1 Interpolation

$$\boxed{n+1 \text{ points}}$$

1.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 3+1 points

$$l_0(x) = \lambda_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$l_1(x) = \lambda_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2(x) = \lambda_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3(x) = \lambda_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$\boxed{p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)}$$

OU

$$\boxed{p_3(x) = \begin{aligned}&(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\\ &\cdot\left(y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3\right)\end{aligned}}$$

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

Forme barycentrique :

$$p_3(x) = \frac{y_0\mu_0 + y_1\mu_1 + y_2\mu_2 + y_3\mu_3}{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

1.2 Polynôme d'interpolation de newton

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{array}{c|llll}
\overset{c}{x_0} & f[x_0] = c_0 & & & \\
 & & \overset{a}{f[x_0, x_1]} = c_1 & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] = c_2 \quad \left(\downarrow \tfrac{a-b}{c-d}\right) & \\
 & & \underset{b}{f[x_1, x_2]} & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] = c_3 \\
\underset{d}{x_2} & f[x_2] & & f[x_1, x_2, x_3] & \\
 & & f[x_2, x_3] & & \\
x_3 & f[x_3] & & &
\end{array}$$

Possible de rajouter une ligne en dessous du tableau

1.3 Évaluation

On utilise le schéma de Horner

	x^3	x^2	x	x^0	
$\boxed{x=2}$	5	-3	0	2	
		10	14	20	
	5	7	14	30	$p_3(2) = 30$
		10	34		
	5	17	48		$p_3'(2) = 48$

Après la première dérivée, il faudra appliquer un facteur

$$\frac{P_n^{(k)}(x_i)}{k!}$$

1.4 Erreur

Ordre 1 (2 points)

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2$$

Ordre 2 (3 points)

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 h^3$$

Order 3 (4 points)

$$\begin{cases} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{3}{128} M_4 h^4 & x \in [x_1, x_2] \\ |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^4 & x \in [x_0, x_1] \cup [x_2, x_3] \end{cases}$$

Avec

$$M_k = \max_{\zeta \in [a,b]} \left| f^{(k)}(\zeta) \right|$$

L'utilisation des abscisses de Chebychev permettent de minimiser l'erreur avec un nombre de points donnés sur un intervalle donné

2 Splines

2.1 Polynômes de degré 1

Entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1):

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0 \qquad m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

Bonne approximation mais points anguleux

2.2 Polynômes de degré 2

$$\begin{aligned} s_0(x_1) &= s_1(x_1) = y_1 \qquad & s_0'(x_1) &= s_1'(x_1) \\ s_1(x_2) &= s_2(x_2) = y_2 \qquad & s_1'(x_2) &= s_2'(x_2) \end{aligned}$$

$$s_0(x_0) = y_0 \qquad s_n(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

$3n - 1$ conditions pour $3n$ inconnues. Un degré de liberté : $s_0'(x_0)$

2.3 Polynômes de degré 3

$$\begin{aligned} s_0(x_1) &= s_1(x_1) = y_1 \quad & s_0'(x_1) &= s_1'(x_1) \quad & s_0''(x_1) &= s_1''(x_1) \\ s_1(x_2) &= s_2(x_2) = y_2 \quad & s_1'(x_2) &= s_2'(x_2) \quad & s_1''(x_2) &= s_2''(x_2) \end{aligned}$$

$$s_0(x_0) = y_0 \qquad s_n(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

$4n - 2$ conditions pour $4n$ inconnues.

$$s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n) = 0 \longrightarrow \text{ spline naturelle}$$

Chaque segment est donné par

$$\boxed{s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i}$$

On trouve ensuite les coefficients pour chacun avec

$$\begin{cases} a_i &= \frac{1}{6h}\left(y_{i+1}'' - y_i''\right) \\ b_i &= \frac{1}{2}y_i'' \\ c_i &= \frac{1}{h}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{1}{6}h\left(y_{i+1}'' + 2y_i''\right) \\ d_i &= y_i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ y_5 - 2y_4 + y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0'' \\ 0 \\ 0 \\ y_5'' \end{pmatrix}$$

Note :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^I = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Erreur

