

1 Interpolation

$n + 1$ points

1.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 3+1 points

$$l_0(x) = \lambda_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$l_1(x) = \lambda_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2(x) = \lambda_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3(x) = \lambda_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

OU

$$p_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(y_0 \mu_0 + y_1 \mu_1 + y_2 \mu_2 + y_3 \mu_3)}$$

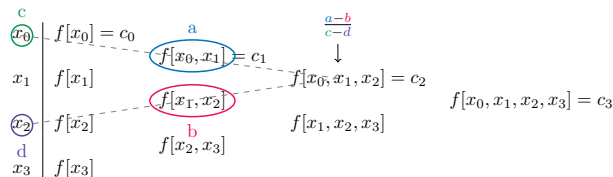
$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

Forme barycentrique :

$$p_3(x) = \frac{y_0 \mu_0 + y_1 \mu_1 + y_2 \mu_2 + y_3 \mu_3}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

1.2 Polynôme d'interpolation de Newton

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$



Possible de rajouter une ligne en dessous du tableau

1.3 Évaluation

On utilise le schéma de Horner

	x^3	x^2	x	x^0	
$x = 2$	5	-3	0	2	
	5	10	14	20	
		7	14	30	$p_3(2) = 30$
	5	10	34		
		17	48		$p'_3(2) = 48$

Après la première dérivée, il faudra appliquer un facteur

$$\frac{P_n^{(k)}(x_i)}{k!}$$

1.4 Erreur

Ordre 1 (2 points)

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2$$

Ordre 2 (3 points)

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3$$

Order 3 (4 points)

$$\begin{cases} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{128} M_4 h^4 & x \in [x_1, x_2] \\ |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^4 & x \in [x_0, x_1] \cup [x_2, x_3] \end{cases}$$

Avec

$$M_k = \max_{\zeta \in [a, b]} |f^{(k)}(\zeta)|$$

L'utilisation des abscisses de Chebychev permettent de minimiser l'erreur avec un nombre de points donnés sur un intervalle donné

2 Splines

2.1 Polynômes de degré 1

Entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1) :

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0 \quad m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

Bonne approximation mais points anguleux

2.2 Polynômes de degré 2

$$\begin{aligned} s_0(x_1) &= s_1(x_1) = y_1 & s'_0(x_1) &= s'_1(x_1) \\ s_1(x_2) &= s_2(x_2) = y_2 & s'_1(x_2) &= s'_2(x_2) \\ s_0(x_0) &= y_0 & s_n(x_{n+1}) &= y_{n+1} \end{aligned}$$

$3n - 1$ conditions pour $3n$ inconnues. Un degré de liberté : $s'_0(x_0)$

2.3 Polynômes de degré 3

$$\begin{aligned} s_0(x_1) &= s_1(x_1) = y_1 & s'_0(x_1) &= s'_1(x_1) & s''_0(x_1) &= s''_1(x_1) \\ s_1(x_2) &= s_2(x_2) = y_2 & s'_1(x_2) &= s'_2(x_2) & s''_1(x_2) &= s''_2(x_2) \end{aligned}$$

$$s_0(x_0) = y_0 \quad s_n(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

$4n - 2$ conditions pour $4n$ inconnues.

$$s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n) = 0 \longrightarrow \text{spline naturelle}$$

Chaque segment est donné par

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

On trouve ensuite les coefficients pour chacun avec

$$\begin{cases} a_i &= \frac{1}{6h} (y''_{i+1} - y''_i) \\ b_i &= \frac{1}{2} y''_i \\ c_i &= \frac{1}{h} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6} h (y''_{i+1} + 2y''_i) \\ d_i &= y_i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ y_5 - 2y_4 + y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y''_0 \\ 0 \\ 0 \\ y''_5 \end{pmatrix}$$

Note :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^I = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Erreur

