1 Régulateurs

Méthode de Tustin

$$s \approx \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$$

1.1 Intégrateur

$$G_I(s) = \frac{1}{s}$$

Avec la méthode des rectangles on a

$$G_I(s) = \frac{h}{z-1}$$

1.2 Dérivateur

$$G_D(s) = s$$

Avec la méthode de la sécante on a

$$G_D(s) = \frac{z-1}{hz} = \frac{1-z^{-1}}{h}$$

1.3 Calcul pour un régulateur I

$$\frac{5}{s+10}\frac{1+sT_i}{sT_i} \Longrightarrow \frac{5}{s+10}\frac{\frac{1}{T_i}+s}{s}$$

On transforme pour avoir la même forme

$$s+10 = s + \frac{1}{T_i} \Longrightarrow \boxed{T_i = \frac{1}{10}}$$

1.4 P

$$G_P(s) = K_p$$
$$G_P(z) = K_p$$

1.5 PI

$$y(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau\right)$$
$$G_{PI}(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = K_p\frac{1+sT_i}{sT_i}$$

Méthode des trapèzes (Tustin)

$$G_{PI}(z) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_i}\frac{h(z+1)}{2(z-1)}\right)$$

Méthode des rectangles

$$G_{PI}(z) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i}\frac{h}{z-1}\right)$$

1.6 PD

$$y(t) = K_p\left(e(t) + T_d\frac{de}{dt}\right)$$
$$G_{PD}(s) = K_p(1+sT_d)$$

Méthode des trapèzes

$$G_{PD}(z) = K_p\left(1 + T_d\frac{2(z-1)}{h(z+1)}\right)$$

Méthode de la sécante

$$G_{PD}(z) = K_p\left(1 + T_d\frac{1-z^{-1}}{h}\right) = K_p\left(1 + T_d\frac{z-1}{hz}\right)$$

1.7 PID

$$y(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de}{dt}\right)$$

$$G_{PID}(s) = K_p\frac{1+sT_i+s^2T_iT_d}{sT_i} = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$$

Méthode de Tustin

$$G_{PID}(z) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i}\frac{h(z+1)}{2(z-1)} + T_d\frac{2(z-1)}{h(z+1)}\right)$$

Méthode des rectangle et de la sécante

$$G_{PID}(z) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i}\frac{h}{z-1} + T_d\frac{z-1}{hz}\right)$$

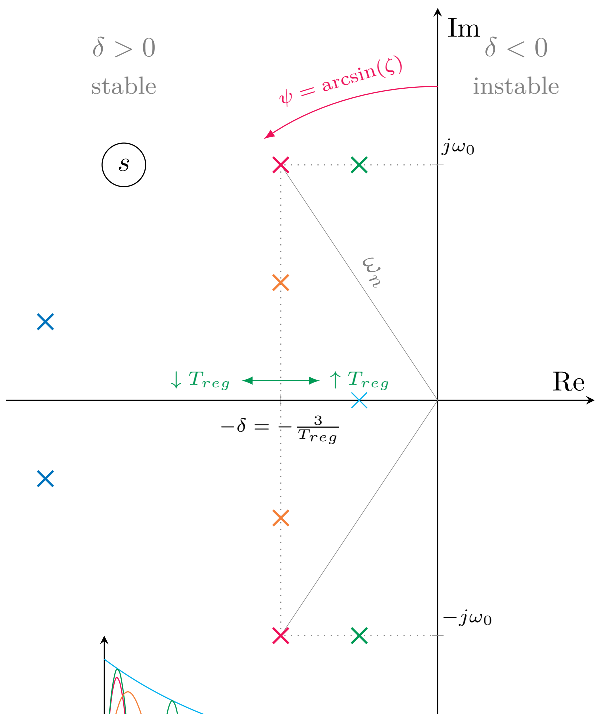
2 Lieu des pôles

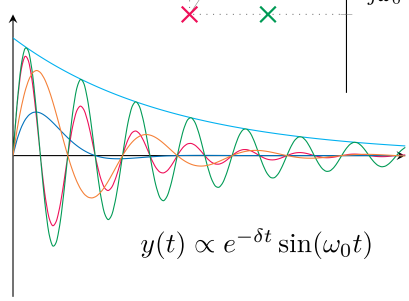
$$\underbrace{d}_{\text{degré relatif}} = \underbrace{n}_{\text{deg(denominateur)}} - \underbrace{m}_{\text{deg(numérateur)}}$$

