1 Introduction

1.1 Algèbre linéaire

1.1.1 Indépendance linéaire

Les vecteurs sont linéairement indépendants si il n'existe pas de combinaison linéaire nulle.

Ou alors on regroupe ces vecteur dans un matrice est on calcul son déterminant si il est non nulle alors tous les vecteurs sont linéairement indépendants.

1.1.2 rang

Son rang est égal au nombre de colonnes de la matrice qui sont linéairement indépendantes. $rank(A) = rank(A^T)$ donc le rang ne peut pas être plus grand que la plus petite des dimension de la matrice NxM.

1.1.3 Bases

Une base de E^n est un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants. La base standard est l'ensemble des vecteurs de base (x,y,z)(e_1, e_2, e_3)

Tous les vecteurs sont des combinaisons linéaires des vecteurs de base $x = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + ... + x_n \cdot u_n$

Le changement de base aura pour effet de changer les éléments du vecteur $x = z_1 \cdot p_1 + z_2 \cdot p - 2 + ... + z_n \cdot p_n$

Formule changement de base $x = Pz$ et $z = P^{-1}x$, la matrice P correspond au regroupement des vecteurs de la nouvelle base

$P = [p_1|p_2]@p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

La matrice A dans la base u est équivalente à la matrice $P^{-1}AP$ dans la base p

1.1.4 Vecteurs propres

$Ax = \lambda x$

les valeurs propres sont calculées à partir de la formule $det(A - I\lambda) = 0$

1.1.5 Matrice modale

$M = [e_1|e_2|...|e_n]$

La transformation de A dans la nouvelle base est $\Lambda = M^{-1}AM$

Exemple $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

1.2 Equations différentielles

EDO vs Equation aux différences

$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) \to y(t+1) = (a+1)y(t)$

1.2.1 Exemple équation aux différences

$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + ... + a_0 y(k) = 0$

$\lambda^{k+n} + a_{n-1}\lambda^{k+n-1} + ... + a_0\lambda^k = 0$

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0\lambda = 0$

1.2.2 Exemple EDO

$$\frac{dy}{dt} = ay \to y(t) = Ce^{at}$$

$$y(0) = Ce^{a \cdot 0} = Ce^0 = C$$

$$y(t) = y(0)e^{at}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

$$my'' = -ky$$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \to \lambda = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega$$

$$y(t) = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$$

2 Modélisation

Déterministes	Fixer une entrée → sortie
Stochastiques	Sortie de système aléatoir
Dynamiques	varie en fonction du temp
Statiques	fixa dans le temps (on pe
A temps continu	Signaux analogique (avec
A temps discret	Signaux discret échantillo
A paramètres ponctuels	EDO
Distribués	EDP
Change oriented	style continu
Mu par des évènements discrets	une voiture qui arrive dar

2.1 Etapes principales

- Formulation du problème
- Design d'une structure de modèle
- Déploiement de l'outil de simulation
- Test et validation
- Utilisation du modèle

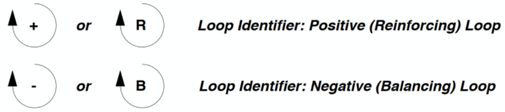
  descriptive: simulation, prévision

  prescriptive: décision et évaluation

3 Causal Loop Diagrams

- Capturer les hypothèses sur les causes du comportement dynamique d'un système
- Révélez nos "modèles mentaux"
- Implanter les éléments de rétroaction dans nos modèles

Si nombre de lien - paire alors boucle + sinon -



Symbol	Interpretation	Mathematics	Examples
$X \xrightarrow{+} Y$	All else equal, if X increases (decreases), then Y increases (decreases) above what it would have been. In the case of accumulations, X adds to Y.	$\partial Y/\partial X > 0$ In the case of accumulations, $Y = \int_{t_0}^{t} (X + \dots) ds + Y_{t_0}$	Product Quality $\xrightarrow{+}$ Sales; Effort $\xrightarrow{+}$ Results; Births $\xrightarrow{+}$ Population
$X \xrightarrow{-} Y$	All else equal, if X increases (decreases), then Y decreases (increases) below what it would have been. In the case of accumulations, X subtracts from Y.	$\partial Y/\partial X < 0$ In the case of accumulations, $Y = \int_{t_0}^{t} (-X + \dots) ds + Y_{t_0}$	Product Price $\xrightarrow{-}$ Sales; Frustration $\xrightarrow{-}$ Results; Deaths $\xrightarrow{-}$ Population

