1 Équations non linéaires

1.1 Existence d'une solution

Solution $f(r) = 0$ entre a et b pour f continue

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

1.2 Bissection

1. $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$
2. Répéter jusqu'à ce que $|a_k - b_k| \geq tol \cdot |b_k|$
   (a) Si $f(x_k)f(a_k) < 0$: $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$
   (b) Si $f(x_k)f(a_k) > 0$: $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$
   (c) $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

L'erreur converge avec

$$|e_k| < \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

1. Robuste
2. Intervalles qui contiennent la solution
3. Majorant connu de l'erreur
4. Lente

1.3 Regula falsi

A l'exception du premier terme, on doit décider si on utilise x_{k-1} avec x_{k-2} ou x_{k-3}

$$\boxed{x_k = \begin{cases} x_{k-2} - y_{k-2}\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{y_{k-1}-y_{k-2}} & y_{k-1} \cdot y_{k-2} < 0 \\ x_{k-3} - y_{k-3}\frac{x_{k-1}-x_{k-3}}{y_{k-1}-y_{k-3}} & y_{k-1} \cdot y_{k-3} < 0 \end{cases}}$$

1.4 Sécante

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Ordre de convergence de

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

1. Pas de connaissance de la dérivée
2. Une seule évaluation de f
3. Plus efficace que Newton (plus facile à calculer)
4. Convergence non garantie

1.5 Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

$$|e_{k+1}| \approx \left|\frac{f''(r)}{f'(r)}\right| \cdot |e_k|^2$$

1. Très rapide
2. Peut ne pas converger
3. Utilisation de la dérivée

1.6 Point fixe

$$\boxed{x = F(x)}$$

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

Résultat global mais difficile de trouver un domaine D... Il existe une version locale

$$\rho(\mathbf{J}(\mathbf{r})) < 1 \longrightarrow \text{ converge dans un disque } D \text{ vers } \mathbf{r}$$

Avec ρ le rayon spectral (maximum des modules des valeurs propres de la matrice).

1.6.1 Théorème de Banach

$$L = \max_{x \in I} |F'(x)| < 1 \longrightarrow \text{ contraction sur } I$$

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

$$0 < L < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

Alors il existe une seule solution r dans I

1. Fonction Lipschitzienne : qui satisfait la condition de Lipschitz avec n'importe quel L
2. Fonction contractante : qui satisfait la condition de Lipschitz et $0 < L < 1$

$$L_{\text{optimal}} = \max_{x \in I} |F'(x)|$$

1.6.2 Estimation

1. A priori :

$$||\mathbf{r} - \mathbf{x}_k|| \leq \frac{L^k}{1-L} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$$

2. A posteriori :

$$||\mathbf{r} - \mathbf{x}_k|| \leq \frac{L}{1-L} |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}|$$

2 Systèmes d'équations non-linéaires

2.1 Point fixe

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

F est une contraction si

$$||\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(x')|| \leq L||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|| \qquad ||\mathbf{x}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et donc **F** possède un seul point fixe (et y converge de toute façon).

$$\boxed{\max_{(x,y)\in D} ||\mathbf{J}(x,y)|| < 1 \longrightarrow \text{ contraction sur } D}$$

$$||\mathbf{J}(x,y)|| = \sqrt{F_x(x,y)^2 + F_y(x,y)^2 + G_x(x,y)^2 + G_y(x,y)^2}$$

