

Modélisation 101

(Le B-A BA)

Position du problème, modèles: scope et applications
(Reference: Sterman, Chapitre 3)

Qu'est-ce qu'un système?

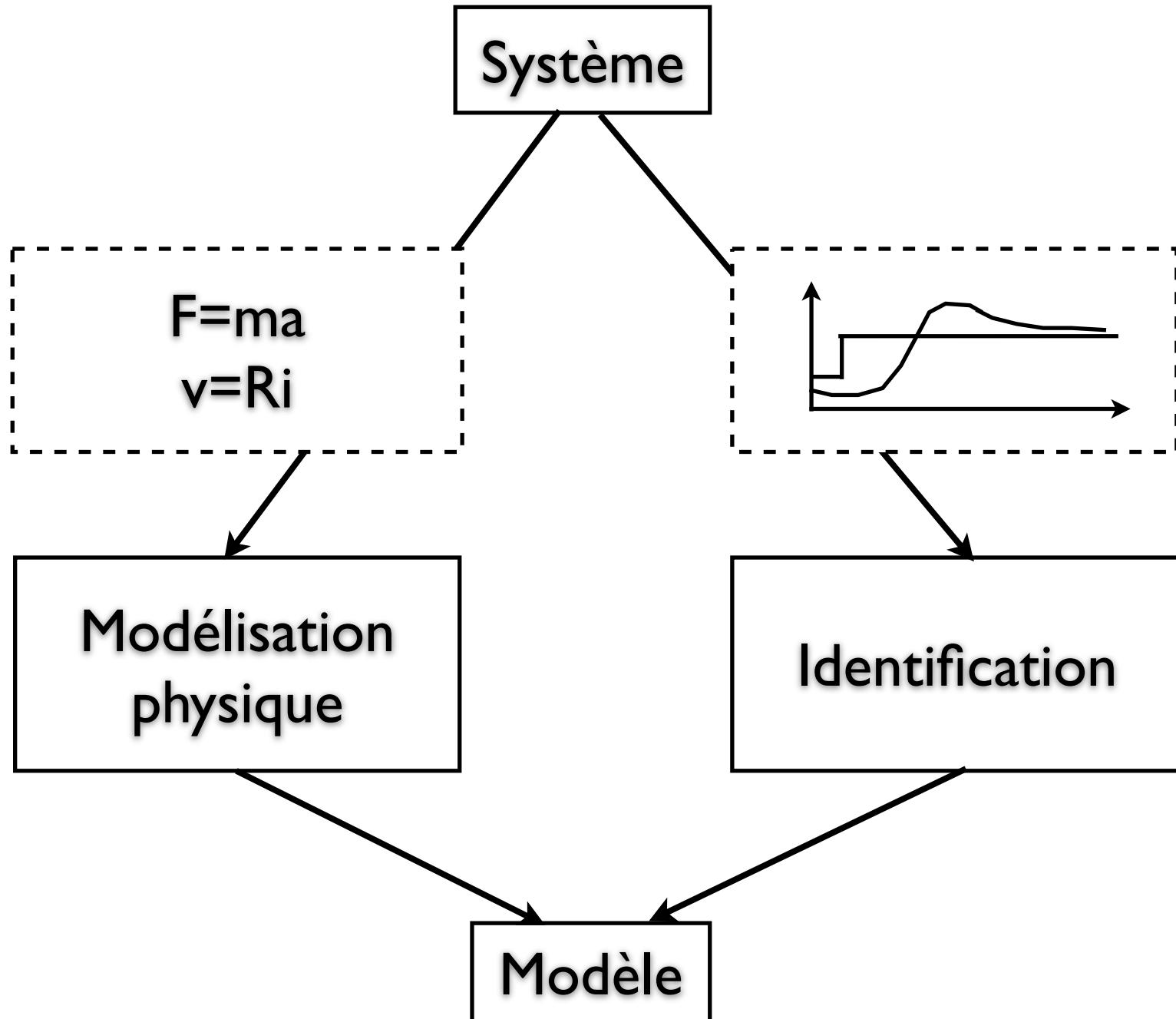
- Il y a plusieurs définitions, qui varient selon leur niveau de formalisme
- Un essai en passant: “*it is an object or a collection of objects whose properties we want to study*” (Ljung and Glad)
- Exemples:
 - le système solaire
 - le système métrique
 - combien de temps pour remplir ma baignoire?
 - combien d'énergie pour chauffer ma maison?

Qu'est ce qu'un modèle

- Etudier un système uniquement sur la base d'expériences réelles est (i) impossible et/ou (ii) trop cher et/ou (iii) trop long et/ou (iv) dangereux ... et/ou tout ca en même temps
- “*A model of a system is a tool we use to answer questions about the system without having to do an experiment*” (Ljung and Glad)
 - modèles mentaux
 - modèles verbaux
 - modèles physiques
 - modèles mathématiques

Comment construire un modèle ?

- Modélisation phénoménologique (modèles physiques aka modèles de premier principe aka modèles white box ...)
 - lois physiques, analyse et données expérimentales
- Identification
 - « Apprendre le modèle avec les données » (ML)
 - mapper une structure connue ou supposée (approche paramétrique)
 - apprendre la structure (approche non paramétrique)



Types de modèles mathématiques

- Déterministes / Stochastiques
- Dynamiques / Statiques
- A temps continu / à temps discret
- A paramètres ponctuels / Distribués
- Change oriented / Mu par des évènements discrets

Les étapes principales

1. Formulation du problème
2. Design d'une structure du modèle
3. Déploiement de l'outil de simulation
4. Test et validation
5. Utilisation du modèle:
 - descriptive: simulation, prévision
 - prescriptive: décision et évaluation

Formulation du problème

- Quel est le problème et pourquoi est-ce un problème ?
- Quelles sont les variables-clé de notre problème? Sont-ce des variables ou des paramètres?
- Quel est notre horizon (temporel) et quelle est l'échelle de temps ?
- Quel est le comportement passé de notre système ? Quel pourrait être son comportement futur ?

Design de la structure du modèle (i)

- Quelles hypothèses et simplifications ?
- La structure du modèle doit expliquer de façon endogène son comportement
- On trace des diagrammes de boucles causales (causal loop diagrams) (on utilise des logiciels, certains utilisés pour le data mining)

Design de la structure du modèle (ii)

- Quels outils ?
 - décomposition modulaire du système
 - diagrammes de boucles causales
 - Noeuds et arcs (stocks and flows)

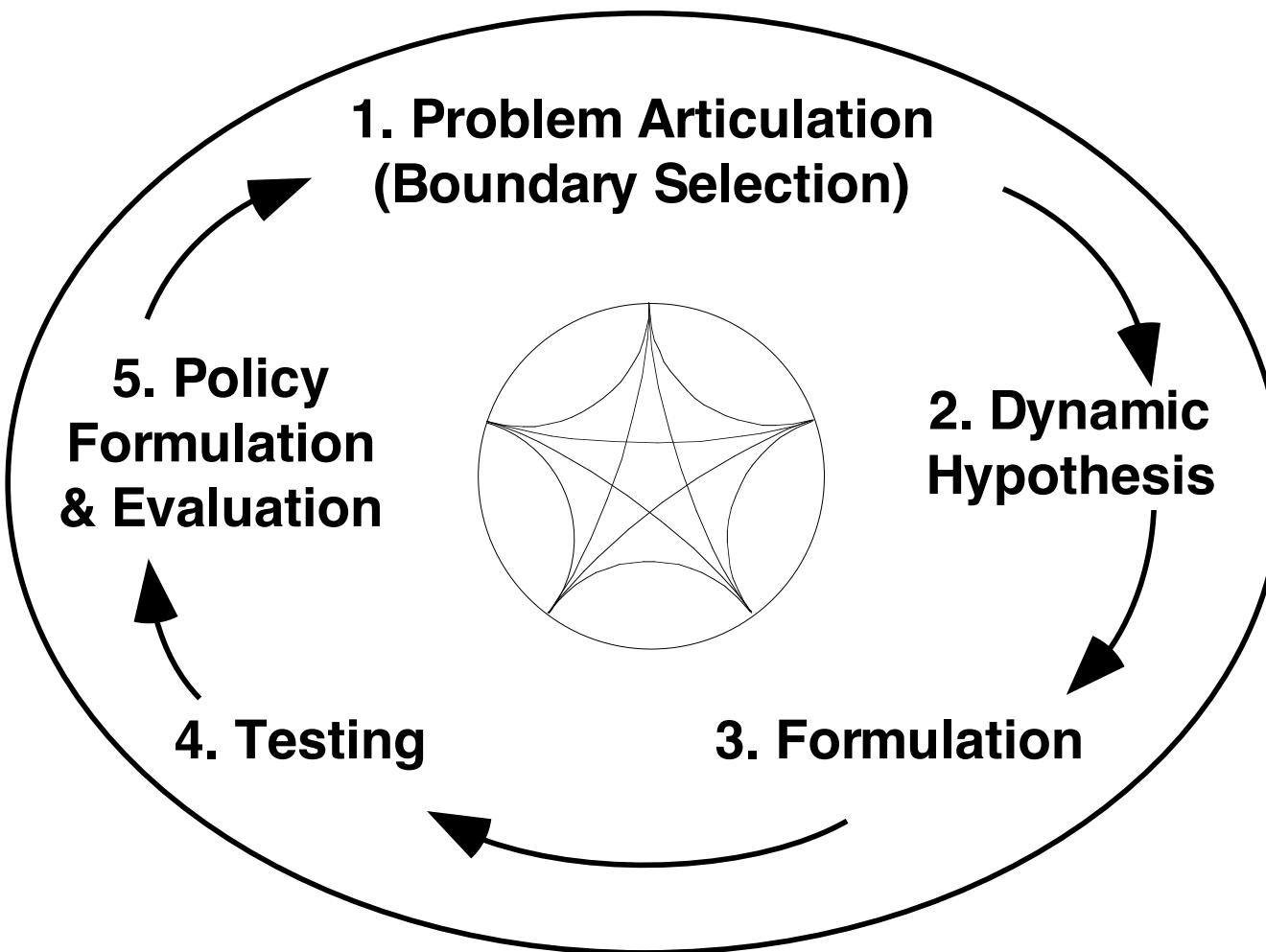
Implantation

- On traduit le modèle conceptuel en modèle de simulation
 - spécification de la structure des règles décisionnelles
 - on doit estimer les paramètres de simulation du modèle et choisir des conditions initiales (boundary - ou conditions limite)
 - estimer la consistence du modèle en regard de ses objectifs et de ses limitations

Verification

- Les tests doivent permettre de
 - comparer les comportements mesurés (monde-réel) et prédicts/estimés (modèle)
 - quantifier la robustesse du modèle au stress
 - mesurer sa sensibilité à de faibles changements des ses paramètres et de sa structure

C'est un procédé itératif



Une vue d'ensemble du processus de modélisation

De l'importance de l'objectif

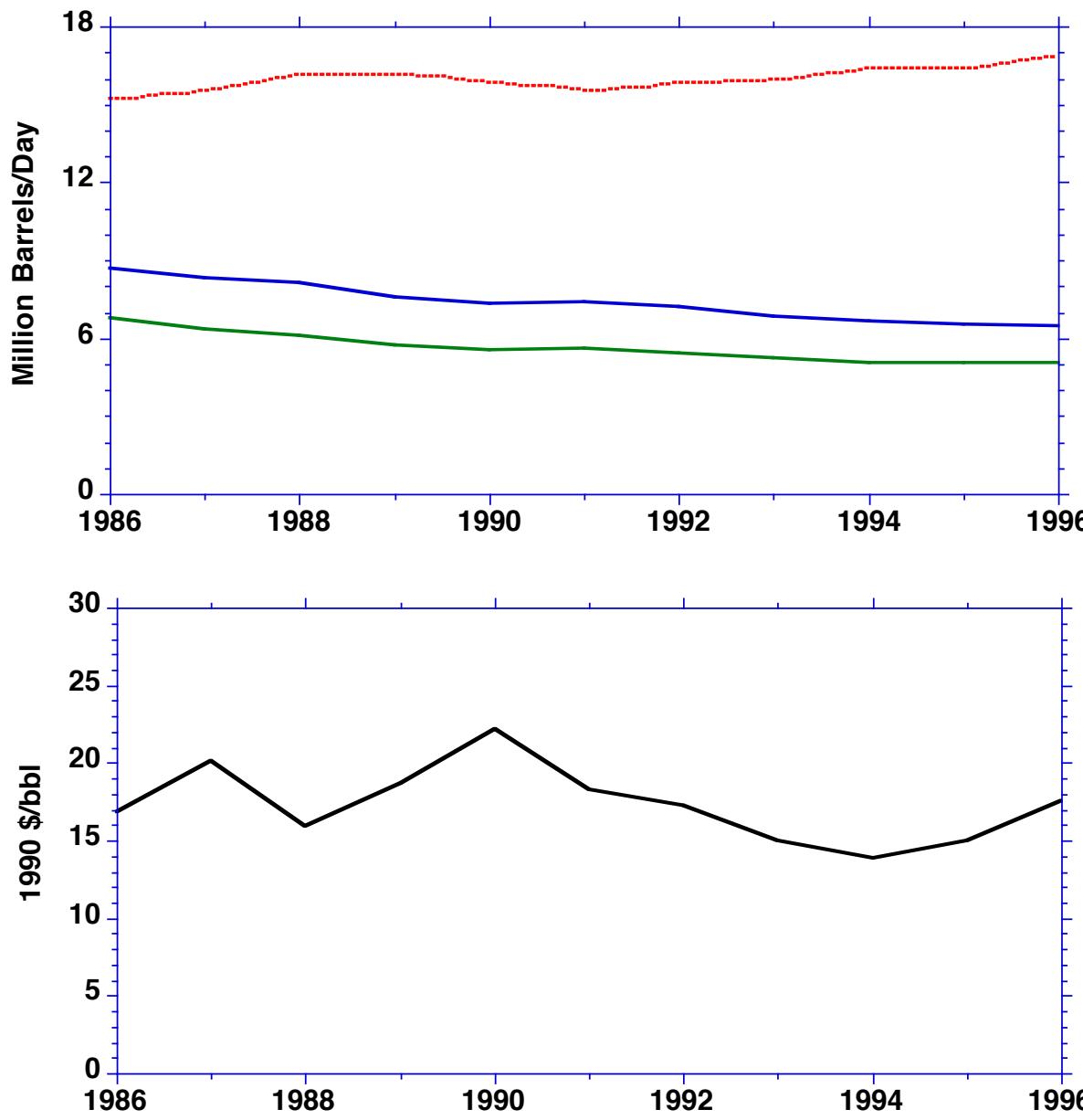
- L'objectif (du modèle) doit être clair!
- Si on essaye de modéliser trop de changes simultanément, on peut se perdre dans les détails
- Un modèle aussi complexe que le monde réel n'est pas d'une grande aide
- Le modèle est un “rasoir d'Ockham”
 - Pluralitas non est ponenda sine necessitate — les multiples ne doivent pas être utilisés sans nécessité
 - Plus moderne : les hypothèses suffisantes les plus simples doivent être préférées

Variables et paramètres

- Tout change, donc tout est une “variable”
- Cependant, certaines variable changent tellement lentement qu’elles sont perçues comme constantes : les « paramètres »
- C’est une distinction artificielle mais très utile

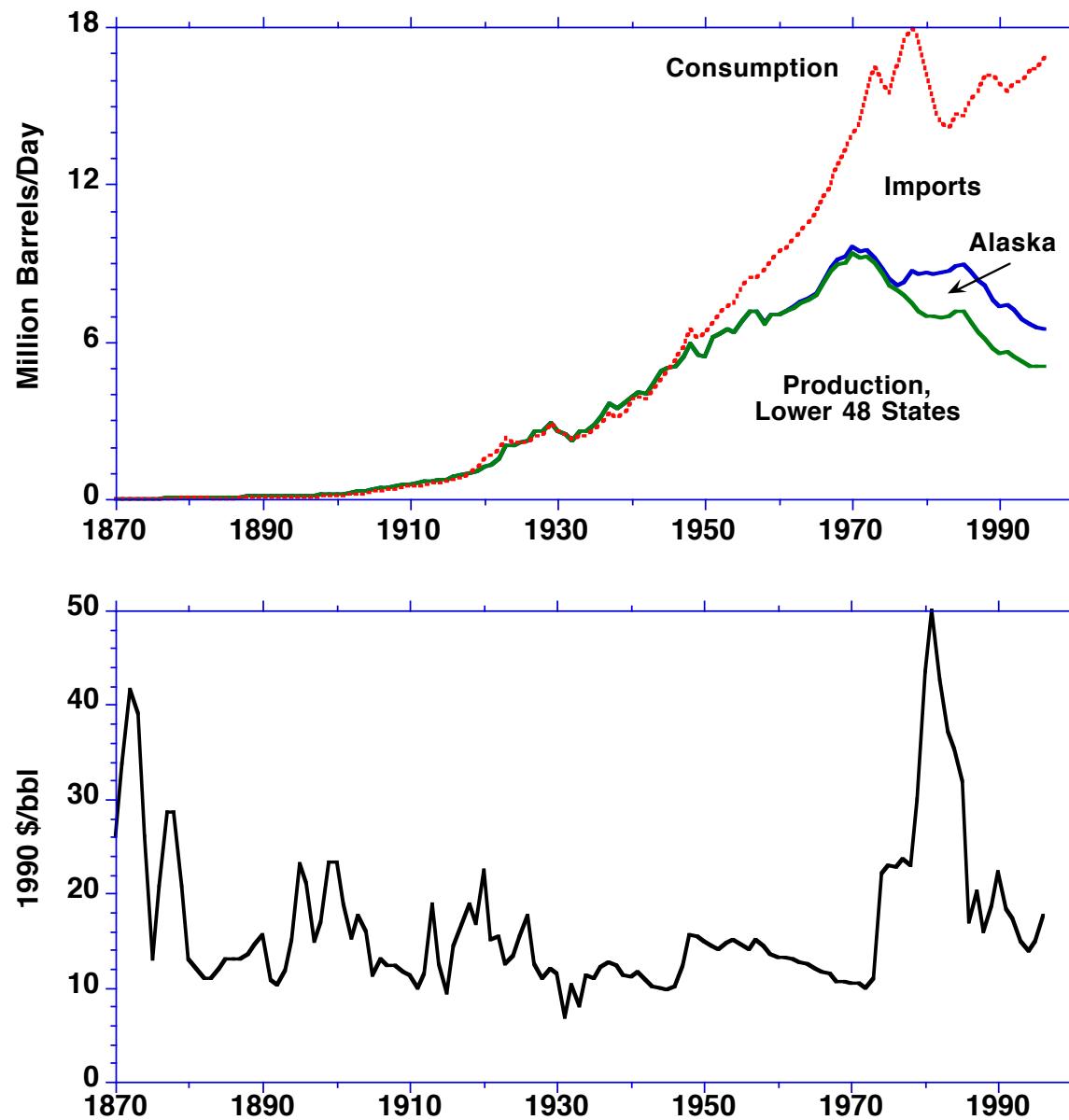
Horizon de temps

- Très souvent on en sous-estime la longueur
- Souvent on pense que la relation entre la cause et l'effet est immédiate ou rapide, c'est parfois faux.
- Le choix de l'horizon affect notre *perception* du système



Production, consommation, imports et prix du pétrole aux USA sur un horizon de 10 ans

Source: EIA (US Energy Information Agency) Annual Energy Review.



Production, consommation, imports et prix du pétrole aux USA sur un horizon de 130 ans

Source: Production & consommation: 1870-1949, Davidsen (1988); 1950-1966, EIA Annual Energy Review. 1880-1968, Davidsen (1988); 1968-1996, EIA Annual Energy Review, Refiners Acquisition Cost.

L'ère des fuels fossile à un horizon de 15,000 ans

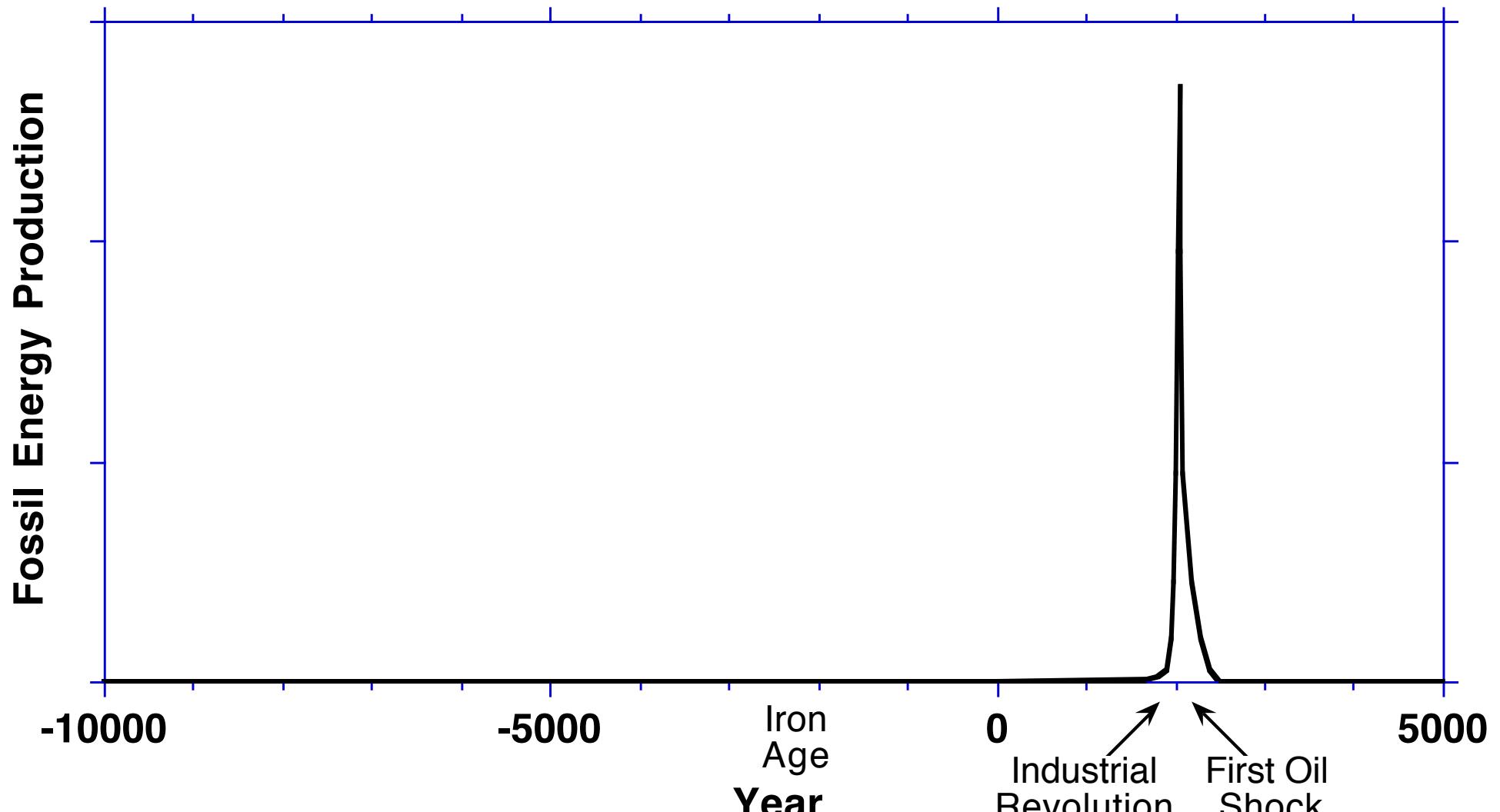


Figure 3-5

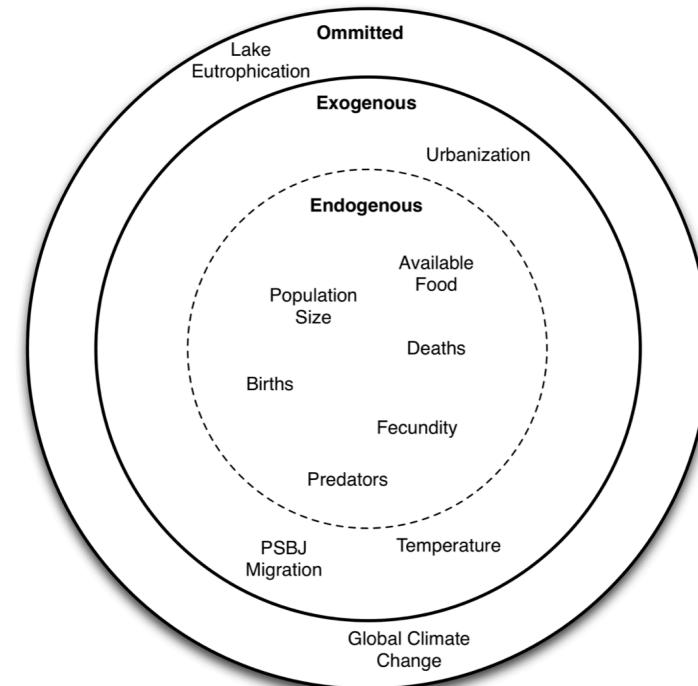
Source: Adapté de Hubbert (1962).