3.0.1 A faire attention

- Si il y a une ambiguïté sur le signe de la flèche c'est qu'il manque une étape
- Des noms plutôt que des phrases (X,Y)
- Les noms de variables doivent avoir un sens en cohérence la sensibilité
- Choisir les labels dont l'évolution est normalement espérée ou mesurée ¿ 0

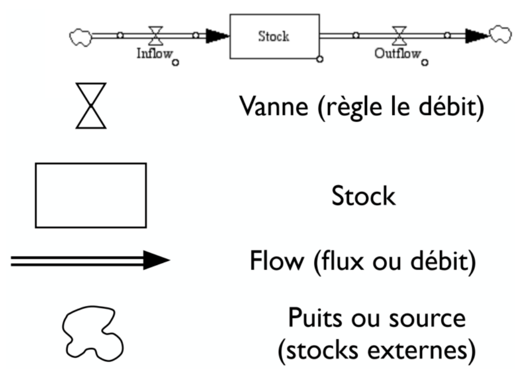
3.1 Stock and Flow

3.1.1 Stocks

- CLD ne représentent pas l'accumulation, les Stocks oui
- Stocks = état du système (et nos décisions dépendent de l'état)
- E.G.: l'inventaire d'une entreprise, le # d'employés, le montant sur le compte de paiements

3.1.2 Flow

- Les flux changent les stocks
- L'inventaire change avec les livraisons
- # d'employés ch ange avec les recrutements, licenciements et départs à la retraite
- Souvent, on a des problèmes à décider comment distinguer flux et taux (l'inflation?)



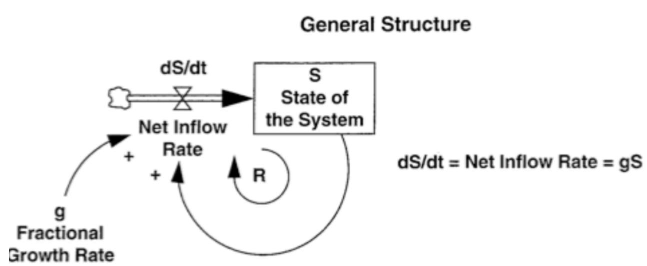
3.2 Math

Les niveaux (stocks) intègrent les débits (flows)

$stock(t) = \int_{t_0}^{t} [in(s) - out(s)]ds + stock(t_0)$ ceci donne $\frac{d(stock)}{dt} = in(t) - out(t)$

4 Modèles Dynamiques

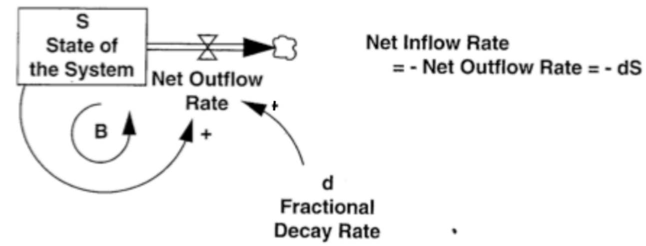
4.1 Rétroaction positive



Le stock accumule du inflow $S(t) = S(0)e^{gt}$

Le temps de doublement du stock est de $2S(0) = S(0)e^{gt_d}$ on a donc $t_d = \frac{ln(2)}{g} = \frac{70}{100g}$

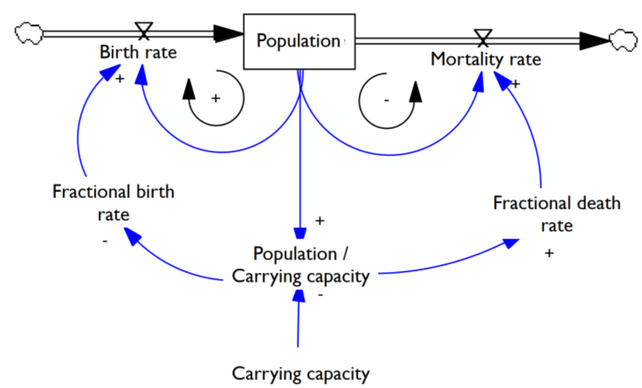
4.2 Rétroaction négative et décroissance exponentielle