d	N° d'asymptotes qui parent à l'infini (séparation en 360°)
n	N° de branches (ou N° de points de départs)
m	N° de points d'arrivée

1. Le lieu des pôles est symétrique par rapport à l'axe des réels
2. Les points de départs ($K_p = 0$) sont les **pôles** en boucle ouverte
3. Les points d'arrivée ($K_p \to \infty$) sont les **zéros** en boucle ouverte (si il y en a assez)
4. Les pôles **repoussent**
5. Les zéros **attirent**

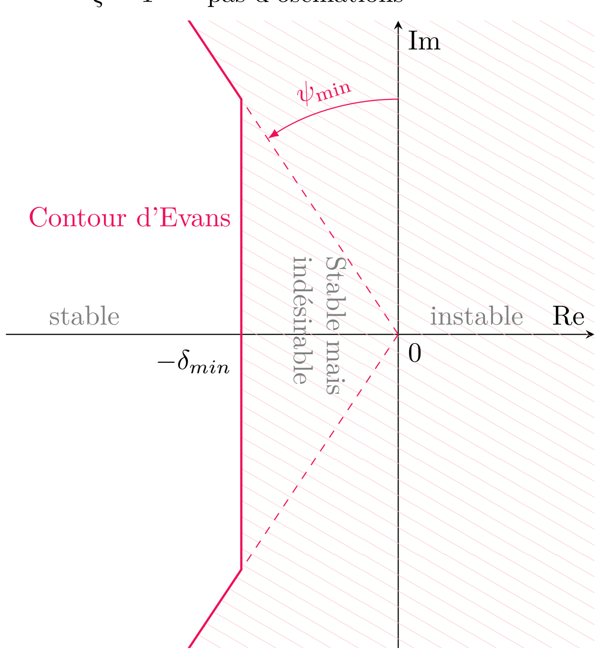
$$\boxed{p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0}$$

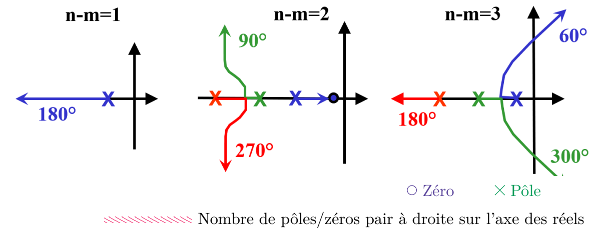


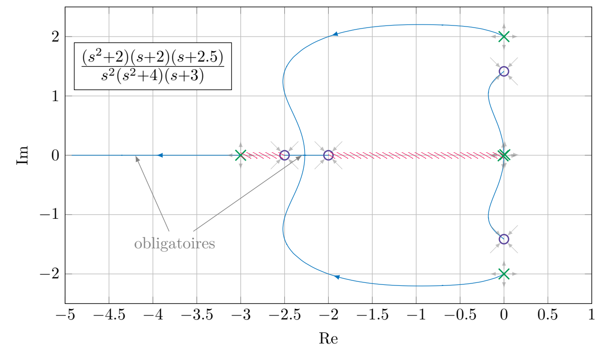


$$\zeta = \left| \frac{\mathrm{Re}(p)}{|p|} \right| \qquad \zeta = \frac{\delta}{\omega_n} > 0$$

