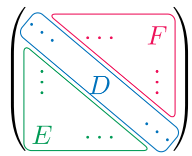
# 1 Résolution numérique par itérations




## 1.1 Méthode de Jacobi

$$\vec{x}^{(k)} = D^{-1}\left(b - (A - D)\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

$$N = D^{-1} = \mathrm{diag}^{-1}(A)$$

## 1.2 Méthode de Gauss-Seidel

$$\vec{x}^{(k)} = (E + D)^{-1}\left(\vec{b} - F\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

$$N = (D + E)^{-1}$$

## 1.3 Méthode SOR

$$\vec{x}^{(k+1)} = (D + \omega E)^{-1} \cdot \left(\omega\vec{b} - (\omega F + (\omega - 1)D)\vec{x}^{(k)}\right)$$

## 1.4 Convergence

De manière générale on a une expression de la forme

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + N\left(\vec{b} - A\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

Avec un $N$ qui se rapproche de $A^{-1}$ pour que le système soit rapide (mais sans être trop dur à calculer).

$$\boxed{\rho(I - NA) = \max\left(\text{valeurs propres}(I - NA)\right)}$$

$$\rho < 1 \longrightarrow \text{ convergence garantie}$$

### 1.4.1 Erreur

$$e^{(k)} = \underbrace{(I - NA)}_{\text{matrice d'itération}} e^{(k-1)}$$

$$\left|\left|\vec{e}^{(k)}\right|\right| \leq \rho^k \left|\left|\vec{e}^{(0)}\right|\right|$$

Relation entre le nombre de décimales souhaitées $D$ et le nombre d'itérations $n$

$$n \geq \frac{\log_{10}(10^{-D})}{\log_{10}(\rho)} = -\frac{D}{\log_{10}(\rho)}$$

## 1.5 Minimisation

$$\boxed{\vec{r} = \vec{b} - Ax}$$

### 1.5.1 Méthode $F(x) = \frac{1}{2}||b - A\vec{x}||_2^2$

$$\boxed{\vec{d} = 2A^T\vec{r} \qquad \alpha = \frac{\vec{r}^T A\vec{d}}{\vec{d}^T A^T A\vec{d}}}$$

$$\boxed{\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha\vec{d}}$$

### 1.5.2 Méthode $G(x) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \vec{b}^T\vec{x}$

$$\boxed{\alpha = \frac{\vec{d}^T\vec{r}}{\vec{d}^T A\vec{d}}}$$

Il existe deux méthodes

1. Plus grande pente (gradient). Va donner des "zig-zag"

$$\boxed{\vec{d} = \vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}}$$

2. Gradients conjugués (réponse après $n$ itérations, avec $n$ la largeur de la matrice $A$). Le premier $\vec{d}_0$ est égal à $\vec{r}_0$ puis on le calcule avec les valeurs précédentes

$$\boxed{\vec{d} = \vec{r} + \beta_{k-1}\vec{d}_{k-1} \qquad \beta_{k-1} = \frac{\vec{r}_k^T\vec{r}_k}{\vec{r}_{k-1}^T\vec{r}_{k-1}}}$$