Le stock perd du outflow $S(t) = S(0)e^{-dt}$

Le temps de division par 2 du stock est de $t_d = ln(2)\tau = 0.70\tau$

4.3 Système non linéaires croissance en S



L'équation du système est $\frac{dP}{dt} = b(\frac{P}{C})P - d(\frac{P}{C})P$

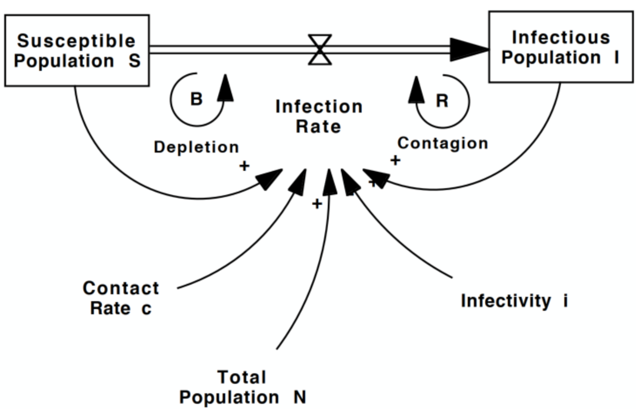
La croissance nette est une fonction de la population P : $\frac{dP}{dt} = g(P,C)P = g(1 - \frac{P}{C})P$

Modèle logistique : $g(1 - \frac{P}{C})$

Equation logistique : $P(t) = \frac{C}{1+[\frac{C}{P(0)}-1]e^{-gt}}$

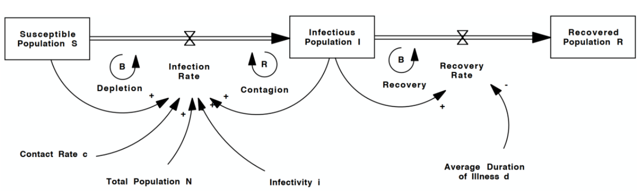
4.4 Modèle SI et SIR

- S : susceptibles
- I : infectés
- R : rétablit



4.4.1 Equation du modèle SI

$N = S + I \rightarrow \frac{dS}{dt} = -(ciS)\frac{I}{N} = -(I_R)$ IR = Infection Rate $\frac{dI}{dt} = ci \cdot I(1 - \frac{I}{N})$



4.4.2 Equation du modèle SIR

$$\frac{dS}{dt} = -(ciS)\frac{I}{N}$$

$$R_R = \frac{I}{d}$$

$$\frac{dI}{dt} = (ciS)\frac{I}{N} - \frac{I}{d}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{I}{d}$$

$$N = S + I + R$$

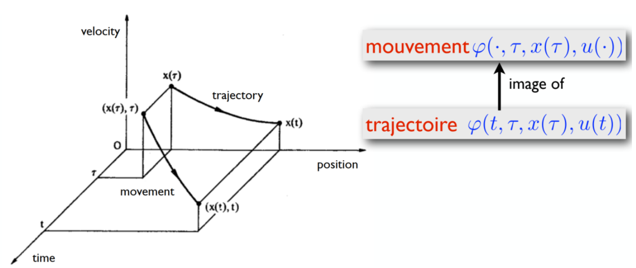
Point de bascule $I_R > R_R \rightarrow ciS(\frac{I}{N}) > \frac{I}{d}$ ou $cid(\frac{S}{N} > 1)$

4.5 Retard

Un retard est un processus dont la sortie correspond à l'entrée translatée dans le temps

5 Systèmes

5.1 Mouvement et trajectoire



5.2 Systèmes invariants

Un système est dit invariant si

- T est un groupe additif
- Pour tout $u \in \Omega$ et pour chaque $s \in T$ la fonction $u^s(\cdot)$ obtenue par translation ($u(t) = u^s(t+s)$) appartient également à Ω
- La fonction de translation à la propriété $\varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \varphi(t+s, \tau+s, x, u^s(\cdot))$
- La transformation de sortie ne dépend pas explicitement du temps $y(t) = \eta(x(t))$
- Si $T = \mathbb{N}$ nous avons un système à temps discret
- Si $T = \mathbb{R}$ nous avons un système à temps continu

5.3 Systèmes réguliers

- Si les ensembles U, X, et Y sont des espaces vectoriels de dimensions finies, le système est dit de dimensions finies
- Le 'circuit électrique' et les '2 bacs' sont deux exemples de systèmes de dimensions finies
- Si une norme est définie pour les espaces vectoriels, il est possible de mesurer la distance entre deux éléments et d'introduire la notion de régularité

Un système est regulier si

- U, X, Y, Γ, Ω sont des espaces normés
- φ est continue dans tous ses arguments et $\frac{d\varphi(t,\tau,x,u(\cdot))}{dt}$ est aussi continue en t partout où u() est continue
- η est continue dans tous ses arguments

Le mouvement d'un système régulier de dimension finie est la solution d'un équation différentielle de la forme: $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$ qui satisfait la condition initiale $x(\tau) = x$