$\zeta = 0$	pas d'amortissement
$\zeta = \frac{1}{2}$	Une période d'oscillation ?
$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Amortissement optimal
$\zeta = 1$	pas d'oscillations







Temps de réglage à 5 %

$$\boxed{T_{reg}\omega_{co} \approx \pi}$$

Période d'échantillonnage

$$\frac{T_{reg}}{20} < h < \frac{T_{reg}}{10}$$

3 Calcul des marges ou K_p

Détermination de Kp pour une marge de gain donnée	Détermination de Kp pour une marge phase donnée
Poser $\arg(G_0(j\omega_\pi)) = -\pi$ ↓ Trouver ω_π ↓ Poser $\lvert G_0(j\omega_\pi)\rvert_{\mathrm{dB}} = -A_m$ ↓ Déterminer K_p	Poser $\arg(G_0(j\omega_{co})) = -\pi + \varphi_m$ ↓ Trouver ω_{co} ↓ Poser $\lvert G_0(j\omega_{co})\rvert = 1$ ↓ Déterminer K_p
Calcul de la marge de gain	**Calcul de la marge de phase**
Poser $\arg(G_0(j\omega_\pi)) = -\pi$ ↓ Trouver ω_π ↓ Poser $A_m = -\lvert G_0(j\omega_\pi)\rvert_{\mathrm{dB}}$ ↓ Calculer A_m	Poser $\lvert G_0(j\omega_{co})\rvert = 1$ (0dB) ↓ Trouver ω_{co} ↓ Poser $\varphi_m = \pi - \arg(G_0(j\omega_{co}))$ ↓ Calculer φ_m

4 Erreurs statiques

Correspondance	Maintien
Pas de perturbation	Pas de consigne
$e_\infty = G_{ew}(z=1)w_\infty$	$e_\infty = G_{ev}(z=1)v_\infty$
$e_\infty = G_{ew}(s=0)w_\infty$	$e_\infty = G_{ev}(s=0)v_\infty$

Pour un modèle échantillonné, on peut écrire (conservation des gains statiques)

$$G_{ew}(z=1) = G_{ew}(s=0)$$

4.1 Calcul avec les gains statiques

Exemple avec une fonction d'erreur G_{ew}

$$G_{ew} = \frac{1}{1+G_o} = \frac{1}{1+G_cG_a}$$

Avec les gains statiques suivants

$$\begin{array}{ccc} G_a & \rightarrow & K_a \\ G_c & \rightarrow & K_c \end{array}$$

$$K_{ew} = \frac{1}{1+K_o} = \frac{1}{1+K_cK_a}$$

4.2 Annulation de l'erreur statique

Il faut $n+1$ intégrateurs purs dans le système pour compenser une erreur d'ordre n

Erreur statique (ordre 0)	1 intégrateur pur
Erreur de rampe (ordre 1)	2 intégrateurs purs

4.3 Inventaire des retards

La nouvelle phase φ'_m est modifiée lorsqu'on ajoute un retard T_r

$$\varphi'_m = \varphi_m - \omega_{co}T_r$$

4.3.1 Boucle ouverte avec inventaire des retards

$$G'_o(s) = G_o(s)e^{-sh}$$
$$\arg(e^{-sh}) = -h\omega$$
$$\left|e^{-sh}\right| = 1$$

5 Fonctions de transfert

5.1 Théorème de la valeur initiale (signaux)

$$u[0] = \lim_{k\to 0} u[k] = \lim_{z\to\infty} U(z)$$
$$u(0) = \lim_{s\to\infty} sU(s)$$

5.2 Théorème de la valeur finale (signaux)

$$u_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)U(z)$$
$$u_\infty = \lim_{s\to 0} sU(s)$$

