

1 Intégration numérique

1.1 Formule du trapèze

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

1.2 Formule composite du trapèze

Formule du trapèze avec sous-division (n intervalles)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(b) \right)$$

1.3 Formule du point milieu

$$M = h (f(x_{0.5}) + f(x_{1.5}) + \cdots + f(x_{n-0.5}))$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} (T(h) + M(h))$$

1.3.1 Algorithme pour $n = 4$

1. $h = b - a$
2. $T(h) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_4))$
3. $M(h) = hf(x_2)$
4. $T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} (M(h) + T(h))$
5. $M\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_3))$
6. $T\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(M\left(\frac{h}{2}\right) + T\left(\frac{h}{2}\right) \right)$

1.3.2 Erreur

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Optimal si

1. La fonction est **périodique**
2. La fonction est **infiniment dérivable**
3. On intègre sur une période

1.4 Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$
$$h = \frac{b-a}{2}$$

1.4.1 Erreur

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq \frac{h^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

1.5 Formule de Newton-Cotes

Avec $n = 3$ (3/8 de Simpson)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45} \left(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) \right. \\ \left. + 32f(x_3) + 7f(x_4) \right)$$

n pair : polynômes jusqu'à $n + 1$. n impair : polynômes jusqu'à n

1.6 Formule de composition de Simpson

Cas général avec $2n$ sous intervalles

$$S_c = \frac{h}{3} \left(f(a) + 3f(x_1) \right. \\ \left. + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_{2k}) + 2f(x_{2k+1})) \right)$$

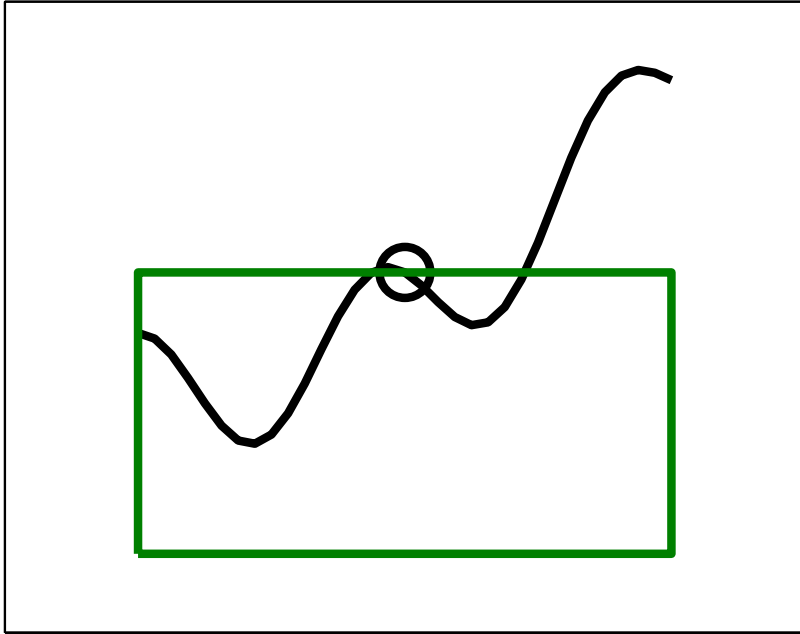
1.6.1 Erreur

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_c \right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$
$$h = \frac{b-a}{2n}$$

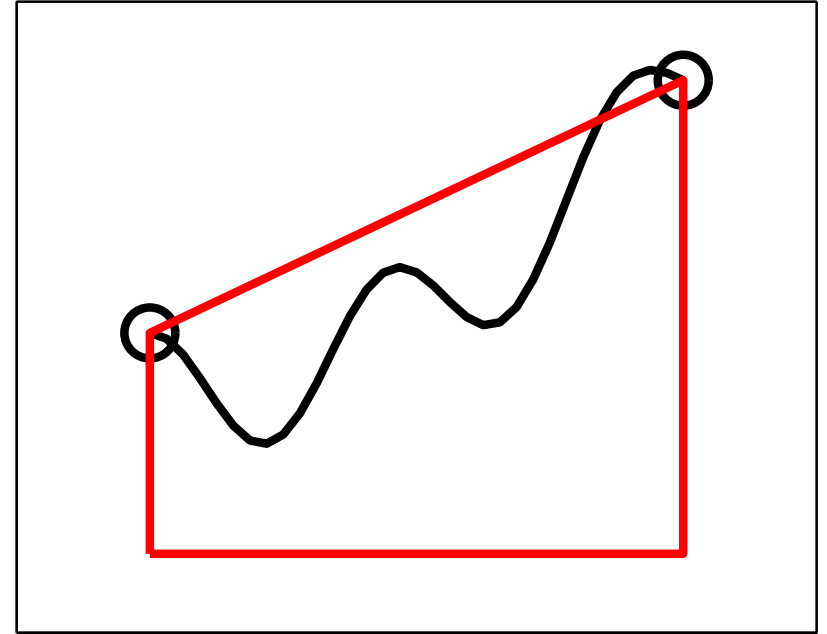
1.7 Formule de Simpson adaptative

Intervalles non uniformes

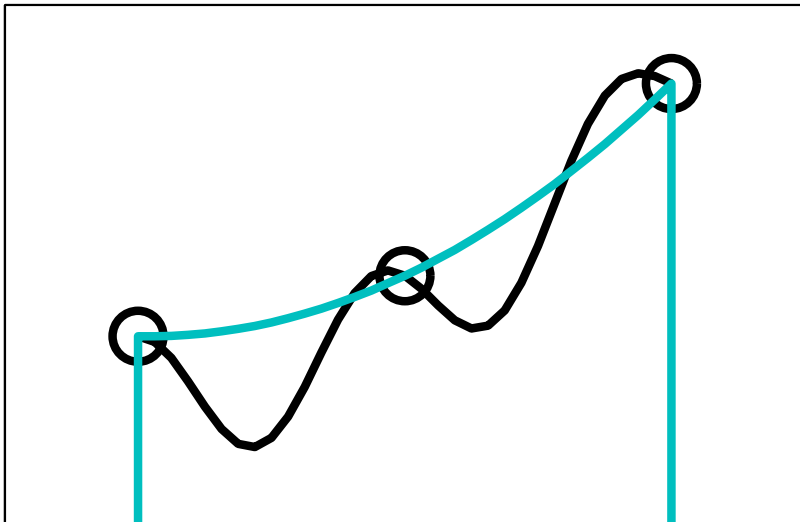
Point milieu



Trapèze



Simpson



Simpson composite