$f(x)$ doit être 4 fois continûment dérivable et les points équidistants

$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &\le C_0 h^4 \max_{\zeta \in I} \left| f^{(4)}(\zeta) \right| \\ |f'(x) - s'(x)| &\le C_1 h^3 \max_{\zeta \in I} \left| f^{(4)}(\zeta) \right| \\ |f''(x) - s''(x)| &\le C_2 h^2 \max_{\zeta \in I} \left| f^{(4)}(\zeta) \right| \\ |f'''(x) - s'''(x)| &\le C_3 h^1 \max_{\zeta \in I} \left| f^{(4)}(\zeta) \right| \quad x \neq x_0, x_1, ... \end{aligned}$$

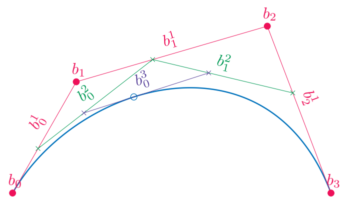
2.3.2 Courbes paramétrique

Faire une spline pour chaque coordonnée (x, y, etc...) en fonction de t. Possibilité de faire une approximation

$$t_{i+1} - t_i \approx \text{distance entre } (x_i, y_i) \text{ et } (x_{i+1}, y_{i+1})$$

3 Courbes et surfaces

3.1 Courbes de Bézier (De Casteljau)



$$\text{ordre } n \longleftrightarrow n+1 \text{ points}$$

$$\boxed{b^{\text{degré}}_{\text{départ}}}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} b_0^1(t) &= (1-t)b_0 + tb_1 & b_0 &\to b_1 \\ b_1^1(t) &= (1-t)b_1 + tb_2 & b_1 &\to b_2 \\ b_0^2(t) &= (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t) & b_0 &\to b_2 \end{aligned}$$

La courbe de Bézier est comprise dans le polygone de contrôle (points de contrôles reliés).

3.2 Polynômes de Bernstein

$$\boxed{B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1} \quad i = 0, 1, ..., n \quad t \in [0, 1]}$$

n	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	$B_0^0(t) = 1$			
1	$B_0^1(t) = 1-t$	$B_1^1(t) = t$		
2	$B_0^2(t) = (1-t)^2$	$B_1^2(t) = 2t(1-t)$	$B_2^2(t) = t^2$	
3	$B_0^3(t) = (1-t)^3$	$B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$	$B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$	$B_3^3(t) = t^3$

$$\binom{n}{i} = C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

La somme des polynômes donne 1

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)$$

1. $t = 0$ est un zéro de multiplicité i
2. $t = 1$ est un zéro de multiplicité $n - i$
3. $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$
4. $B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t) \qquad i = 1, 2, ..., n-1$

Exemples :

$$\begin{aligned} b_0^1(t) &= b_0 B_0^1(t) + b_1 B_1^1(t) \\ b_1^1(t) &= b_1 B_0^1(t) + b_2 B_1^1(t) \\ b_0^2(t) &= b_0 B_0^2(t) + b_1 B_1^2(t) + b_2 B_2^2(t) \end{aligned}$$

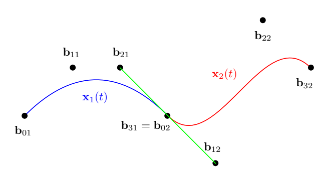
$$\boxed{x(t) = b_0 B_0^3(t) + b_1 B_1^3(t) + b_2 B_2^3(t) + b_3 B_3^3(t)}$$

3.3 Bernstein et Bézier

$$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} b_{i+j} B_j^r(t)$$

3.4 Courbes composées

1. Deux extrémités égales (points superposés)
2. Points autour de l'extrémité alignés



4 Intégration numérique

4.1 Formule du trapèze

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}$$

4.2 Formule composite du trapèze

Formule du trapèze avec sous-division (n intervalles)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(b)\right)}$$

4.3 Formule du point milieu

$$\boxed{M = h\left(f(x_{0.5}) + f(x_{1.5}) + \cdots + f(x_{n-0.5})\right)}$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(T(h) + M(h)\right)$$

4.3.1 Algorithme pour $n = 4$

1. $h = b - a$
2. $T(h) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_4)\right)$
3. $M(h) = hf(x_2)$
4. $T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(M(h) + T(h)\right)$
5. $M\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_3)\right)$
6. $T\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(M\left(\frac{h}{2}\right) + T\left(\frac{h}{2}\right)\right)$