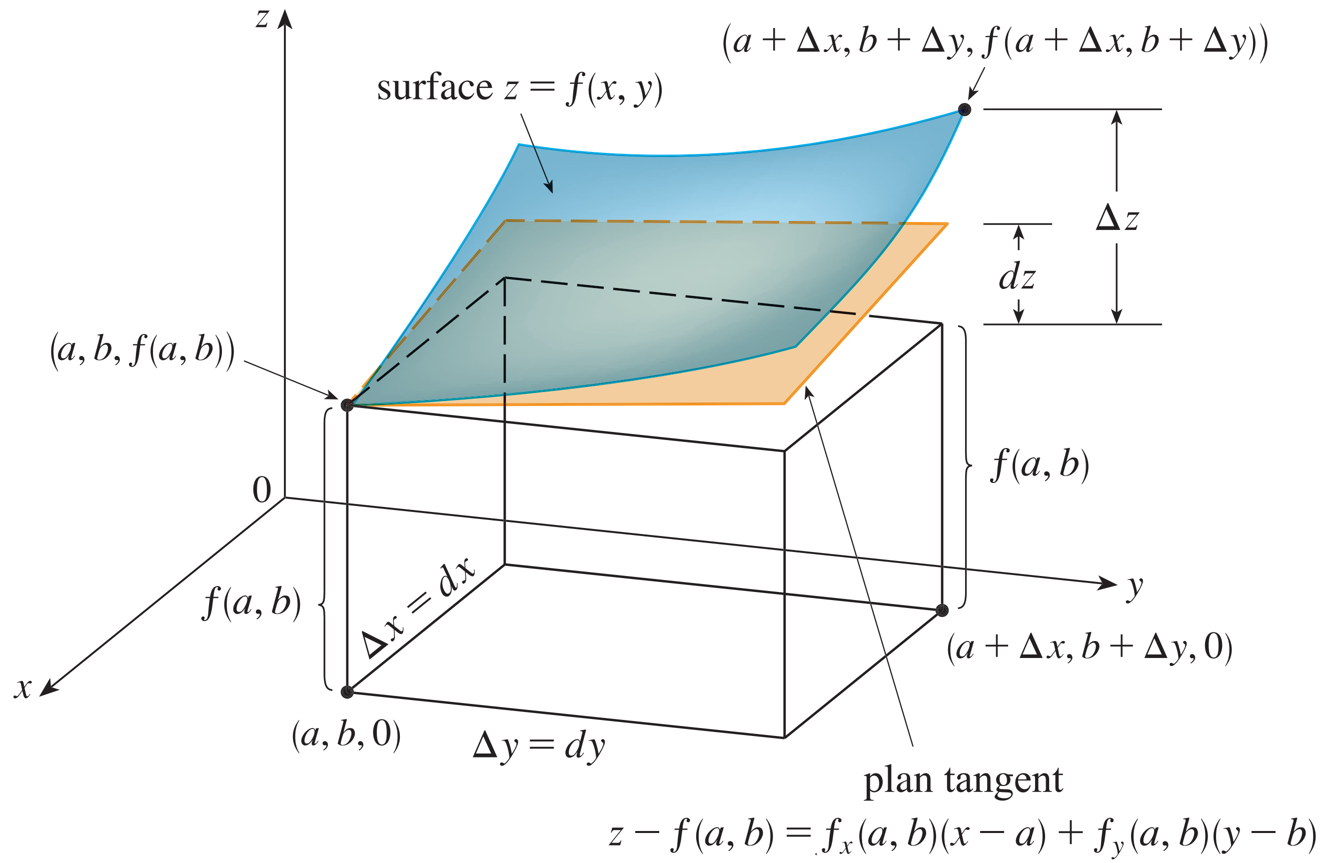
Matrice de Jacobi :

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix}$$

2.2 Méthode de Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{g(x_k,y_k)f_y(x_k,y_k) - f(x_k,y_k)g_y(x_k,y_k)}{f_x(x_k,y_k)g_y(x_k,y_k) - f_y(x_k,y_k)g_x(x_k,y_k)}}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{f(x_k,y_k)g_x(x_k,y_k) - g(x_k,y_k)f_x(x_k,y_k)}{f_x(x_k,y_k)g_y(x_k,y_k) - f_y(x_k,y_k)g_x(x_k,y_k)}}$$



La matrice de Jacobi donne une information sur la convergence (lente si déterminant égal à 0)

2.2.1 Ordre

Convergence linéaire

$$||\mathbf{e}_{k+1}|| \lessapprox ||\mathbf{J}(r, s)|| \cdot ||\mathbf{e}_k||$$

Si $\mathbf{J}(r, s)$ est nulle on a un ordre de convergence quadratique.