$f(x)$ doit être 4 fois continûment dérivable et les points équidistants

$$|f(x) - s(x)| \leq C_0 h^4 \max_{\zeta \in I} |f^{(4)}(\zeta)|$$

$$|f'(x) - s'(x)| \leq C_1 h^3 \max_{\zeta \in I} |f^{(4)}(\zeta)|$$

$$|f''(x) - s''(x)| \leq C_2 h^2 \max_{\zeta \in I} |f^{(4)}(\zeta)|$$

$$|f'''(x) - s'''(x)| \leq C_3 h \max_{\zeta \in I} |f^{(4)}(\zeta)| \quad x \neq x_0, x_1, \dots$$

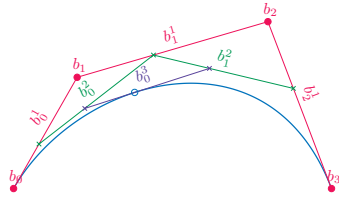
2.3.2 Courbes paramétrique

Faire une spline pour chaque coordonnée $(x, y, \text{etc...})$ en fonction de t . Possibilité de faire une approximation

$$t_{i+1} - t_i \approx \text{distance entre } (x_i, y_i) \text{ et } (x_{i+1}, y_{i+1})$$

3 Courbes et surfaces

3.1 Courbes de Bézier (De Casteljau)



ordre $n \longleftrightarrow n + 1$ points

$b^{\text{degré}}$
 départ

Exemples :

$$\begin{aligned} b_0^1(t) &= (1-t)b_0 + tb_1 & b_0 &\rightarrow b_1 \\ b_1^1(t) &= (1-t)b_1 + tb_2 & b_1 &\rightarrow b_2 \\ b_0^2(t) &= (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t) & b_0 &\rightarrow b_2 \end{aligned}$$

La courbe de Bézier est comprise dans le polygone de contrôle (points de contrôles reliés).

3.2 Polynômes de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad t \in [0, 1]$$

n	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	$B_0^0(t) = 1$			
1	$B_0^1(t) = 1-t$	$B_1^1(t) = t$		
2	$B_0^2(t) = (1-t)^2$	$B_1^2(t) = 2t(1-t)$	$B_2^2(t) = t^2$	
3	$B_0^3(t) = (1-t)^3$	$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$	$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$	$B_3^3(t) = t^3$

$$\binom{n}{i} = C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

La somme des polynômes donne 1

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

1. $t = 0$ est un zéro de multiplicité i
2. $t = 1$ est un zéro de multiplicité $n - i$
3. $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$
4. $B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$

Exemples :

$$\begin{aligned} b_0^1(t) &= b_0 B_0^1(t) + b_1 B_1^1(t) \\ b_1^1(t) &= b_1 B_0^1(t) + b_2 B_1^1(t) \\ b_0^2(t) &= b_0 B_0^2(t) + b_1 B_1^2(t) + b_2 B_2^2(t) \end{aligned}$$

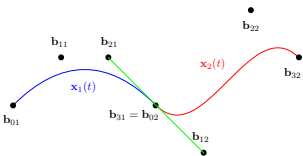
$$x(t) = b_0 B_0^3(t) + b_1 B_1^3(t) + b_2 B_2^3(t) + b_3 B_3^3(t)$$

3.3 Bernstein et Bézier

$$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^r(t)$$

3.4 Courbes composées

1. Deux extrémités égales (points superposés)
2. Points autour de l'extrémité alignés



4 Intégration numérique

4.1 Formule du trapèze

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

4.2 Formule composite du trapèze

Formule du trapèze avec sous-division (n intervalles)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(b) \right)$$

4.3 Formule du point milieu

$$M = h (f(x_{0.5}) + f(x_{1.5}) + \dots + f(x_{n-0.5}))$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} (T(h) + M(h))$$

4.3.1 Algorithme pour $n = 4$

1. $h = b - a$
2. $T(h) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_4))$
3. $M(h) = hf(x_2)$
4. $T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} (M(h) + T(h))$
5. $M\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_3))$
6. $T\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{1}{2} (M\left(\frac{h}{2}\right) + T\left(\frac{h}{2}\right))$

