1 Résolution EDO

$$\boxed{y' = f(t, y(t))}$$

1.1 Méthodes explicites

1.1.1 Méthode d'Euler explicite

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$
$$||\vec{y}_n - \vec{y}(T)|| \leq Ch$$

- 1 palier
- ordre 2
- Énergie totale non conservée
- h suffisamment petit si on veut être stable

1.1.2 Méthode de Heun

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \frac{h}{2}\left(\vec{s}_1 + \vec{s}_2\right)$$
$$\vec{s}_1 = \vec{f}(t_k, \vec{u}_k) \qquad \vec{s}_2 = \vec{f}(t_k + h, \vec{u}_k + h\vec{s}_1)$$

- 2 paliers
- Ordre 2
- h suffisamment petit si on veut être stable

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

1.1.3 Méthode optimale

$$\boxed{\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + h\left(\frac{1}{4}\vec{s}_1 + \frac{3}{4}\vec{s}_2\right)}$$

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= f(t_k, \vec{u}_k) \\ \vec{s}_2 &= f\left(t_k + \frac{2}{3}h, \vec{u}_k + \frac{2}{3}h\vec{s}_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

1.1.4 Crank-Nicolson

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

1.1.5 Runge-Kutta 2

$$\boxed{\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + h\left(w_1\vec{s}_1 + w_2\vec{s}_2\right) \qquad \vec{s}_1 = \vec{f}(t_k, \vec{u}_k) \quad \vec{s}_2 = \vec{f}(t_k + c_2h, \vec{u}_k + a_{21}h\vec{s}_1)}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & w_1 & w_2 \end{array}$$

1. Méthode à 2 paliers
2. Ordre 2
3.

1.1.6 Runge-Kutta 3

$$\boxed{\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + h\left(w_1\vec{s}_1 + w_2\vec{s}_2 + w_3\vec{s}_3\right)}$$

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= \vec{f}(t_k, \vec{u}_k) \\ \vec{s}_2 &= \vec{f}(t_k + c_2h, \vec{u}_k + a_{21}h\vec{s}_1) \\ \vec{s}_3 &= \vec{f}(t_k + c_3h, \vec{u}_k + a_{31}h\vec{s}_1 + a_{32}h\vec{s}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$

1.1.7 Runge-Kutta 4

$$\boxed{\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \frac{h}{6}\left(\vec{s}_1 + 2\vec{s}_2 + 2\vec{s}_3 + \vec{s}_4\right)}$$

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= \vec{f}(t_k, \vec{u}_k) \\ \vec{s}_2 &= \vec{f}\left(t_k + \frac{h}{2}, \vec{u}_k + \frac{h}{2}\vec{s}_1\right) \\ \vec{s}_3 &= \vec{f}\left(t_k + \frac{h}{2}, \vec{u}_k + \frac{h}{2}\vec{s}_2\right) \\ \vec{s}_4 &= \vec{f}\left(t_k + h, \vec{u}_k + h\vec{s}_3\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

1. Méthode à 4 paliers
2. Ordre 4
3. Conditionnellement stable

1.1.8 Stabilité

Pour que le système soit stable (pour un système linéaire à une équation), il faut que

$$\boxed{h < \frac{2}{\lambda}}$$

Avec

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u(t)$$

Pour un système de la forme

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -A\vec{u}$$

On va chercher le max des valeurs propres

$$\boxed{h < \frac{2}{|\lambda_{max}(A)|}}$$

Pour un problème non-linéaire, on peut faire une linéarisation autour de u_0 et t_0

$$
\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

1.2 Méthodes implicites

1.2.1 Méthode de Euler implicite

Sois un système de la forme :

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t))$$
$$u(t_0) = u_0$$

La méthode d'Euler implicite est la suivante :

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t_k} = f(t_k, u_k)$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{tk} \approx \frac{\vec{u}_k - \vec{u}_{k-1}}{h}$$

$$\boxed{\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + hf(t_{k+1}, \vec{u}_{k+1})}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

1. Nécessité de résoudre un système linéaire à chaque fois
2. Ordre 1
3. Problèmes de conservation d'énergie
4. Inconditionnellement stable

1.2.2 Méthode de Crank-Nicolson

$$u_{k+1} = u_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, u(t))dt$$

On peut utiliser la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale

$$\approx \frac{h}{2}\left(f(t_k, u_k) + f(t_{k+1}, u_{k+1})\right)$$

$$\boxed{\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \frac{h}{2}\left(\vec{f}(t_k, \vec{u}_k) + \vec{f}(t_{k+1}, \vec{u}_{k+1})\right)}$$

On peut dire que Crank-Nicolson est la moyenne entre la méthode d'Euler explicite et implicite.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

1. On doit résoudre un système linéaire à chaque fois
2. Ordre 2
3. Inconditionnellement stable

1.2.3 Méthode d'Euler symplectique

Utilisé pour la mécanique

$$\boxed{\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_k + hF(t_k, x_k, v_k) \\ x_k + hv_{k+1} \end{pmatrix}}$$

1.3 Réduction d'ordre

$$y(t) = y_1 \quad y'(t) = y_2 \quad \cdots \quad y^{(n+1)} = y_n$$

$$\vec{u} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n+1)}(0) \end{pmatrix}$$

1.4 Tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_n & a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} & \\ \hline & w_1 & \cdots & w_{n-1} & w_n \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + h\left(w_1\vec{s}_1 + \cdots + w_n\vec{s}_n\right)$$

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= f(t_k + c_1 h, \vec{u}_k) \\ \vec{s}_2 &= f(t_k + c_2 h, \vec{u}_k + h(a_{21}\vec{s}_1)) \\ \vec{s}_n &= f(t_k + c_n h, \vec{u}_k + h\left(a_{n1}\vec{s}_1 + \cdots + a_{n\ n-1}h\vec{s}_{n-1}\right)) \end{aligned}$$

On doit avoir

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$$
$$a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nk} = c_n$$

1.4.1 Erreur

1. L'erreur globale (après toutes les itérations) est d'ordre égal à la taille du tableau

$$|u_{\text{approché}}(T) - u_{\text{réel}}(T)| \leq Ch^n$$

2. L'erreur locale (commise après une itération) est d'ordre égal à la taille du tableau + 1

$$|u_{\text{approché}}(T) - u_{\text{réel}}(T-h)| \leq Ch^{n+1}$$

1.5 Problèmes mal posés

Les problèmes mal posés ont une énorme perturbation de $u(t)$ pour une petite perturbation de u_0. Typiquement des soucis si on a une équation de la forme

$$\cdots(u_0 - 1)\cdots$$

Avec $u_0 \approx 1$