Structurer le problème

- Formuler une théorie qui explique le comportement du système (l'hypothèse “dynamique”)
- On doit fournir une explication endogène
- On doit faire correspondre cette explication à la structure du problème

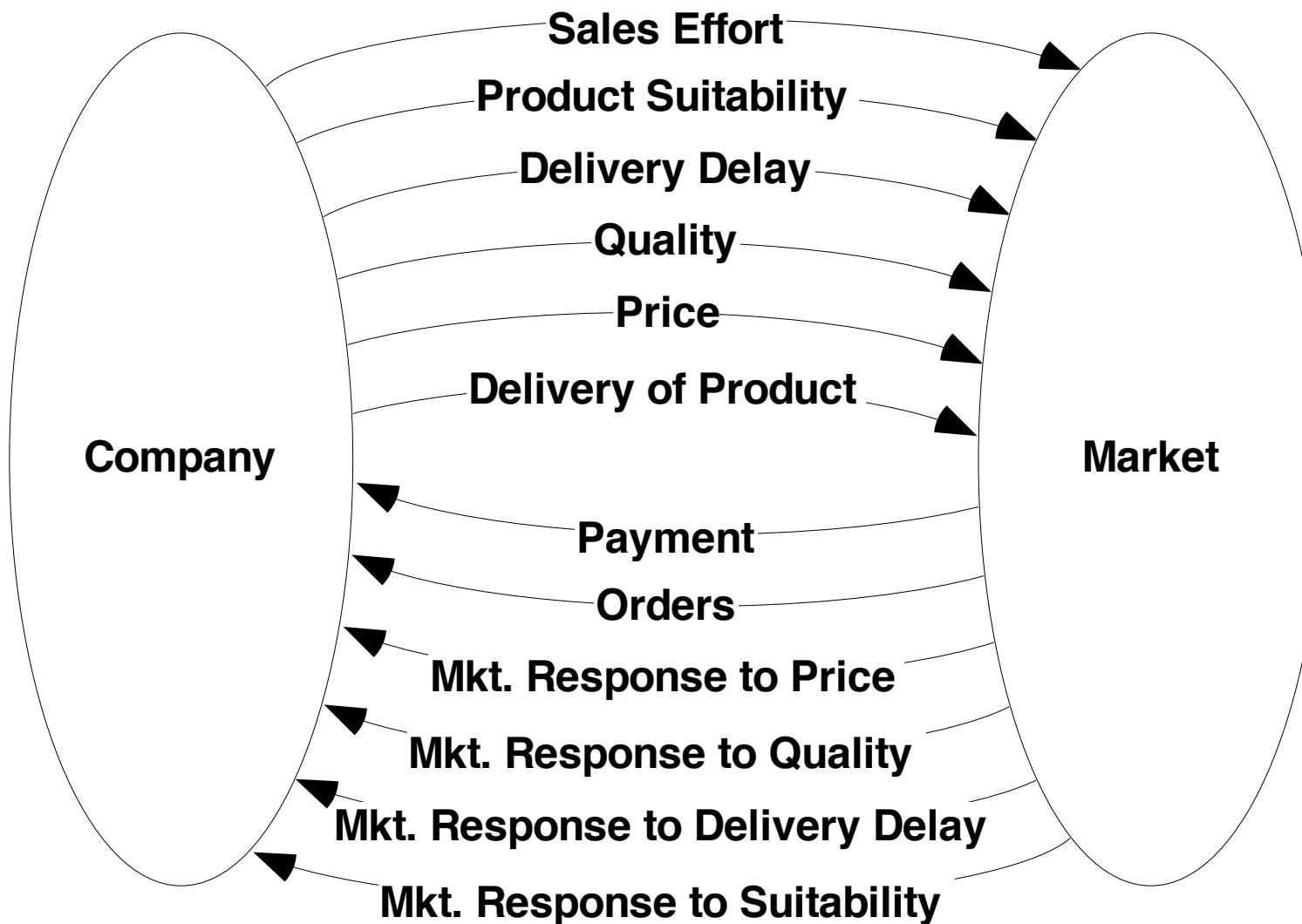
Le tracé des limites du modèle (model boundary chart)

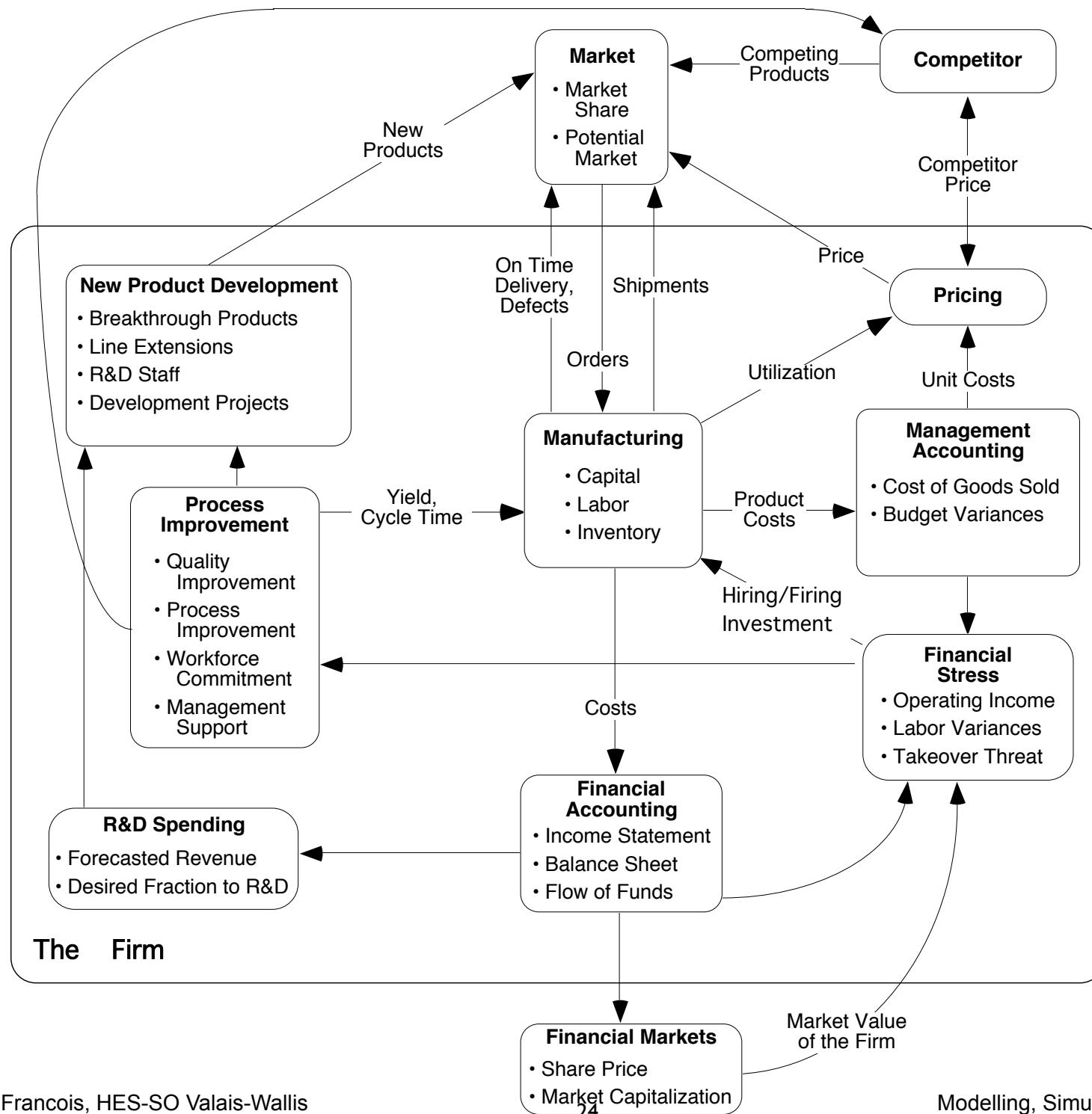
- Exemple: dynamique de population des perches dans le Léman



- Extrêmement rare
- Extrêmement utile: permet de visualiser instantanément les limites du modèle
- Les modellers “craignent” ces diagrammes

Décomposition en sous-systèmes





Du modèle à la simulation

- Formaliser la connaissance apporte la lumière sur ce que l'on comprend vraiment (et vice-versa)
- Un ordinateur ne “sculpe pas les nuages”
- On doit supprimer les ambiguïtés

Vérification

- Le comportement simulé est comparé au comportement observé
- Chaque variable doit correspondre à un concept du monde réel
- Chaque équation DOIT être dimensionnellement correcte
- La sensibilité du modèle aux valeurs des paramètres et à la structure du modèle est testée

Vérification

- Les modèles doivent aussi être testés dans des conditions extrêmes ?
 - que se passe-t-il pour le produit national brut si je fixe la production d'énergie si GNP à 0?
 - que se passe-t-il pour mes ventes si j'augmente le prix de 1000%. Et si je mets les commandes à 0?

Algèbre linéaire

L'indispensable revu rapidement

Prérequis

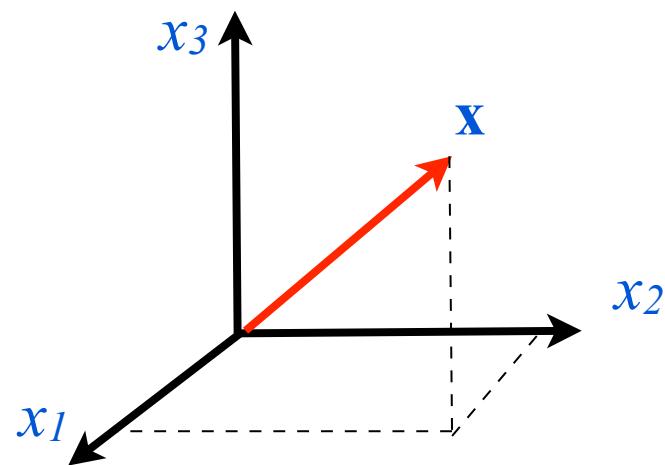
- Matrices et Vecteurs
- Opérations matricielles élémentaires : addition, multiplication par un scalaire, multiplication matricielle, produit scalaire (de deux vecteurs)
- Transposition
- Inversion matricielle
- Résolution des systèmes d'équations linéaires de la forme $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$

Propriétés géométriques des vecteurs et des matrices

- **Espace Vectoriel:** les vecteurs vus comme éléments dans un espace, plutôt que comme des tableaux de coefficients

Espace E^n :
ensemble de
tous les
vecteurs de la
forme

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vecteurs de base (ou de coordonnées)

Indépendance linéaire

- Les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ sont linéairement dépendants s'il en existe un combinaison linéaire nulle, i.e. s'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tels que $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{a}_m = 0$
- Pour tester si les vecteurs (regroupés ici dans une matrice):

$$\mathbf{a}_k = [a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}]^T$$

sont linéairement indépendants, on construit la matrice

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n]$$

et on vérifie qu'elle est non singulière ($\det \mathbf{A} \neq 0$)

Rang

- Soit A matrice $m \times n$ quelconque, son **rang** est égal au nombre de colonnes de A qui sont linéairement indépendantes
- $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$
- On en déduit que le rang de A ne peut pas excéder le plus petit entier entre m and n

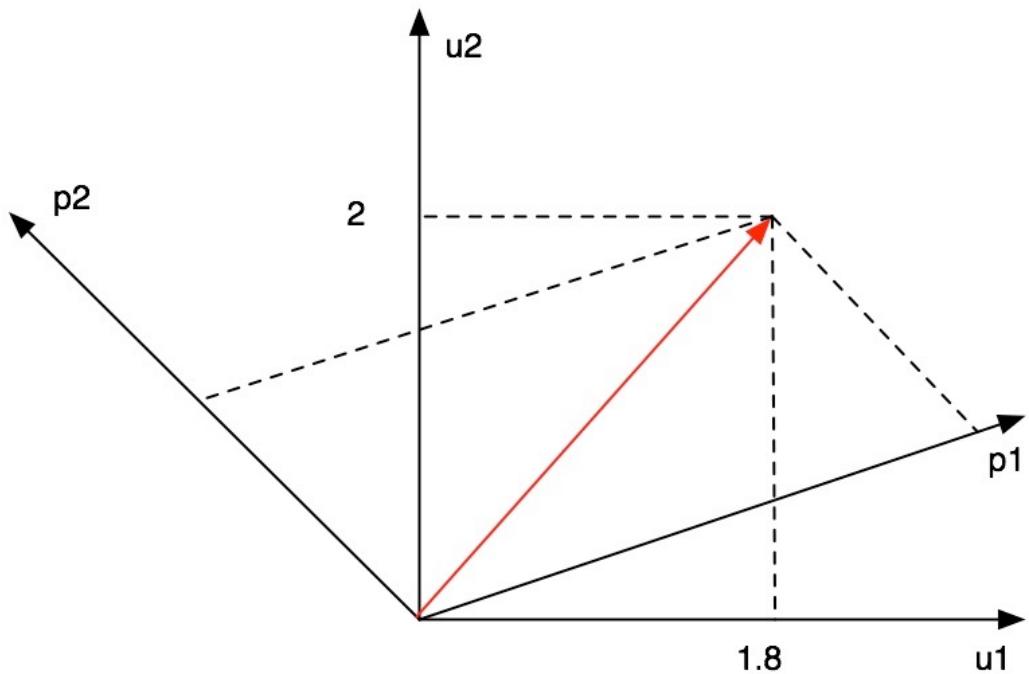
Bases

- Une **base** de E^n est un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants
- La base **standard** est l'ensemble des **vecteurs de base ou de coordonnées** $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$
- Tout vecteur s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base

$$\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{u}_1 + x_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{u}_n$$

- Dans une nouvelle base $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ le vecteur aura une nouvelle représentation:
$$\mathbf{x} = z_1 \cdot \mathbf{p}_1 + z_2 \cdot \mathbf{p}_2 + \dots + z_n \cdot \mathbf{p}_n$$
- Ainsi $\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$ and $\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$

Exemple: changement de repère



$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 1.05 \end{bmatrix}$$

Changement de base et transformations

- Une **transformation** est une fonction qui mappe des vecteurs en vecteurs
 - $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$ est une transformation linéaire, où une matrice transforme un vecteur en un vecteur
- La transformation linéaire $\mathbf{x}=\mathbf{Pz}$ transforme le vecteur \mathbf{z} dans la base \mathbf{p} en un vecteur \mathbf{x} dans la base \mathbf{u}
 - Si $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$, alors $\mathbf{w}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}$ dans la nouvelle base \mathbf{p}
 - Alors $\mathbf{w}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Ax}$ et $\mathbf{w}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz}$
 - La matrice \mathbf{A} dans la base \mathbf{u} est équivalente à la matrice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ dans la base \mathbf{p}

Exemple: changement de base d'une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que la nouvelle matrice est consistante pour le vecteur représenté par:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{Bz} = \begin{bmatrix} -0.05 \\ 1.85 \end{bmatrix}$$

($\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$)

(Chgt de base)

$$\mathbf{y} = \mathbf{Pw} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vecteurs propres

- Une des utilités des **vecteurs propres est** de déterminer une base pour la transformation dans laquelle elle a une représentation plus simple, par ex. une matrice diagonale
- Une représentation de ce type facilite grandement l'analyse des systèmes linéaires

Définition

Un scalaire λ est une **valeur propre** de la matrice A ($n \times n$) si il existe x différent de zéro tel que $Ax = \lambda x$

Le vecteur x correspondant est appelé **vecteur propre**

- En appliquant la transformation A au vecteur x nous changeons sa longueur (on la multiplie par la valeur propre), il n'y a pas de rotation pour un vecteur propre

Le polynôme caractéristique

- Pour toute valeur de λ l'équation $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ équivaut à $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = 0$ qui n'a de solutions non triviales que si $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ (Lemme fondamental)
- L'équation $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ est appelée **équation caractéristique de \mathbf{A}**
- Développer $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ donne un polynôme d'ordre n qui est appelé **polynôme caractéristique de \mathbf{A}** ($n \times n$)
- Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit qu'un tel polynôme a au moins une racine (éventuellement complexe). Dans le cas général on peut donc le factoriser comme suit:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

Théorème et exemple

Théorème

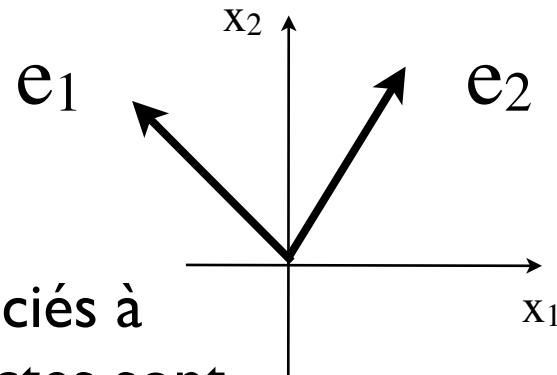
Toute matrice $\mathbf{A}(n \times n)$ possède au moins une valeur propre et un vecteur propre qui lui correspond

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 4$$

$$\mathbf{Ax} = \lambda_1 \mathbf{x}$$

$$x_2 = -x_1$$



$$\mathbf{Ax} = \lambda_2 \mathbf{x}$$

$$x_2 = 2x_1$$

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendantes

Valeurs propres distinctes

- Si toutes les valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres forment une base très pratique
- La transformation originale prend la forme d'une matrice **diagonale** dans la nouvelle base
- Comme les $\{\mathbf{e}_i\}$ sont linéairement indépendants, on peut écrire $\mathbf{x} = z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + z_n \cdot \mathbf{e}_n$
- Comme $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ on obtient

$$\mathbf{Ax} = \lambda_1 z_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 z_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n z_n \mathbf{e}_n$$

- Il n'y a pas de mélange ou de produits de coefficients d'indices différents, comme cela arriverait pour une autre base

Matrice modale

- La matrice modale de \mathbf{A} est la matrice ($n \times n$)
 $\mathbf{M} = [\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \dots \mid \mathbf{e}_n]$
- La relation suivante est vraie: $\mathbf{x} = \mathbf{Mz}$ avec z la représentation de x dans la nouvelle base de composants z_i
- La transformation \mathbf{A} dans la nouvelle base est $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{AM}$
- Nous savons que cette matrice est diagonale

Théorème

Toute matrice \mathbf{A} ($n \times n$) à valeurs propres distinctes, peut être mise sous forme diagonale par le changement de base $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{AM}$ où M est la matrice modale de A

Exemple

Trouver la matrice modale de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Vecteurs propres

Matrice modale

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que $\Lambda = M^{-1}AM$ est diagonale et que les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A (1,4)

Valeurs propres multiples

- Quand une matrice a des valeurs propres non distinctes il est parfois possible de trouver des vecteurs linéairement indépendants pour former une base conduisant à une représentation diagonale
- La multiplicité d'une valeur propre λ_i est « son » exposant α dans le polynôme caractéristique factorisé $(\lambda - \lambda_i)^\alpha$
- La multiplicité géométrique de λ_i est le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants qui peuvent lui être associés
- **Exemple:** déterminer la multiplicité algébrique et géométrique de:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Forme canonique de Jordan

- Même quand on ne peut pas diagonaliser une matrice, la forme de Jordan permet de s'en approcher

Théorème

Soit $\mathbf{L}_k(\lambda)$ la matrice $k \times k$

Alors, pour toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{k \times k}$

il existe une matrice non singulière \mathbf{T} $\mathbf{L}_k(\lambda) =$
telle que

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ \vdots & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k(\lambda_1) & & & \\ & \mathbf{L}_k(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{L}_k(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

Équations aux différences et équations différentielles

Des outils pour la modélisation des systèmes
dynamiques

Introduction

- Les équations aux différences et les équations différentielles expriment le **changement** des variables dépendantes en fonction des variables indépendantes
- Les équations aux différences et différentielles **ordinaires** (**ODE**) s'expriment par rapport à une **seule** variable dynamique
 - dans la plupart des cas il s'agit de **temps**
- Les équations aux dérivées **partielles** considèrent **plusieurs** variables dynamiques: généralement **l'espace** (x,y,z) et le **temps**
- Les ODEs souvent la plupart des temps un outil suffisant pour modéliser les phénomènes dynamiques

Equations aux differences

Equations aux différences

- Simples

- a) $y(k+1) = ay(k)$ $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} k &\in \mathbf{N} \\ y(k) &\in \mathbf{R} \end{aligned}$$

- Ou plus complexes...

- b) $ky(k+2)y(k+1) = \frac{1}{2}\sqrt{y(k)y(k-1)}$

Qu'est ce qu'une équation aux différences

- C'est un ensemble infini d'équations

$$y(1) = ay(0)$$

$$y(2) = ay(1)$$

$$y(3) = ay(2)$$

⋮

- Le nom vient du fait que cela constraint la différence entre les valeurs obtenues dans le temps
- On les rencontre aussi lorsqu'on les utilise pour approximer des équations différentielles

Ordre et linéarité

- L'**ordre** d'une équation aux différences est donné par la différence entre l'indice le plus grand et le plus petit dans l'équation.

$$ky(k+2)y(k+1) = \frac{1}{2}\sqrt{y(k)y(k-1)}$$
 est d'**ordre 3**

- Une équation aux différences est **linéaire** si elle est de la forme

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \cdots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = g(k)$$

coefficients

$i = 0, 1, 2, \dots$

Solutions

- Une solution est une fonction $y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait la propriété définie par l'équation aux différences

$y(k + 1) = ay(k)$ a comme solution $y(k) = a^k$

- En fait: $y(k + 1) = a^{k+1} = a \times a^k = a \times y(k)$



- La solution $y(k) = a^k$ est une représentation compacte de la solution vue comme une suite:

$$y(1) = ay(0)$$

$$y(2) = a^2y(0)$$

$$y(3) = a^3y(0)$$

⋮

Exemples

$$(k + 1)y(k + 1) - ky(k) = 1$$

$$y(k + 1) = \frac{y(k)}{1 + y(k)}$$

$$y(k + 1)^2 + y(k)^2 = -1$$

Existence et unicité des solutions

- Les ensembles d'équations peuvent ne pas avoir de solutions et c'est aussi le cas pour les équations aux différences
- Conditions initiales
 - Si $y(k) = f(y(k - 1), y(k - 2), \dots, y(1), y(0))$ on a k degrés de liberté qui peuvent être fixés en choisissant k conditions initiales $(y(0), y(1), \dots, y(k - 1))$
 - Exemple: $y(k+1)=ay(k)$, on doit fixer $y(0)=C$
 - Exemple: $y(k+2)=y(k)$ requiert 2 conditions initiales

$$y(k) = \left[\frac{y(0) + y(1)}{2} \right] + (-1)^k \left[\frac{y(0) - y(1)}{2} \right]$$

Théorème d'existence et d'unicité

- L'existence d'une solution peut se déduire de la structure de l'équation
- Existence n'implique pas unicité
- On spécifie un jeu de conditions initiales pour l'unicité

Théorème I

Soit l'équation aux différences de la form

$$y(k+n) + f[y(k+n-1), y(k+n-2), \dots, y(k), k] = 0$$

où f est une fonction arbitraire à valeurs réelles. Pour toute spécification des cond. initiales $y(k_0), y(k_0+1), \dots, y(k_0+n-1)$ l'équation a une et une seule solution pour ces CI

Exemple: équation du premier ordre

- Une équation très commune du premier ordre

$$y(k+1) = ay(k) + b$$

- Let's find its solution

Equations homogènes

(1) Linéaires non-homogènes

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \cdots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = g(k)$$

(2) Linéaires homogènes

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \cdots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = 0$$

Remarque 1

La différence entre two solutions ode (1) est une solution de (2)

Remarque 2

Si on ajoute une solution de (2) à une solution de (1) on obtient une solution de (1)

Equations homogènes

Théorème 2

Soit $\bar{y}(k)$ une solution de l'équation (1). La collection de toutes les solutions de cette équation est la collection de toutes les fonctions $y(k) = \bar{y}(k) + z(k)$ avec $z(k)$ une solution de l'équation homogène correspondante (2)

Theorem 3

Si les $z_i(k)$ sont solutions of (2), alors toute combinaison linéaire

$$z(k) = \sum_{i=1}^m c_i z_i(k)$$

est aussi solution of (2), avec c_i des constantes quelconques

Solution de l'équation nonhomogène

Comment trouver la solution de l'équation non homogène ?

$$a_n(k)y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \cdots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) = g(k)$$

Procedure

1. Trouver un ensemble $\{z_i(k)\}$ de n solutions de l'équation homogène correspondante
2. Trouver une solution particulière $\bar{y}(k)$ de l'équation nonhomogène
La solution générale est:

$$y(k) = \bar{y}(k) + \sum_{i=1}^n z_i(k)$$

Équations aux différences linéaires à coefficients constants

Soit l'équation homogène à **coefficients constants**

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) = 0$$

On suppose une solution $z(k) = \lambda^k$

En la substituant dans l'équation on obtient:

$$\lambda^{k+n} + a_{n-1}\lambda^{k+n-1} + \dots + a_0\lambda^k = 0$$

En divisant par λ^k on obtient

L'équation caractéristique:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Le polynôme caractéristique et les valeurs caractéristiques

Théorème 5

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite géométrique $z(k) = \lambda^k$ soit une solution de l'équation homogène à coefficients constants est que la constante λ^k vérifie l'équation caractéristique $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

Le polynôme caractéristique est

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

Les racines de ce polynôme sont des valeurs caractéristiques

Exemple: équation du 1er ordre

- Soit l'équation du premier ordre homogène

$$y(k+1) = ay(k)$$

- Déterminons son équation caractéristique et les solutions générales
- Soit maintenant l'équation non-homogène

$$y(k+1) = ay(k) + b$$

- Essayons une solution particulière telle que $y(k)=c$ (constant)

Example: équation du second ordre

- Trouver la solution

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 3^k$$

- Utiliser $y(k)=C3^k$ comme solution particulière

Equations différentielles

Equations différentielles

- Supposons un intervalle T de temps continu $[t_0, t_f]$
- Supposons qu'il y a une valeur $y(t)$ pour chaque t dans T
- $y(t)$ est donc une fonction définie sur T
- Une **équation différentielle** est une équation qui connecte cette fonction avec certaines de ses dérivées

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (\sin(y(t))) = \cos(t)$$

Ordre et linéarité

- L'**ordre** d'une équation différentielle est donné par l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (\sin(y(t))) = \cos(t) \quad \text{est d'ordre 2}$$

- Une équation différentielle est **linéaire** si elle est de la forme

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = g(t)$$

coefficients

second membre
(force motrice)

The diagram illustrates the general form of a linear differential equation. It shows the equation $a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = g(t)$. The terms $a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n}, a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, \dots, a_1(t) \frac{dy}{dt}$ are highlighted with orange rounded rectangles and grouped under the label "coefficients". The term $g(t)$ is highlighted with a green rounded rectangle and is labeled "second membre (force motrice)". Arrows point from the labels to their respective parts in the equation.

Solutions et conditions initiales

- Quand on résout une équation différentielle, on obtient une **famille** de solutions
- Les solutions sont paramétriques avec un termes constants

$$\frac{dy}{dt} = ay \quad \text{donne} \quad y(t) = Ce^{at}$$

- Spécifier une valeur initiale fixe la valeur de la constante et et conduit à une **solution unique**

$$y(0) = Ce^{a \cdot 0} = Ce^0 = C$$

$$y(t) = y(0)e^{at}$$

Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 6

Supposons $a_i(t), g(t) \in C^1$ sur $[0 T]$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$. Alors pour tout ensemble de valeurs de b_i il y a une seule solution à l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = g(t)$$

qui satisfait les conditions initiales

$$y(0) = b_0$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = b_1$$

⋮

$$\frac{dy^{n-1}(0)}{dt^{n-1}} = b_{n-1}$$

L'équation non homogène

(1) Linéaire non homogène

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = g(t)$$

(2) Linéaire homogène

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = 0$$

Equations homogènes: 2 théorèmes

Théorème 7

Soit $\bar{y}(t)$ une solution de l'équation non homogène. Alors, la collection de toutes les solutions de cette équation est la collection de toutes les fonctions de la forme $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$ où $z(t)$ est la solution de l'équation homogène correspondante.