4.3.2 Erreur

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Optimal si

1. La fonction est **périodique**
2. La fonction est **infiniment dérivable**
3. On intègre sur une période

4.4 Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$
$$h = \frac{b-a}{2}$$

4.4.1 Erreur

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq \frac{h^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

4.5 Formule de Newton-Cotes

Avec $n = 3$ (3/8 de Simpson)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4))$$

n pair : polynômes jusqu'à $n + 1$. n impair : polynômes jusqu'à n

4.6 Formule de composition de Simpson

Cas général avec $2n$ sous intervalles

$$S_c = \frac{h}{3} \left(f(a) + 3f(x_1) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_{2k}) + 2f(x_{2k+1})) \right)$$

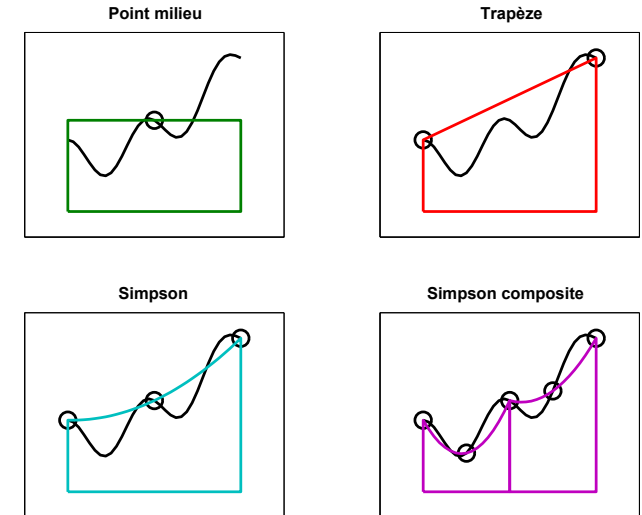
4.6.1 Erreur

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_c \right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$
$$h = \frac{b-a}{2n}$$

4.7 Formule de Simpson adaptative

Intervalles non uniformes

4.8 Récapitulatif



5 Équations non linéaires

6 Systèmes d'équations non linéaires

7 Résolution numérique

8 Résolution EDO

9 Autres

9.1 Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

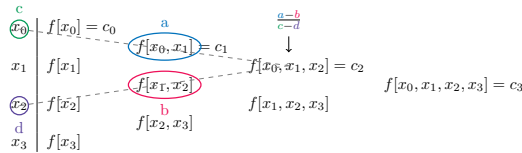
$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

10 Courbes de Bézier

11 Résolution numérique

11.1 Doolittle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} u_{11} &= a_{11} \\ u_{12} &= a_{12} \\ u_{13} &= a_{13} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{cases} \\ (3) \begin{cases} u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} \\ u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} \end{cases} \quad (4) \begin{cases} l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \end{cases} \\ (5) \begin{cases} u_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \end{cases} \end{aligned}$$

11.2 Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_{11} & 0 & 0 \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & 0 \\ \hat{l}_{31} & \hat{l}_{32} & \hat{l}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{l}_{21} & \hat{l}_{31} \\ 0 & \hat{l}_{22} & \hat{l}_{32} \\ 0 & 0 & \hat{l}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{l}_{11} &= \sqrt{a_{11}} & \hat{l}_{21} &= \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \\ \hat{l}_{31} &= \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & \hat{l}_{22} &= \sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}} \\ \hat{l}_{32} &= \frac{a_{23} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}}}{\sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}}} & \hat{l}_{33} &= \sqrt{a_{33} - \hat{l}_{31}^2 - \hat{l}_{32}^2} \end{aligned}$$

11.3 Permutations

Attention, si on utilise des permutations, alors

$$PA\vec{x} = P\vec{b}$$

11.4 Méthode QR

On commence avec une matrice $A_{n \times n}$

1. Prendre le premier vecteur colonne de A : \vec{v}_1
2. Faire la décomposition pour obtenir H_1
3. Construire H_1A puis prendre v_2 (première colonne de H_1A sans la première ligne et sans la première colonne)
4. à la fin, déterminer R et Q

$$H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = R \longrightarrow A = \underbrace{H_1 H_2 \cdots H_{n-1} H_n^T}_{Q} R$$

