1 Observabilité

1.1 Matrice d'observabilité

$$S^T = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \cdots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^2)^TC^T & \cdots & (A^{n-1})^TC^T \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det\left(S^T\right) = \det\left(S\right) \neq 0 \longrightarrow \text{ Observable}}$$

Un système est observable si il est possible de déterminer son état initial en observant sa sortie (en un temps fini depuis le temps initial).
Pour introduire un observateur, il faut que le système soit observable.

1.2 Définition

Le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $y = Cx(t)$ est complètement observable s'il existe un temps fini $t^* > 0$ tel que la connaissance de $y(t)$ sur $[0t^*]$est suffisante pour déterminer la valeur de l'état initial $x(0)$

1.3 Théorème

Un système à temps continu (discret) est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité: $S^T = [C, CA, CA^2, ..., CA^{n-1}]^T = [C^T, A^TC^T, (A^2)^TC^T, ..., (A^{n-1}$
est de rang n (rang plein)

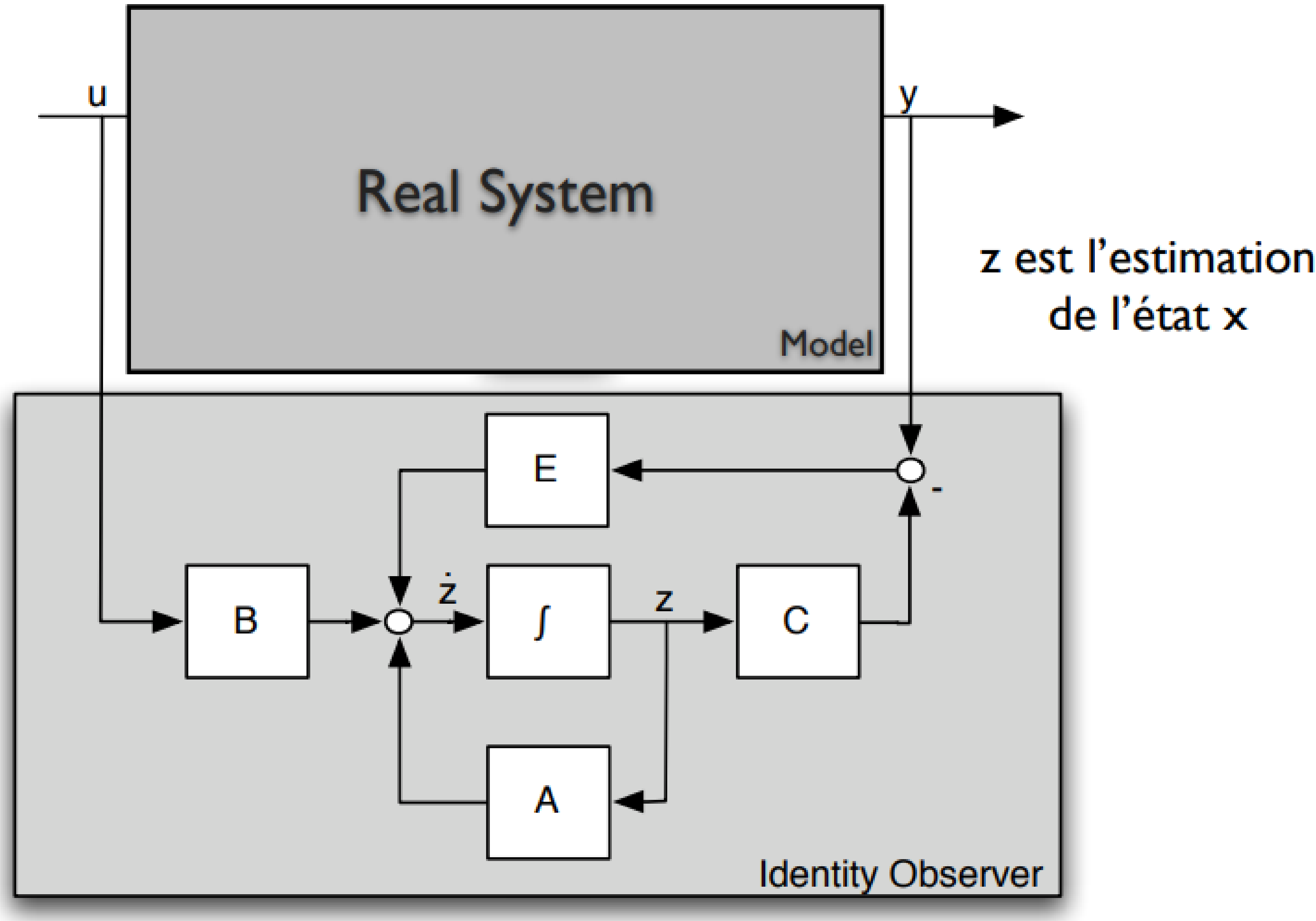
1.4 Observateur

Un observateur est un système dynamique qui retourne une estimation de la valeur de l'état quand on le 'nourrit' avec les sorties mesurées.

1.4.1 Observateur trivial (copie)

Pour un système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
L'observateur est $\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$
Mais avec cette observateur l'erreur $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$ donc $\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t)$ l'erreur disparait que lorsque le système est stable.