Théorème 8

Si $z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)$ sont tous solutions de l'équation linéaire homogène, alors toute combinaison linéaire de ces m solutions

$$z(t) = \sum_{i=1}^m c_i z_i(t)$$

où $c_i(t)$ sont des scalaires arbitraires, est aussi une solution

Exemple

- Soit l'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

- Trouver une solution particulière (par inspection)
- Trouver la solution générale

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit l'équation homogène linéaire, à **coefficients constants**

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

Nous supposons la solution $y(t) = e^{\lambda t}$

En la substituant dans l'équation homogène on obtient

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

En divisant par $e^{\lambda t}$ on obtient

L'**équation caractéristique**

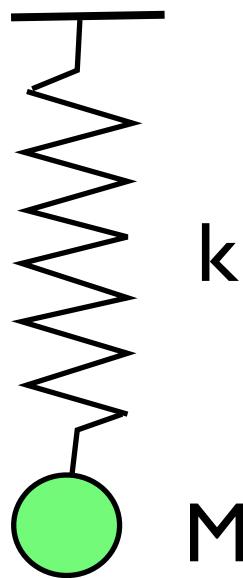
$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Exemples

- Trouver les solutions de

$$\frac{dy}{dt} = ay$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$



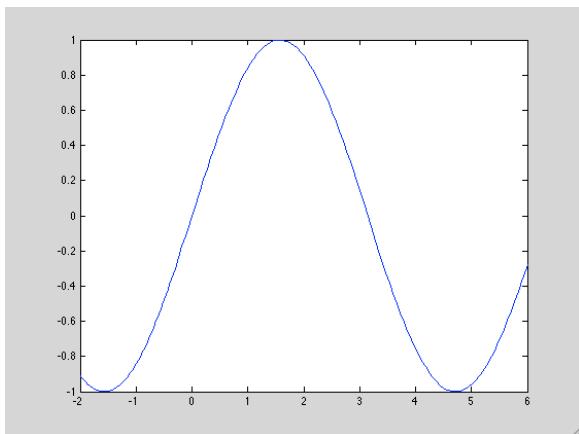
Oscillation harmonique

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

Equation générale du mouvement harmonique

$$my'' = -ky$$

Mouvement harmonique système masse-ressort



$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

Equation caractéristique

$$y(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Suite

- On ajoute un force motrice oscillatoire (à une fréquence différente) à l'équation homogène générale du mouvement

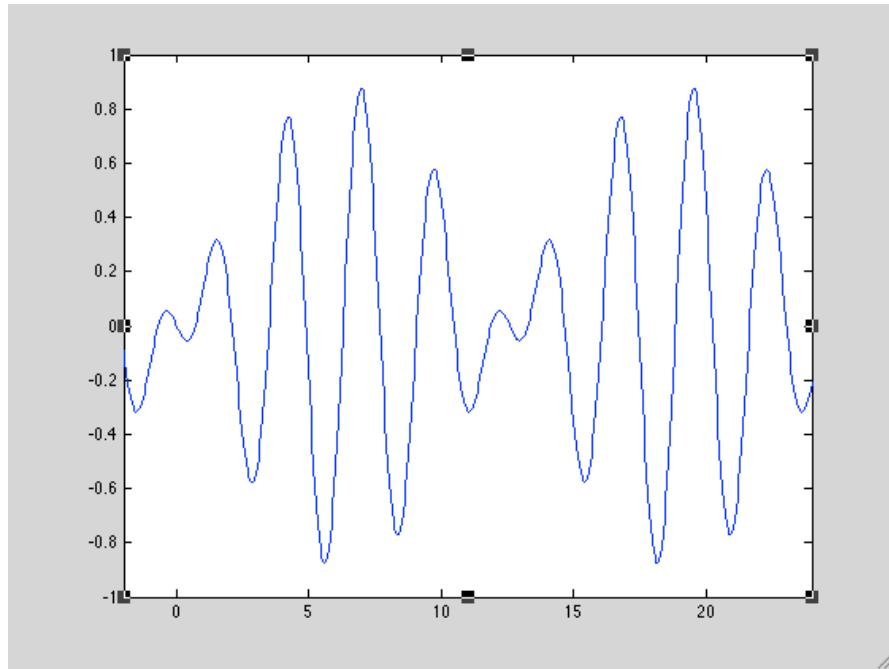
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \sin\omega_0 t$$

- Une solution possible $y(t) = C \sin\omega_0 t$ avec $C = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$
- Une solution particulière: $y(t) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\omega_0 t$
- Solution générale de l'équation

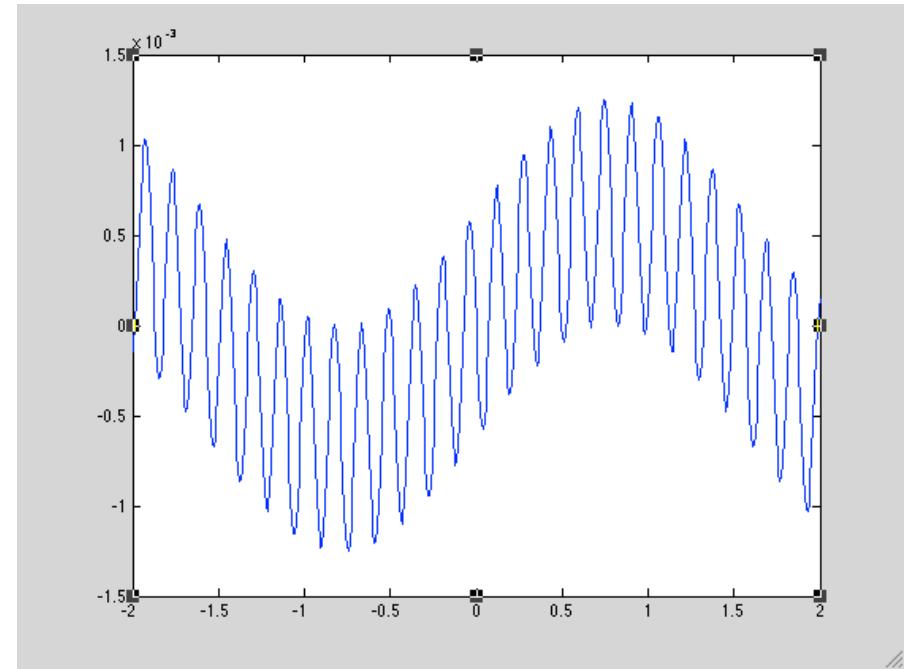
$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\omega_0 t$$

Illustration

$$\omega_0 < \omega$$



$$\omega_0 \gg \omega$$



Causal Loop Diagrams

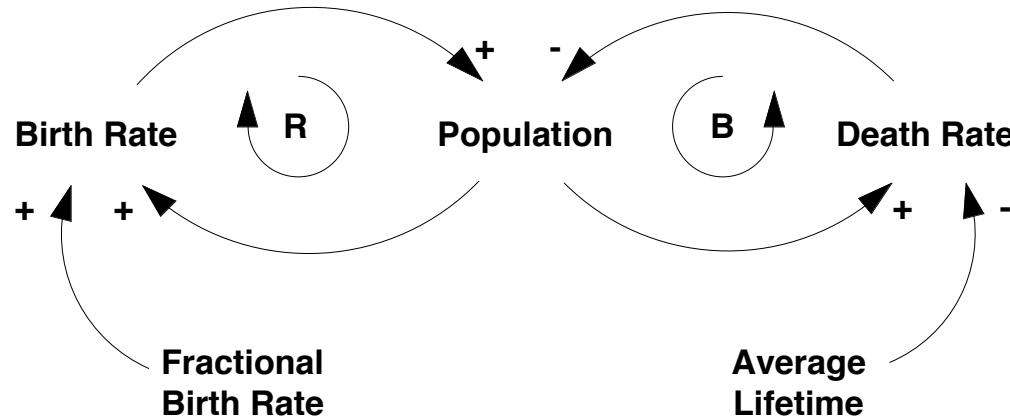
Les points essentiels de la dynamique des systèmes
(Référence: Sterman, Chapitre 6)

Diagrammes de boucles causales (causal loop diagrams)

- Capturer les hypothèses sur les causes du comportement dynamique d'un système
- Révélez nos ‘modèles mentaux’
- Implanter les éléments de rétroaction dans nos modèles

Notations dans les CLD

Example



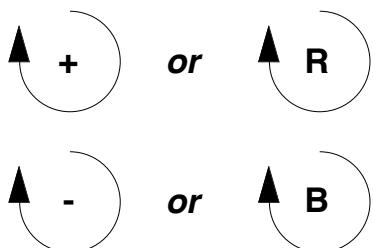
Key

Causal Link



Birth Rate
Variable

Population
Variable



Loop Identifier: Positive (Reinforcing) Loop

Loop Identifier: Negative (Balancing) Loop

Polarité des liens: définitions et exemples

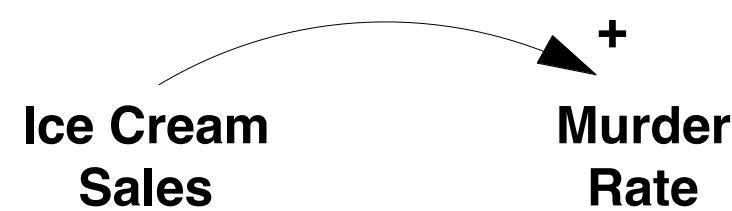
Symbol	Interpretation	Mathematics	Examples
$X \xrightarrow{+} Y$	<p>All else equal, if X increases (decreases), then Y increases (decreases) above what it would have been.</p> <p>In the case of accumulations, X adds to Y.</p>	$\frac{\partial Y}{\partial X} > 0$ In the case of accumulations, $Y = \int_{t_0}^t (X + \dots) ds + Y_{t_0}$	Product Quality $\xrightarrow{+}$ Sales Effort $\xrightarrow{+}$ Results Births $\xrightarrow{+}$ Population
$X \xrightarrow{-} Y$	<p>All else equal, if X increases (decreases), then Y decreases (increases) below what it would have been.</p> <p>In the case of accumulations, X subtracts from Y.</p>	$\frac{\partial Y}{\partial X} < 0$ In the case of accumulations, $Y = \int_{t_0}^t (-X + \dots) ds + Y_{t_0}$	Product Price $\xrightarrow{-}$ Sales Frustration $\xrightarrow{-}$ Results Deaths $\xrightarrow{-}$ Population

CLD « le comment »

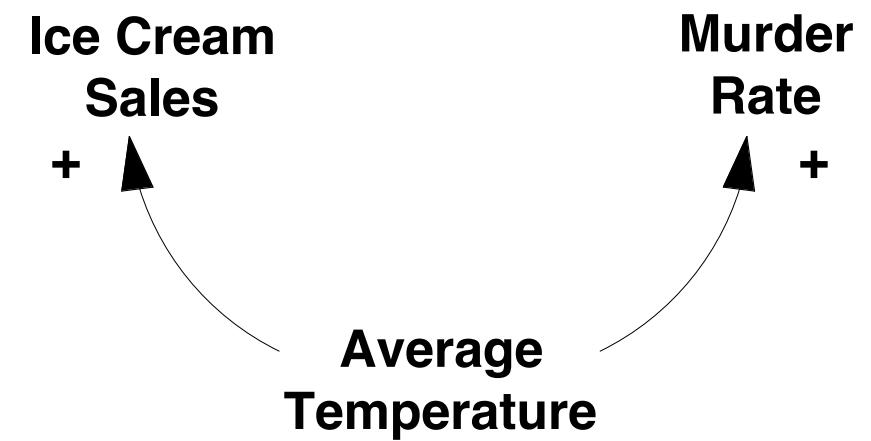
Corrélation n'est pas causalité

- Corrélation n'est pas causalité
 - corrélation entre le nombre de parapluies ouverts et la quantité de pluie qui tombe Il n'y a pas de causalité entre le nombre de parapluies et la pluie
 - Il y a causalité entre pluie et nombre de parapluies
- Les corrélations ne représentent pas la structure d'un système
- Les corrélations dépendent de la structure!

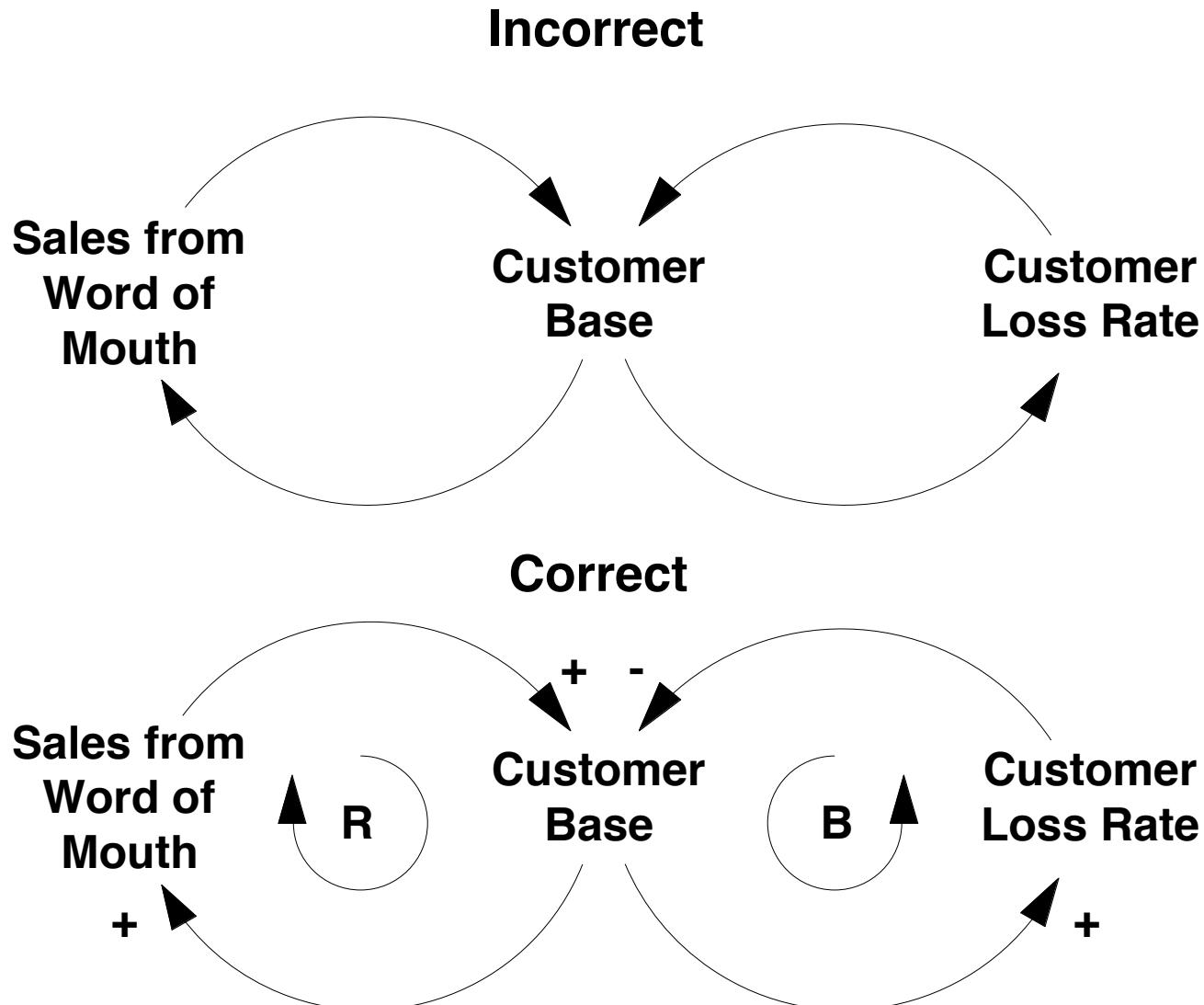
Incorrect



Correct



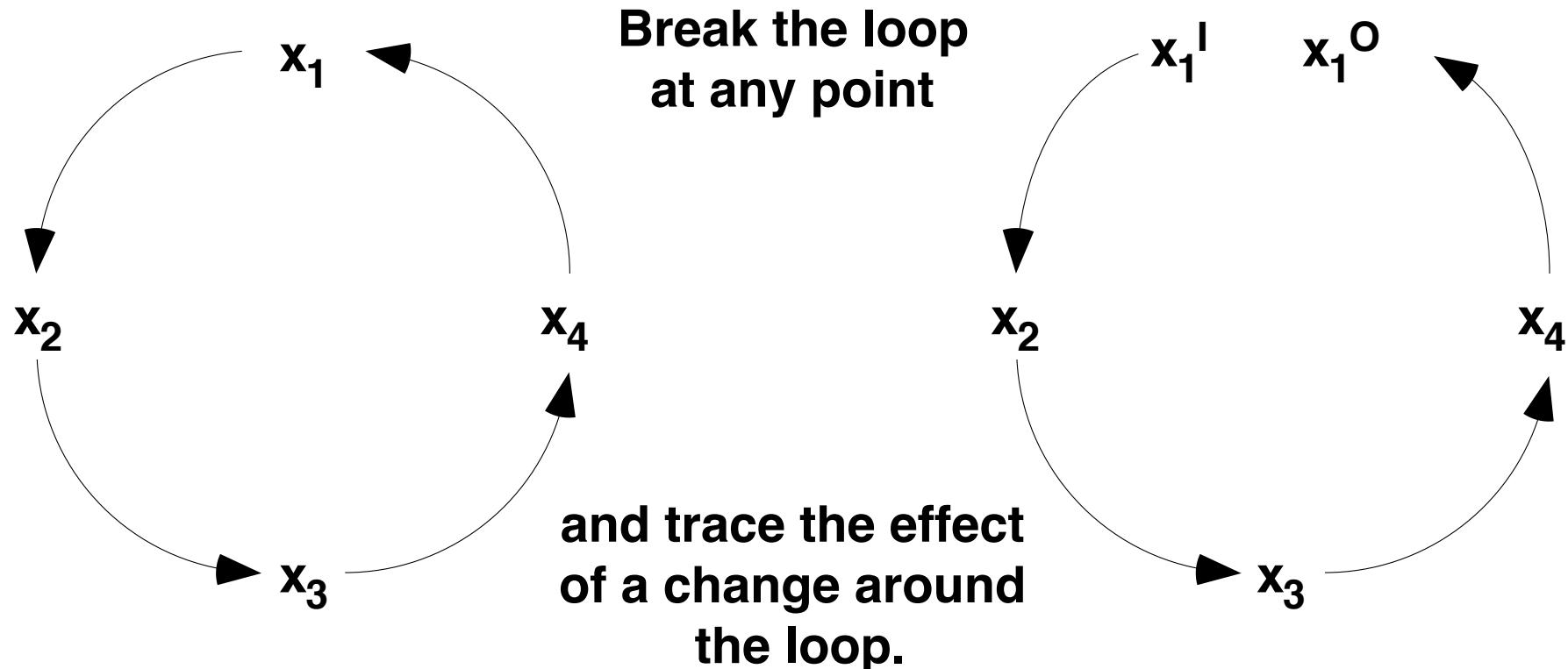
Donner un nom aux polarités des liens



Comment établir la polarité d'une boucle

- Comment découvrir si une boucle mitige ou renforce
- Quick fix: compter le nombre de liens négatif
- Right way: suivre les changements dans une boucle

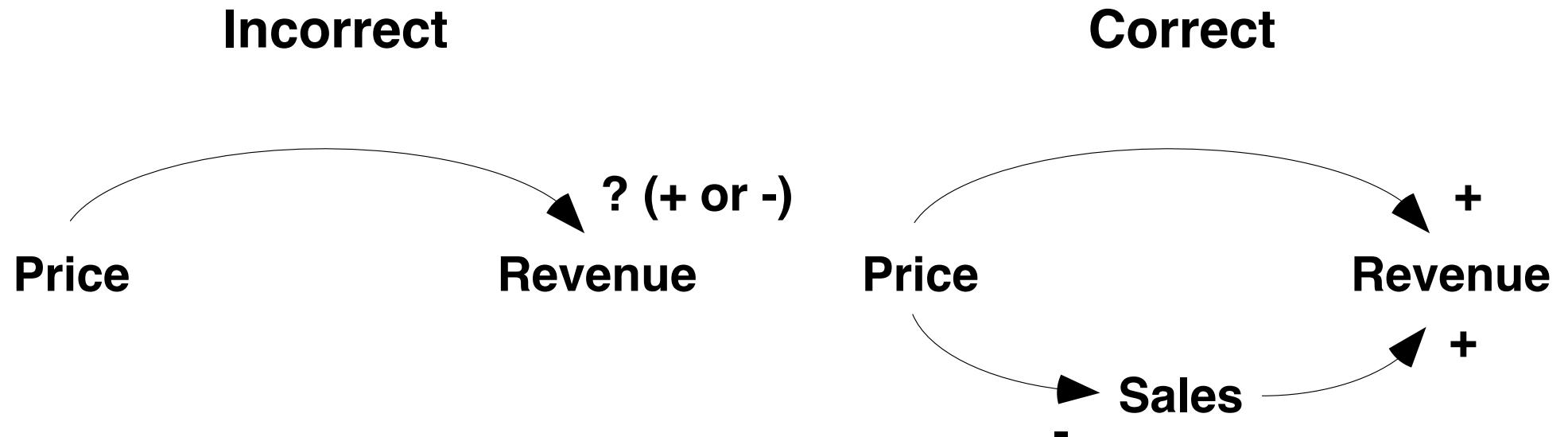
Calculer le gain en boucle ouverte d'une boucle



$$\text{Polarity} = \text{SGN}(\partial x_1^0 / \partial x_1^l)$$

$$\partial x_1^0 / \partial x_1^l = (\partial x_1^0 / \partial x_4)(\partial x_4 / \partial x_3)(\partial x_3 / \partial x_2)(\partial x_2 / \partial x_1^l)$$

Figure 5-6



Les liens doivent avoir une polarité non ambiguë

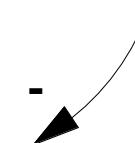
Donner un nom/label aux boucles

- Les labels sont une medium de communication efficace
- Ils doivent avoir et transmettre un sens ... (ce que ne feront pas des chiffres ou des nombres)
- Choisissez les faciles à retenir!

**Name and number
your loops to
increase diagram
clarity and provide
labels.**

**Time
Remaining**

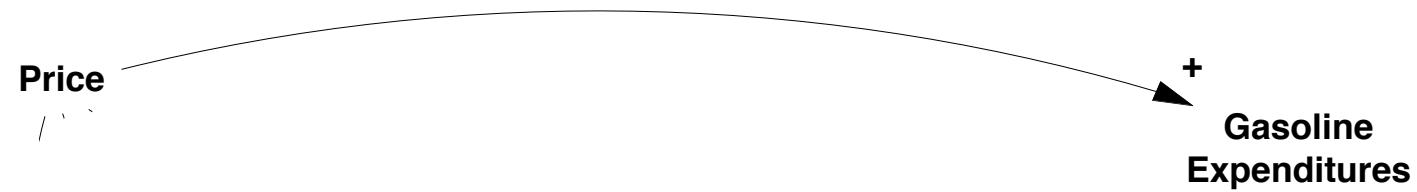
**Schedule
Pressure**



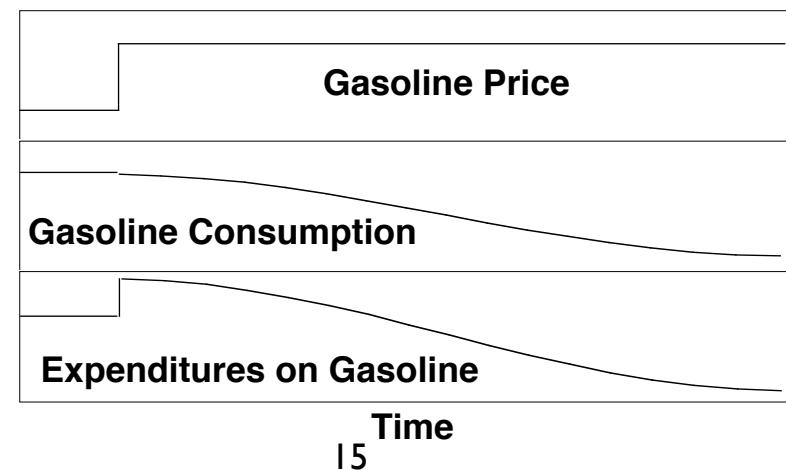
Le rôle des retards

- Les retards introduisent de l'inertie et des oscillations
- Ils sont fondamentaux pour la compréhension des effets à moyen et long terme de nos décisions





**Différents retards
entre le prix de vente
de l'essence à la
pompe et la réponse
en consommation et
en dépense**



Des noms plutôt que des phrases !!

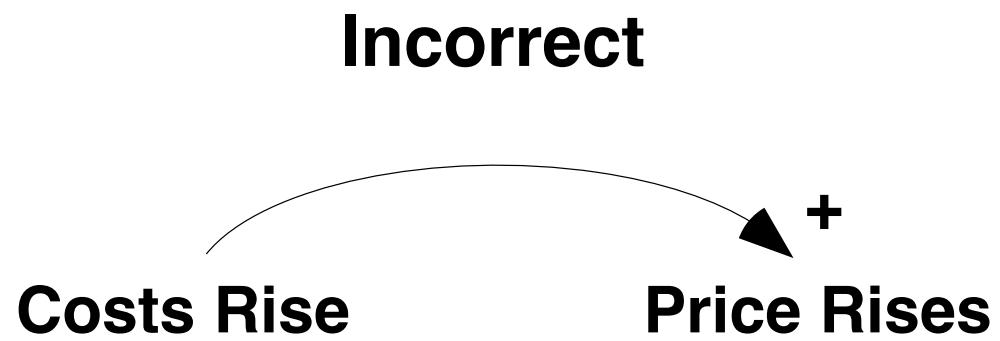


Figure 5-12

Les noms de variables doivent avoir un sens en cohérence la sensibilité

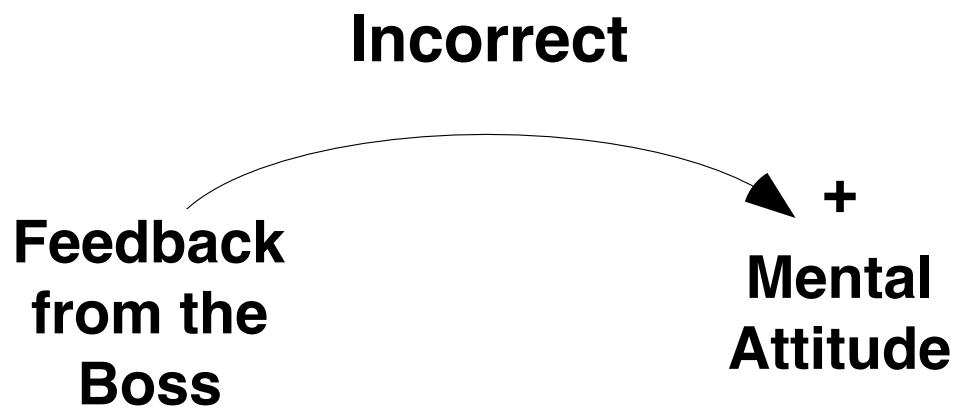


Figure 5-13

Choisir les labels dont l'évolution est normalement espérée ou mesurée > 0

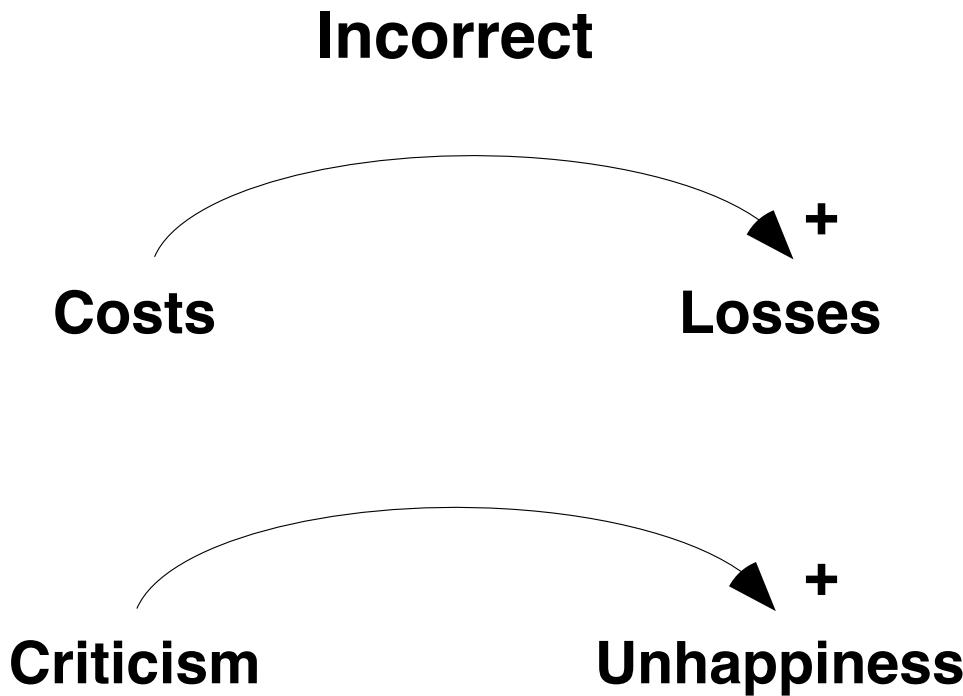


Figure 5-14

If your audience was confused by

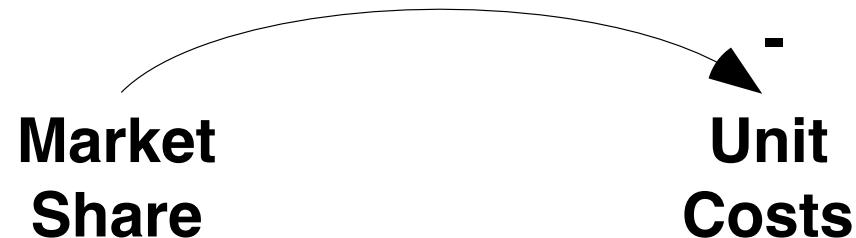


Figure 9-15 Make intermediate links explicit to clarify a causal relationship.