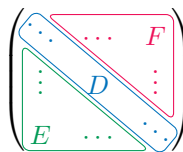
v est un vecteur de norme 1, on utilise \tilde{v} si la norme est plus grande

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \quad \vec{n} = x - y$$

$$y = -\rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\text{signe}(x_i) \|x_i\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \text{taille de } x \right.$$

$$H = I - 2vv^H$$

12 Résolution numérique par itérations



12.1 Méthode de Jacobi

$$\vec{x}^{(k)} = D^{-1} \left(b - (A - D)\vec{x}^{(k-1)} \right)$$

$$N = D^{-1} = \text{diag}^{-1}(A)$$

12.2 Méthode de Gauss-Seidel

$$\vec{x}^{(k)} = (E + D)^{-1} \left(\vec{b} - F\vec{x}^{(k-1)} \right)$$

$$N = (D + E)^{-1}$$

12.3 Méthode SOR

$$\vec{x}^{(k+1)} = (D + \omega E)^{-1} \cdot \left(\omega \vec{b} - (\omega F + (\omega - 1)D)\vec{x}^{(k)} \right)$$

12.4 Convergence

De manière générale on a une expression de la forme

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + N \left(\vec{b} - A\vec{x}^{(k-1)} \right)$$

Avec un N qui se rapproche de A^{-1} pour que le système soit rapide (mais sans être trop dur à calculer).

$$\rho(I - NA) = \max(\text{valeurs propres}(I - NA))$$

$$\rho < 1 \longrightarrow \text{convergence garantie}$$

12.4.1 Erreur

$$e^{(k)} = \underbrace{(I - NA)}_{\text{matrice d'itération}} e^{(k-1)}$$

$$\|e^{(k)}\| \leq \rho^k \|e^{(0)}\|$$

Relation entre le nombre de décimales souhaitées D et le nombre d'itérations n

$$n \geq \frac{\log_{10}(10^{-D})}{\log_{10}(\rho)} = -\frac{D}{\log_{10}(\rho)}$$

12.5 Minimisation

$$\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$$

12.5.1 Méthode $F(x) = \frac{1}{2} \|b - A\vec{x}\|_2^2$

$$\vec{d} = 2A^T \vec{r} \quad \alpha = \frac{\vec{r}^T A \vec{d}}{\vec{d}^T A^T A \vec{d}}$$

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha \vec{d}$$

12.5.2 Méthode $G(x) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x}$

$$\alpha = \frac{\vec{d}^T \vec{r}}{\vec{d}^T A \vec{d}}$$

Il existe deux méthodes

1. Plus grande pente (gradient). Va donner des "zigzag"

$$\vec{d} = \vec{r} - A\vec{x}$$

2. Gradients conjugués (réponse après n itérations, avec n la largeur de la matrice A). Le premier \vec{d}_0 est égal à \vec{r}_0 puis on le calcule avec les valeurs précédentes

$$\vec{d} = \vec{r} + \beta_{k-1} \vec{d}_{k-1} \quad \beta_{k-1} = \frac{\vec{r}_k^T \vec{r}_k}{\vec{r}_{k-1}^T \vec{r}_{k-1}}$$

13 Résolution EDO

$$y' = f(t, y(t))$$

1. Méthode d'Euler

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

2. Méthode du point milieu

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k)\right)$$

3. Méthode de Runge-Kutta 4

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_k + h, y_k + hk_3)$$

13.1 Réduction d'ordre

$$y(t) = y_1 \quad y'(t) = y_2 \quad \dots \quad y^{(n+1)} = y_n$$

$$\vec{u} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n+1)}(0) \end{pmatrix}$$

14 Généralités

14.1 Matrices

14.1.1 Inverses

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Même principe si on renverse

$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ad} & \frac{1}{d} & 0 \\ \frac{be-cd}{adf} & -\frac{e}{fd} & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Pour une matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$