5.3 Gain statique (système)

$$K = \lim_{z\to 1} G(z)$$
$$K = \lim_{s\to 0} G(s)$$

5.4 Équation caractéristique

$$d_0(s) + Kn_0(s) = 0 \Longrightarrow 1 + K\frac{n_0(s)}{d_0(s)}$$

5.5 Identification

$$1 + G_o(s) = 0 \qquad G_o = \frac{K_p}{z(z-1)}$$

$$z^2 - z + K_p = 0$$

$$(z-p)(z+p^*) = z^2 - (p+p^*) + \underbrace{pp^*}_{K_p}$$

5.6 Erreur de rampe

1. On calcule $G_{ew}(z)$ et on vérifie que c'est stable (sinon l'erreur est infinie)
2. On calcule la transformée de la rampe
$$W(z) = h\frac{z}{(z-1)^2}$$
3. On calcule la transformée de l'erreur
$$E(z) = G_{ew}(z)W(z)$$
4. ON utilise la valeur finale du signal $E(z)$
$$e_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z)$$

5.7 Décomposition en éléments simples

$$\begin{array}{c} H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0.25)(z-0.5)} \\ \downarrow \\ \frac{H(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z-1)(z-0.25)(z-0.5)} \\ \downarrow \\ \frac{H(z)}{z} = \frac{R_1}{(z-1)} + \frac{R_2}{(z-0.25)} + \frac{R_3}{(z-0.5)} \end{array}$$

$$R_1 = \frac{(1+1)}{(1-0.25)(1-0.5)}$$
$$R_2 = \frac{(0.25+1)}{(0.25-1)(0.25-0.5)}$$
$$R_3 = \frac{(0.5+1)}{(0.5-1)(0.5-0.25)}$$

5.8 Retard (Padé)

retard pur

$$e^{-T_rs}$$

Retard d'ordre 1 (pôle à $\frac{-1}{T_r}$)

$$\approx \frac{1}{1+sT_r}$$

Retard d'ordre 2 (zéro à $\frac{2}{T_r}$ et pôle à $\frac{-2}{T_r}$)

$$\approx \frac{1-s\frac{T_r}{2}}{1+s\frac{T_r}{2}}$$

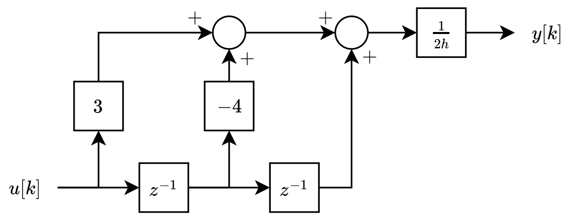
5.8.1 Domaine z

Lorsqu'on a un retard de nh ou $\frac{h}{2}$, on créé un pôle à 0

$$p = p_{\text{numérique}} = 0$$

A vérifier si valable pour tous les retards

5.9 Dérivateur parabole (Ex22)



5.10 Signaux / Systèmes

Soit la fonction de transfert $G(z)$, on peut calculer un signal en faisant

$$Y(z) = G(z)X(z)$$

5.11 Compensation du pôle dominant

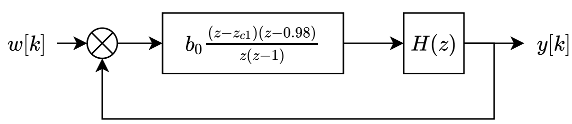
Le pôle dominant du système a régler est le plus grand nombre autre que 1

$$G_a(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0.9)(z-0.8)}$$

On ne doit pas enlever le $(z-1)$ car c'est un intégrateur pur (même si c'est $(z-1)^2$).

