1 Intégration numérique

1.1 Formule du trapèze

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}$$

1.2 Formule composite du trapèze

Formule du trapèze avec sous-division (n intervalles)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(a)+\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)+\frac{1}{2}f(b)\right)}$$

1.3 Formule du point milieu

$$\boxed{M = h\left(f(x_{0.5})+f(x_{1.5})+\cdots+f(x_{n-0.5})\right)}$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(T(h)+M(h)\right)$$

1.3.1 Algorithme pour $n = 4$

1. $h = b-a$
2. $T(h) = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_4)\right)$
3. $M(h) = hf(x_2)$
4. $T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(M(h)+T(h)\right)$
5. $M\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_3)\right)$
6. $T\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(M\left(\frac{h}{2}\right)+T\left(\frac{h}{2}\right)\right)$

1.3.2 Erreur

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(h)\right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12}\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

Optimal si

1. La fonction est **périodique**
2. La fonction est **infiniment dérivable**
3. On intègre sur une période

1.4 Méthode de Simpson

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

1.4.1 Erreur

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| \leq \frac{h^5}{90}\max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

1.5 Formule de Newton-Cotes

Avec $n = 3$ (3/8 de Simpson)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right)$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}\Big(&7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2)\\ &+ 32f(x_3) + 7f(x_4)\Big)\end{aligned}$$

Non composite → utiliser les formules tel quel (pas de séparation en sous-intervalles).
n pair : polynômes jusqu'à $n+1$. n impair : polynômes jusqu'à n

1.6 Formule de composition de Simpson

Cas général avec $2n$ sous intervalles (n polynômes)

$$\begin{aligned}S_c = \frac{h}{3}\Big(&f(a) + 4f(x_1)\\ &+ f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(x_{2k}) + 2f(x_{2k+1})\right)\Big)\end{aligned}$$

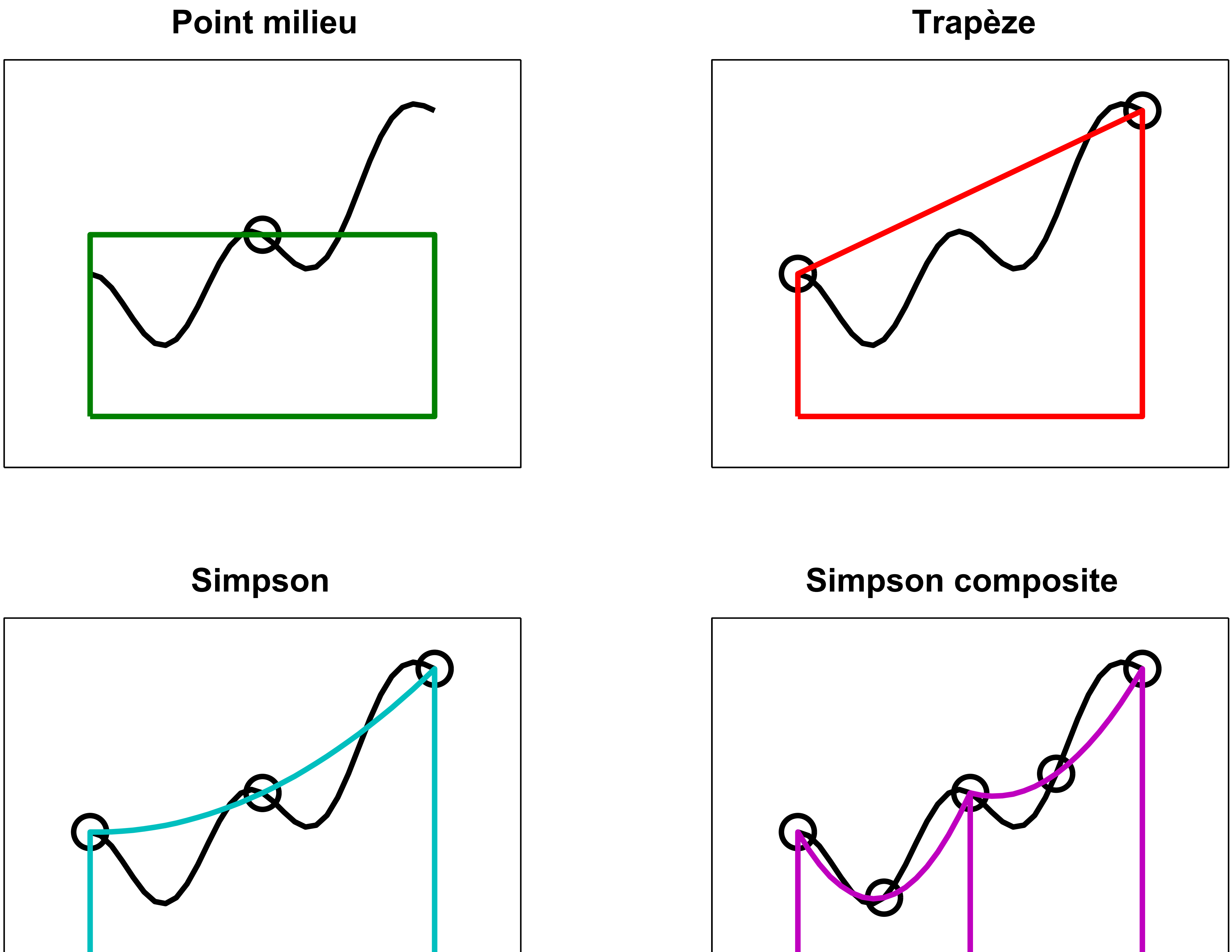
$$h = \frac{b-a}{2n}$$

1.6.1 Erreur

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx - S_c\right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180}\max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(4)}(x)\right|}$$

1.7 Formule de Simpson adaptative

Intervalles non uniformes


Point milieu
Trapèze
Simpson
Simpson composite

1.9 Romberg

$$
\begin{array}{l}
 \\
 \\
h/2\downarrow \\
 \\
 \\
 \\
\end{array}
\begin{array}{llllll}
T_{0,0} & & & & & \\
T_{1,0} & T_{1,1} & & & & \\
T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} & & & \\
T_{3,0} & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & & \\
T_{4,0} & T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} & \\
T_{5,0} & T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & T_{5,5}
\end{array}
$$

$$T_{n,c} = \xrightarrow{\qquad} \frac{4^c T_{n,c-1} - T_{n-1,c-1}}{4^c - 1}$$

$$T_{0,0} = T(h)$$

$$T_{1,0} = T(h/2)$$

$$T_{2,0} = T(h/4)$$

$$T_{n,0} = T(h/2^n)$$

1. Facile
2. Coûteuse pour une grande précision
3. Il faut que la fonction soit $2k+2$ fois continûment dérivable pour aller jusqu'à la colonne k

1.10 Choix de la méthode

1. Périodique + infiniment dérivable : Trapèze
2. Polynôme cubique : Simpson (pas d'erreur)
3. Infiniment dérivable non périodique : Gauss ou Simpson adaptative (Romberg plus coûteuse)

1.11 Polynômes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n\right)$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_1(x) = x \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$