

# 1 Interpolation

$$\boxed{n + 1 \text{ points}}$$

## 1.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 3+1 points

$$l_0(x) = \lambda_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$l_1(x) = \lambda_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2(x) = \lambda_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3(x) = \lambda_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

### Forme 1

$$p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

### Forme 2

$$p_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\cdot (y_0 \mu_0 + y_1 \mu_1 + y_2 \mu_2 + y_3 \mu_3)$$

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

Forme barycentrique :

$$p_3(x) = \frac{y_0 \mu_0 + y_1 \mu_1 + y_2 \mu_2 + y_3 \mu_3}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

### Forme 3 (un peu plus simple à écrire)

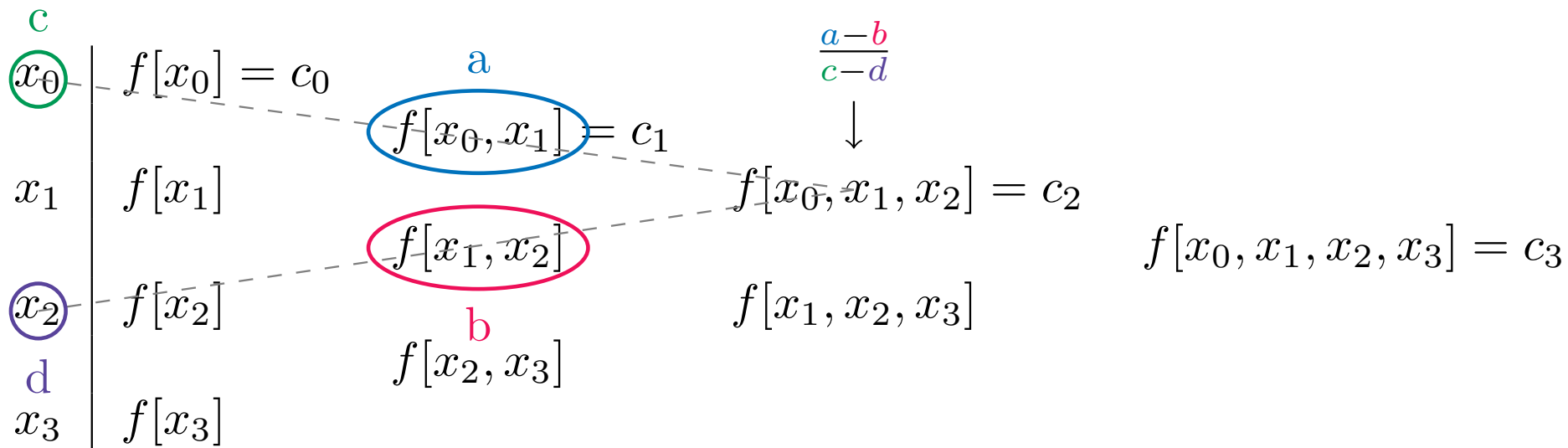
$$p_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} +$$

$$y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

## 1.2 Polynôme d'interpolation de newton

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$



Possible de rajouter une ligne en dessous du tableau

## 1.3 Évaluation

On utilise le schéma de Horner

	$x^3$	$x^2$	$x$	$x^0$	
$x = 2$	5	-3	0	2	
	↓ +	↓ +	↓ +	↓ +	
	5	10	14	20	
	↗ × 2	↗ × 2	↗ × 2		
		7	14	30	$p_3(2) = 30$
	↓ +	↓ +	↓ +		
	5	10	34		
	↗ × 2	↗ × 2			
		17	48		$p'_3(2) = 48$

Après la première dérivée, il faudra appliquer un facteur

$$\frac{P_n^{(k)}(x_i)}{k!}$$

## 1.4 Erreur

Ordre 1 (2 points)

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2$$

Ordre 2 (3 points)

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3$$

Ordre 3 (4 points)

$$\begin{cases} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{128} M_4 h^4 & x \in [x_1, x_2] \\ |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^4 & x \in [x_0, x_1] \cup [x_2, x_3] \end{cases}$$

Avec

$$M_k = \max_{\zeta \in [a, b]} |f^{(k)}(\zeta)|$$

L'utilisation des abscisses de Chebychev permettent de minimiser l'erreur avec un nombre de points donnés sur un intervalle donné