5.11.1 Déterminer une valeur pour compenser le pôle dominant

Soit le système



Si on connaît le bode de $H(z)$ à une fréquence donnée ω_c, on peut déterminer z_c pour avoir une marge de phase donnée.

$$\arg(G_o) = \arg(G_c(z)) + \arg(H(z))$$

L'argument de $H(z)$ est donné par le bode. On cherche ce qui est nécessaire pour arriver à une marge de phase φ_m

$$\varphi_{\text{cible}} = 180 + \varphi_m$$

5.11.2 Argument d'un fonction de transfert en z

$$(z-a) \longrightarrow (e^{j\omega h} - a)$$

$$\arg(z-a) = \arctan\left(\frac{\sin(\omega h)}{\cos(\omega h) - a}\right)$$

5.12 Ordre d'une fonction de transfert

1. On multiplie par $\frac{z}{z}$ pour supprimer les z^{-n}.
2. On simplifie la fonction si possible
3. On regarde le degré du dénominateur

$$H(z) = \frac{z^{-1}(z+1)}{(1-z^{-1})(z^3 - 1.98z^2 + 0.98z)}$$

On enlève le z^{-1}

$$H(z) = \frac{(z+1)}{(z-1)(z^3 - 1.98z^2 + 0.98z)}$$

L'ordre n du dénominateur est 4

5.13 Identification d'une fonction de transfert

Tous les éléments de la forme

$$\frac{1}{(z-1)}$$

représentent des **intégrateurs pûur**. Donc un pôle $p = 1$ signifie qu'il y a un intégrateur pur. Le **type** α est le nombre d'intégrateurs purs du système
Tous les éléments

$$(z-1)$$

représentent des **dérivateurs purs** (si il n'est pas annulé par un intégrateur pur). Un zéro $z = 1$, cela représente un dérivateur pur.

6 Critère de Nyquist simplifié

$$\arg(1 + G_o(z)) = 0$$

Le point $-1 + 0j$ doit être laissé à **gauche** du lien de Nyquist lorsqu'on le parcours dans le sens des ω

7 Mécanique

Soit un système avec

1. Masse (m)
2. Ressort (k)
3. Amortisseur (d)

On détermine qu'un déplacement vers le bas est positif

$$ma = \sum F$$

$$ma = -kx - d\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx + d\dot{x} = 0$$

L'équation caractéristique est (on enlève le $X(s)$)

$$ms^2 + ds + k = 0$$

On peut ensuite déterminer la boucle ouverte en fonction d'un des paramètres (d) en mettant sous la forme

$$1 + dG_o(s) = 0$$

$$1 + d\underbrace{\frac{s}{ms^2 + k}}_{G_o(s)} = 0$$

8 Transformée inverse

Toujours ajouter $\varepsilon[k]$ à chaque fonction !. Si doute, poser $h = 1$ (la valeur s'annule souvent).

$$\frac{z}{1-0.5} \longrightarrow \varepsilon[k]0.5^k$$

9 Modèle échantillonné

$$\boxed{H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{G_a(s)}{s}\right)\Big|_{t=kh}}_{\text{réponse indicielle}}\right)}$$

Exemple avec un intégrateur pur

1. $G_a(s) = \frac{1}{s}$
$$H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{t=kh}\right)$$
2. $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \longrightarrow t$
$$H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(t\Big|_{t=kh}\right)$$
3. $t = kh$
$$H(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(kh\right)$$
4. $Z\left(kh\right) \longrightarrow \frac{hz}{(z-1)^2}$
$$H(z) = \frac{z-1}{z} \frac{hz}{(z-1)^2}$$
5. calcul
$$\boxed{H(z) = \frac{h}{z-1}}$$

Avec un retard de n période d'échantillonnage (e^{-nhs}), on introduit un z^{-n}
$$H_{ret}(z) = z^{-n} H(z)$$
Avec Z la transformée en z et $\mathscr{L}^{-1}$ la transformée de laplace inverse.
Relation entre le monde z et s

$$\boxed{z = e^{sh}}$$

$$s = \frac{\ln(z)}{h}$$

$$\text{Re}(s) = \frac{\ln(|z|)}{h}$$

$$\text{Im}(s) = \frac{j\arg(z)}{h}$$

$$\boxed{s = \frac{\ln(|z|) + j\arg(z)}{h}}$$

9.1 Propriétés

1. Les pôles analogiques s se transforment selon $z = e^{sh}$
2. Il n'y a pas de formule pour la transformation des zéros
3. Le gain statique est préservé
$$H(z=1) = G_a(s=0)$$
4. Le modèle échantillonné $H(z)$ est linéaire en $G_a(s)$.
5. Un retard pur analogique e^{-Nhs} induit un z^{-N}
6. Une somme est linéaire
$$G_{a1}(s) + G_{a2}(s) = H_1(z) + H_2(z)$$

