1 Algèbre linéaire

1.1 Indépendance linéaire

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \qquad \alpha_i \neq 0$$

Pour déterminer si les vecteurs sont linéairement indépendants on construit la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0 \longrightarrow \text{ linéairement indépendants}$$

$$\text{rang}(A) = N_{\text{colonnes}} \longrightarrow \text{ linéairement indépendants}$$

1.2 Bases

Une base E^n est un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants. Chaque vecteur est une somme de combinaison linéaire des vecteurs de base

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

1.2.1 Changement de base

$$\text{base } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{base } E = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{base } U \longrightarrow \text{base } E \qquad && x_E = P^{-1} x_U \\ &\text{base } E \longrightarrow \text{base } U \qquad && x_U = P x_E \end{aligned}$$

1.2.2 Changement de base d'une matrice

$$B = P^{-1} A P$$

1.3 Valeurs propres

les valeurs propres λ sont les solutions de l'équation

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \vec{0}$$

On cherche les solutions de l'équation

$$\boxed{Ax = \lambda x} \longleftrightarrow \boxed{(A - \lambda I)x = \vec{0}}$$

1.3.1 Vecteurs propres

On trouve les vecteurs propres $\vec{x}$ avec

$$(A - \lambda_i I)\,\vec{x}_i = \vec{0}$$

Python `valeurs_propres, vecteurs_propres = np.linalg.eig(A)` Les vecteurs propres sont linéairement indépendants

1.4 Matrice modale

C'est la matrice formée par les vecteurs propres d'une matrice

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

1.4.1 Diagonalisation de A

Les vecteurs propres de A constituent une nouvelle base. Λ est "l'opération" de Λ dans cette nouvelle base

$$\Lambda = M^{-1}AM$$