1 Commande optimale

Système dynamique régulier :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Condition initiale fixe

$$x(0) = x_0$$

Un ensemble de commandes optimales possibles

$$u(t) \in U$$

Et une fonction de coût

$$J = \psi(x(T)) + \int_0^T l(x(t), u(t))dt$$

Le but est de trouver un $u(t)$ pour optimiser la fonction de coût. Pour cela on exploite la structure du problème

1.1 Approche variationnelle

On utilise une fonction de coût indépendante des changement de trajectoire

$$\bar{J} = J - \int_0^T \lambda(t)^T \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt$$

Fonction hamiltonienne

$$H(\lambda, x, u) = \lambda^T f(x, u) + l(x, u)$$

1.2 Principe d'optimalité de Pontryagin

Si $u(t)$ est maximal alors pour tout t

$$H(\lambda, x, v) \leq H(\lambda, x, u)$$

Il existe une trajectoire $\lambda(t)$ tels qu'ensemble $u(t)$, $x(t)$ et $\lambda(t)$ vérifient

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$x(0) = x_0$$
$$-\dot{\lambda}^T = \lambda^T \nabla_x f(x(t), u(t)) + \nabla_x l(x(t), u(t))$$

Condition de maximalité :

$$H(\lambda(t), x(t), v(t)) \leq H(\lambda(t), x(t), u(t))$$

1.3 Systèmes linéaires à coût quadratique

Système linéaire :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

On peut mettre la commande sous forme de feedback linéaire. La fonction de coût est quadratique

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left(x(t)^T Q(t) x(t) + u(t)^T R(t) u(t)\right) dt$$