

1 Splines

1.1 Polynômes de degré 1

Entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1) :

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0 \quad m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

Bonne approximation mais points anguleux

1.2 Polynômes de degré 2

$$\begin{array}{ll} s_0(x_1) = s_1(x_1) = y_1 & s'_0(x_1) = s'_1(x_1) \\ s_1(x_2) = s_2(x_2) = y_2 & s'_1(x_2) = s'_2(x_2) \end{array}$$

$$s_0(x_0) = y_0 \quad s_n(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

$3n - 1$ conditions pour $3n$ inconnues. Un degré de liberté : $s'_0(x_0)$

1.3 Polynômes de degré 3

$$\begin{array}{lll} s_0(x_1) = s_1(x_1) = y_1 & s'_0(x_1) = s'_1(x_1) & s''_0(x_1) = s''_1(x_1) \\ s_1(x_2) = s_2(x_2) = y_2 & s'_1(x_2) = s'_2(x_2) & s''_1(x_2) = s''_2(x_2) \end{array}$$

$$s_0(x_0) = y_0 \quad s_n(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

$4n - 2$ conditions pour $4n$ inconnues.

$$s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n) = 0 \longrightarrow \textbf{spline naturelle}$$

Chaque segment est donné par

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

On trouve ensuite les coefficients pour chacun avec

$$\begin{cases} a_i &= \frac{1}{6h} (y''_{i+1} - y''_i) \\ b_i &= \frac{1}{2} y''_i \\ c_i &= \frac{1}{h} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6} h (y''_{i+1} + 2y''_i) \\ d_i &= y_i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{n-1 \times n-1} \begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ y_5 - 2y_4 + y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y''_0 \\ 0 \\ 0 \\ y''_5 \end{pmatrix}$$

Note :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^I = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

1.3.1 Erreur

$f(x)$ doit être 4 fois continûment dérivable et les points équidistants

$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &\leq C_0 h^4 \max_{\zeta \in I} \left| f^{(4)}(\zeta) \right| \\ |f'(x) - s'(x)| &\leq C_1 h^3 \max_{\zeta \in I} \left| f^{(4)}(\zeta) \right| \\ |f''(x) - s''(x)| &\leq C_2 h^2 \max_{\zeta \in I} \left| f^{(4)}(\zeta) \right| \\ |f'''(x) - s'''(x)| &\leq C_3 h^1 \max_{\zeta \in I} \left| f^{(4)}(\zeta) \right| \end{aligned} \quad x \neq x_0, x_1, \dots$$

1.3.2 Courbes paramétrique

Faire une spline pour chaque coordonnée (x , y , etc...) en fonction de t . Possibilité de faire une approximation

$$t_{i+1} - t_i \approx \text{distance entre } (x_i, y_i) \text{ et } (x_{i+1}, y_{i+1})$$