpson adaptative présenté en classe.