Incorrect

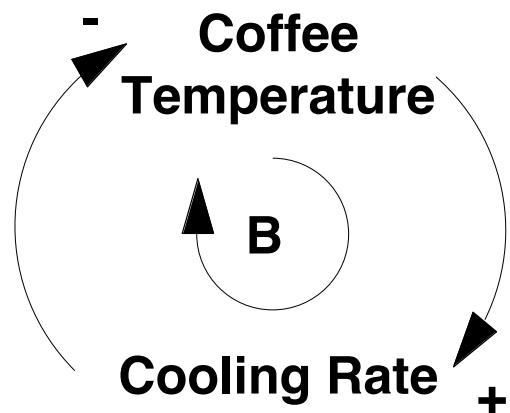
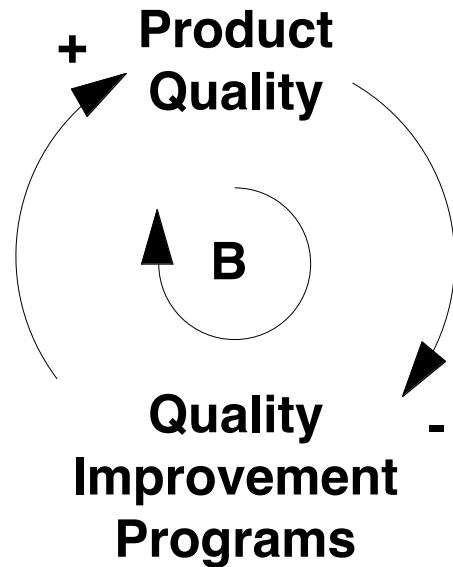


Figure 5-16 Make the goals of negative loops explicit.

Distinguer valeurs réelles et valeurs perçues

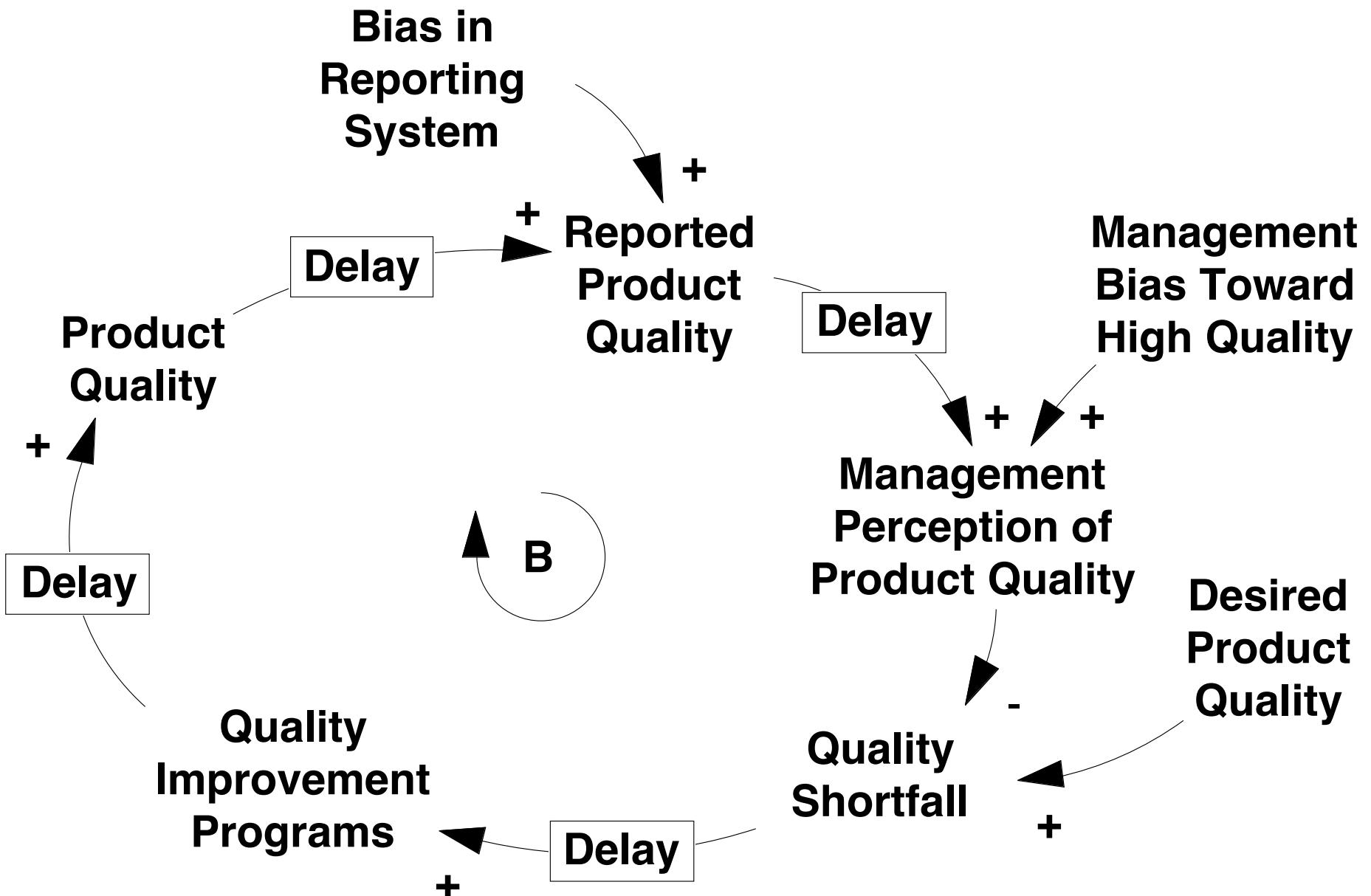


Figure 5-17

CLD et dynamique

- Les boucles causales
 - décrivent les relations de cause à effet entre les variables
 - permettent de représenter les rétroactions dans le système
- CLD sont un excellent outil pour représenter les interdépendances des processus
- Ils permettent de capturer nos représentations mentales dès la genèse du projet
- Ils sont adaptés à la communication des résultats d'un projet
- Cependant, ils **ne capturent pas la dynamique des systèmes**

Stocks et flows

- Focus les caractéristiques structurelles d'un système.
- Soulignent les échanges: masse, énergie, information, argent,
..
- Exemples de stocks: inventaires, populations, dette, ... on prend les décisions sur la base de stocks
- Les stocks représentent l'état d'un système
- Les flows sont les taux de changement des stocks (débits)

Stocks

- Ils ne sont pas représentés par des boucles causales
- Il n'y a pas de distinction entre taux de changement et accumulation
- Par ex, I CLD ne peut pas conclure si une population augmente ou diminue

Diagrammes de boucles causales, stocks et flows

Production
Start Rate

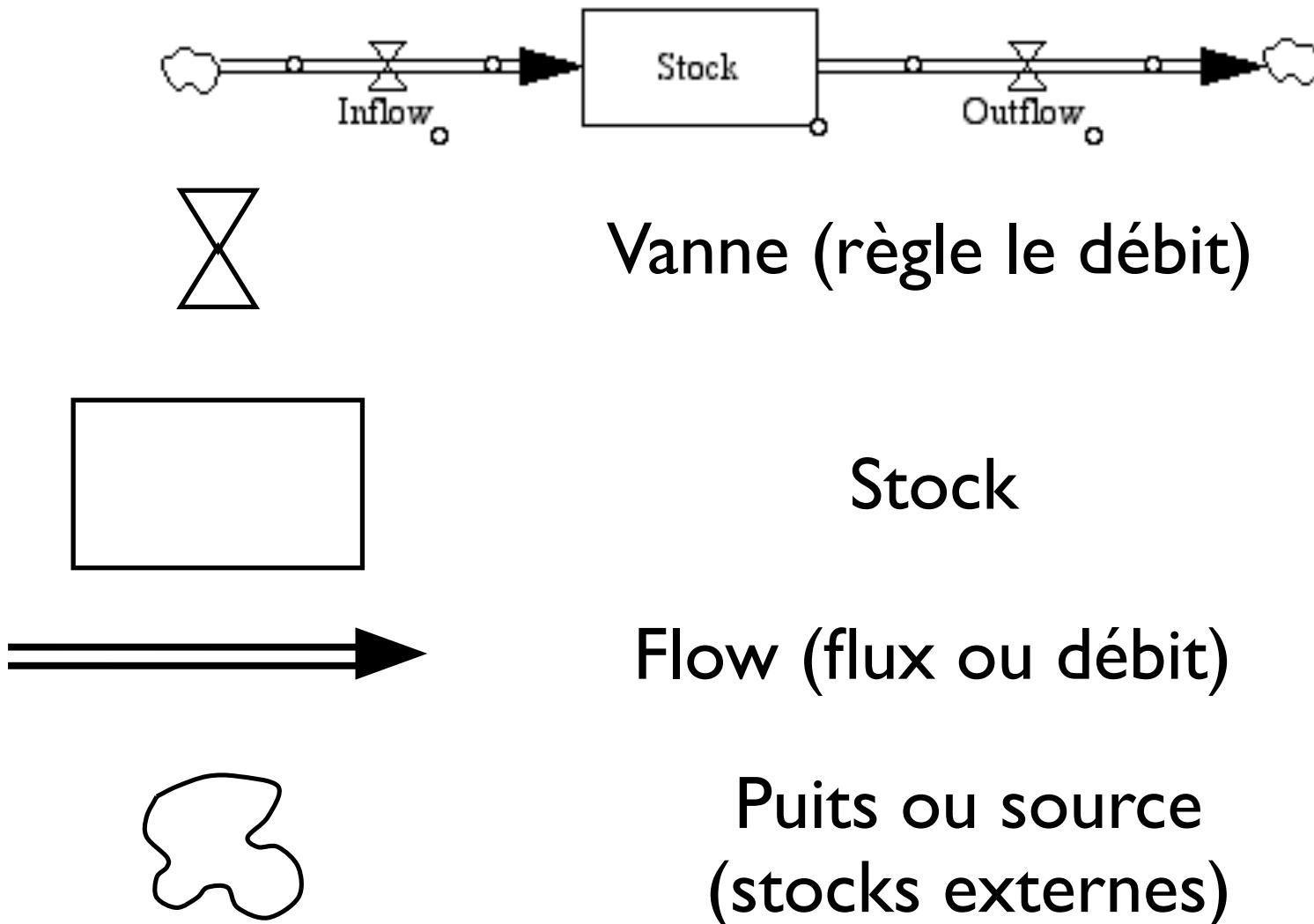
Stocks

- CLD ne représentent pas l'accumulation, les Stocks oui
- Stocks = état du système (et nos décisions dépendent de l'état)
- E.G.: l'inventaire d'une entreprise, le # d'employés, le montant sur le compte de paiements

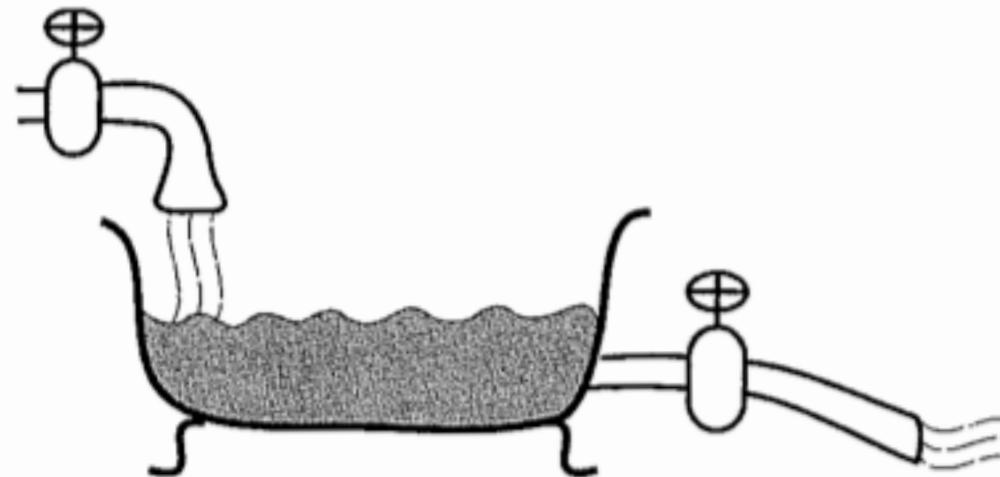
Les flux

- Les flux changent les stocks
 - L'inventaire change avec les livraisons
 - # d'employés change avec les recrutements, licenciements et départs à la retraite
- Souvent, on a des problèmes à décider comment distinguer flux et taux (l'inflation?)

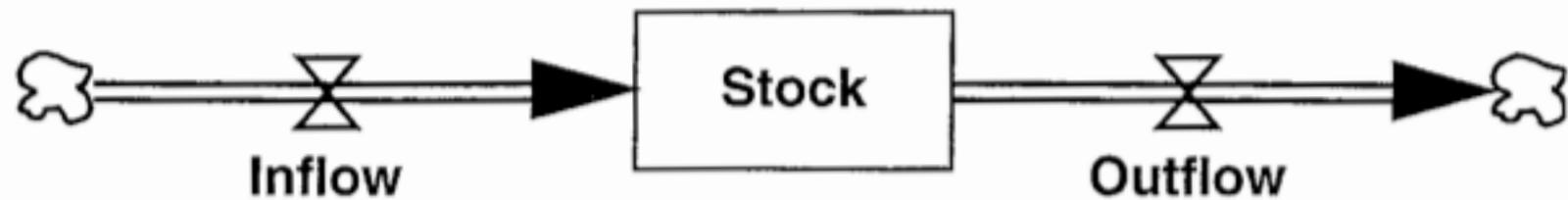
Notation



La métaphore hydraulique



Stock and Flow Diagram:



Des images aux maths

Les niveaux (stocks) intègrent les débits (flows)

$$stock(t) = \int_{t_0}^t [in(s) - out(s)]ds + stock(t_0)$$

$$\frac{d(stock)}{dt} = in(t) - out(t)$$

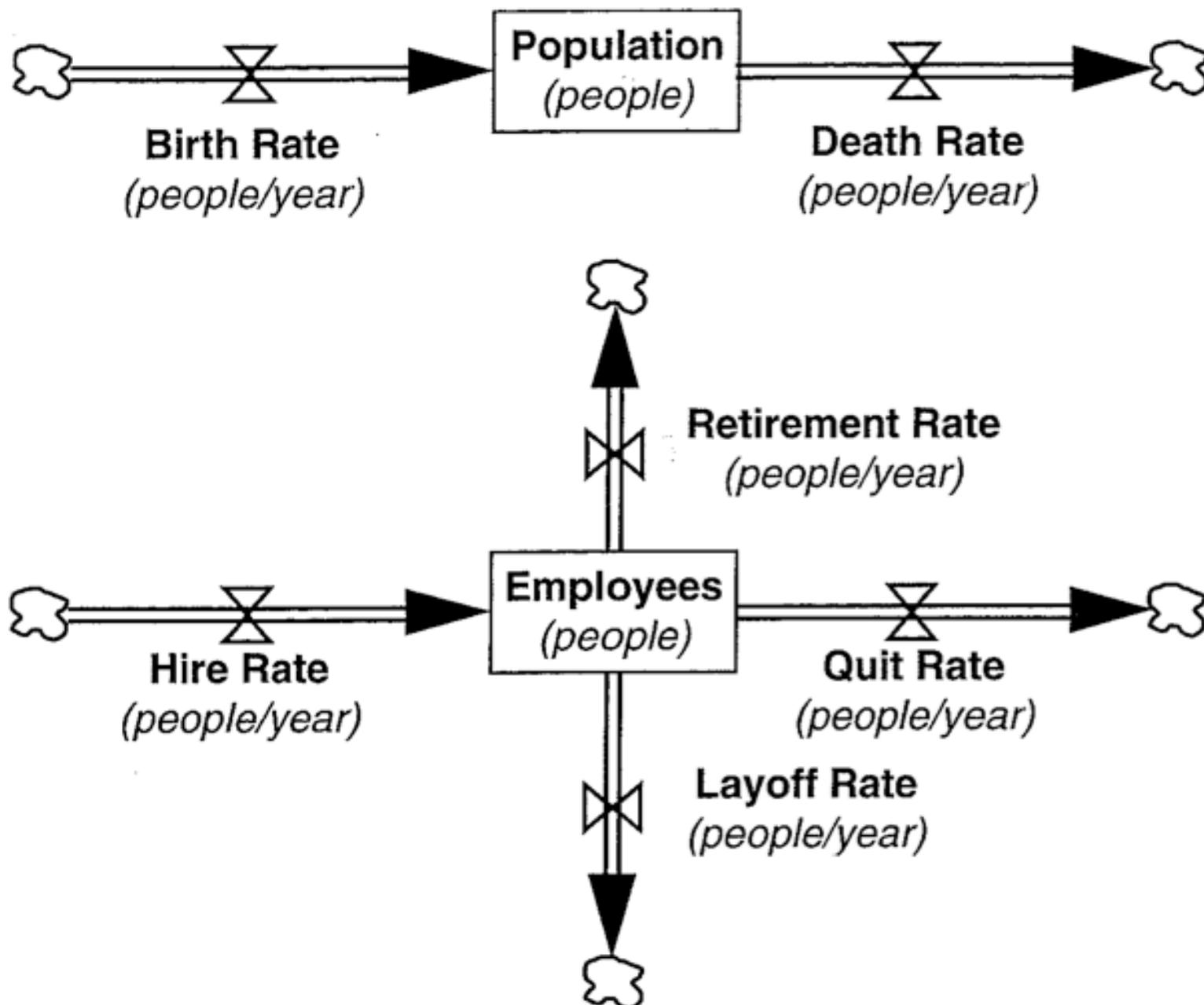
$$[\text{flow}] = [\text{stock}/\text{time}]$$

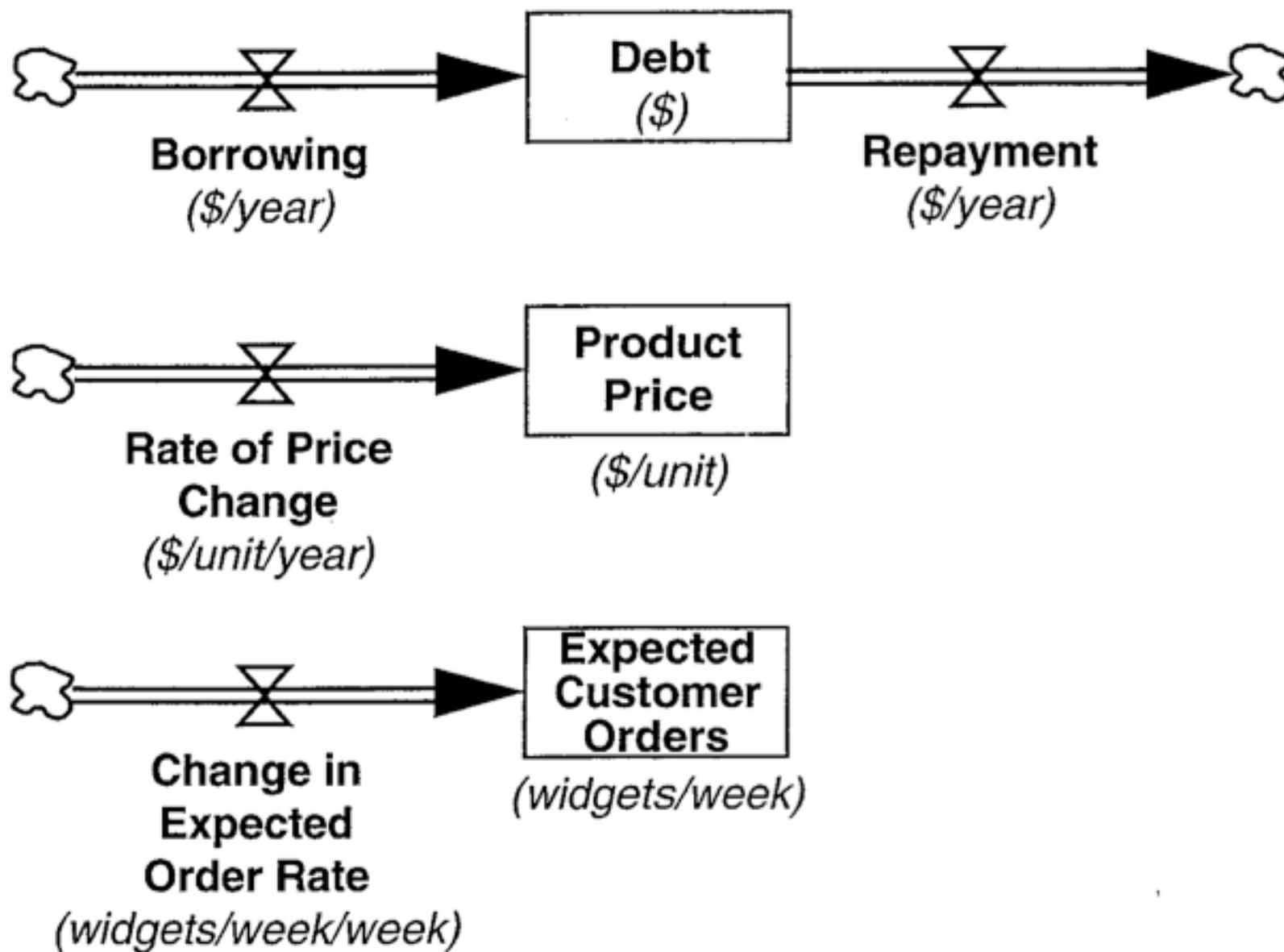
Les stocks servent à ...

- caractériser l'état du système
- fournir mémoire et inertie
- générer les retards
- découpler les débits et créer des déséquilibres

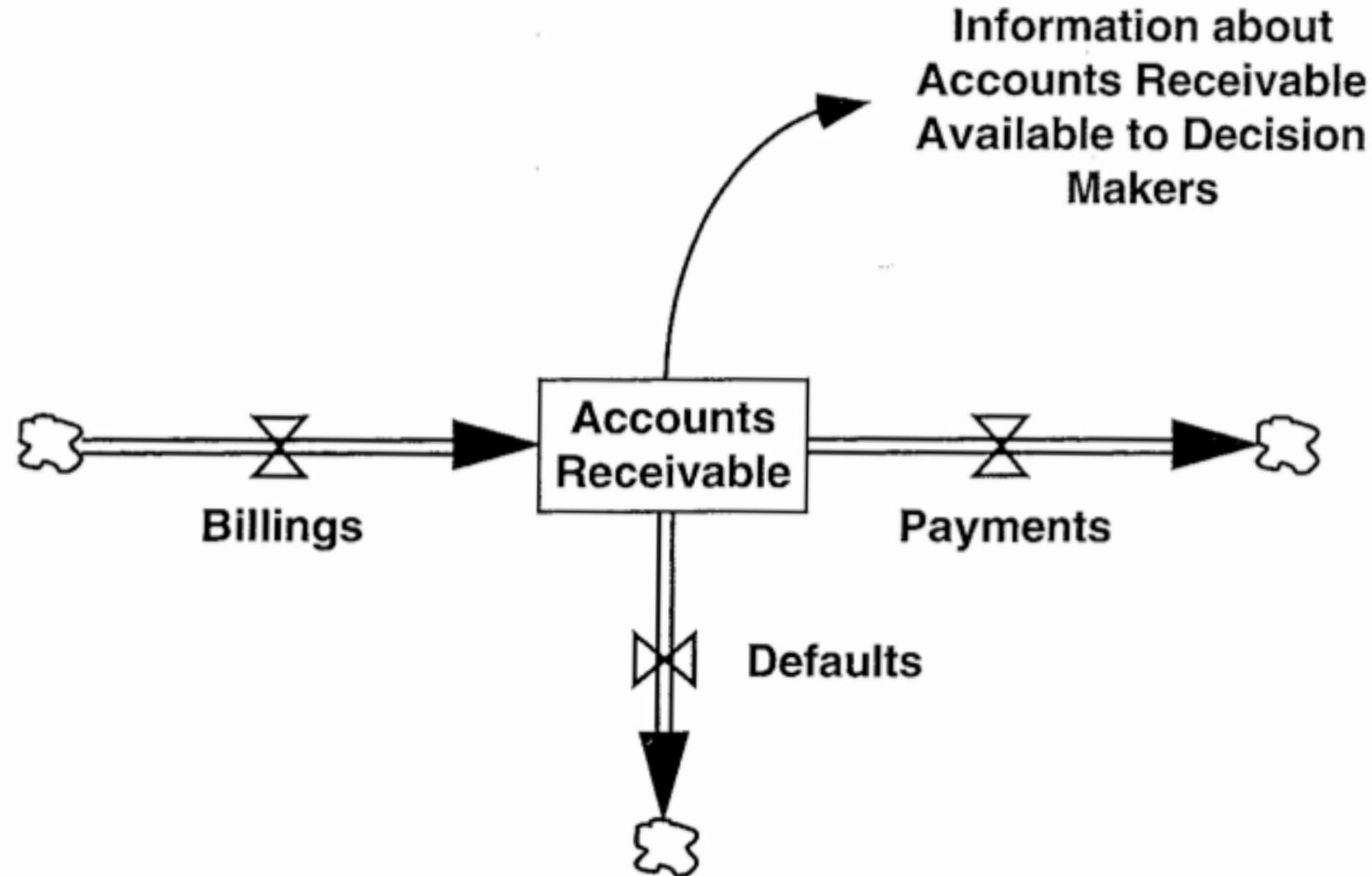
Exemples de domaines, stocks et flux

Domaine	Stocks	Flows
Maths, Physique, Ingénierie	Intégrales, variables d'état	Dérivées, taux, débits
Chimie	Réactifs, produits	Reaction rates, débits
Production	Buffers, inventaires	Débit de prod.
Economie	Niveaux	Taux
Comptabilité	Stocks, postes de bilan	Flux de trésorerie (cash flows), poste de revenu
Biologie, physiologie	Compartiments	Diffusion, débits
Medicine, épidémiologie	Prévalence, réservoirs	Incidence, infection morbidité et mortalité

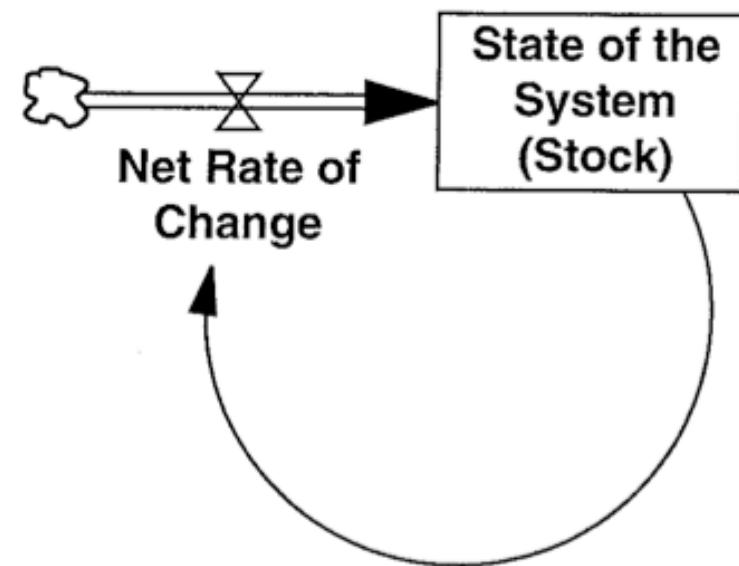
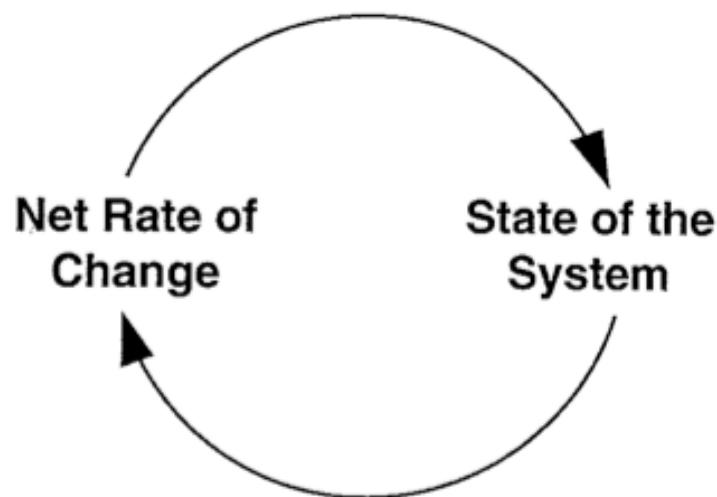