4.3.2 Erreur

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(h)\right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$$

Optimal si

1. La fonction est **périodique**
2. La fonction est **infiniment dérivable**
3. On intègre sur une période

4.4 Méthode de Simpson

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

4.4.1 Erreur

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| \leq \frac{h^5}{90} \max_{a\leq x\leq b} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

4.5 Formule de Newton-Cotes

Avec $n = 3$ (3/8 de Simpson)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}\Big(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\Big)$$

n pair : polynômes jusqu'à $n+1$. n impair : polynômes jusqu'à n

4.6 Formule de composition de Simpson

Cas général avec $2n$ sous intervalles

$$\boxed{S_c = \frac{h}{3}\Big(f(a) + 3f(x_1) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(x_{2k}) + 2f(x_{2k+1})\right)\Big)}$$

4.6.1 Erreur

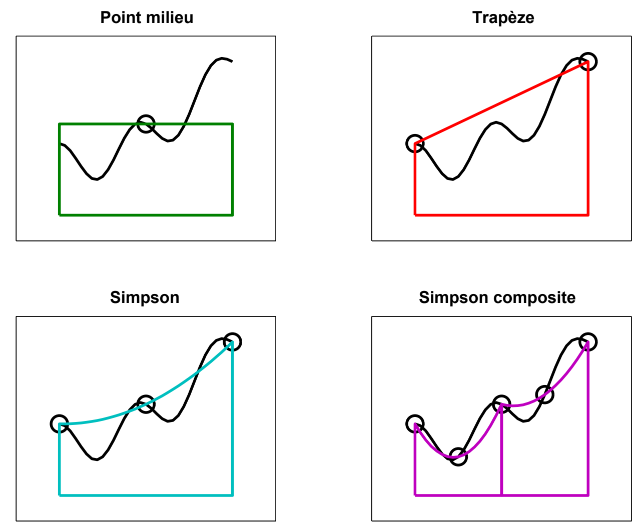
$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx - S_c\right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{a\leq x\leq b} \left|f^{(4)}(x)\right|}$$

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

4.7 Formule de Simpson adaptative

Intervalles non uniformes

4.8 Récapitulatif



4.9 Romberg

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & T_{0,0} & & & & & \\
 & T_{1,0} & T_{1,1} & & & & \\
h/2 \downarrow & T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} & & & \\
 & T_{3,0} & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & & \\
 & T_{4,0} & T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} & \\
 & T_{5,0} & T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & T_{5,5}
\end{array}$$

$$\xrightarrow{\hspace{3em}}$$

$$T_{n,c} = \frac{4^c T_{n,c-1} - T_{n-1,c-1}}{4^c - 1}$$

1. Facile
2. Coûteuse pour une grande précision
3. Il faut que la fonction soit $2k+2$ fois continûment dérivable pour aller jusqu'à la colonne k

4.10 Choix de la méthode

1. Périodique + infiniment dérivable : Trapèze
2. Polynôme cubique : Simpson (pas d'erreur)
3. Infiniment dérivable non périodique : Gauss ou Simpson adaptative (Romberg plus coûteuse)

5 Équations non linéaires

5.1 Existence d'une solution

Solution $f(r) = 0$ entre a et b pour f continue

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

5.2 Bissection

1. $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$
2. Répéter jusqu'à ce que $|a_k - b_k| \geq tol \cdot |b_k|$
   (a) Si $f(x_k)f(a_k) < 0$: $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$
   (b) Si $f(x_k)f(a_k) > 0$: $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$
   (c) $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

L'erreur converge avec

$$|e_k| < \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

1. Robuste
2. Intervalles qui contiennent la solution
3. Majorant connu de l'erreur
4. Lente

5.3 Regula falsi

A l'exception du premier terme, on doit décider si on utilise x_{k-1} avec x_{k-2} ou x_{k-3}

$$\boxed{x_k = \begin{cases} x_{k-2} - y_{k-2}\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{y_{k-1}-y_{k-2}} & y_{k-1} \cdot y_{k-2} < 0 \\ x_{k-3} - y_{k-3}\frac{x_{k-1}-x_{k-3}}{y_{k-1}-y_{k-3}} & y_{k-1} \cdot y_{k-3} < 0 \end{cases}}$$

