Série 2. Exercices

1. Approcher la fonction $f(x) = \arctan(x)$ par une spline cubique sur l'intervalle $[0, 10]$. Utiliser les noeuds et les valeurs donnés dans le tableau ci-dessous:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.	2.	4.	6.	8.	10.
y_i	0.	1.1071	1.3258	1.4056	1.4464	1.4711

   (a) Etablir le systèmes d'équations linéaires pour les dérivées secondes y_i''.

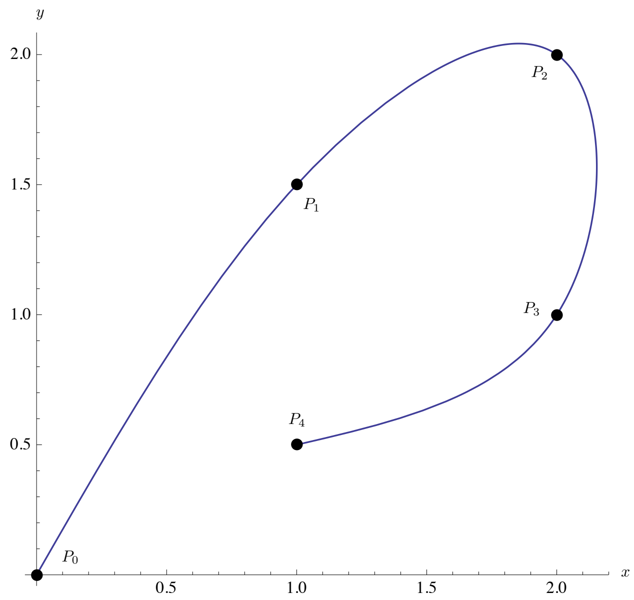
   (b) Donner le polynômes cubiques $s_i(x)$ pour chacun des sous-intervalles.

   (c) Tracer la spline et la fonction d'erreur $\arctan(x) - s(x)$. (*Mathematica* ou MATLAB)

   (d) Déterminer l'erreur maximale. (*Mathematica* ou MATLAB)

2. Un robot doit parcourir les points de contrôle suivants dans le plan Oxy aux instants t_i :

i	0	1	2	3	4
t_i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	2	1
y_i	0	1.5	2	1	0.5



   Trouver une paramétrisation $(x(t), y(t))$ $(0 \leq t \leq 4)$ de la trajectoire en déterminant deux splines naturelles $x = x(t)$ et $y = y(t)$ avec les abscisses t_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$.

3. Considérons une fonction périodique $f(x)$ de période $T > 0$:

$$f(x + T) = f(x).$$

   Nous voulons approcher cette fonction par une spline cubique. Les noeuds sont donnés par

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

où $x_n = x_0 + T$. Il est maintenant raisonnable de remplacer les condition $y_0'' = y_n'' = 0$ d'une spline naturelle par les conditions

$$y_n = y_0, \quad y_n' = y_0', \quad y_n'' = y_0''.$$

Nous cherchons donc les dérivées secondes y_i'', $(0 \leq i \leq n-1)$.

(a) Modifier le système d'équations linéaires à la page 56 du support de cours.

(b) Nous voulons approcher la fonction périodique de période 2π

$$f(x) = 2\cos x + \sin(2x)$$

par une spline cubique en utilisant les noeuds $x_i = i{\cdot}2\pi/5$, $(i = 0, 1, \ldots, 5)$.

i. Etablir le système d'équations linéaires.

ii. Tracer la spline et la fonction d'erreur. (*Mathematica* ou MATLAB)