1 Interpolation

$$\boxed{n+1 \text{ points}}$$

1.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 3+1 points

$$l_0(x) = \lambda_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$l_1(x) = \lambda_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2(x) = \lambda_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3(x) = \lambda_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Forme 1

$$p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

Forme 2

$$p_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \left(y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3\right)$$

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

Forme barycentrique :

$$p_3(x) = \frac{y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

Autre forme (un peu plus simple à écrire)

$$p_2(x) = y_0\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

1.2 Polynôme d'interpolation de newton

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

c		a		
x_0	$f[x_0] = c_0$		$\frac{a-b}{c-d}$	
		$f[x_0, x_1] = c_1$	$\downarrow$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = c_2$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = c_3$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
d		b		
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Possible de rajouter une ligne en dessous du tableau

1.3 Évaluation

On utilise le schéma de Horner

	x^3	x^2	x	x^0	
$\boxed{x = 2}$	5	-3	0	2	
		10	14	20	
	5	7	14	30	$p_3(2) = 30$
		10	34		
	5	17	48		$p_3'(2) = 48$

Après la première dérivée, il faudra appliquer un facteur

$$\frac{P_n^{(k)}(x_i)}{k!}$$

1.4 Erreur

Ordre 1 (2 points)

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2$$

Ordre 2 (3 points)

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3$$

Ordre 3 (4 points)

$$\begin{cases} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{128} M_4 h^4 & x \in [x_1, x_2] \\ |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^4 & x \in [x_0, x_1] \cup [x_2, x_3] \end{cases}$$

Avec

$$M_k = \max_{\zeta \in [a,b]} \left| f^{(k)}(\zeta) \right|$$

L'utilisation des abscisses de Chebychev permettent de minimiser l'erreur avec un nombre de points donnés sur un intervalle donné