1 Algèbre linéaire

1.1 Indépendance linéaire

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \qquad \alpha_i \neq 0$$

Pour déterminer si les vecteurs sont linéairement indépendants on construit la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0 \longrightarrow \text{ linéairement indépendants}$$
$$\operatorname{rang}(A) = N_{\text{colonnes}} \longrightarrow \text{ linéairement indépendants}$$

1.2 Bases

Une base E^n est un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants. Chaque vecteur est une somme de combinaison linéaire des vecteurs de base

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

1.2.1 Changement de base

$$\text{base } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{base } E = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice P est constituée des vecteurs de la nouvelle base

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{base } U \longrightarrow \text{base } E & \qquad x_E = P^{-1} x_U \\ \text{base } E \longrightarrow \text{base } U & \qquad x_U = P x_E \end{aligned}$$

La matrice A dans la base U est équivalente à la matrice $P^{-1}AP$ dans la base E

1.2.2 Changement de base d'une matrice

$$B = P^{-1}AP$$

1.3 Valeurs propres

les valeurs propres λ sont les solutions de l'équation

$$\det(A - \lambda I) = \vec{0}$$

On cherche les solutions de l'équation

$$\boxed{Ax = \lambda x} \longleftrightarrow \boxed{(A - \lambda I)x = \vec{0}}$$

La multiplicité numérique d'une valeur propre est son exposant dans le polynôme caractéristique.

1.3.1 Vecteurs propres

On trouve les vecteurs propres $\vec{x}$ avec

$$(A - \lambda_i I)\,\vec{x}_i = \vec{0}$$

Python `valeurs_propres, vecteurs_propres = np.linalg.eig(A)` Les vecteurs propres sont linéairement indépendants

1.4 Matrice modale

C'est la matrice formée par les vecteurs propres d'une matrice

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

1.4.1 Diagonalisation de A

Les vecteurs propres de A constituent une nouvelle base. Λ est "l'opération" de Λ dans cette nouvelle base

$$\Lambda = M^{-1}AM$$

1.4.2 Vecteurs propres

$Ax = \lambda x$
les valeurs propres sont calculées à partir de la formule $det(A - I\lambda) = 0$

1.4.3 Matrice modale

$M = [e_1|e_2|...|e_n]$
La transformation de A dans la nouvelle base est $\Lambda = M^{-1}AM$
Exemple $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

1.5 Equations différentielles

EDO vs Equation aux différences
$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) \rightarrow y(t+1) = (a+1)y(t)$

1.5.1 Exemple équation aux différences

$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + ... + a_0 y(k) = 0$
$\lambda^{k+n} + a_{n-1}\lambda^{k+n-1} + ... + a_0\lambda^k = 0$
$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0\lambda = 0$

1.5.2 Exemple EDO

$\frac{dy}{dt} = ay \rightarrow y(t) = Ce^{at}$

$$y(0) = Ce^{a \cdot 0} = Ce^0 = C$$
$$y(t) = y(0)e^{at}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$
$$my'' = -ky$$
$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \rightarrow \lambda = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega$$
$$y(t) = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$$