5.4 Sécante

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Ordre de convergence de

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

1. Pas de connaissance de la dérivée
2. Une seule évaluation de f
3. Plus efficace que Newton (plus facile à calculer)

5.5 Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k}{f'(x_k)}}$$

$$|e_{k+1}| \approx \left|\frac{f''(r)}{f'(r)}\right| \cdot |e_k|^2$$

1. Très rapide
2. Peut ne pas converger

5.6 Point fixe

On veut une équation sous la forme :

$$\boxed{x = F(x) \longrightarrow x_{k+1} = F(x_k)}$$

Manipulation de f pour obtenir F

$$f(x) = x^5 + x^3 - x - 5 \longrightarrow F(x) = x^5 + x^3 - 5$$
$$C = |F'(r)|$$

Pour gagner une décimale il faut que

$$k \geq \frac{\ln(10)}{\ln(C)}$$

5.6.1 Théorème de Banach

Si

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad 0 < L < 1 \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

Alors il existe une seule solution r dans I

1. Fonction Lipschitzienne : qui satisfait la condition de Lipschitz avec n'importe quel L
2. Fonction contractante : qui satisfait la condition de Lipschitz et $0 < L < 1$

$$L_{\text{optimal}} = \max_{x \in I} |F'(x)|$$

5.6.2 Estimation

1. A priori :

$$|r - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

2. A posteriori :

$$|r - x_k| \leq \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$$

6 Systèmes d'équations non linéaires

6.1 Point fixe

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$\mathbf{F}$ est une contraction si

$$||\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(x')|| \leq L||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|| \qquad ||\mathbf{x}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et donc $\mathbf{F}$ possède un seul point fixe (et y converge de toute façon).

$$\boxed{\max_{(x,y)\in D} ||\mathbf{J}(x,y)|| < 1 \longrightarrow \text{ contraction sur } D}$$

$$||\mathbf{J}(x,y)|| = \sqrt{F_x(x,y)^2 + F_y(x,y)^2 + G_x(x,y)^2 + G_y(x,y)^2}$$

Matrice de Jacobi :

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Résultat global mais difficile de trouver un domaine D...
Il existe une version locale

$$\rho(\mathbf{J}(\mathbf{r})) < 1 \longrightarrow \text{ converge à l'intérieur d'un disque } D \text{ vers } \mathbf{r}$$

Avec ρ le rayon spectral (maximum des modules des valeurs propres de la matrice).

6.1.1 Ordre

Convergence linéaire

$$||\mathbf{e}_{k+1}|| \lessapprox ||\mathbf{J}(r,s)|| \cdot ||\mathbf{e}_k||$$

Si $\mathbf{J}(r,s)$ est nulle on a un ordre de convergence quadratique.

6.1.2 Estimation

1. A priori :

$$||\mathbf{r} - \mathbf{x}_k|| \leq \frac{L^k}{1-L}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$$

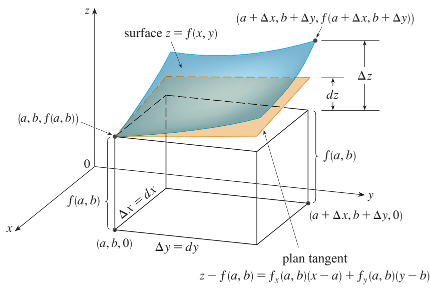
2. A posteriori :

$$||\mathbf{r} - \mathbf{x}_k|| \leq \frac{L}{1-L}|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}|$$

6.2 Méthode de Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{g(x_k,y_k)f_y(x_k,y_k) - f(x_k,y_k)g_y(x_k,y_k)}{f_x(x_k,y_k)g_y(x_k,y_k) - f_y(x_k,y_k)g_x(x_k,y_k)}}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{f(x_k,y_k)g_x(x_k,y_k) - g(x_k,y_k)f_x(x_k,y_k)}{f_x(x_k,y_k)g_y(x_k,y_k) - f_y(x_k,y_k)g_x(x_k,y_k)}}$$



La matrice de Jacobi donne une information sur la convergence (lente si déterminant égal à 0)

7 Résolution numérique de systèmes linéaires

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Si peu d'éléments sont non-nuls alors A est dite **creuse**

7.1 Condition d'arrêt

$$||\vec{r}_k|| = \left|\left|\vec{b} - A\vec{x}_k\right|\right| \leq \tau\left|\left|\vec{b}\right|\right|$$

