1 Kalman

C'est un algorithme de **data fusion** utilisé pour

- Filtre des données bruitées
- Estimer l'état d'un système

Le système est donné par

$$\boxed{x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + w_t}$$

Avec w_t le bruit de process. Si on souhaite mesurer le système il existe également un bruit de mesure v_t. Les deux bruits sont des bruits blancs gaussiens.

$$z_t = Hx_t + v_t$$

1.1 Propriétés

Si

- Le système est "bien modélisé"
- Le système est linéaire et mono dimensionnel
- Les bruits de mesure sont WGN

Alors le filtre de Kalman a été prouvé être l'estimateur optimal

1.2 Fonctionnement

1. Prédiction
2. Correction (amélioration de l'estimation)

1.2.1 Prédiction

$$\hat{x}_{t|t-1} = A\hat{x}_{t-1|t-1} + Bu_t$$
$$P_{t|t-1} = AP_{t-1|t-1}A^T + Q_t$$

Mise à jour de la matrice de covariance P

$$P_{t|t-1} = AP_{t-1|t-1}A^T + Q_t$$

1.2.2 Correction

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - H\hat{x}_{t|t-1})$$
$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_tH_tP_{t|t-1}$$

Avec K_t la matrice de gain de Kalman

$$K_t = P_{t|t-1}H_t^T(H_tP_{t|t-1}H - t^T + R_t)^{-1}$$

1.2.3 Fusions de deux densités de probabilité

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$y_{1+2} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}$$

$$\boxed{\mu_{12} = \mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(\mu_2-\mu_1)}$$

$$\boxed{\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

Il faut faire attention à tout ramener au même domaine avant de rassembler les mesures.

1.2.4 Matrices H et K

$$\mu_{12} = \mu_1 + K(\mu_2 - H\mu_1)$$
$$\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 - KH\sigma_1^2$$

1.2.5 Matrice de covariance

$$P_t = \begin{bmatrix} \text{Var}(x_t^1) & \text{Covar}(x_t^1 x_t^2) & \cdots & \text{Covar}(x_t^1 x_t^n) \\ \text{Covar}(x_t^2 x_t^1) & \text{Var}(x_t^2 x_t^2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Covar}(x_t^n x_t^1) & \text{Covar}(x_t^n x_t^2) & \cdots & \text{Var}(x_t^n) \end{bmatrix}$$