L'information comme un stock

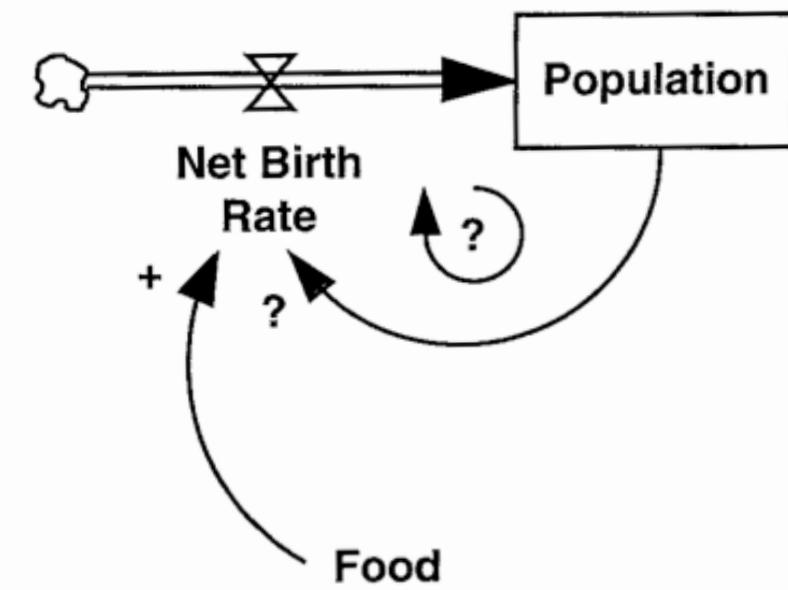


Rétroaction



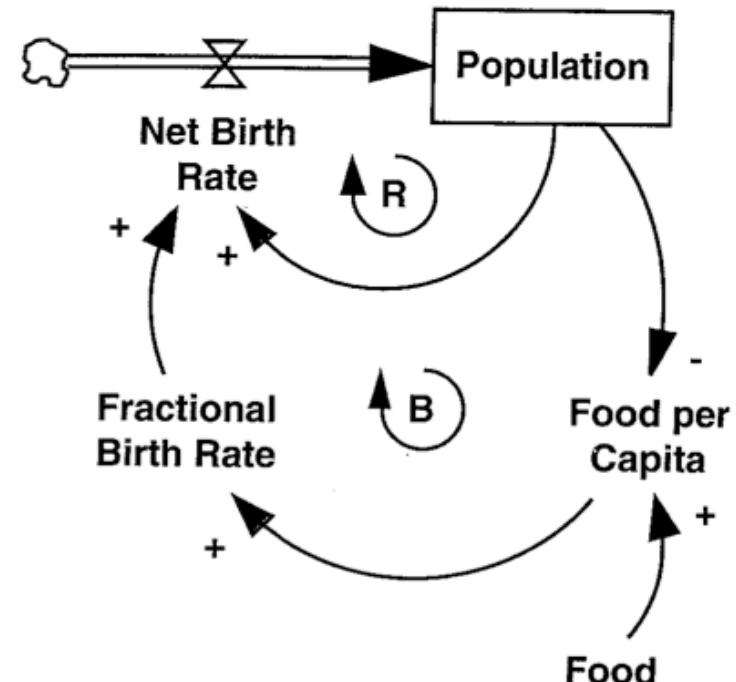
Variables auxiliaires

- Les stocks ne peuvent être modifiés que par des flux
- Les flux peuvent être exprimés comme une fonction des **variables auxiliaires**
- Les variables auxiliaires sont des variables qui dépendent des stocks et/ou d'autres variables auxiliaires



$$\text{Pop}(t) = \text{INTEGRAL}(\text{Net birth rate}, \text{Pop}(t_0))$$

$$\text{Net birth rate} = \text{Pop} * f(\text{Food}/\text{Pop})$$



$$\text{Pop}(t) = \text{INTEGRAL} \text{ Net birth rate, Pop}(t_0))$$

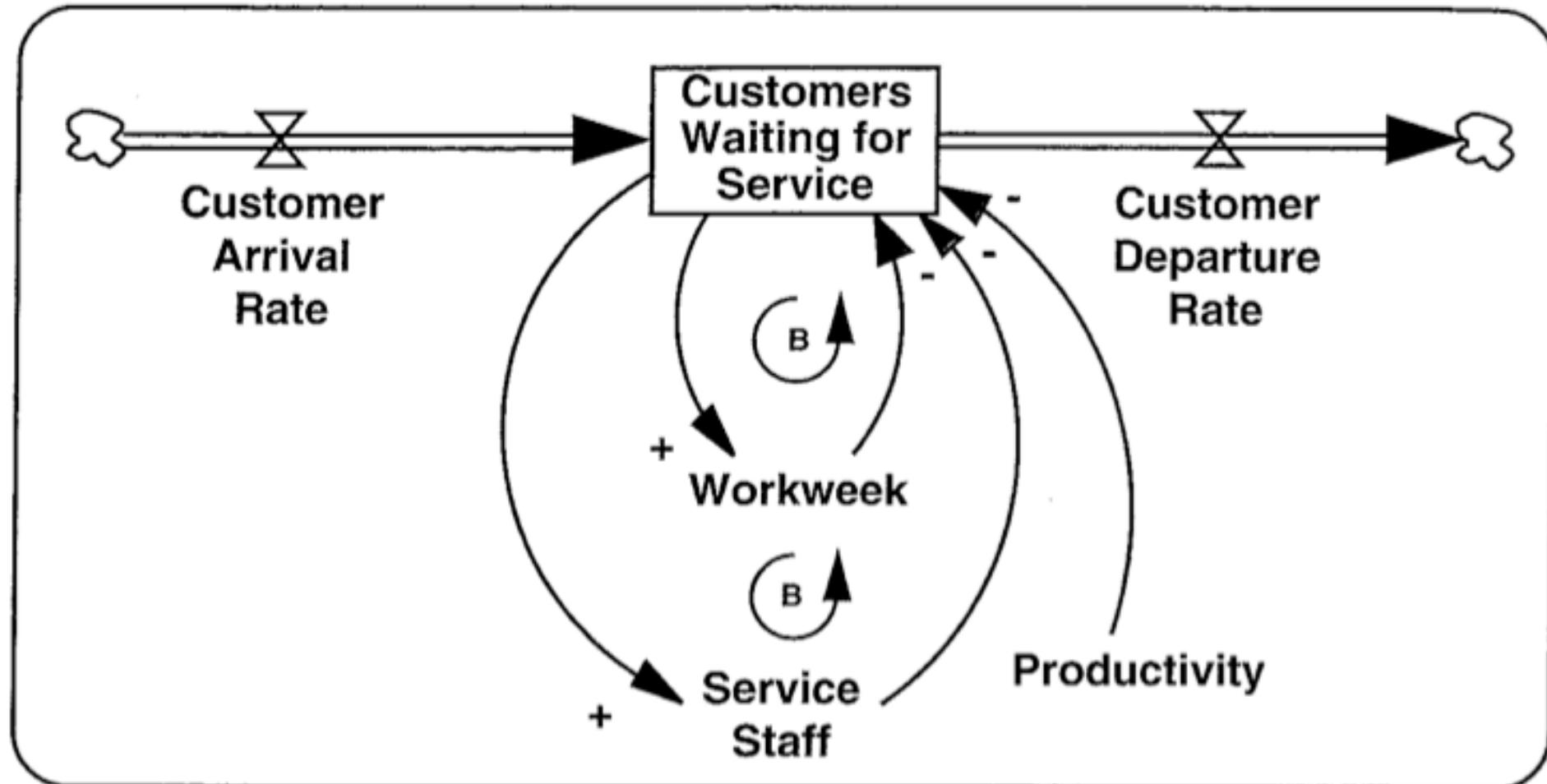
$$\text{Net birth rate} = \text{Pop} * \text{Relative birth rate}$$

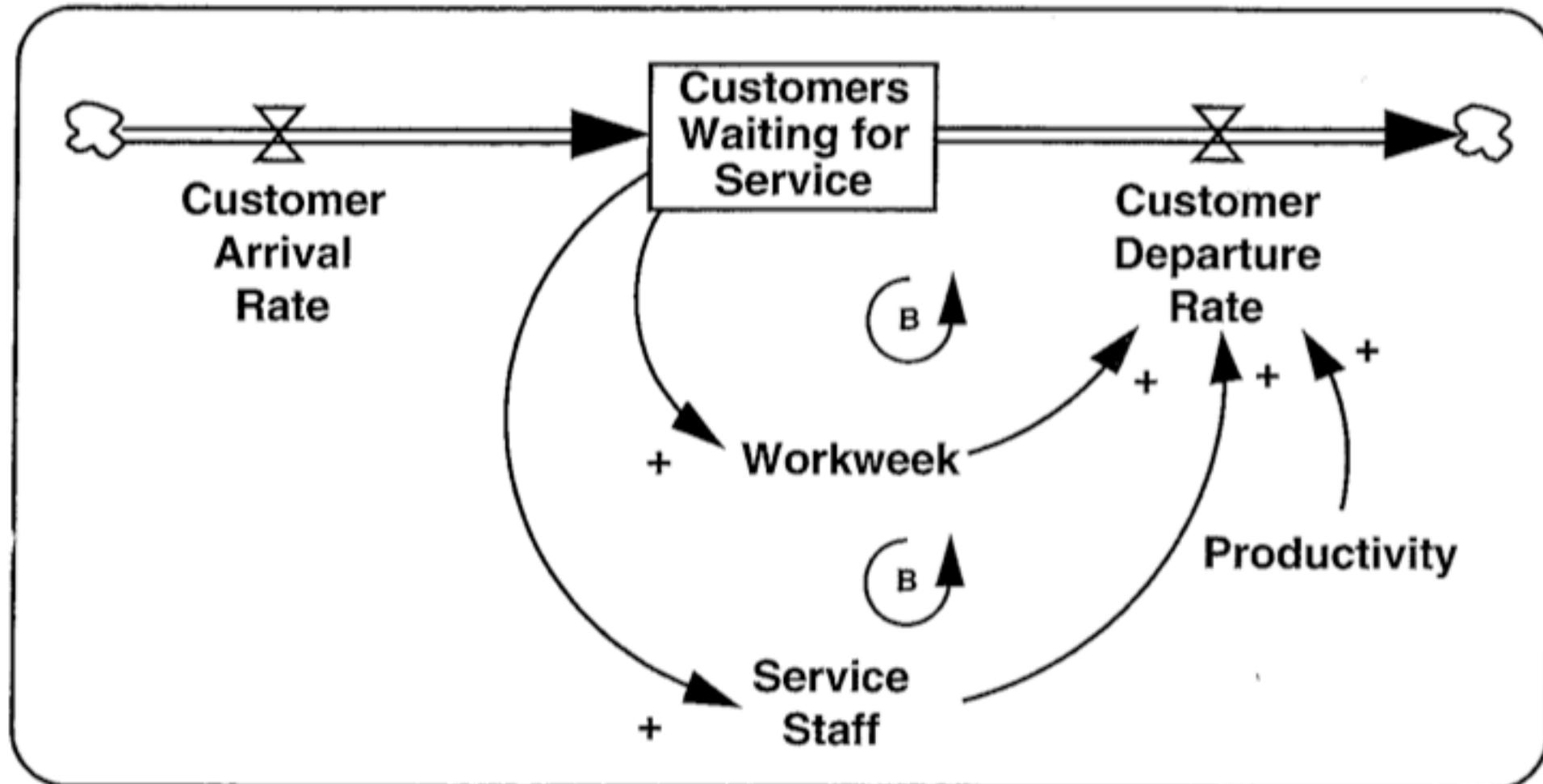
$$\text{Relative birth rate} = f(\text{Food per capita})$$

$$\text{Food per capita} = \text{Food} / \text{Pop}$$

Modelling, Simulation, and Optimisation

Seuls les flux changent les stocks





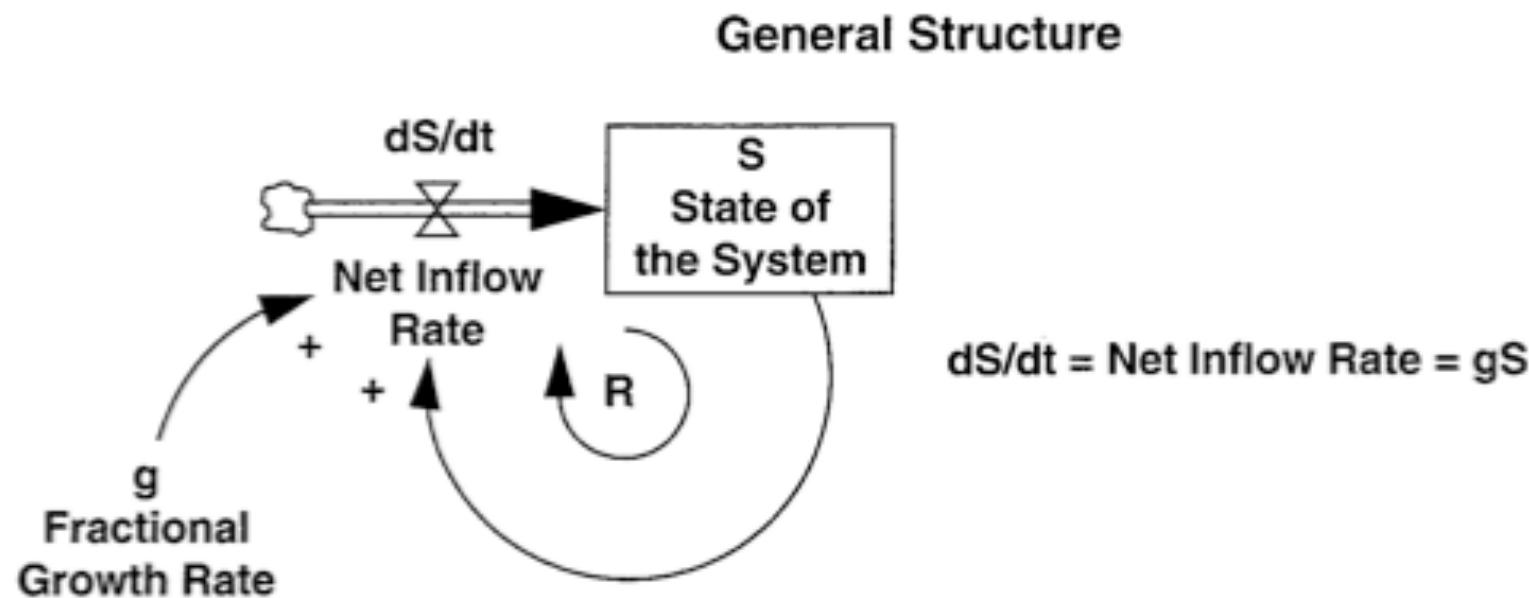
Modèles Dynamiques à Rétroaction

Un survol
(Référence: Sterman, Chapitres 8, 9, 11)

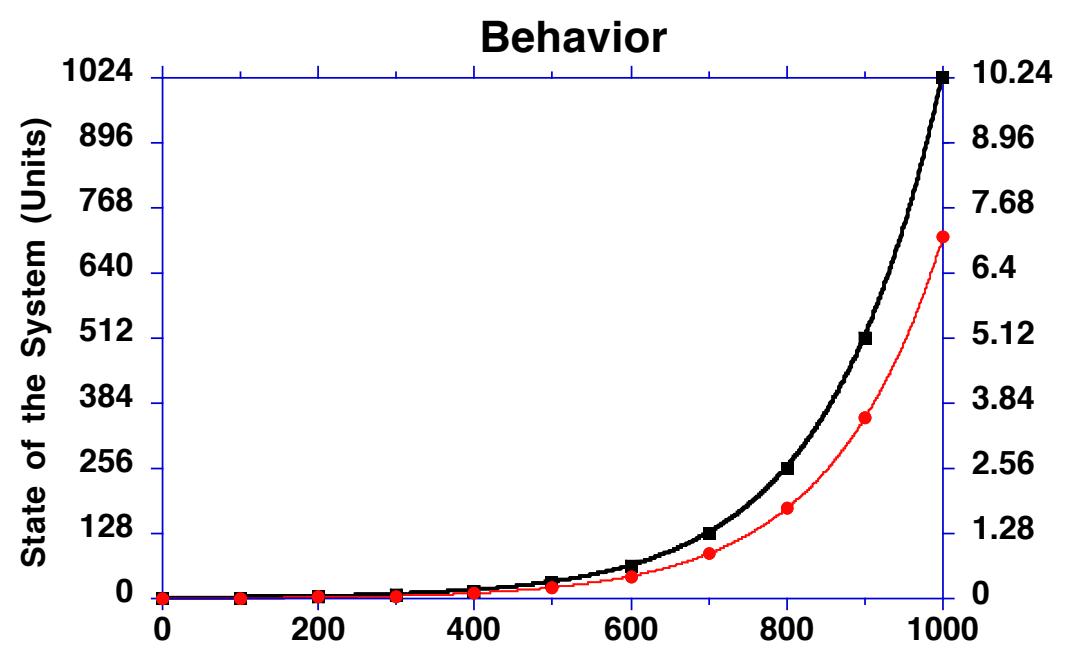
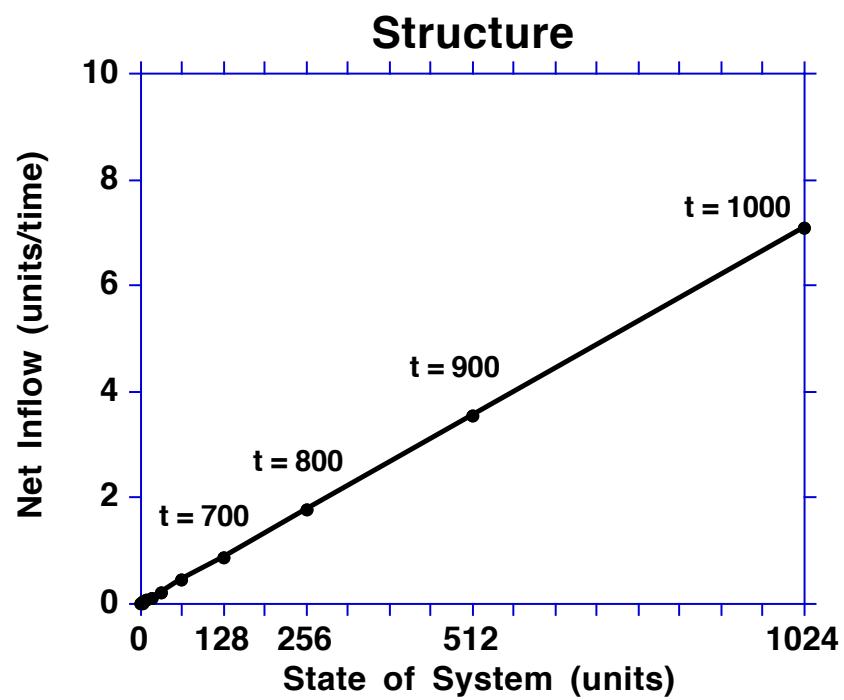
Rétroaction positive et croissance exponentielle

Rétroaction positive

- Pour un système de premier ordre on a un seul stock (variable d'état)



- Le stock accumule du net inflow (entrée nette)



La règle des 70

- Quand le stock augmente, le net inflow augmente aussi
- Effet d'avalanche: le stock double en un temps fini
- Temps de doublement:

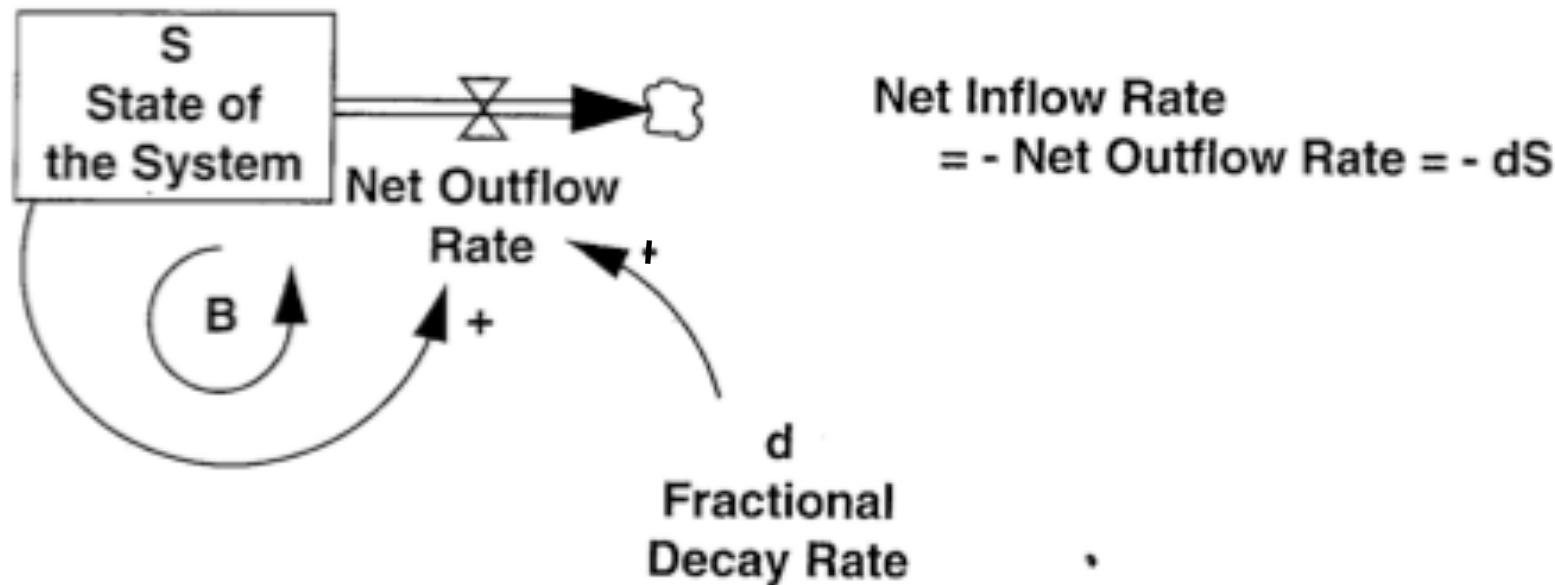
$$2S(0) = S(0)e^{gt_d}$$

$$t_d = \frac{\ln(2)}{g} \quad t_d = \frac{70}{100g}$$

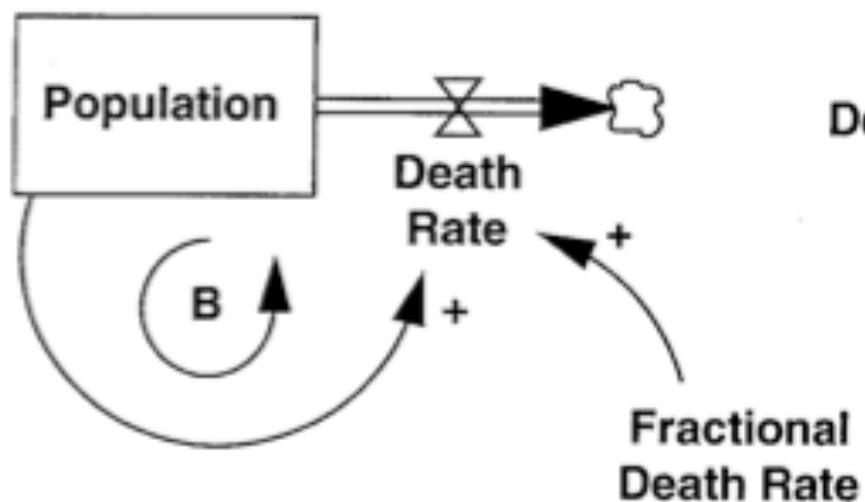
Rétroaction négative et décroissance exponentielle

Rétroaction négative

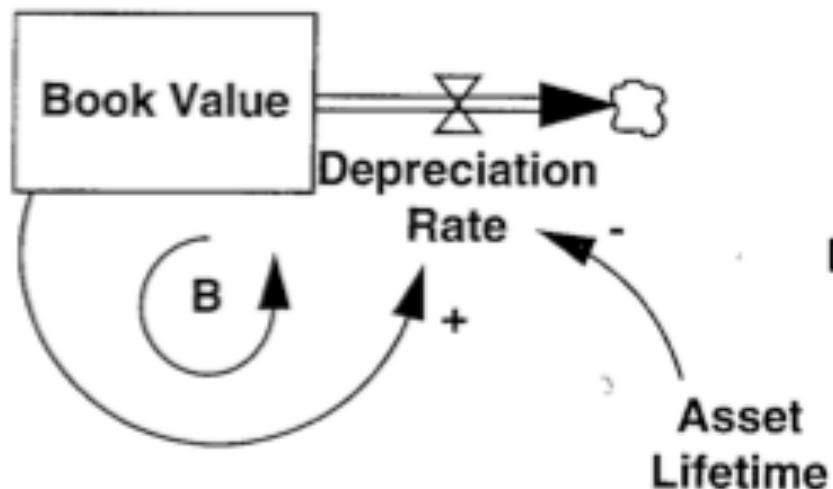
- Juste une seule variable



- Le net outflow (sortie nette) réduit le stock $S(t) = S(0)e^{-dt}$
- Net outflow: $-d*S$