1.4.2 Observateur identité



Système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + E\left[y(t) - Cz(t)\right] + Bu(t) \\ u(t) = Kz(t) \end{cases}$$

On choisi E pour déterminer la dynamique de l'observateur et K pour la dynamique du régulateur

Dynamique de l'erreur $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{z}(t) - \dot{x}(t) = [A - EC](z(t) - x(t)) = [A - EC]\varepsilon(t)$

- Si $z(0) = x(0)$ alors $z(t) = x(t)$ pour tout $t > 0$
- Si $z(0) \neq x(0)$ le vecteur d'erreur est gouverné par $[A - EC]$
- On peut placer les valeurs propres de cette matrice, avec le degré de liberté que constitue E

$A - EC$ donne la dynamique de l'observateur (qu'on va utiliser pour faire un placement de pôle de l'observateur). Attention ! La fonction place ou acker va déterminer K dans $A - BK$. On doit donc faire `acker(A.T, C.T).T` (voir **??**)

1.4.3 Observateur d'ordre réduit

Un observateur d'ordre réduit peut être construit, pour que l'effort soit sur les variables "inconnues"

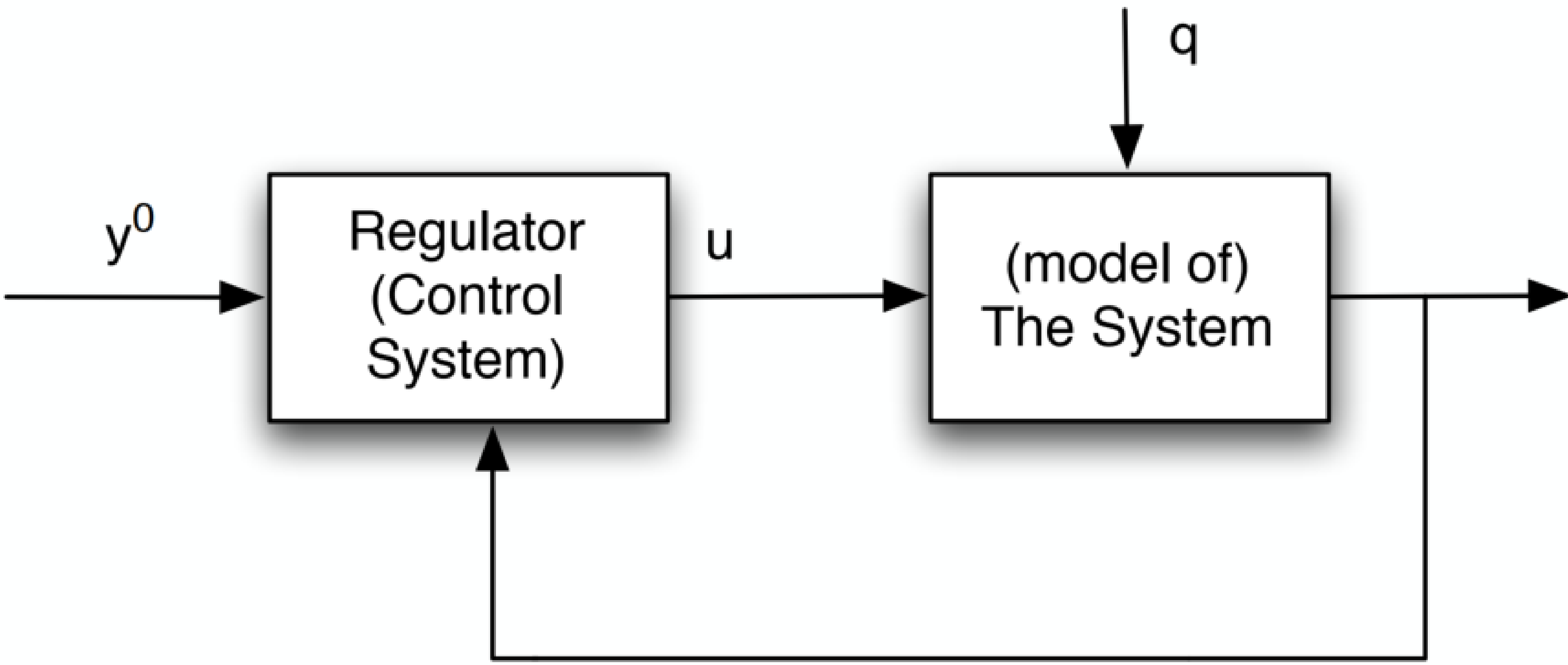
Pour un système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1}$$

avec (A, C) complètement observable et C(pxn) de rang p

Voir les pages 14-16 du polycopier 2_11 Observability

1.5 Contrôleur stabilisant



1.5.1 Théorème

Pour un système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2}$$

avec l'observateur identité $\dot{z}(t) = Az(t) + E[y(t) - Cz(t)] + Bu(t)$ et la loi de commande $u(t) = Kz(t)$

Le polynôme caractéristique de ce composite est égal au produit des polynômes caractéristiques de $A + BK$ et de $A - EC$: $\Delta_{A+BK}(\lambda) \cdot \Delta_{A-EC}(\lambda)$

- Les matrices K et E peuvent être fixées indépendamment
- Ce théorème s'applique aux systèmes linéaires