Série 1. Exercices

1. Approcher la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ par le polynôme interpolant entre les noeuds $x_0 = 2,\ x_1 = 2.5$ et $x_2 = 4$.
   (a) Utiliser le polynôme de Lagrange.
   (b) Utiliser le polynôme de Newton.
   (c) Utiliser la formule barycentrique pour trouver une approximation de $f(3) = \dfrac{1}{3}$.

2. Approcher la fonction $f(x) = e^{-x}$ par le polynôme interpolant entre les noeuds $x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5$ et $x_3 = 0.75$.
   (a) Déterminer le polynôme de Newton.
   (b) Déterminer les bornes supérieures pour l'erreur sur les différentes parties de l'intervalle d'interpolation $[0, 0.75]$.

3. Utiliser le schéma de Horner pour calculer $p(3)$ et $p'(3)$ pour
$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2.$$

4. Cet exercice se réfère à l'exemple 4 dans le support de cours à la page 13.
   (a) Démontrer que
$$|(x - x_0)(x - (x_0 + h))| \leq \frac{1}{4}h^2, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h$$
   Indication: prendre $x_0 = 0.$ et chercher le maximum de la fonction obtenue.
   (b) Démontrer que
$$|(x - x_0)(x - (x_0 + h))(x - (x_0 + 2h)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}h^3, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + 2h$$
   Indication: prendre $x_0 = -h.$ et chercher le maximum de la fonction obtenue.

5. (Facultatif) Le ***polynôme de Tchebychev*** de degré $n \in \mathbb{N}_0$ est donné par
$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$$
   (a) Montrer que $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.
   (b) Démontrer la formule de récurrence
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{1}$$
   Indication: Démontrer que
$$T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_n(x)$$
   en utilisant l'identité trigonométrique
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

(c) Utiliser la formule de récurrence (1) pour calculer $T_2(x)$ et $T_3(x)$.

(d) Démontrer que les abscisses de Tchebychev d'ordre n ($n+1$ abscisses!) sont les zéros du polynôme de Tchebychev de degré $n+1$.