Avantages du modèle échantillonné

1. L'analyse de la boucle fermée et la synthèse du régulateur sont en z
2. Pas besoin de traiter un système hybride
3. Les calculs sont **exacts**
4. Pas d'approximations comme l'inventaire des retards

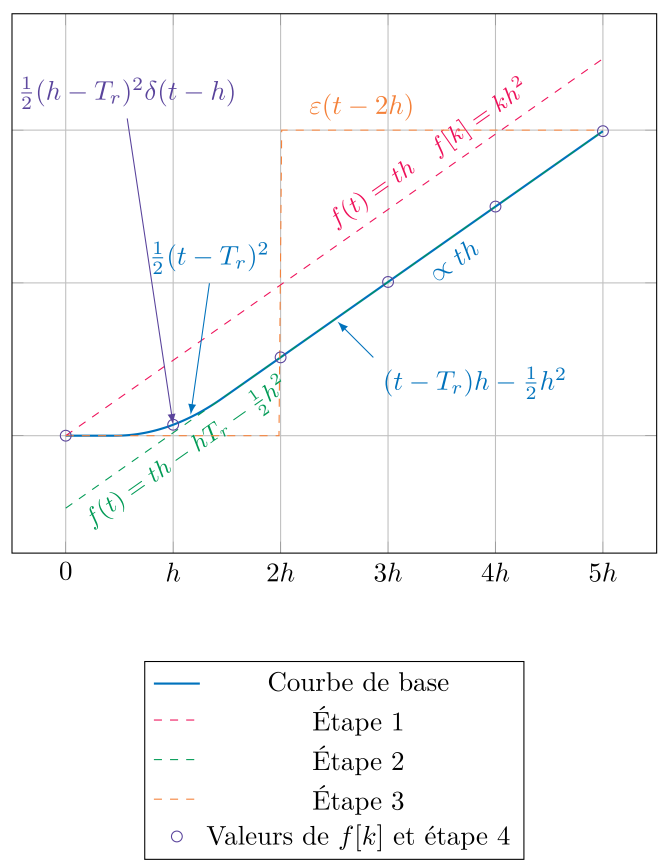
9.1.1 Retard fractionnaire

Lorsqu'on a un retard de $\frac{h}{2}$
$$e^{-T_r s}$$
On "sépare" le retard sur deux échantillons

9.2 Transformation du mode temporel à l'équation aux différences

On cherche à transformer la courbe suivante

Temporel



Qui a l'équation
$$f_0(t) = \begin{cases} T_r \leqslant t \leqslant T_r + h & \frac{1}{2}\left(t-T_r\right)^2 \\ T_r + h \leqslant t & (t-T_r)h - \frac{1}{2}h^2 \end{cases}$$
On part de $f_0(t)$ et on veut obtenir $f[k]$
$$f_0(t) \longrightarrow f[k]$$
On utilisera $t = kh$

1. On cherche d'abord la pente de la droite dans le mode temporel et on pose la droite (voir courbe)

$$f_0(t) \propto th \quad \Rightarrow f[k] \approx kh^2$$

2. On cherche l'offset de la courbe pour la ramener au même niveau que la courbe de base (offset vertical). On remplace $t = 0$ dans l'expression de la courbe (voir courbe).

$$f_0(t) \approx th - hT_r - \frac{1}{2}h^2$$

3. Rechercher la fenêtre de la courbe (voir courbe). On doit sélectionner les points qui sont déterminés entièrement par la droite !