On peut aussi utiliser une condition d'arrêt sur l'erreur $\vec{e}_k$ au lieu du résidu $\vec{r}_k = \vec{b} - A\vec{x}_k$

7.1.1 Lien entre résidu et erreur

$$\frac{||\vec{x} - \vec{x}_k||}{||\vec{x}_k||_p} \leq \underbrace{||A||_p\left|\left|A^{-1}\right|\right|_p}_{\kappa_p(A)} \frac{\left|\left|\vec{b} - A\vec{x}_k\right|\right|_p}{\left|\left|\vec{b}\right|\right|_p}$$

Autant de digits valides dans la mantisse que

$$|\log_{10}(\varepsilon)| - \log_{10}(\kappa(A)_p)$$

Avec ε la précision machine (1e-16 en général)

7.1.2 Perturbation

Perturbation sur A

$$\boxed{\frac{||\delta\vec{x}_A||}{||\vec{x} + \delta\vec{x}_A||} \leq \left|\left|\vec{A}\right|\right| \cdot \left|\left|\vec{A}^{-1}\right|\right| \cdot \frac{||\delta A||}{||A||}}$$

Perturbation sur A et $\vec{b}$:

$$\boxed{\frac{||\delta\vec{x}||}{||\vec{x} + \delta\vec{x}||} \leq \frac{\left|\left|\vec{A}\right|\right| \cdot \left|\left|\vec{A}^{-1}\right|\right|}{1 - ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \frac{||\delta A||}{||A||}} \cdot \left(\frac{||\delta A||}{||A||} + \frac{\left|\left|\delta\vec{b}\right|\right|}{\left|\left|\vec{b}\right|\right|}\right)}$$

7.2 Normes

$$||\vec{v}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Vecteurs
   (a) 1-norme : somme des composantes
   (b) 2-norme : norme euclidienne
   (c) max-norme : $p \to \infty$
2. Matrices
   (a) 1-norme :
   (b) 2-norme : ou max des valeurs propres de A^TA
   (c) max-norme

1. $||\vec{v}|| = 0 \longleftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
2. $||\lambda\vec{v}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{v}||$
3. $||\vec{v} + \vec{u}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{u}||$

7.3 Méthodes directes

7.3.1 Élimination de Gauss sans pivot

Effectuer des combinaisons linéaires des lignes pour obtenir une matrice triangulaire supérieure. Matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array}\right)$$

8 Résolution EDO

9 Autres

9.1 Triangle de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

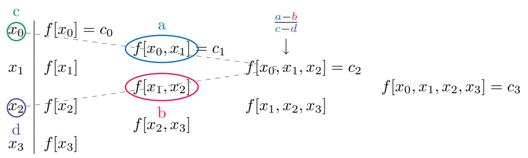
$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

10 Courbes de Bézier

11 Résolution numérique

11.1 Doolittle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$



$$(1) \begin{cases} u_{11} &= a_{11} \\ u_{12} &= a_{12} \\ u_{13} &= a_{13} \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} \\ u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} \end{cases} \qquad (4) \left\{ l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \right.$$

$$(5) \left\{ u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \right.$$

11.2 Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_{11} & 0 & 0 \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & 0 \\ \hat{l}_{31} & \hat{l}_{32} & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{l}_{21} & \hat{l}_{31} \\ 0 & \hat{l}_{22} & \hat{l}_{32} \\ 0 & 0 & \hat{l}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\hat{l}_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad \hat{l}_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$$

$$\hat{l}_{31} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} \qquad \hat{l}_{22} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}}$$

$$\hat{l}_{32} = \frac{a_{23} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{11}}}{\sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}}} \qquad \hat{l}_{33} = \sqrt{a_{33} - \hat{l}_{31}^2 - \hat{l}_{32}^2}$$

11.3 Permutations

Attention, si on utilise des permutations, alors

$$PA\vec{x} = P\vec{b}$$

11.4 Méthode QR

On commence avec une matrice $A_{n \times n}$

1. Prendre le premier vecteur colonne de A : $\vec{v}_1$
2. Faire la décomposition pour obtenir H_1
3. Construire $H_1 A$ puis prendre v_2 (première colonne de $H_1 A$ **sans la première ligne et sans la première colonne**
4. à la fin, déterminer R et Q

$$H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = R \longrightarrow A = \underbrace{H_1 H_2 \cdots H_{n-1}^T H_n^T}_{Q} R$$

