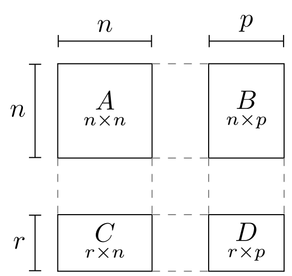
1 Espace d'état

1. Identifier les équations (intégrations, dérivées)
2. Déterminer les x : $A = B\frac{dC}{dt}$
3. Décrire l'entrée $u =$ et la sortie $y =$
4. Manipuler pour obtenir les $\dot{x}$
5. Écrire les matrices A, B, C et D

$$U(s) \xrightarrow[p \text{ signaux}]{} \boxed{G(s)} \xrightarrow[r \text{ signaux}]{} Y(s)$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}} \longrightarrow y(t)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$

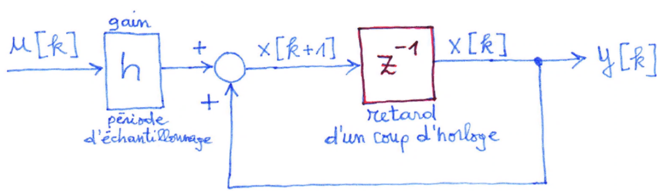


A : Matrice de système
B : Matrice d'entrée
C : Matrice de sortie
D : Matrice de bypass

1.1 Espace d'état numérique

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_n x[k] + B_n u[k] \\ y[k] &= C_n x[k] + D_n u[k] \end{aligned}$$

1.2 Exemple avec un retard



Il y a une seule variable d'état $x[k]$

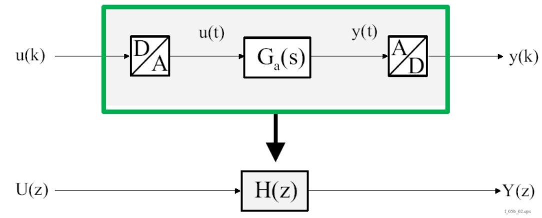
$$x[k+1] = x[k] + hu[k]$$

$$A_n = 1 \quad B_n = h$$

$$C_n = 1 \quad D_n = 0$$

C'est un intégrateur approximé par la méthode des rectangles.

1.3 Modèle échantillonné



$$\boxed{A_d = e^{A_a h}}$$

$$\boxed{B_d = \int_0^h e^{A_a \tau} B d\tau}$$

$$C_d = C_a$$

$$D_d = 0$$

2 Matrices

2.1 Inverse d'une matrice 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = ad - bc$$

2.1.1 Matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

Les valeurs ne s'échangent pas

2.2 Multiplication

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$$

$$\boxed{BA = \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix}}$$

3 Newton

Ressort :

$$F = -k\Delta x$$

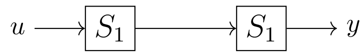
La force s'applique de manière égale et opposée sur les deux corps. (Si un des deux est un mur, on l'ignore).

4 Systèmes

$$\vec{x}_{tot} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1(t) \\ \vec{x}_2(t) \\ \vdots \\ \vec{x}_N(t) \end{bmatrix}$$

4.1 Mise en cascade

$$S_{tot}(s) = S_2(s)S_1(s)$$

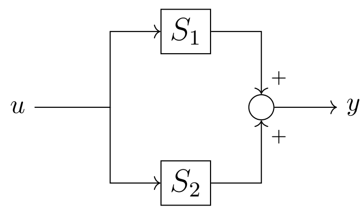


$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D = D_2D_1$$

4.2 Mise en parallèle

$$S_{tot}(s) = S_1(s) + S_2(s)$$

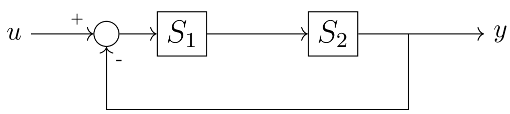


$$A_{tot} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)} \qquad B_{tot} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{tot} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D_{tot} = D_1 + D_2$$

4.3 Mise en contre-réaction

$$S_{tot}(s) = \left(I + S_1(s)S_2(s)\right)^{-1} S_1(s)$$



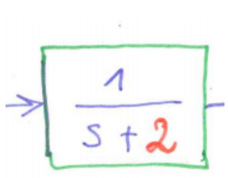
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

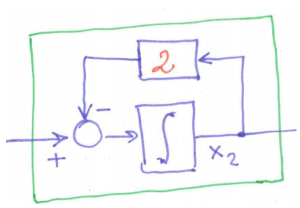
$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

5 Conversions

5.1 SS $\longrightarrow$ TF

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$





5.2 TF $\longrightarrow$ SS

(pas sur) Ne pas simplifier l'expression. Il faut seulement normaliser.

$$G(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Avec $n = 2$ on a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

6 Transformation

6.1 Valeurs propres

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}$$

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Pour trouver les vecteurs propres ($\vec{v}$), il faut valider l'expression suivante

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Les pôles se retrouvent sur la diagonale de la matrice si elle est diagonale, triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure

6.2 $\tilde{A}$

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \Lambda = T^{-1}AT$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT \\ \tilde{B} &= T^{-1}B \\ \tilde{C} &= CT \\ \tilde{D} &= D \end{aligned}}$$

7 Forme modale

La forme modale d'un système mets en évidence une matrice A de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Il est possible d'avoir des blocs 2x2 dans la diagonale qui représentent les systèmes d'ordre 2 avec pôles complexes conjugués.