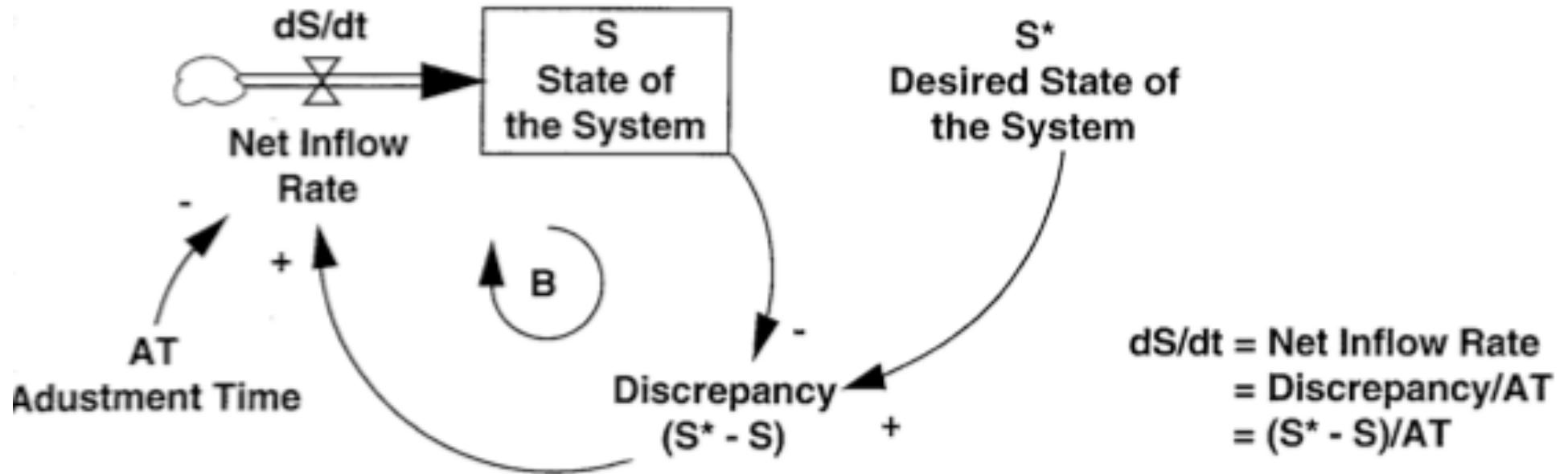


Death Rate
 $= \text{Fractional Death Rate} * \text{Population}$



Depreciation Rate
 $= \text{Book Value}/\text{Asset Lifetime}$

Objectif explicite



Analyse dimensionnelle

$$[\text{taux}] = x / \text{temps}$$

$$[\text{Adj. time}] = \text{temps}$$

$$[\text{Erreur}] = x$$

$$[\text{Etat}] = x$$

Solution Analytique

$$\frac{dS}{dt} = \frac{(S^* - S)}{\tau} \quad z = S^* - S$$

$$-\frac{dz}{z} = \frac{dt}{\tau} \quad -\ln(z) + \ln(z_0) = \frac{t - t_0}{\tau}$$

$$\frac{z_0}{z} = e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \quad S^* - S = (S^* - S(0))e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

$$S(t) = S^* - (S^* - S(0))e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Mi-Vie

- L'erreur est divisée par 2 quand .. mais alors:

$$\frac{S^* - S}{S^* - S(0)} = 0.5$$

$$0.5 = e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

- ce qui donne $-ln(2) = -\frac{t - t_0}{\tau}$
- et

$$t = ln(2)\tau = 0.70\tau$$

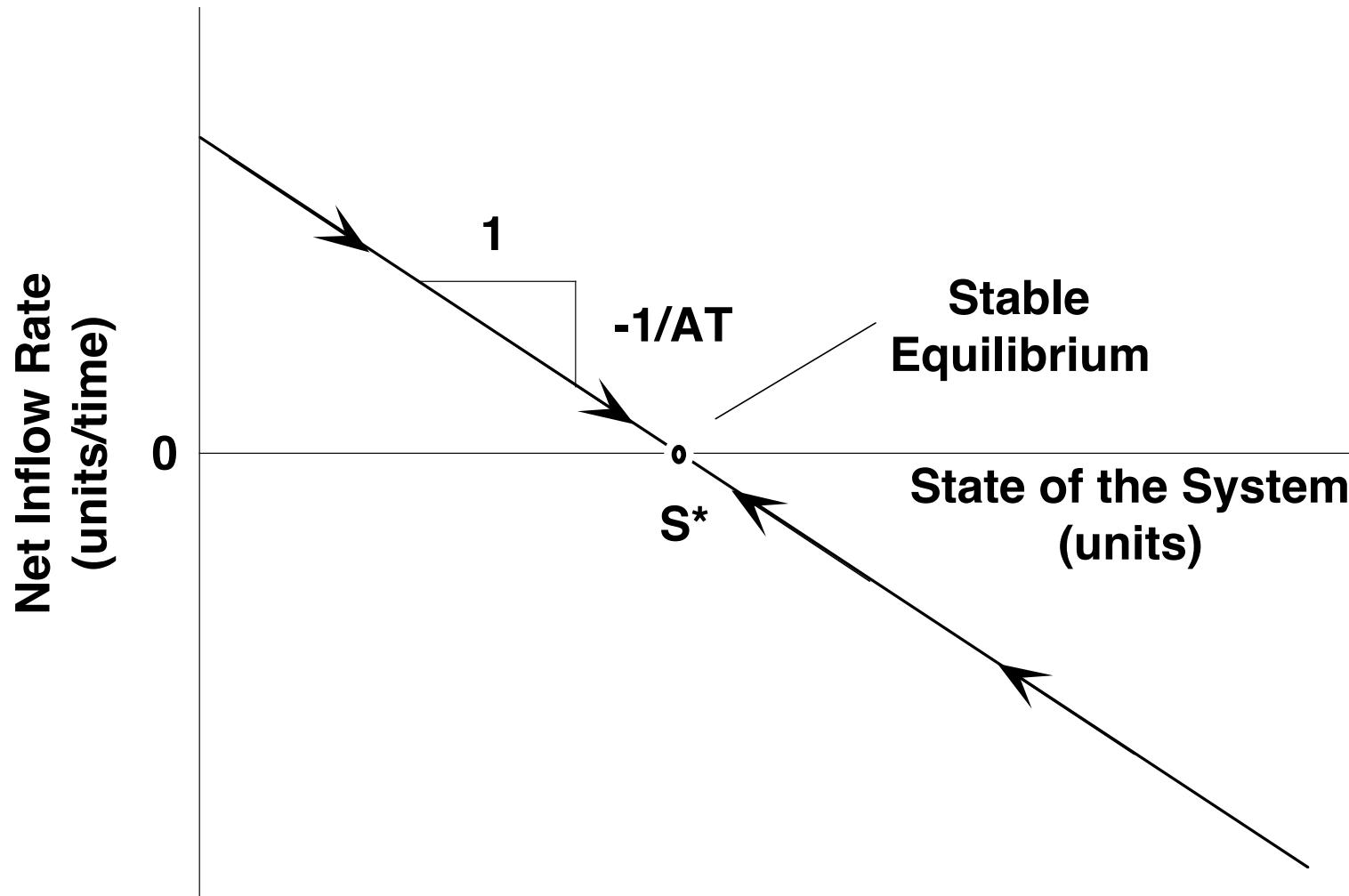
- C'est encore la **Règle de 70!**
- La mi-vie arrive à 70% du temps caractéristique

Temps d'ajustement

- Aussi nommé **temps caractéristique** du système
- Quand l'action de correction n'est qu'une différence:

$$net_inflow_rate = \frac{S^* - S}{\tau}$$

$$\text{Net Inflow Rate} = -\text{Net Outflow Rate} = (S^* - S)/AT$$



Rate equation for first order linear negative loop system:

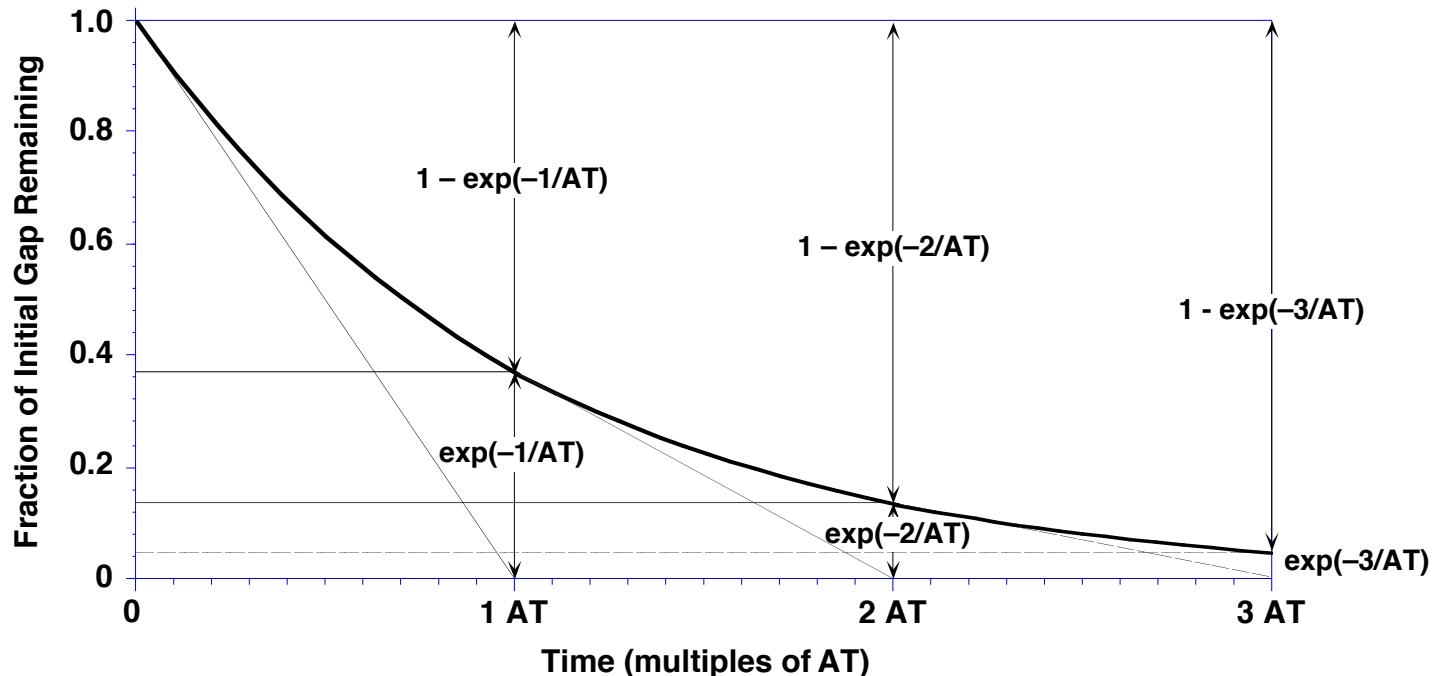
$$\text{Net Inflow Rate} = -\text{Net Outflow Rate} = (S^* - S)/AT$$

Analytic Solution:

$$S(t) = S^* - (S^* - S(0)) \cdot \exp(-t/AT)$$

State of the System = Desired State of the System - Initial Gap * Fraction of Initial Gap Remaining

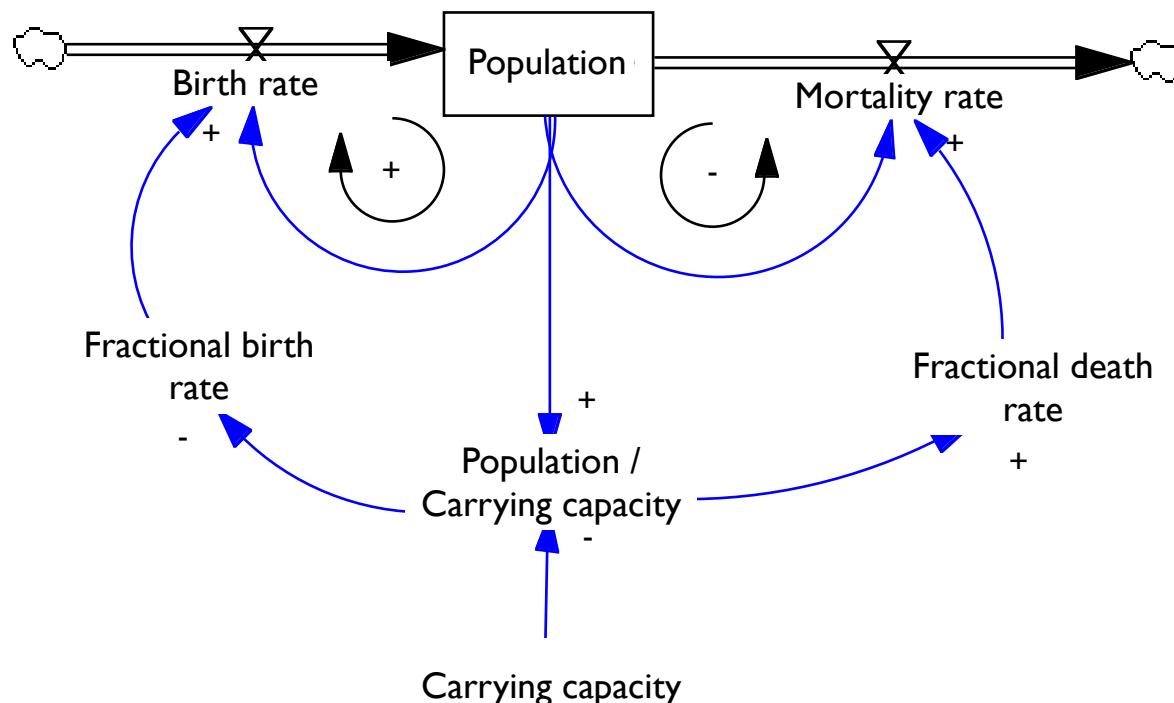
State of the System = Desired State of the System - Gap Remaining



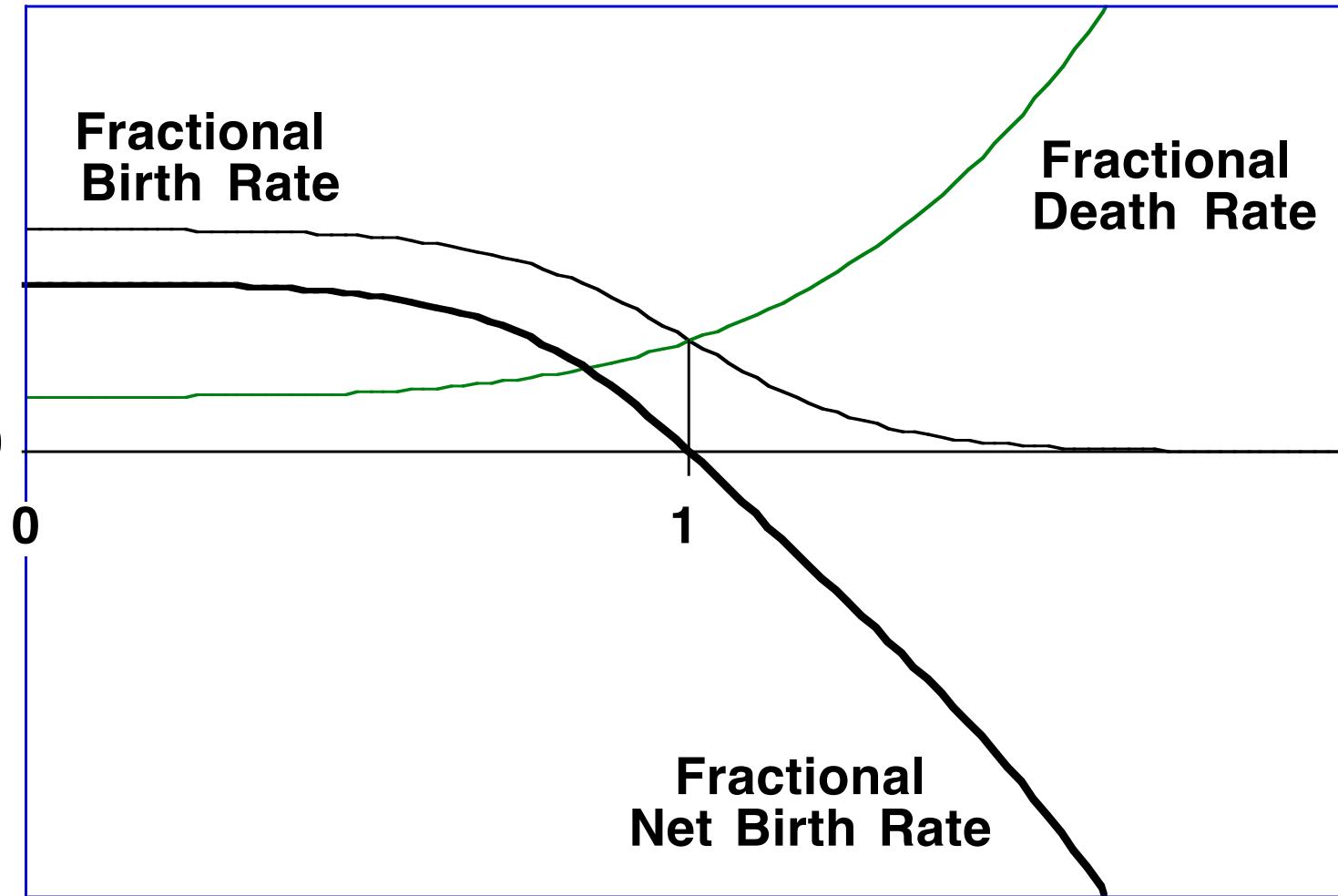
Systèmes Non Linéaires: Croissance en S

Le modèle et ses équations

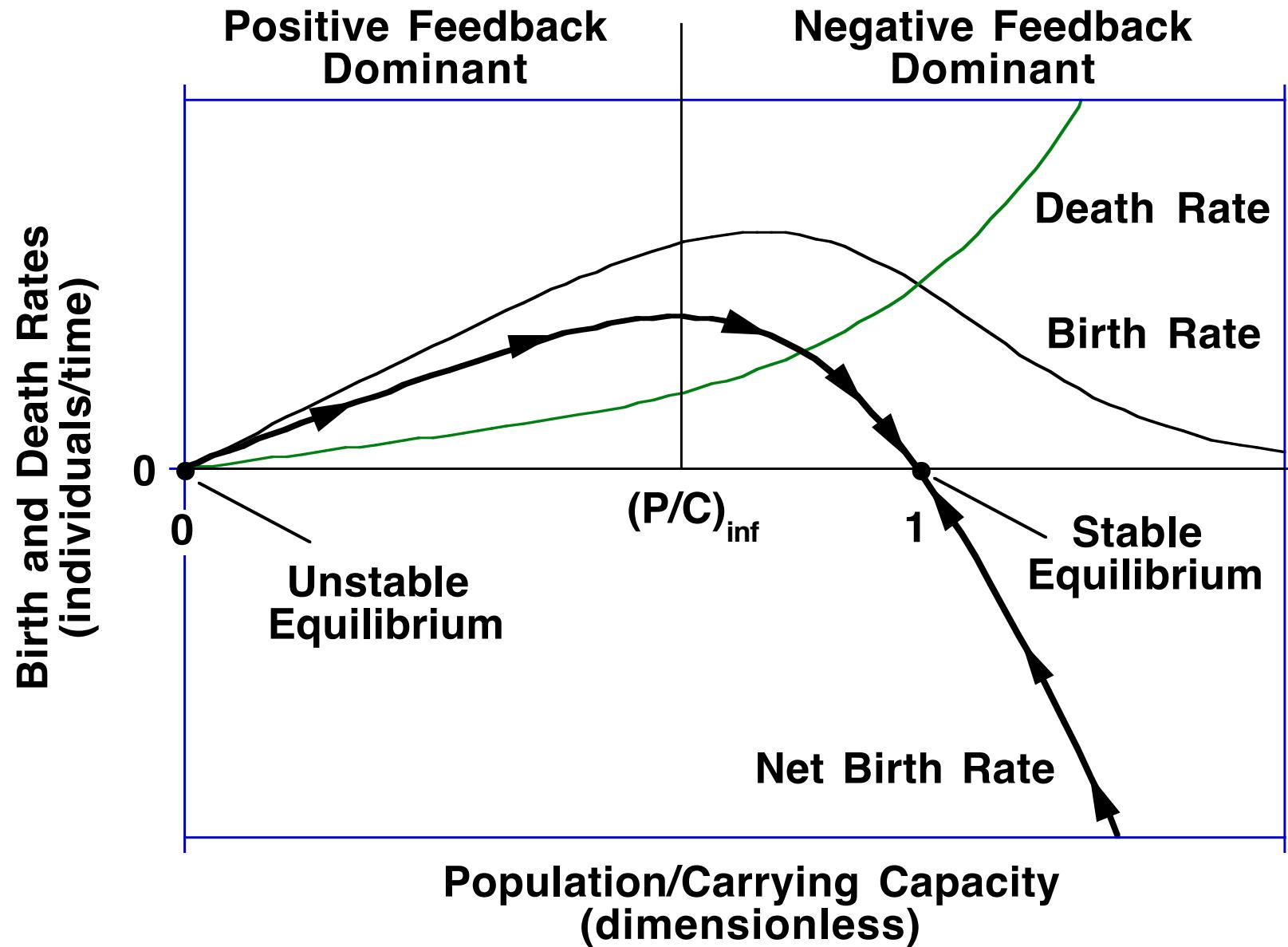
$$\frac{dP}{dt} = b\left(\frac{P}{C}\right)P - d\left(\frac{P}{C}\right)P$$



Fractional Birth and Death Rates
(1/time)

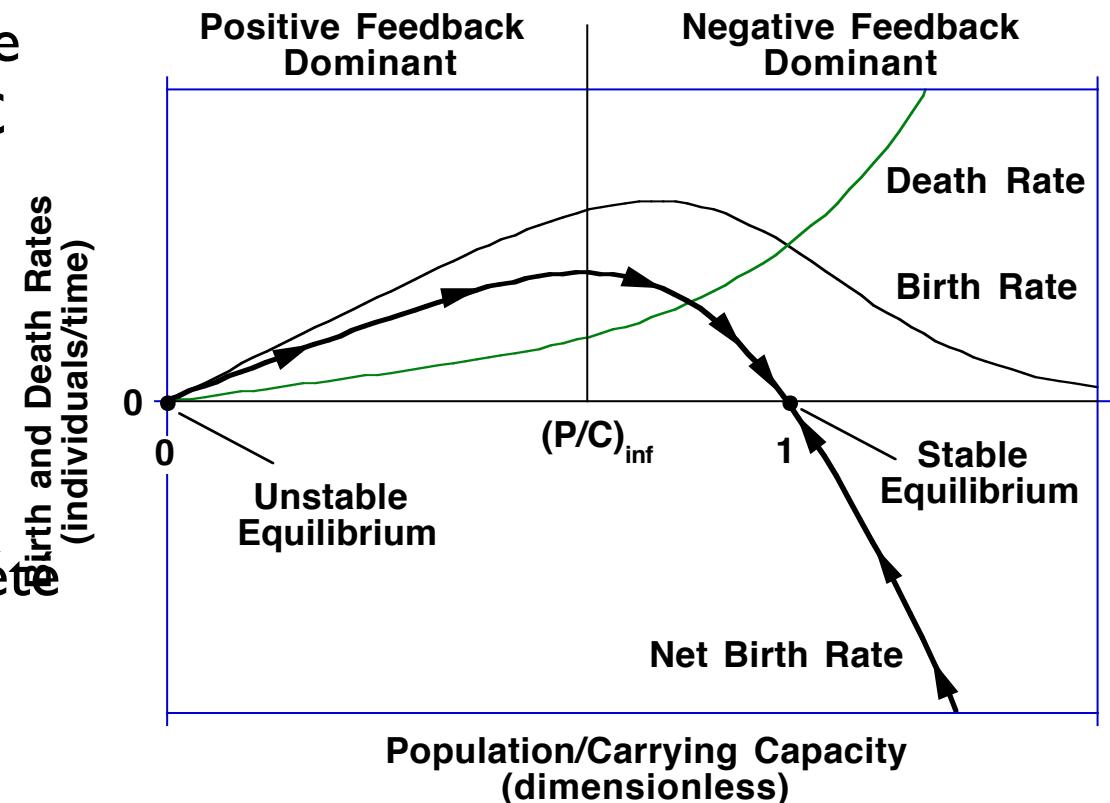


Population/Carrying Capacity
(dimensionless)



Croissance logistique

- Le taux de croissance nette devient négatif quand $P > C$
- Il y a un nombre infini de courbes avec un comportement en S
- La croissance logistique a été formalisée par François Verhulst (1838)



Modèle mathématique

- La croissance nette est une fonction de la population P

$$\text{Net growth rate} = \frac{dP}{dt} = g(P, C) \cdot P = g\left(1 - \frac{P}{C}\right) P$$

Solution analytique de l'équation de logistique

$$\int \frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{C}\right)P} = \int gdt$$

$$\int \frac{CdP}{(C-P)P} = \int \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{C-P} \right] dP = \int gdt$$

$$\ln(P) - \ln(C-P) = gt + c$$

$$\ln(P) - \ln(C-P) = gt + \ln(P(0)) - \ln[C-P(0)]$$

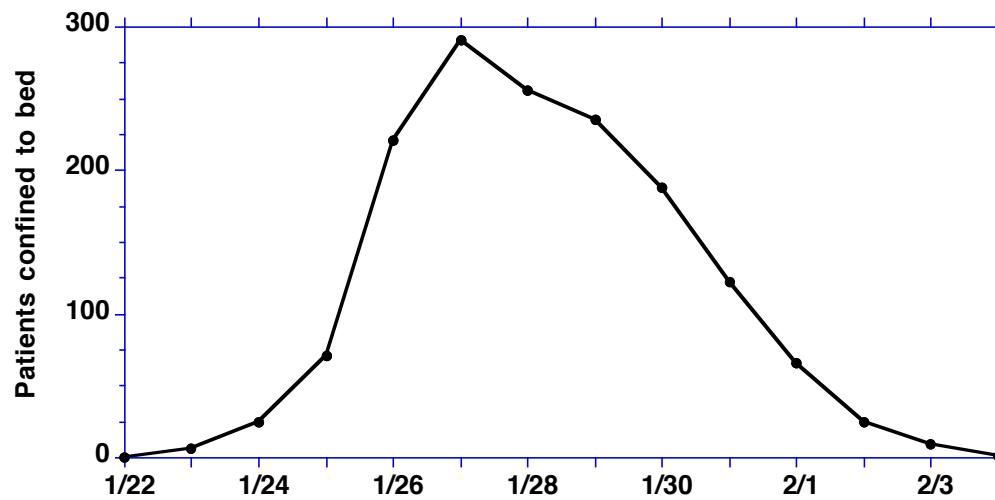
$$\frac{P}{C-P} = \frac{P(0)e^{gt}}{C-P(0)}$$

$$P(t) = \frac{C}{1 + \left[\frac{C}{P(0)} - 1 \right] e^{-gt}}$$

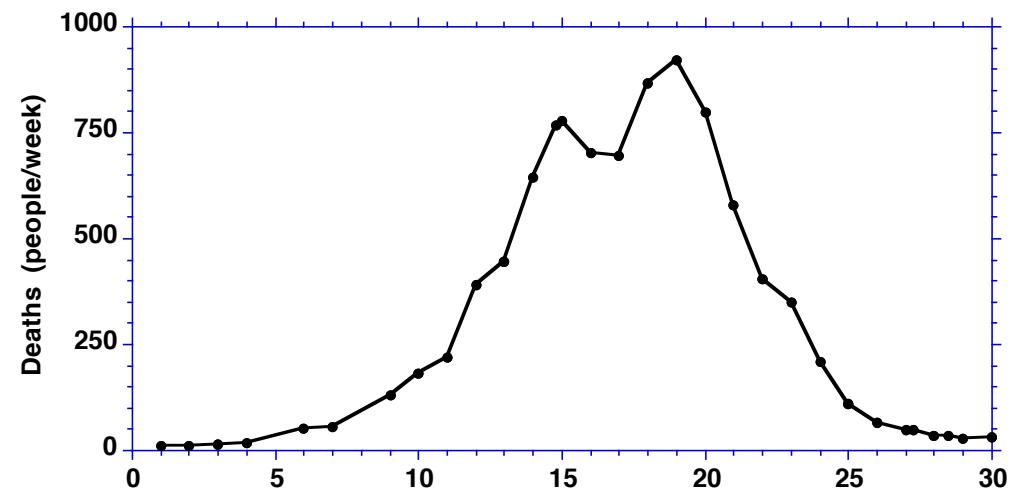
La dynamique des épidémies (SI and SIR models)

Le modèle SI

- Les épidémies suivent (svt.) une croissance en S suivant par un déclin abrupt
- S: susceptibles
- I: infectés