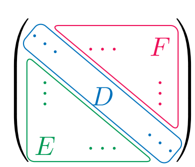
v est un vecteur de norme 1, on utilise $\tilde{v}$ si la norme est plus grande

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \qquad \vec{n} = x - y$$

$$y = -\rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\text{signe}(x_i)||x_i|| \left. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{taille de } x$$

$$H = I - 2vv^H$$

12 Résolution numérique par itérations



12.1 Méthode de Jacobi

$$\vec{x}^{(k)} = D^{-1}\left(b - (A - D)\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

$$N = D^{-1} = \text{diag}^{-1}(A)$$

12.2 Méthode de Gauss-Seidel

$$\vec{x}^{(k)} = (E + D)^{-1}\left(\vec{b} - F\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

$$N = (D + E)^{-1}$$

12.3 Méthode SOR

$$\vec{x}^{(k+1)} = (D + \omega E)^{-1} \cdot \left(\omega\vec{b} - (\omega F + (\omega - 1)D)\vec{x}^{(k)}\right)$$

12.4 Convergence

De manière générale on a une expression de la forme

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + N\left(\vec{b} - A\vec{x}^{(k-1)}\right)$$

Avec un N qui se rapproche de A^{-1} pour que le système soit rapide (mais sans être trop dur à calculer).

$$\boxed{\rho(I - NA) = \max\left(\text{valeurs propres}(I - NA)\right)}$$

$$\rho < 1 \longrightarrow \text{ convergence garantie}$$

12.4.1 Erreur

$$e^{(k)} = \underbrace{(I - NA)}_{\text{matrice d'itération}} e^{(k-1)}$$

$$\left|\left|\vec{e}^{(k)}\right|\right| \leq \rho^k \left|\left|\vec{e}^{(0)}\right|\right|$$

Relation entre le nombre de décimales souhaitées D et le nombre d'itérations n

$$n \geq \frac{\log_{10}(10^{-D})}{\log_{10}(\rho)} = -\frac{D}{\log_{10}(\rho)}$$

12.5 Minimisation

$$\boxed{\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}}$$

12.5.1 Méthode $F(x) = \frac{1}{2}||b - A\vec{x}||_2^2$

$$\boxed{\vec{d} = 2A^T\vec{r} \qquad \alpha = \frac{\vec{r}^T A\vec{d}}{\vec{d}^T A^T A\vec{d}}}$$

$$\boxed{\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha\vec{d}}$$

12.5.2 Méthode $G(x) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \vec{b}^T\vec{x}$

$$\boxed{\alpha = \frac{\vec{d}^T\vec{r}}{\vec{d}^T A\vec{d}}}$$

Il existe deux méthodes

1. Plus grande pente (gradient). Va donner des "zig-zag"

$$\boxed{\vec{d} = \vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}}$$

2. Gradients conjugués (réponse après n itérations, avec n la largeur de la matrice A). Le premier $\vec{d_0}$ est égal à $\vec{r}_0$ puis on le calcule avec les valeurs précédentes

$$\boxed{\vec{d} = \vec{r} + \beta_{k-1}\vec{d}_{k-1} \qquad \beta_{k-1} = \frac{\vec{r}_k^T\vec{r}_k}{\vec{r}_{k-1}^T\vec{r}_{k-1}}}$$

13 Résolution EDO

$$\boxed{y' = f(t, y(t))}$$

1. Méthode d'Euler

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

2. Méthode du point milieu

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f\left(t_k, y_k\right)\right)$$

3. Méthode de Runge-Kutta 4

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3) \end{aligned}$$

13.1 Réduction d'ordre

$$y(t) = y_1 \quad y'(t) = y_2 \quad \cdots \quad y^{(n+1)} = y_n$$

$$\vec{u} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n+1)}(0) \end{pmatrix}$$

14 Généralités

14.1 Matrices

14.1.1 Inverses

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Même principe si on renverse

$$\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ad} & \frac{1}{d} & 0 \\ \frac{be-cd}{adf} & -\frac{e}{fd} & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Pour une matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$