8 Exponentielle

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots}$$

$$e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}$$

Si la matrice A est diagonale, alors

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{A_{nn}t} \end{pmatrix}$$

9 Retour d'état

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{bf} = A - BK$$

On détermine les pôles avec

$$\det(sI - A_{bf})$$

Puis on égale avec le polynôme imposé

$$\boxed{\det(sI - A) = (s - p_1)(s - p_2)}$$

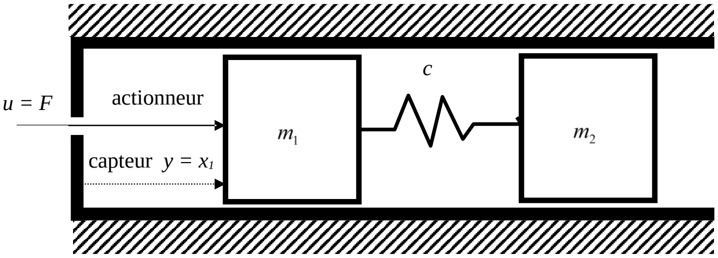
10 Commandabilité

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det(P_c) \neq 0 \longrightarrow \text{Commandable}}$$

11 Exemples

11.1 Masses et ressort



x_1 : Déplacement de m_1

x_2 : Déplacement de m_2

x_3 : Vitesse de m_1

x_4 : Vitesse de m_2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

12 Calcul de trajectoire

On peut calculer la trajectoire de $x[k]$ grâce à une équation récursive. La solution $x(t)$ est plus difficile à calculer.

12.1 Système avec temps discret

$$u[k] \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x[k+1] &= A_n x[k] + B_n u[k] \\ y[k] &= C_n x[k] + D_n u[k] \\ x[0] &= x_0 \quad \text{condition initiale} \end{aligned}} \longrightarrow y[k]$$

La solution se trouve de manière récursive $x[0]$, $x[1]$, $x[2]$ etc...

$$\begin{aligned}
&x[0] = x_0 \\
&x[1] = A_n x_0 + B_n u[0] \\
&x[2] = A_n x[1] + B_n u[1] = A_n^2 x_0 + A_n B_n u[0] + B_n u[1] \\
&x[3] = A_n x[2] + B_n u[2] = A_n^3 x_0 + A_n^2 B_n u[0] + A_n B_n u[1] + B_n u[2] \\
&\vdots \\
&x[k] = A_n^k x_0 + A_n^{k+1} B_n u[0] + A_n^{k-2} B_n u[1] + \cdots + A_n B_n u[k-2] + B_n u[k-1]
\end{aligned}$$

La solution fait apparaître deux contributions

1. Condition initiale $A_n^k x_0$ avec $\Phi[k] = A_n^k$ la matrice de transition
2. Contribution du signal d'entrée $u[k]$: produit de convolution entre u et la réponse impulsionnelle

12.1.1 Réponse impulsionnelle

On applique un dirac à l'entrée du système

$$u[k] = \Delta[k] = \{1, 0, 0, 0, \cdots\}$$

On suppose que x_0 (car la contribution est prise par la matrice de transition).

$$
\begin{aligned}
&x[1] = A_n x_0 + B_n \underbrace{u[0]}_{1} = B_n \\
&x[2] = A_n B_n + B_n \underbrace{u[1]}_{0} = A_n B_n \\
&x[3] = A_n^2 B_n \\
&\vdots \\
&x[k] = A_n^{k-1} B_n
\end{aligned}
$$

$$g_x = \{B_n, A_n B_n, A_n^2 B_n, A_n^3 B_n, \cdots\}$$

12.2 Système avec temps continu

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}} \longrightarrow y(t)$$

La solution homogène signifie qu'on ignore le signal d'entrée ($u(t) = 0$). Pour commencer, nous allons étudier le cas scalaire (1 variable d'état)

$$\dot{x} = ax$$

$$x(0) = x_0$$

La solution de l'équation suivante est (e^{at} qui a 1 comme ordonnée à l'origine, donc on multiplie par x_0 pour respecter la condition initiale).

$$\boxed{x(t) = e^{at} x_0}$$

Si x est un vecteur d'état (plusieurs variables d'état), alors on va chercher à résoudre l'équation

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \qquad \vec{x}(0) = \vec{x_0}$$

On obtient alors

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t) = e^{At} \vec{x_0}}$$

Avec la matrice de transition $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = e^{At}$$

$$\vec{x}(t) = \Phi(t) \vec{x_0}$$

12.2.1 Matrice de transition

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots$$

On peut essayer de remplacer a par une matrice A

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots}$$

Avec une matrice diagonale, e^{At} est diagonal aussi et les éléments de la diagonale correspondent à l'exponentielle habituelle (scalaire)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{A_{nn}t} \end{bmatrix}$$

12.3 Solutions générale pour une trajectoire $x(t)$ en temps continu

Soit un système analogique en temps continu

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}} \longrightarrow y(t)$$

La solution homogène donne

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$$

Si A est diagonal, alors il est facile de calculer l'exponentielle

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_{11}t} & & & \\ & e^{A_{22}t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{A_{nn}t} \end{bmatrix}$$

Pour prendre en compte l'entrée, on ajoute la contribution du signal d'entrée par produit de convolution

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

12.3.1 Calcul de l'exponentielle par diagonalisation

On fait le choix de

$$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

On trouve la matrice diagonale $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT$$
$$A = T\tilde{A}T^{-1}$$

Donc finalement

$$e^{At} = e^{T\tilde{A}T^{-1}t} = I + T\tilde{A}T^{-1}t + \frac{(T\tilde{A}T^{-1}t)^2}{2!} + \frac{(T\tilde{A}T^{-1}t)^3}{3!} + \cdots$$

On peut mettre en évidence les T et T^{-1}

$$\boxed{e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}}$$