4. Rajouter les points manquants avec des $\delta(t)$

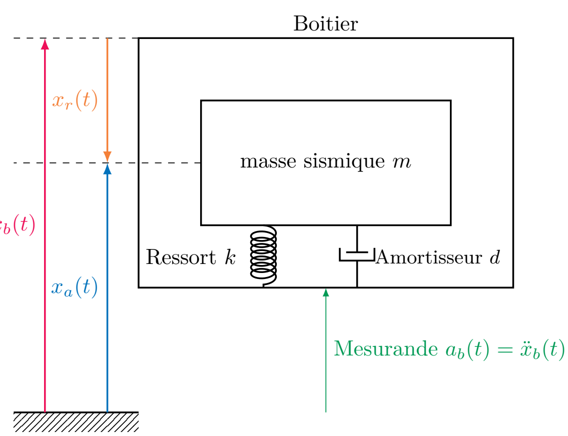
Au final, on obtient

$$f[k] = \left(kh^2 - hT_r - \frac{1}{2}h^2\right)\varepsilon[k-2] + \frac{1}{2}(h-T_r)^2\Delta[k-1]$$

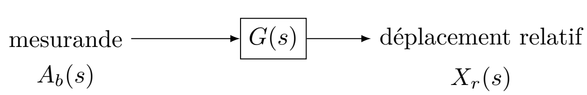
On peut ensuite utiliser des z^{-n} pour indiquer les retards

10 Équation de newton et forme de Bôôde

Exemple avec un accéléromètre



On recherche la fonction de transfert entre le mesurande (l'entrée) et le déplacement relatif.



$$x_a(t) = x_b(t) - x_r(t)$$

$$\ddot{x}_a = a_b - \ddot{x}_r$$

On utilise la loi de Newton ($ma = \sum F$)

$$m\ddot{x}_a = kx_r + d\dot{x}_r$$

$$ma_b = m\ddot{x}_r + d\dot{x}_r + kx_r$$

On applique la transformée de Laplace

$$X_r(s)\left(ms^2 + ds + k\right) = mA_b(s)$$

On cherche à connaître X_r, on divise par la parenthèse

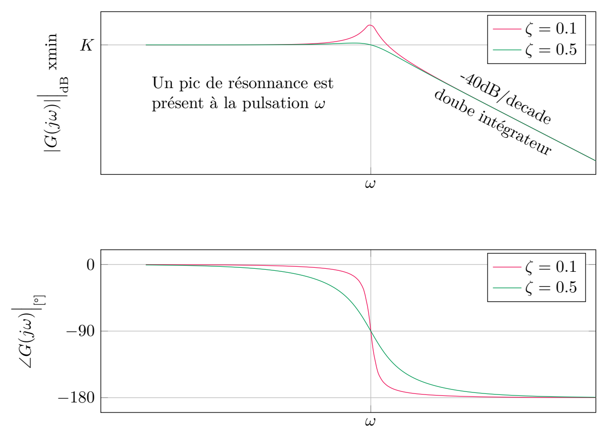
$$X_r = \frac{m}{ms^2 + ds + k}A_b$$

$$G(s) = \frac{X_r(s)}{A_b(s)} = \frac{m}{ms^2 + ds + k}$$

on écrit sous forme de Bode $\left(\frac{K}{1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}\right)$

$$G(j\omega) = \frac{m}{1 + \frac{d}{k}j\omega + \frac{m}{k}(j\omega)^2}$$

Avec $K = \frac{m}{k}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{1}{km}}$ Diagramme de Bode de la fonction de transfert



Si on cherche à avoir un ω_0 élevé, alors on doit diminuer la masse et augmenter la valeur de k. La sensibilité est diminuée. L'inverse est également valable.

$$\omega_0 \uparrow \Longrightarrow K \downarrow$$

$$K \uparrow \Longrightarrow \omega_0 \downarrow$$

Dans l'idéal, on va chercher à avoir un ζ entre 0.7 et 1.

