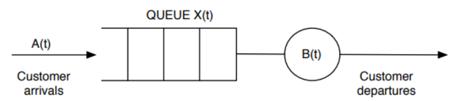
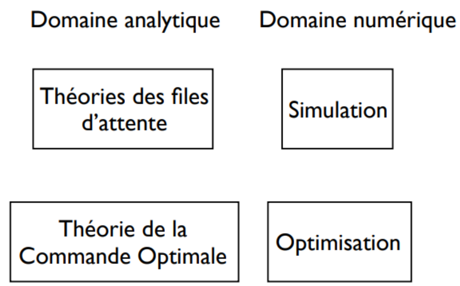
1 Théorie des files d'attente





Temps inter-arrivée	Y_k
Taux moyen d'arrivée (fréquence)	λ
Temps moyen inter-arrivée	$E[Y] = 1/\lambda$
Temps de service	Z_k
Fréquence moyenne de service	μ
Moyenne des temps de service	$E[Z] = 1/\mu$
Capacité de stockage (parfois ∞)	K
Nombre de serveurs	m
Temps d'arrivée	A_k
Temps de départ	D_k
Temps d'attente	W_k
Temps de système	S_k
Longueur de file	$X(t)$
Charge	$U(t)$
Temps moyen d'attente (régime établi)	$E[W]$
Temps de service moyen (régime établi)	$E[Z]$
Nombre moyen de clients (régime établi)	$E[X]$
Charge de travail moyenne (rég. établi)	$E[U]$

Notation $A/B/m/K$

1.1 Relations

$$S_k = D_k - A_k = W_k + Z_k$$

$$D_k = A_k + W_k + Z_k$$

1.2 Temps moyen d'attente et de service

si $k \to \infty$ il peut y avoir une distribution stationnaire

1.3 Optimisation

On veut :

- Minimiser le temps d'attente
- Maximiser l'utilisation du serveur

Donc minimiser $E[W]$, $E[Z]$ et $E[X]$. On veut maximiser l'utilisation et le débit

1.4 Intensité du trafic

$$\text{intensité du trafic} = \frac{\text{fréquence d'arrivée}}{\text{fréquence de sortie}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = (1 - \pi_0)$$

1.5 Utilisation et throughput

π_0 probabilité que la file soit vide (fraction du temps pendant laquelle le serveur est inutilisé)

$$\text{throughput} = \text{taux de départ des clients} = \mu(1 - \pi_0)$$

En régime permanent :

$$\lambda = \mu(1 - \pi_0)$$

1.6 Équation de Lindley

$$W_k = \max\{0, W_{k-1} + Z_{k-1} - Y_k\}$$

$$D_k = \max\{A_k, D_{k-1}\} + Z_k$$

1.7 Loi de Little

Nombre d'arrivées de clients jusqu'au temps t	$n_a(t)$
Nombre de départs de clients jusqu'au temps t	$n_d(t)$
Nombre de clients dans le système au temps t	$X(t)$

$$X(t) = n_a(t) - n_d(t)$$

1.7.1 Dérivation

Temps moyen dans le système / client

$$\bar{s}(t) = \frac{u(t)}{n_a(t)}$$

Nombre moyen de clients dans le système

$$\bar{x}(t) = \frac{u(t)}{t}$$

Fréquence moyenne d'arrivée

$$\lambda(t) = \frac{n_a(t)}{t}$$

$$\bar{x}(t) = \lambda(t)\bar{s}(t)$$

Taux moyen d'arrivée en régime établi :

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \lambda$$

Temps moyen du système en régime établi :

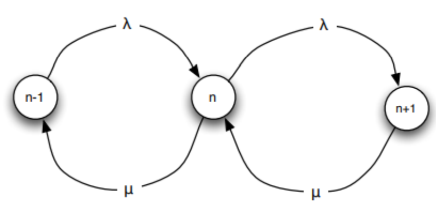
$$\lim_{t\to\infty} \bar{s}(t) = s$$

$$\bar{x} = E[X] \qquad \bar{s} = E[S]$$

1.8 Systèmes à file d'attente markoviens simples

En régime établi :

$$\lambda = \mu(1 - \pi_0) \qquad \rho(1 - \pi_0)$$



Probabilité d'aller de l'état $n-1$ à n

$$\lambda\pi_{n-1}$$

Probabilité d'aller de l'état n à $n-1$

$$\mu\pi_n$$

Probabilité d'avoir n clients dans le système

$$\pi_n = \rho^n\pi_0 = (1-\rho)\rho^n$$

Équation de récurrence

$$\pi_n = \rho\pi_{n-1}$$