Donc un système régulier est représenté par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), t) \end{cases} \tag{1}$$

5.4 Systèmes linéaires

Un système est dit linéaire si

- U, X, Y, Γ, Ω sont des espaces normés
- φ est linéaire en $X \times \Omega$ pour tout $t, \tau \in T$:
- η est linéaire en X pour tout t dans T $\eta(t) = C(t)x(t)$

Avec un système linéaire. le mouvement peut être décomposé en la somme des mouvements libre et forcé $x(t) = x(\tau) + \int_\tau^t \frac{u}{C(\xi)} d\xi = MouvementLibre + MouvementForce$

5.5 Système linéaires et réguliers

- Si un système de dimensions finies est linéaire et régulier, alors son état x satisfait:

  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$ (1)
- Comme φ, solution de (1), est linéaire en x et u

  $f(x(t), u(t), t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$
- Alors, un système linéaire est décrit par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \tag{2}$$

6 Automatiques

6.1 Pôles en boucle ouverte

On calcule les valeurs propres λ de A

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

6.2 Observateur identité

Sa dynamique d'erreur est de la forme

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{z}(t) - \dot{x}(t) = (A - EC)(z(t) - x(t)) = (A - EC)\varepsilon(t)$$

Pour déterminer E, on utilise la méthode de Ackermann (voir 6.3.1) en remplaçant

$$\begin{cases} A & \longrightarrow A^T \\ B & \longrightarrow C^T \\ K & \longrightarrow E \end{cases}$$

6.3 Placement de pôles

Soit un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Si l'on souhaite le régler avec un régulateur d'état en utilisant un placement de pôle, on utilise la méthode de Ackermann

6.3.1 Méthode de Ackermann (exemple avec $n = 3$)

On veut avoir les pôles p_3, p_2, p_1. C'est à dire qu'on a un polynôme caractéristique de la forme

$$(s - p_3)(s - p_2)(s - p_1)$$

sur un système

$$A - BK$$

On cherche à déterminer K

$$(s - p_3)(s^2 - p_2 s - p_1 s + p_1 p_2)$$

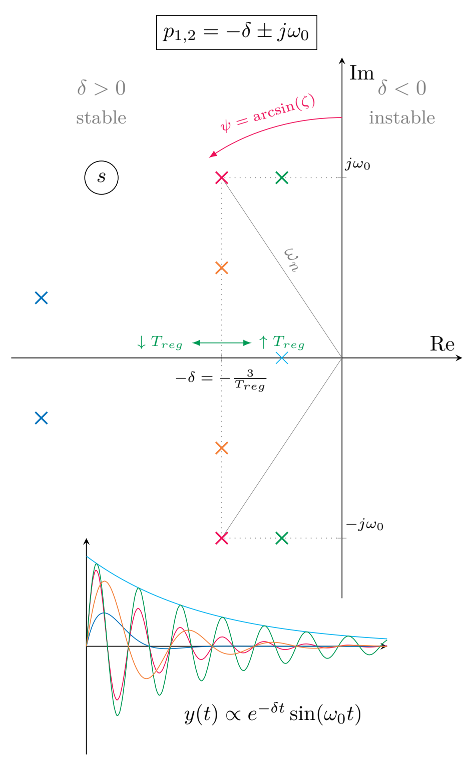
$$a_3 s^3 \underbrace{-(p_1 + p_2 + p_3)}_{a2} s^2 + \underbrace{(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)}_{a1} s \underbrace{-p_1 p_2 p_3}_{a0}$$

On calcule ensuite la matrice de contrôlabilité

$$M = \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B \end{pmatrix}$$

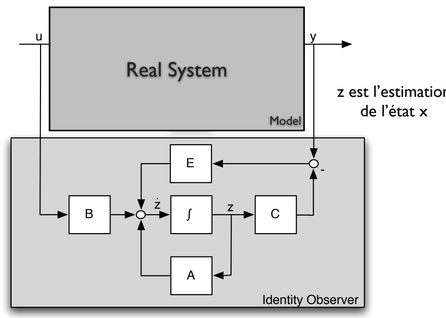
$$K = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} \left(\underset{\overset{\|}{1}}{a_3} A^3 + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 I \right)$$

6.4 Pôles



6.5 Retour d'état

$$\text{Boucle fermée :} \ A_{bf} = A - BK$$



7 Outils

7.1 Linéarisation

Pour linéariser une fonction f au point x_0 on effectue

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Dans le cas multivariable on a

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} (y - b_0)$$