Influenza au RU

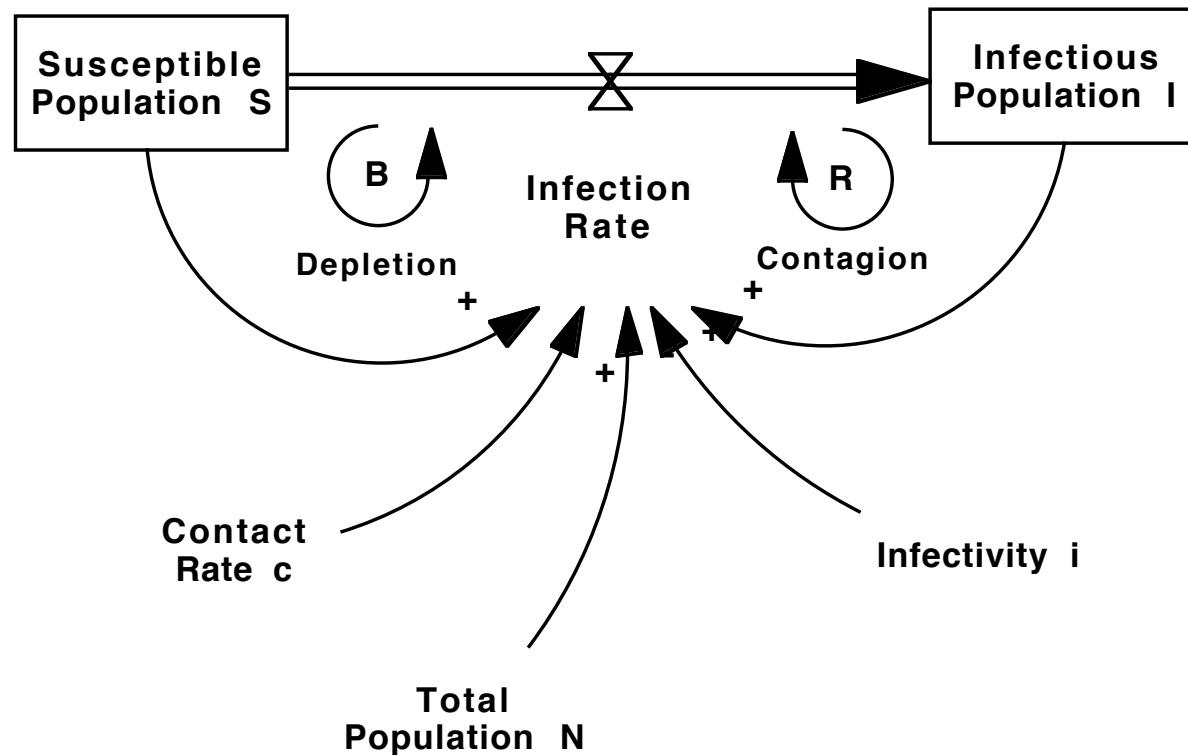


Peste en Inde (1905-6)

Hypothèses de modélisation

- On ne tient pas compte des naissances et des décès
- On ne tient pas compte des migrations
- La population est supposée homogène
- Une fois infectée, pas de guérison
- Les interactions dans la communauté ne sont pas modifiées par l'épidémie
- Pas de quarantaine

Structure du modèle



Equations du modèles

$$S + I = N$$

S: population susceptible

I: population infectée

N: total

$$\frac{dS}{dt} = \boxed{-(ciS) \frac{I}{N}} = -IR \quad \text{Taux d'infection}$$

i: infectiosité - prob. de contamination après contact

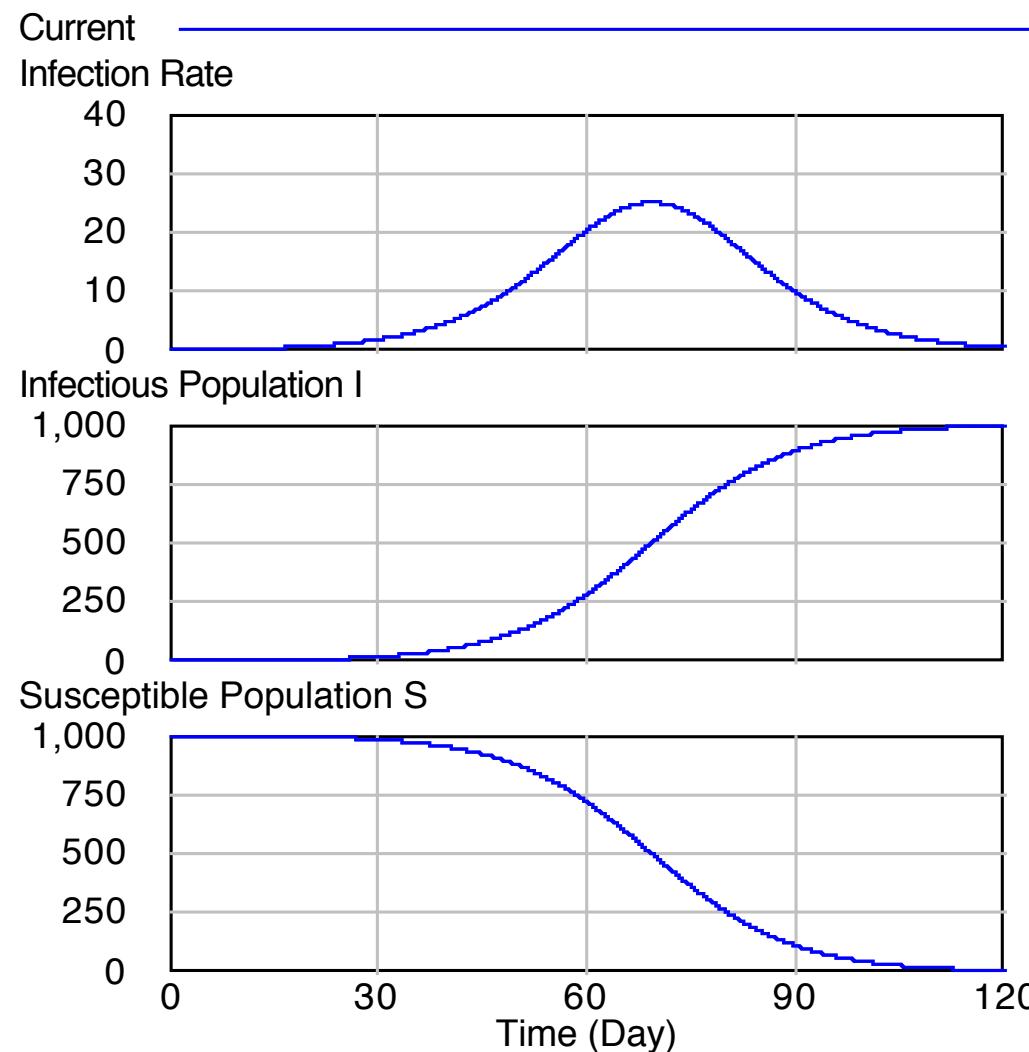
c: taux de contact [personnes au contact / personnes * unité de temps]

SI comme un modèle de croissance logistique

- Si on remplace $S = N-I$:

$$\frac{dI}{dt} = ci \cdot I \left(1 - \frac{I}{N}\right)$$

- On retrouve l'équation logistique
- lorsque la population infectée croît logistiquement, le taux d'infection (IR) croît et puis s'effondre



Contact Rate c

Current: 2

Infectivity i

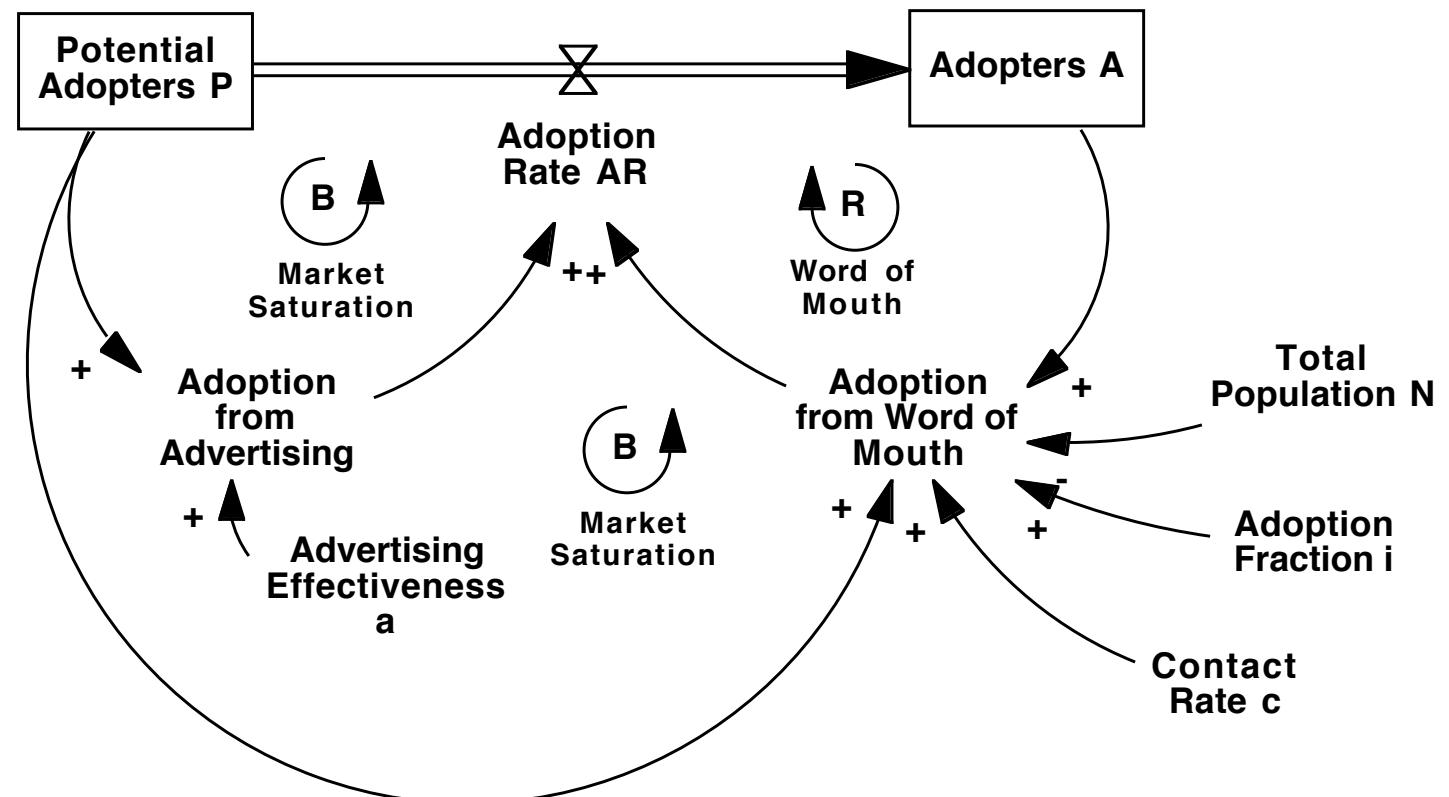
Current: 0.5

Total Population N

Current: 10,000

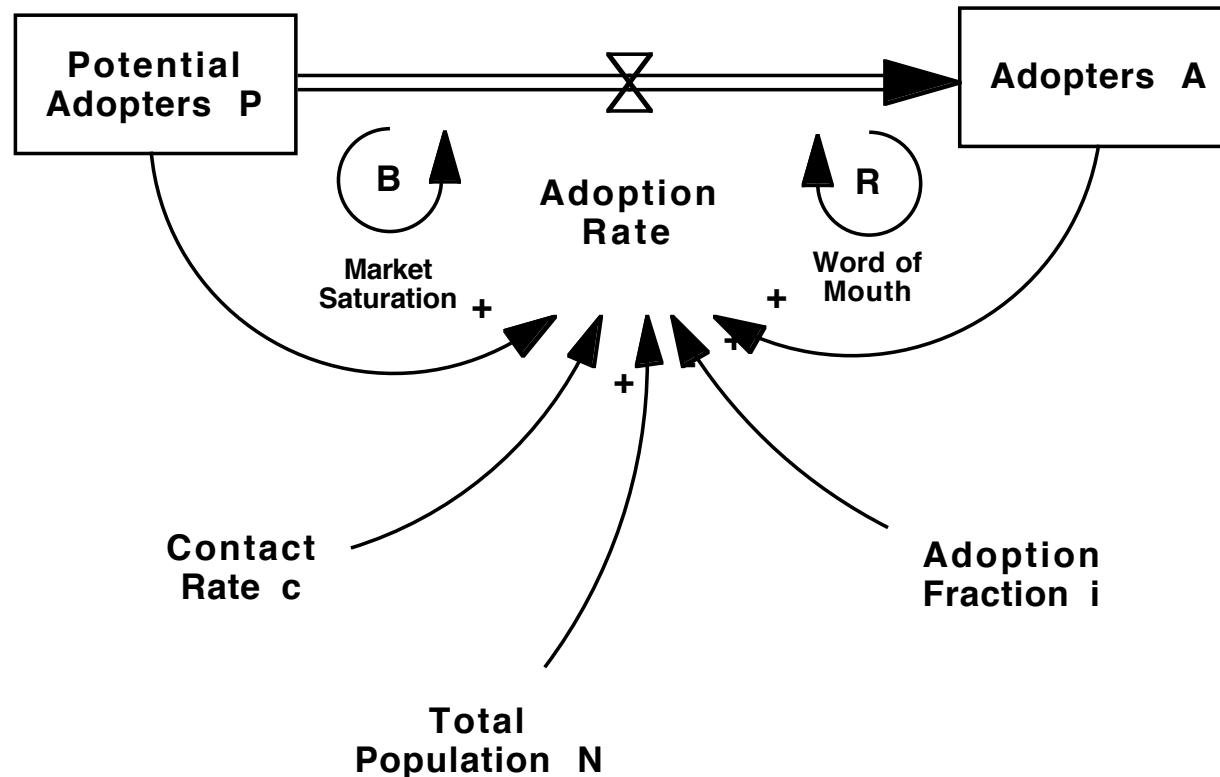
Le modèle de diffusion de Bass (1969)

- Si dans tous les modèles de croissance « zéro » est un point d'équilibre, comment est-il possible qu'un nouveau produit commence à se propager ?
- Bass a introduit l'effet de la publicité (directe et indirecte)



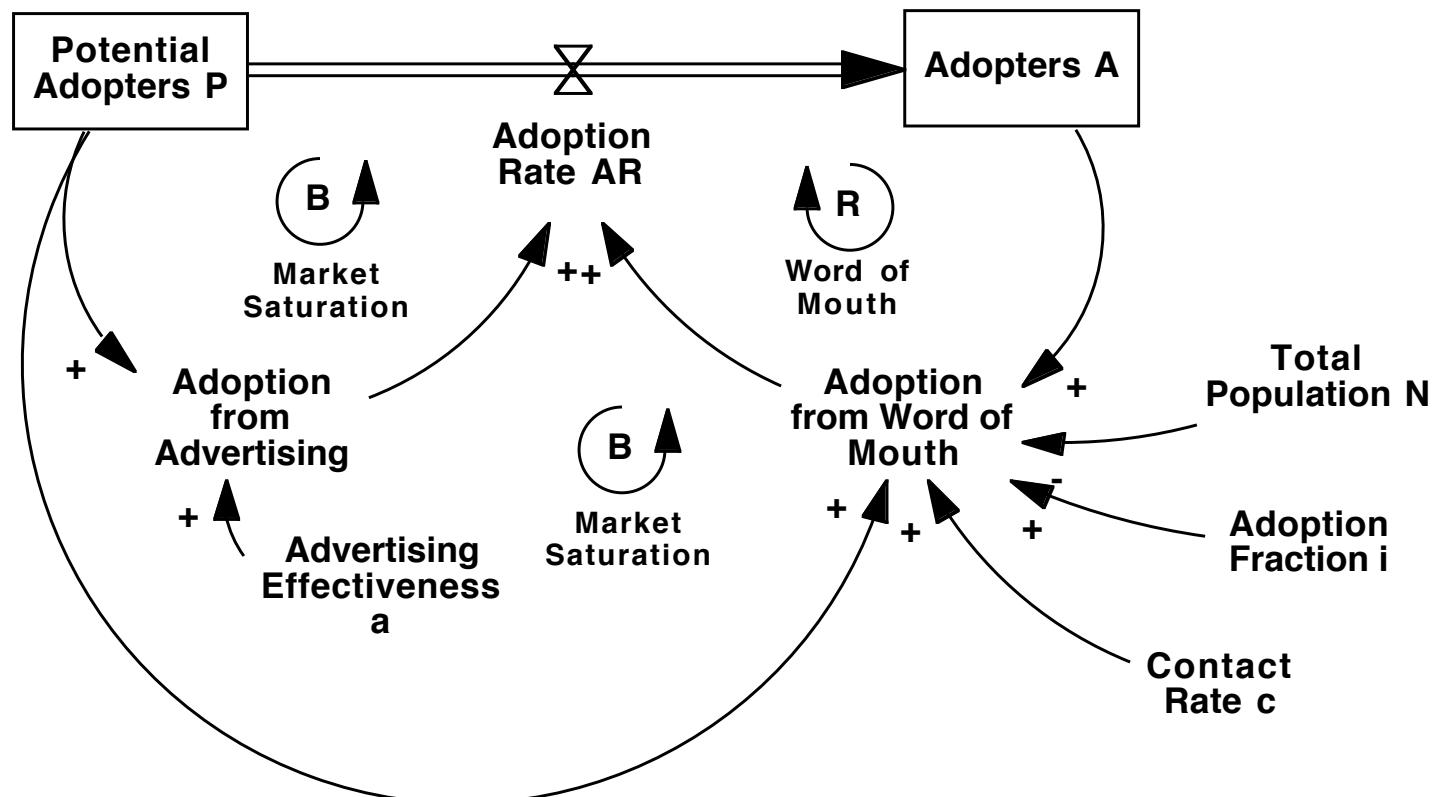
Adaptation directe du modèle SI

- Insuffisant (tant que adopters = 0, pas de bouche à oreille)
- Modélise la saturation du marché (aucun produit n'est éternel :))



Le modèle de diffusion de Bass (1969)

- Si dans tous les modèles de croissance « zéro » est un point d'équilibre, comment est-il possible qu'un nouveau produit commence à se propager ?
- Bass a introduit l'effet de la publicité (directe et indirecte)



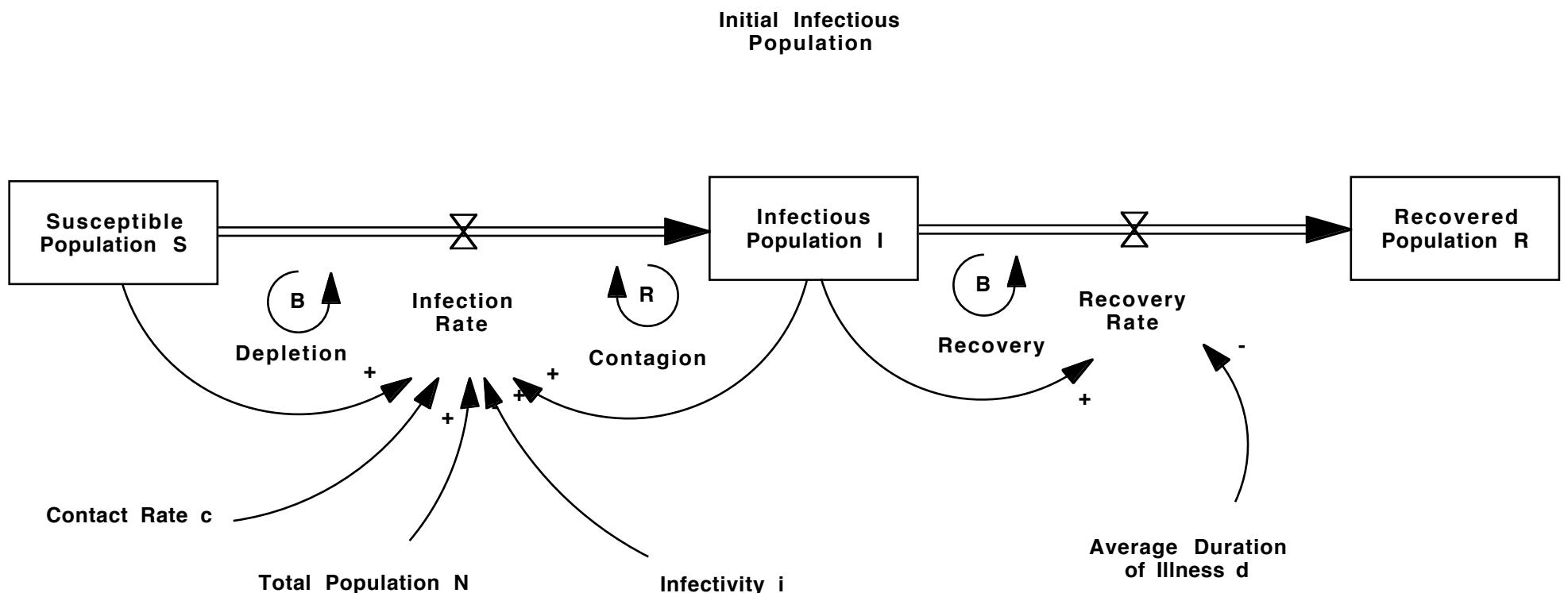
Le modèle SIR

- Utile pour modéliser les maladies hautement infectieuses
- S: susceptibles
- I: infectés
- R: guéries (**recovered**)

Hypothèses du modèle

- Kermack et McKendrik (1927)
- Relaxe l'hypothèse de SI que la guérison n'est pas possible
- Une fois guéri: on peut intégrer une forme d'immunité
 - certaines épidémies stoppent car le taux de guérison est supérieur au taux de contamination
 - ... ou parce que le taux de décès est supérieur au taux de contamination ... (e.g. Ebola)

Structure du modèle



Equations du modèle

$$\frac{dS}{dt} = -(ciS) \frac{I}{N}$$

Population susceptible

$$RR = \frac{I}{d}$$

Taux de guérison
d: durée moyenne de maladie

$$\frac{dI}{dt} = (ciS) \frac{I}{N} - \frac{I}{d}$$

Population infectée

$$\frac{dR}{dt} = \frac{I}{d}$$

Population guérie

$$S + I + R = N$$

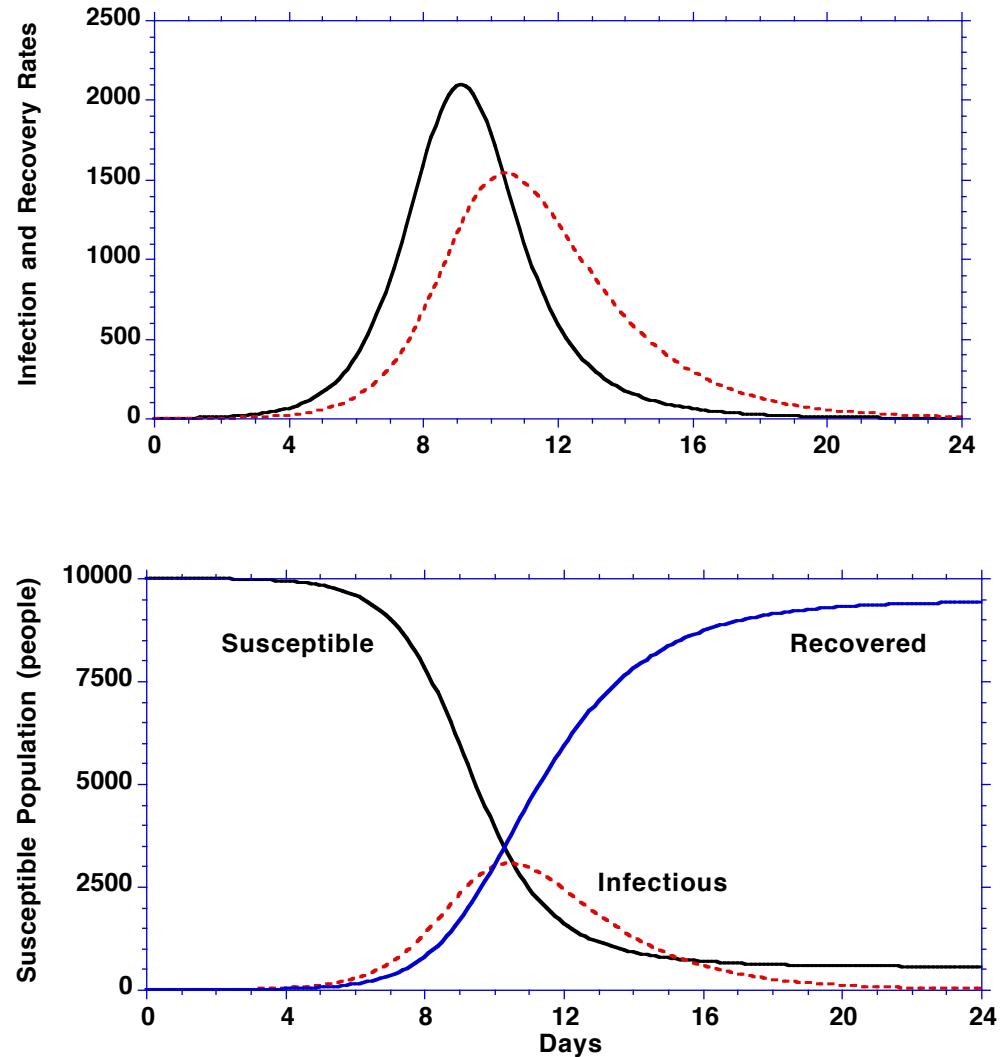
Population total

Analyse du modèle

- Une épidémie est une maladie qui apparaît durant une période dans une proportion supérieure aux attentes
- Comment pouvons nous observer une épidémie avec notre modèle?
- Cela dépend de la boucle dominante
- Dans la boucle positive, les paramètres sont le taux de contact (c) et la contagiosité (i)
- Aussi, la durée de maladie a une impact: le plus long elle est, la plus grande est la probabilité d'une épidémie

Le point de basculement

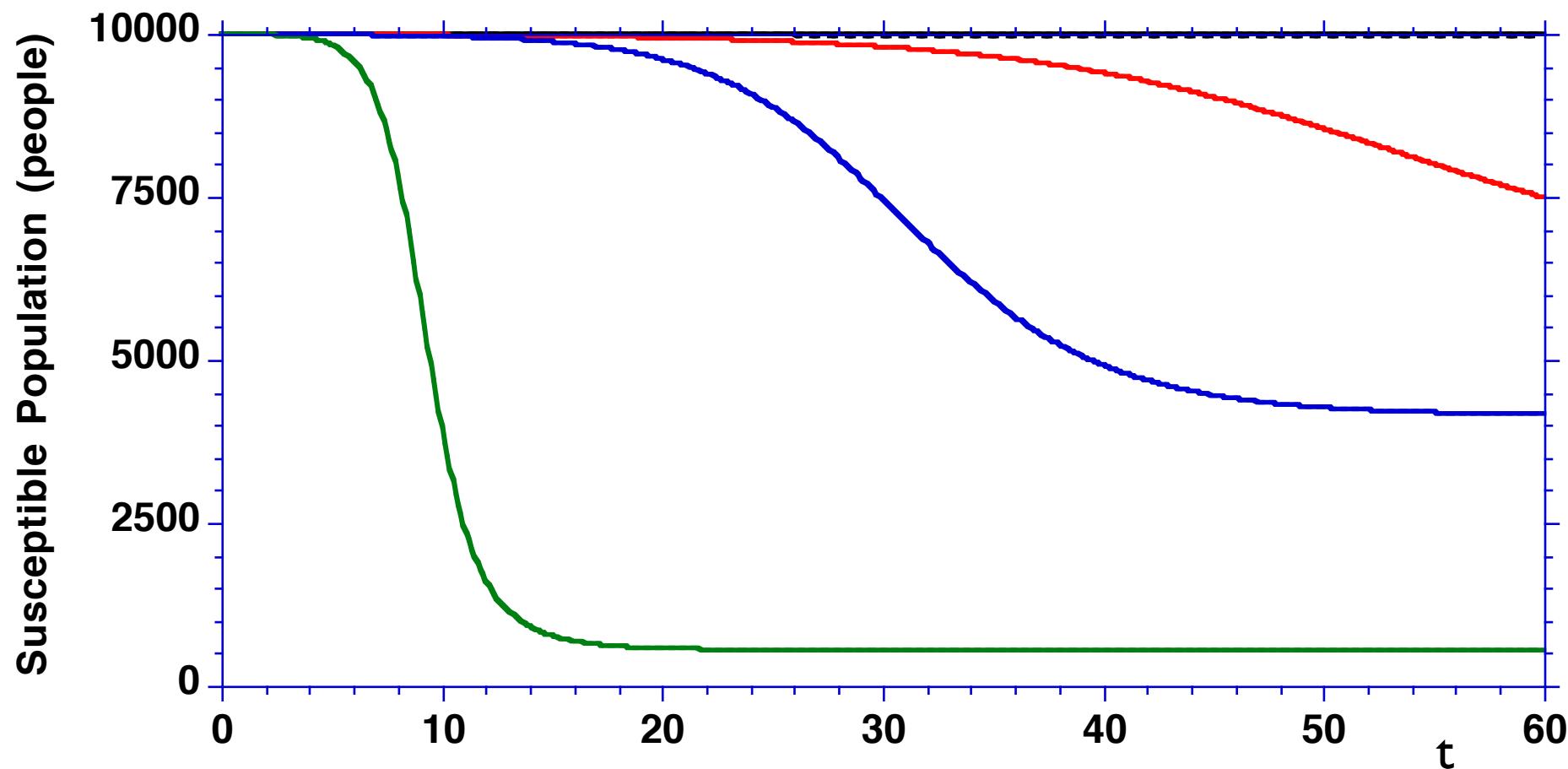
- Quel est le point au-delà duquel nous aurons une épidémie?
- Quelle est la configuration de paramètres qui éloignent notre système de la **stabilité** (no epidemics) et l'emmènent vers **l'instabilité** (explosion épidémique)?

