1 Résolution numérique de systèmes linéaires

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Si peu d'éléments sont non-nuls alors A est dite **creuse**

1.1 Condition d'arrêt

$$||\vec{r}_k|| = \left|\left|\vec{b} - A\vec{x}_k\right|\right| \leq \tau \left|\left|\vec{b}\right|\right|$$

On peut aussi utiliser une condition d'arrêt sur l'erreur $\vec{e}_k$ au lieu du résidu $\vec{r}_k = \vec{b} - A\vec{x}_k$

1.1.1 Lien entre résidu et erreur

$$\frac{||\vec{x} - \vec{x}_k||}{||\vec{x}_k||_p} \leq \underbrace{||A||_p \left|\left|A^{-1}\right|\right|_p}_{\kappa_p(A)} \frac{\left|\left|\vec{b} - A\vec{x}_k\right|\right|_p}{\left|\left|\vec{b}\right|\right|_p}$$

Autant de digits valides dans la mantisse que

$$|\log_{10}(\varepsilon)| - \log_{10}(\kappa(A)_p)$$

Avec ε la précision machine (1e-16 en général)

1.1.2 Perturbation

Perturbation sur A

$$\boxed{\frac{||\delta\vec{x}_A||}{||\vec{x} + \delta\vec{x}_A||} \leq \left|\left|\vec{A}\right|\right| \cdot \left|\left|\vec{A}^{-1}\right|\right| \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}}$$

Perturbation sur A et $\vec{b}$:

$$\boxed{\frac{||\delta\vec{x}||}{||\vec{x} + \delta\vec{x}||} \leq \frac{\left|\left|\vec{A}\right|\right| \cdot \left|\left|\vec{A}^{-1}\right|\right|}{1 - ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \frac{||\delta A||}{||A||}} \cdot \left(\frac{||\delta A||}{||A||} + \frac{\left|\left|\delta\vec{b}\right|\right|}{\left|\left|\vec{b}\right|\right|}\right)}$$

1.2 Normes

$$||\vec{v}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Vecteurs
   (a) 1-norme : somme des composantes
   (b) 2-norme : norme euclidienne
   (c) max-norme : $p \to \infty$
2. Matrices
   (a) 1-norme :
   (b) 2-norme : ou max des valeurs propres de $A^T A$
   (c) max-norme

1. $||\vec{v}|| = 0 \longleftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
2. $||\lambda \vec{v}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{v}||$
3. $||\vec{v} + \vec{u}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{u}||$

1.3 Méthodes directes

1.3.1 Élimination de Gauss sans pivot

Effectuer des combinaisons linéaires des lignes pour obtenir une matrice triangulaire supérieure. Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array}\right)$$

1. Commencer par la colonne de gauche
2. Si nécessaire, permuter les lignes pour avoir un non-nul comme premier élément
3. Faire les combinaisons linéaires des lignes pour annuler les éléments inférieurs
4. Passer à la colonne suivante