

# 1 Contrôlabilité

Si l'ensemble des états que l'on peut atteindre en partant de zéro est l'espace d'états entier, alors le système est dit complètement contrôlable. (On peut aller partout)

## 1.1 Définition

Le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  est complètement contrôlable si pour  $x(0) = 0$  et pour tout état  $x^*$ , il existe un temps fini  $t^*$  et une entrée continue par morceaux  $u(t)$  dans  $[0, t^*]$  telle que  $x(t^*) = x^*$

## 1.2 Théorème

Un système à temps continu (discret) est complètement contrôlable si, et seulement si, la matrice de contrôlabilité:  $M = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$  est de rang  $n$  (rang plein)

## 1.3 Forme canonique contrôlabilité

Une équation différentielle d'ordre  $n$  peut être remappée en un système de  $n$  équations du premier ordre

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = u$$

On pose  $y = x_1$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_1 x_n - \dots - a_n x_1 + u$$

On a donc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]$$

Le système (A,b,c) a des propriétés intéressantes, La dernière ligne est composée des coefficients du polynôme caractéristique

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

Tout système complètement contrôlable est équivalent à un système sous forme canonique de contrôlabilité

## 1.4 Transformation

Il est possible de mettre tout système complètement contrôlable sous sa forme canonique par une simple transformation  $x = Mz$  avec  $M = [b|Ab|\dots|A^{n-1}b]$

On obtient  $\bar{A} = M^{-1}AM$  qui est la forme canonique compagnon de contrôlabilité

## 1.5 Rétroaction

### 1.5.1 Contrôle en boucle ouverte

- la fonction d'entrée est déterminée par un process externe
- exemple: un feu de circulation à cycle fixe

### 1.5.2 Contrôle en boucle fermée

- la commande est déterminée par le comportement du système
- exemple: un thermostat
- La boucle fermée est plus facile à réaliser
- La boucle fermée requiert du temps de calcul

### 1.5.3 Théorème

Soit  $(A, B)$  un système complètement contrôlable. Alors, pour tout choix d'un polynôme  $p(\lambda)$  d'ordre  $n$   $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ , il existe une matrice réelle  $K$  telle que le polynôme caractéristique de  $A + BK$  est  $p(\lambda)$