1 Kalman

C'est un algorithme de **data fusion** utilisé pour

- Filtre des données bruitées
- Estimer l'état d'un système

Le système est donné par

$$\boxed{x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + w_t}$$

Avec w_t le bruit de process. Si on souhaite mesurer le système il existe également un bruit de mesure v_t. Les deux bruits sont des bruits blancs gaussiens.

$$z_t = Hx_t + v_t$$

1.1 Propriétés

Si

- Le système est "bien modélisé"
- Le système est linéaire et mono dimensionnel
- Les bruits de mesure sont WGN

Alors le filtre de Kalman a été prouvé être l'estimateur optimal

1.2 Fonctionnement

1. Prédiction
2. Correction (amélioration de l'estimation)

1.2.1 Prédiction

$$\hat{x}_{t|t-1} = A\hat{x}_{t-1|t-1} + Bu_t$$
$$P_{t|t-1} = AP_{t-1|t-1}A^T + Q_t$$

Mise à jour de la matrice de covariance P

$$P_{t|t-1} = AP_{t-1|t-1}A^T + Q_t$$

1.2.2 Correction

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - H\hat{x}_{t|t-1})$$
$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t H_t P_{t|t-1}$$

Avec K_t la matrice de gain de Kalman

$$K_t = P_{t|t-1}H_t^T(H_t P_{t|t-1}H - t^T + R_t)^{-1}$$

1.2.3 Fusions de deux densités de probabilité

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$y_{1+2} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}$$

$$\boxed{\mu_{12} = \mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(\mu_2-\mu_1)}$$

$$\boxed{\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

Il faut faire attention à tout ramener au même domaine avant de rassembler les mesures.

1.2.4 Matrices H et K

$$H = \frac{1}{c}$$

$$K = \frac{H\sigma_1^2}{H^2\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

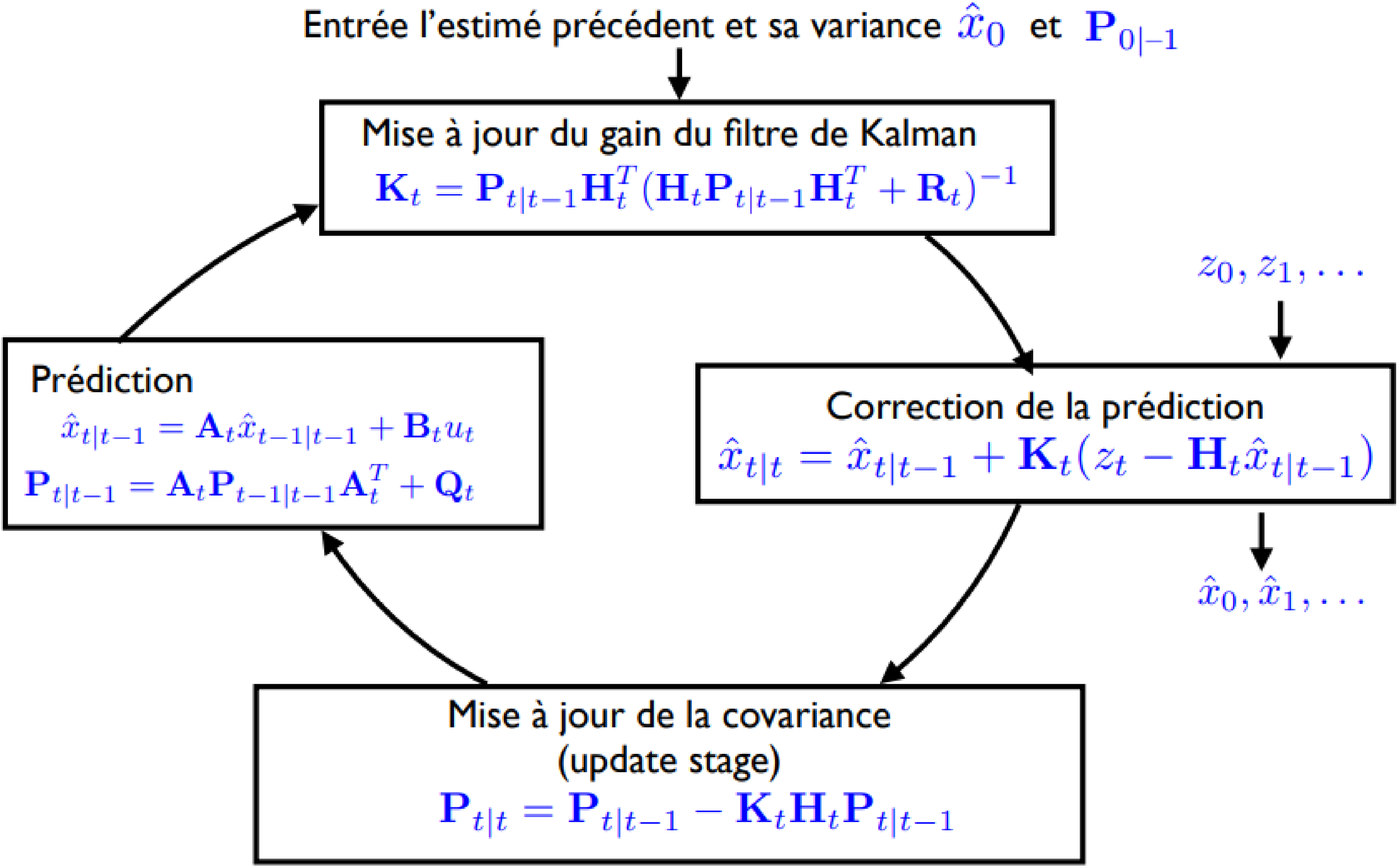
$$\mu_{12} = \mu_1 + K(\mu_2 - H\mu_1)$$

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 - KH\sigma_1^2$$

1.2.5 Équations de récurrence

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(z_t - H_t\hat{x}_{t|t-1})$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_tH_tP_{t|t-1}$$


Entrée l'estimé précédent et sa variance $\hat{x}_0$ et $\mathbf{P}_{0|-1}$
Mise à jour du gain du filtre de Kalman
$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^T(\mathbf{H}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$
$z_0, z_1, \ldots$
Correction de la prédiction
$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(z_t - \mathbf{H}_t\hat{x}_{t|t-1})$
$\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots$
Mise à jour de la covariance
(update stage)
$\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}_t\mathbf{P}_{t|t-1}$
Prédiction
$\hat{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}_t\hat{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}_t u_t$
$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}_t\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{A}_t^T + \mathbf{Q}_t$

1.2.6 Matrice de covariance

$$P_t = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(x_t^1) & \mathrm{Covar}(x_t^1 x_t^2) & \cdots & \mathrm{Covar}(x_t^1 x_t^n) \\ \mathrm{Covar}(x_t^2 x_t^1) & \mathrm{Var}(x_t^2 x_t^2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Covar}(x_t^n x_t^1) & \mathrm{Covar}(x_t^n x_t^2) & \cdots & \mathrm{Var}(x_t^n) \end{bmatrix}$$

1.3 Linéarisation

Si le système est non-linéaire, tout s'écroule. Il convient alors de linéariser le système.

$$x_{k+1} \approx f(\bar{x}_k, u_k) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k)\Delta x_k + w_k$$

$$y_k \approx g(\bar{x}_k) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k)\Delta x_k + v_k$$

Voir page 32