1 Splines

1.1 Polynômes de degré 1

Entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1):

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0 \qquad m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

Bonne approximation mais points anguleux

1.2 Polynômes de degré 2

$$\begin{aligned} s_0(x_1) &= s_1(x_1) = y_1 \\ s_1(x_2) &= s_2(x_2) = y_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_0'(x_1) &= s_1'(x_1) \\ s_1'(x_2) &= s_2'(x_2) \end{aligned}$$

$$s_0(x_0) = y_0 \qquad s_n(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

$3n - 1$ conditions pour $3n$ inconnues. Un degré de liberté : $s_0'(x_0)$

1.3 Polynômes de degré 3

$$\begin{aligned} s_0(x_1) &= s_1(x_1) = y_1 \\ s_1(x_2) &= s_2(x_2) = y_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_0'(x_1) &= s_1'(x_1) \\ s_1'(x_2) &= s_2'(x_2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_0''(x_1) &= s_1''(x_1) \\ s_1''(x_2) &= s_2''(x_2) \end{aligned}$$

$$s_0(x_0) = y_0 \qquad s_n(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

$4n - 2$ conditions pour $4n$ inconnues.

$$s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n) = 0 \longrightarrow \text{ spline naturelle}$$

Chaque segment est donné par

$$\boxed{s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i}$$

On trouve ensuite les coefficients pour chacun avec

$$\begin{cases} a_i &= \frac{1}{6h}\left(y_{i+1}'' - y_i''\right) \\ b_i &= \frac{1}{2} y_i'' \\ c_i &= \frac{1}{h}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{1}{6}h\left(y_{i+1}'' + 2y_i''\right) \\ d_i &= y_i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ y_5 - 2y_4 + y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0'' \\ 0 \\ 0 \\ y_5'' \end{pmatrix}$$

Note :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^I = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

1.3.1 Erreur

$f(x)$ doit être 4 fois continûment dérivable et les points équidistants

$$
\begin{aligned}
|f(x)-s(x)| &\leq C_0 h^4 \max_{\zeta\in I}\left|f^{(4)}(\zeta)\right| \\
|f'(x)-s'(x)| &\leq C_1 h^3 \max_{\zeta\in I}\left|f^{(4)}(\zeta)\right| \\
|f''(x)-s''(x)| &\leq C_2 h^2 \max_{\zeta\in I}\left|f^{(4)}(\zeta)\right| \\
|f'''(x)-s'''(x)| &\leq C_3 h^1 \max_{\zeta\in I}\left|f^{(4)}(\zeta)\right| \qquad x \neq \{x_0, x_1, ...\}
\end{aligned}
$$

1.3.2 Courbes paramétrique

Faire une spline pour chaque coordonnée (x, y, etc...) en fonction de t. Possibilité de faire une approximation

$$t_{i+1} - t_i \approx \text{distance entre } (x_i, y_i) \text{ et } (x_{i+1}, y_{i+1})$$