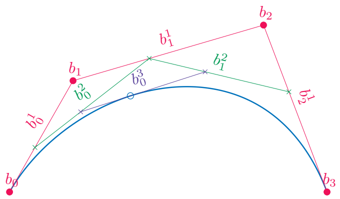
1 Courbes de Bézier



1.1 Triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.2 Polynômes de Bernstein

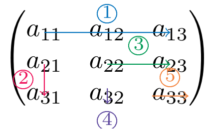
$$B_i^m(t) = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i}$$

n	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	$B_0^0(t) = 1$			
1	$B_0^1(t) = 1-t$	$B_1^1(t) = t$		
2	$B_0^2(t) = (1-t)^2$	$B_1^2(t) = 2t(1-t)$	$B_2^2(t) = t^2$	
3	$B_0^3(t) = (1-t)^3$	$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$	$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$	$B_3^3(t) = t^3$

2 Résolution numérique

2.1 Doolittle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$



$$(1) \begin{cases} u_{11} &= a_{11} \\ u_{12} &= a_{12} \\ u_{13} &= a_{13} \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} \\ u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \end{cases}$$

2.2 Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_{11} & 0 & 0 \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & 0 \\ \hat{l}_{31} & \hat{l}_{32} & \hat{l}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{l}_{21} & \hat{l}_{31} \\ 0 & \hat{l}_{22} & \hat{l}_{32} \\ 0 & 0 & \hat{l}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\hat{l}_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad \hat{l}_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$$

$$\hat{l}_{31} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} \qquad \hat{l}_{22} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}}$$

$$\hat{l}_{32} = \frac{a_{23} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}}}{\sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}}} \qquad \hat{l}_{33} = \sqrt{a_{33} - \hat{l}_{31}^2 - \hat{l}_{32}^2}$$

2.3 Permutations

Attention, si on utilise des permutations, alors

$$PA\vec{x} = P\vec{b}$$

2.4 Méthode QR

On commence avec une matrice $A_{n \times n}$

1. Prendre le premier vecteur colonne de A : $\vec{v}_1$
2. Faire la décomposition pour obtenir H_1
3. Construire H_1A puis prendre v_2 (première colonne de H_1A **sans la première ligne et sans la première colonne**
4. à la fin, déterminer R et Q

$$H_nH_{n-1}\cdots H_2H_1A = R \longrightarrow A = \underbrace{H_1H_2\cdots H_{n-1}^TH_n^T}_{Q}R$$

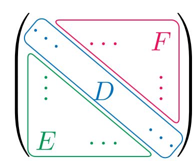
v est un vecteur de norme 1, on utilise $\tilde{v}$ si la norme est plus grande

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \qquad \vec{n} = x - y$$

$$y = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{signe}(x_i)||x_i|| \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{taille de } x$$

$$H = I - 2vv^H$$

3 Résolution numérique par itérations



3.1 Méthode de Jacobi

$$\vec{x}^{(k)} = D^{-1}\left(b - (A-D)\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

$$N = D^{-1} = \text{diag}^{-1}(A)$$

3.2 Méthode de Gauss-Seidel

$$\vec{x}^{(k)} = (E+D)^{-1}\left(\vec{b} - F\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

$$N = (D+E)^{-1}$$

3.3 Méthode SOR

$$\vec{x}^{(k+1)} = (D+\omega E)^{-1} \cdot \left(\omega\vec{b} - (\omega F + (\omega - 1)D)\vec{x}^{(k)}\right)$$

3.4 Convergence

De manière générale on a une expression de la forme

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + N\left(\vec{b} - A\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

Avec un N qui se rapproche de A^{-1} pour que le système soit rapide (mais sans être trop dur à calculer).

$$\boxed{\rho(I - NA) = \max\left(\text{valeurs propres}(I - NA)\right)}$$

$$\rho < 1 \longrightarrow \text{ convergence garantie}$$

3.4.1 Erreur

$$e^{(k)} = \underbrace{(I - NA)}_{\text{matrice d'itération}} e^{(k-1)}$$

$$\left|\left|\vec{e}^{(k)}\right|\right| \leq \rho^k \left|\left|\vec{e}^{(0)}\right|\right|$$

Relation entre le nombre de décimales souhaitées D et le nombre d'itérations n

$$n \geq \frac{\log_{10}(10^{-D})}{\log_{10}(\rho)} = -\frac{D}{\log_{10}(\rho)}$$

3.5 Minimisation

$$\boxed{\vec{r} = \vec{b} - Ax}$$

3.5.1 Méthode $F(x) = \frac{1}{2}||b - A\vec{x}||_2^2$

$$\boxed{\vec{d} = 2A^T\vec{r} \qquad \alpha = \frac{\vec{r}^T A\vec{d}}{\vec{d}^T A^T A\vec{d}}}$$

$$\boxed{\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha\vec{d}}$$

3.5.2 Méthode $G(x) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \vec{b}^T\vec{x}$

$$\boxed{\alpha = \frac{\vec{d}^T\vec{r}}{\vec{d}^T A\vec{d}}}$$

Il existe deux méthodes

1. Plus grande pente (gradient). Va donner des "zig-zag"

$$\boxed{\vec{d} = \vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}}$$

2. Gradients conjugués (réponse après n itérations, avec n la largeur de la matrice A). Le premier $\vec{d}_0$ est égal à $\vec{r}_0$ puis on le calcule avec les valeurs précédentes

$$\boxed{\vec{d} = \vec{r} + \beta_{k-1}\vec{d}_{k-1} \qquad \beta_{k-1} = \frac{\vec{r}_k^T\vec{r}_k}{\vec{r}_{k-1}^T\vec{r}_{k-1}}}$$

4 Résolution EDO

$$\boxed{y' = f(t, y(t))}$$

1. Méthode d'Euler

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

2. Méthode du point milieu

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k)\right)$$

3. Méthode de Runge-Kutta 4

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k)\\
k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right)\\
k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right)\\
k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3)
\end{aligned}$$

4.1 Réduction d'ordre

$$y(t) = y_1 \quad y'(t) = y_2 \quad \cdots \quad y^{(n+1)} = y_n$$

$$\vec{u} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n+1)}(0) \end{pmatrix}$$

5 Généralités

5.1 Matrices

5.1.1 Inverses

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Même principe si on renverse

$$\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ad} & \frac{1}{d} & 0 \\ \frac{be-cd}{adf} & -\frac{e}{fd} & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Pour une matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$