11 Numérisation PID (méthode des rectangles et sécante)

La dérivée se fait sur n valeurs (en général 1, ou 2)

$$y[k] = K_p\left(e[k] + \frac{1}{T_i}h\sum_{l=0}^{k-1}e[l] + T_d\frac{e[k] - e[k-n]}{nh}\right)$$

On pose la même équation avec $y[k-1]$ au lieu de $y[k]$

$$y[k-1] = K_p\left(e[k-1] + \frac{1}{T_i}h\sum_{l=0}^{k-2}e[l] + T_d\frac{e[k-1]-e[k-n-1]}{nh}\right)$$

On soustrait les deux équations

$$y[k]-y[k-1] = K_p\left(e[k] + \frac{1}{T_i}h\sum_{l=0}^{k-1}e[l] + T_d\frac{e[k]-e[k-n]}{nh}\right) - K_p\left(e[k-1] + \frac{1}{T_i}h\sum_{l=0}^{k-2}e[l] + T_d\frac{e[k-1]-e[k-n-1]}{nh}\right)$$

$$y[k]-y[k-1] = K_p\left(e[k]-e[k-1] + \frac{h}{T_i}e[k-1] + \frac{T_d}{nh}\left(e[k]-e[k-n]-e[k-1]+e[k-n-1]\right)\right)$$

$$y[k] = y[k-1] + K_p\left(1+\frac{T_d}{nh}\right)e[k] + K_p\left(-1+\frac{h}{T_i}-\frac{T_d}{nh}\right)e[k-1] + \left(-K_p\frac{T_d}{nh}\right)e[k-n] + K_p\frac{T_d}{nh}e[k-n-1]$$

Équation aux différences : ($-a_1$ car il est de l'autre côté)

$$a_0 y[k] = -a_1 y[k-1] + b_0 e[k] + b_1 e[k-1] + b_n e[k-n] + b_{n-1}e[k-n-1]$$

12 Numérisation PI (Méthode des trapèzes)

$$y[k] = K_p\left(e[k] + \frac{1}{T_i}h\sum_{l=0}^{k-1}\frac{e[l]+e[l+1]}{2}\right)$$

$$y[k]-y[k-1] = K_p\left(e[k]-e[k-1] + \frac{h}{T_i}\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{e[l]+e[l+1]}{2} - \sum_{l=0}^{k-2}\frac{e[l]+e[l+1]}{2}\right)\right)$$

$$y[k]-y[k-1] = K_p\left(e[k]-e[k-1] + \frac{h}{T_i}\left(\frac{e[k-1]+e[k]}{2}\right)\right)$$

$$y[k]-y[k-1] = K_p\left(\left(1+\frac{h}{2T_i}\right)e[k] + \left(\frac{h}{2T_i}-1\right)e[k-1]\right)$$

$$a_0 y[k] = -a_1 y[k-1] + b_0 e[k] + b_1 e[k-1]$$

$a_0 = 0$ par définition

$$a_1 = -1 \qquad b_0 = K_p\left(1+\frac{h}{2T_i}\right) \qquad b_1 = K_p\left(\frac{h}{2T_i}-1\right)$$

13 Équations aux différences

$$\underset{\text{degré relatif}}{d} = \underset{\text{deg(denominateur)}}{n} - \underset{\text{deg(numérateur)}}{m}$$

Forme développée (Y en fonction de U)

$$Y(z)\left(a_0 = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}\right) = U(z)\left(b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \dots + b_m z^{-d-m}\right)$$

Forme fonction de transfert avec puissances de z négatives On peut aussi écrire sous la forme z^{-x}

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \dots + b_m z^{-d-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$