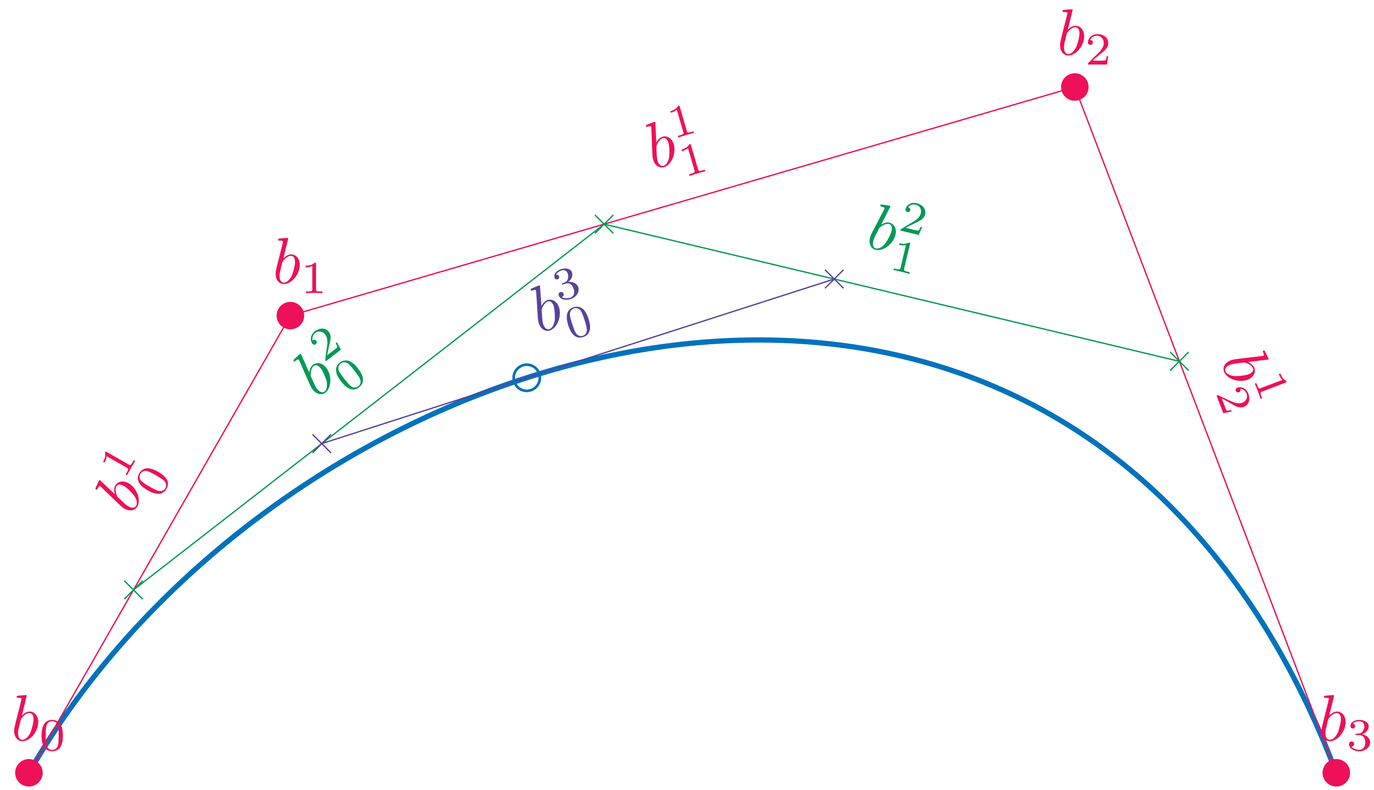
1 Courbes et surfaces

1.1 Courbes de Bézier (De Casteljau)



$$\text{ordre } n \longleftrightarrow n+1 \text{ points}$$

$$\boxed{b_{\text{départ}}^{\text{degré}}}$$

Exemples :

$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1 \qquad b_0 \to b_1$$
$$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + tb_2 \qquad b_1 \to b_2$$
$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t) \qquad b_0 \to b_2$$

La courbe de Bézier est comprise dans le polygone de contrôle (points de contrôles reliés).

1.1.1 Schéma triangulaire

On représente les points de base sur la première colonne

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}2\\2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/3\\3/2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}4\\1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8/3\\13/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16/9\\31/18\end{bmatrix}$$

On prend la valeur du haut multipliée par $(1-t)$ et celle du bas par t

1.1.2 Généralisation

$$b_0^3(t) = (1-t)b_0^2 + tb_1^2(t)$$

1.2 Polynômes de Bernstein

$$\boxed{B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-1} \quad i = 0, 1, ..., n \quad t \in [0,1]}$$

n	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	$B_0^0(t) = 1$			
1	$B_0^1(t) = 1 - t$	$B_1^1(t) = t$		
2	$B_0^2(t) = (1-t)^2$	$B_1^2(t) = 2t(1-t)$	$B_2^2(t) = t^2$	
3	$B_0^3(t) = (1-t)^3$	$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$	$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$	$B_3^3(t) = t^3$

$$\binom{n}{i} = C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

La somme des polynômes donne 1

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)$$

1. $t = 0$ est un zéro de multiplicité i
2. $t = 1$ est un zéro de multiplicité $n - i$
3. $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$
4. $B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t) \qquad i = 1, 2, ..., n-1$

Exemples :

$$\begin{aligned} b_0^1(t) &= b_0 B_0^1(t) + b_1 B_1^1(t) \\ b_1^1(t) &= b_1 B_0^1(t) + b_2 B_1^1(t) \\ b_0^2(t) &= b_0 B_0^2(t) + b_1 B_1^2(t) + b_2 B_2^2(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = b_0 B_0^3(t) + b_1 B_1^3(t) + b_2 B_2^3(t) + b_3 B_3^3(t)}$$

1.3 Bernstein et Bézier

$$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} b_{i+j} B_j^r(t)$$

1.4 Courbes composées

1. Deux extrémités égales (points superposés)
2. Points autour de l'extrémité alignés