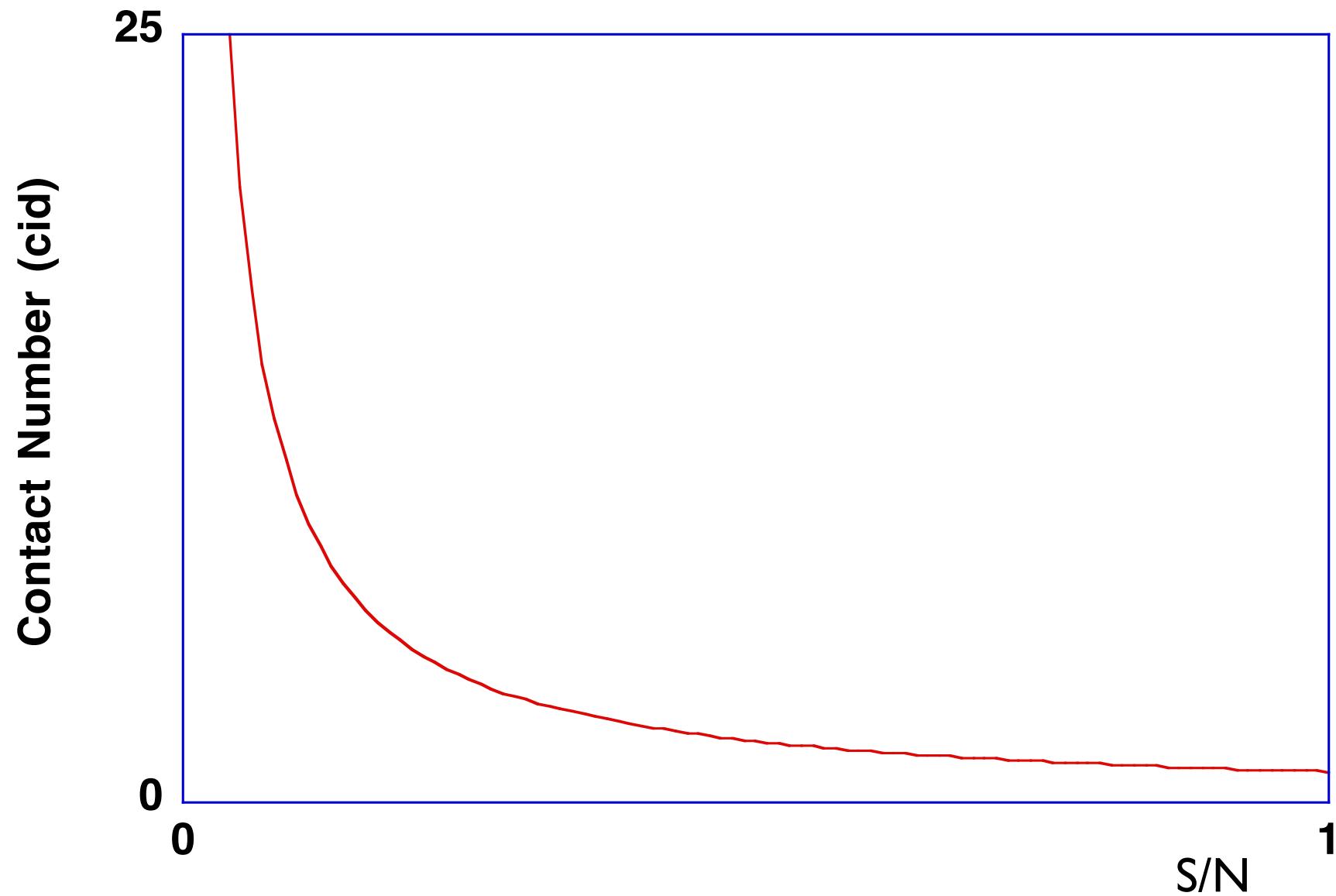


Calcul du point de bascule

- La bascule arrive quand le taux d'infection est supérieur au taux de guérison $IR > RR$
 - $c_i S(I/N) > I/d$
 - $c_i d (S/N) > 1$





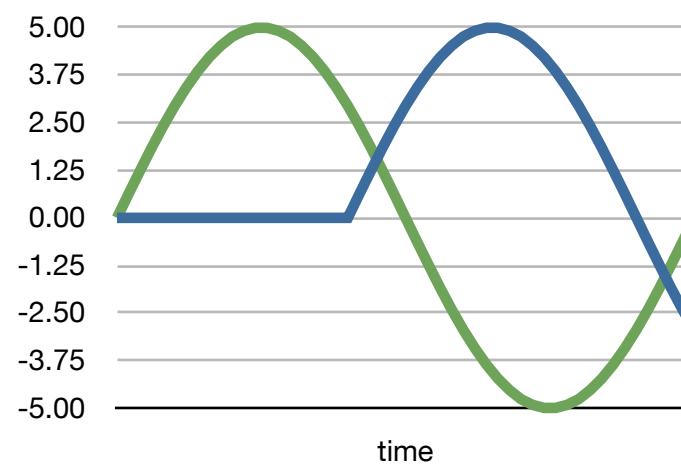


Modéliser les retards

Définition



- Un **retard** est un processus dont la sortie correspond à l'entrée translatée dans le temps

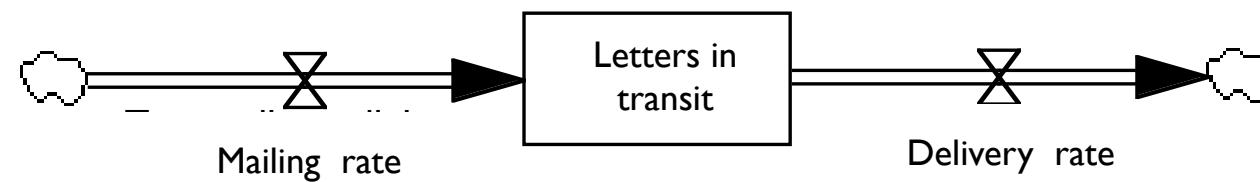


Exemples

Structure générale d'un retard



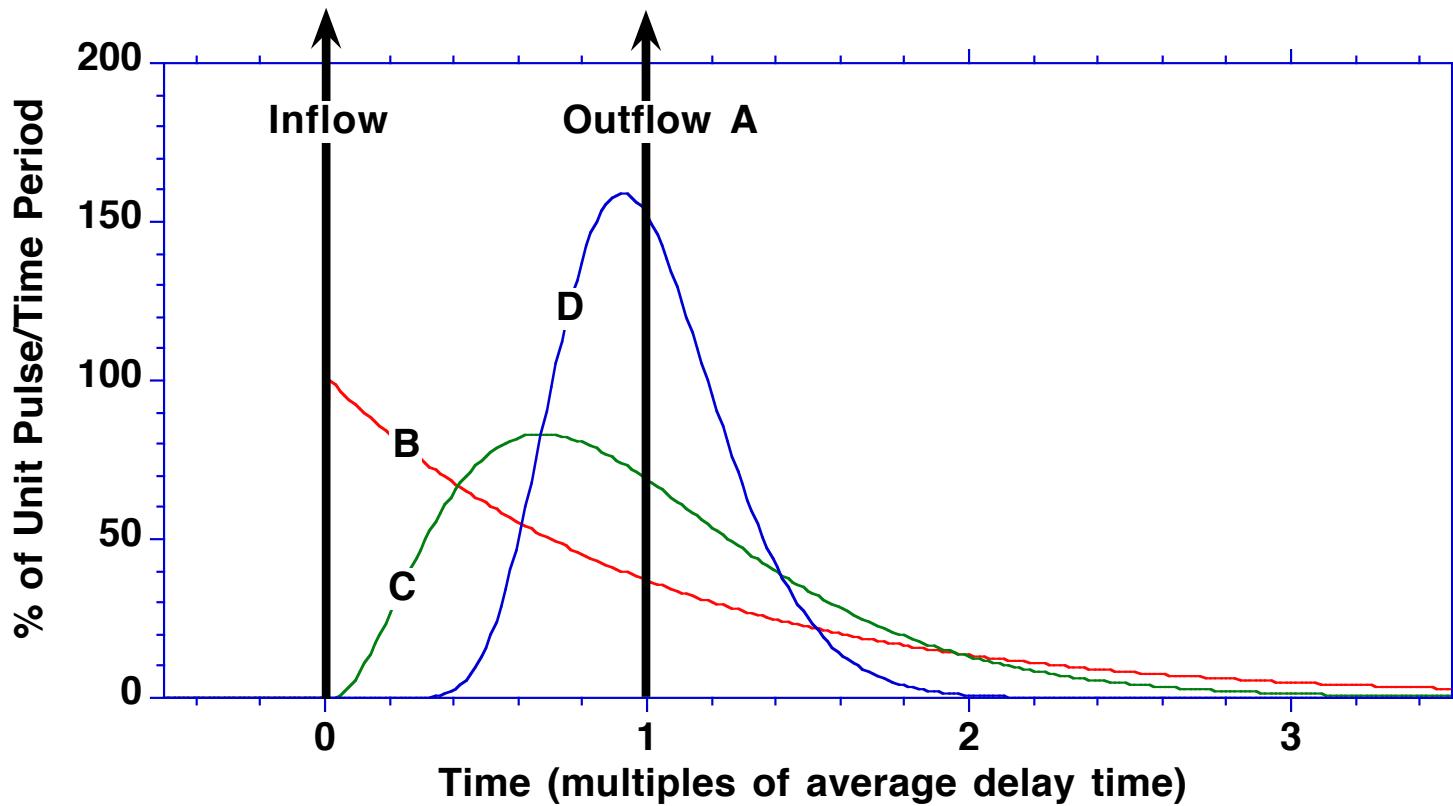
Retard au bureau de tri de la poste



Structure des retards

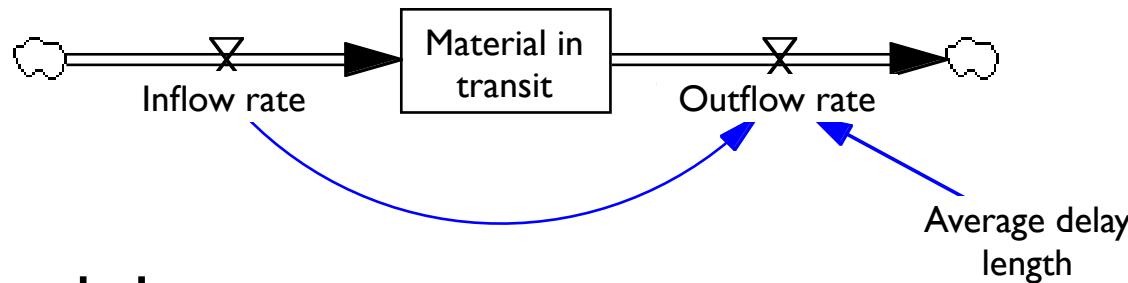
- Les retards « modélisent » ou approchent un processus dynamique
- Le débit de sortie (du retard) peut dépendre des ressources disponibles
- Parfois on peut assumer que le retard est **independant** et qu'il ne dépend donc que des entrées passées (**retards purs**)
- Modéliser un retard nécessite de déterminer:
 - I. la durée moyenne de retards
 2. la distribution autour de la moyenne?

Distribution de sortie



Cela correspond au calcul de la réponse **impulsionnelle**

Retard dans un pipeline (canalisation)

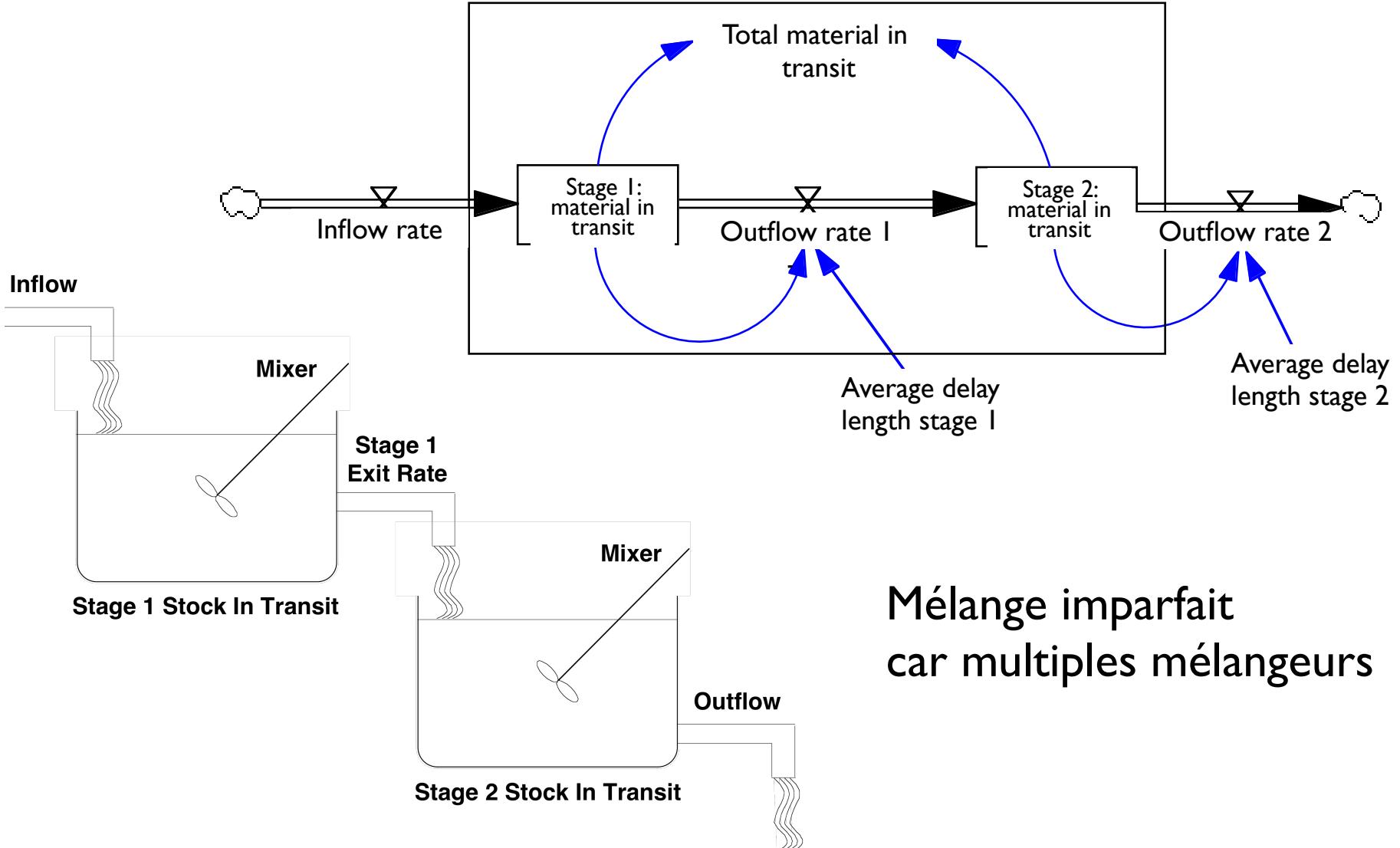


- Aka retard de **transport**
- Retard pur constant = D

$$\frac{d(\text{Material in transit})}{dt} = \text{inflow}(t) - \text{outflow}(t)$$

$$\text{outflow}(t) = \text{inflow}(t - D)$$

Retards d'ordre plus élevés



outflow = DELAYn(inflow, D)

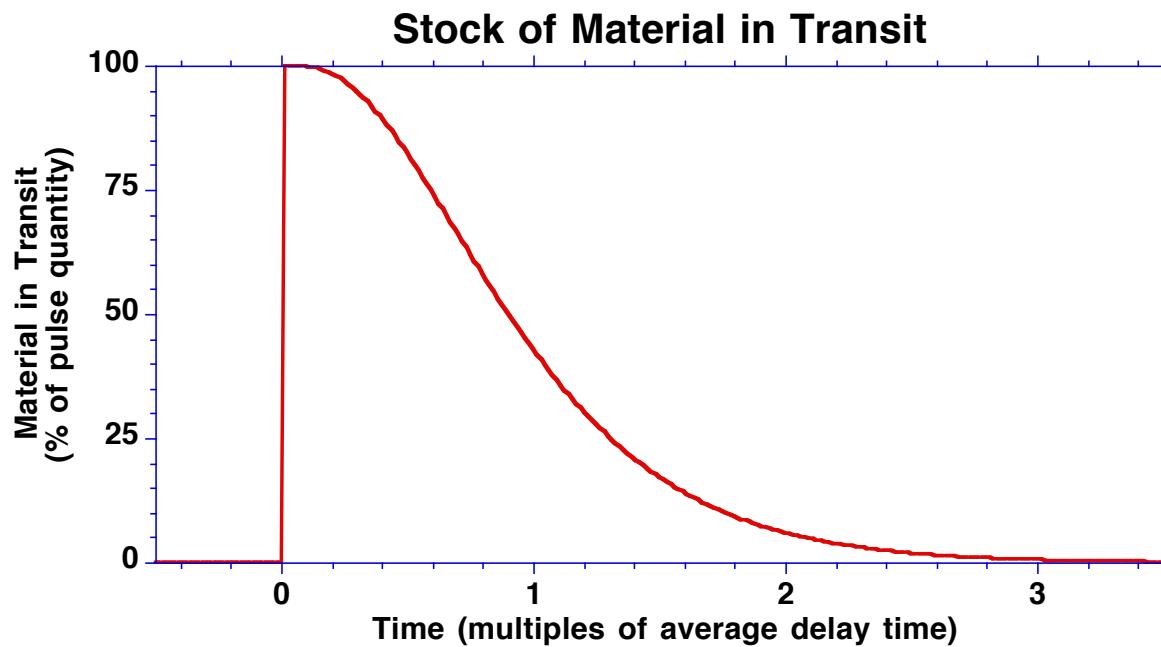
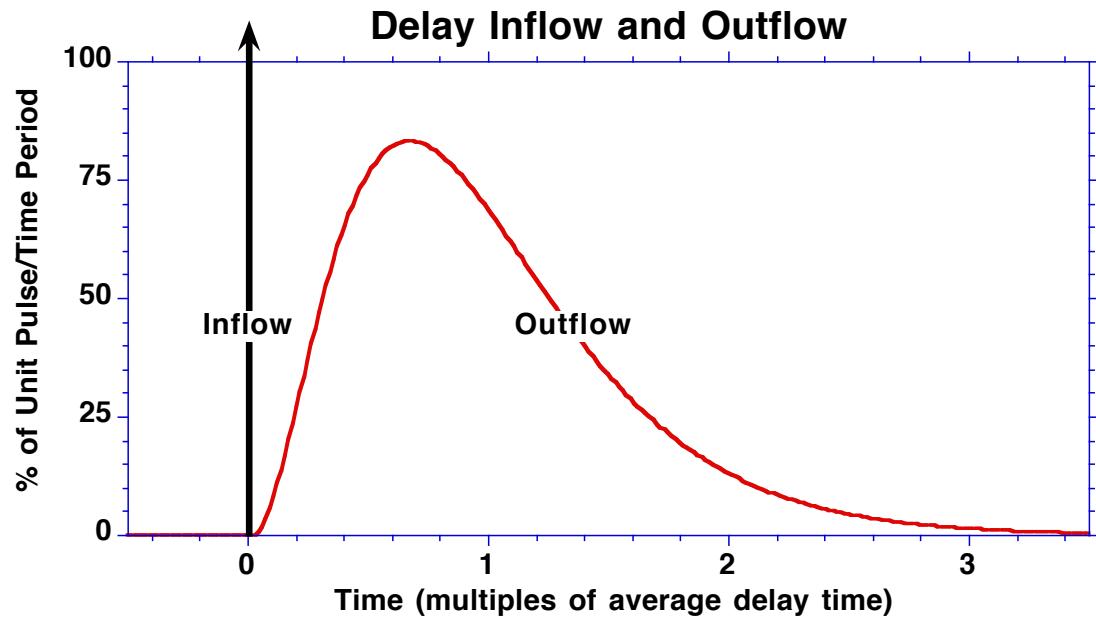
$$\text{total stock in transit} = \sum_{i=1}^n \text{stock in transit}_i$$
$$\frac{d(\text{stock in transit}_i)}{dt} = \text{net inflow}_i$$

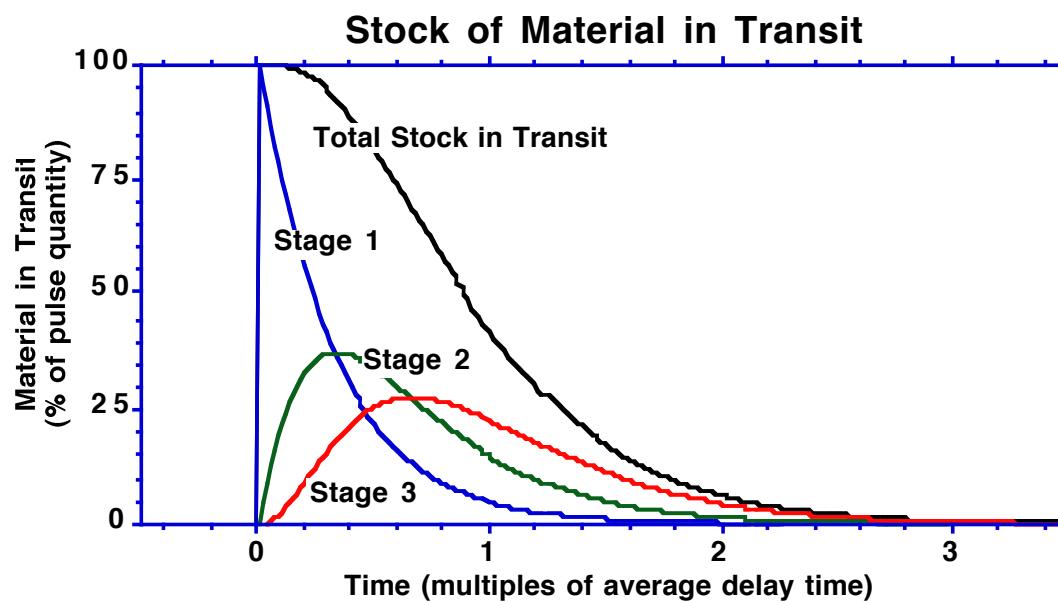
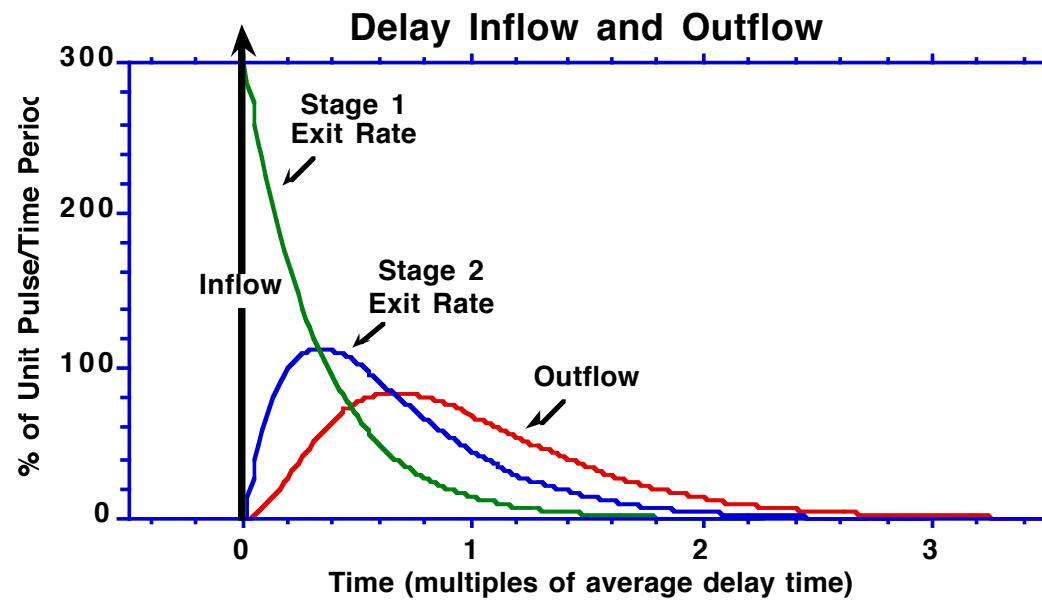
$$\text{stock in transit}_i(0) = \text{inflow} \frac{D}{n}$$

$$\text{net inflow rate}_i = \begin{cases} \text{inflow} - \text{net outflow stage}_i & i = 1 \\ \text{net outflow stage}_{i-1} - \text{net outflow stage}_i & i \in (2, \dots, n-1) \\ \text{net outflow stage}_{i-1} - \text{outflow} & i = n \end{cases}$$

$$\text{net outflow stage}_i = \frac{\text{stock in transit}_i}{D/n}$$

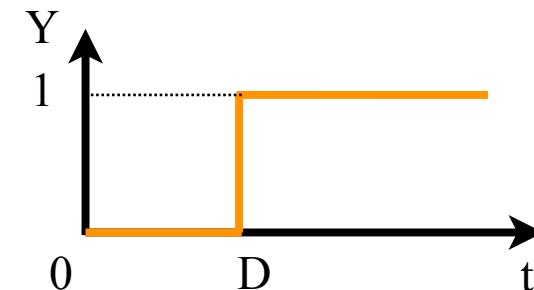
$$\text{outflow} = \frac{\text{stock in transit}_n}{D/n}$$





Combien de stock en transit?

- Hyp: l'entrée est constante
- Dans le cas du retard « pipeline »
 - L'entrée U est un “step”
 - La sortie Y est 0 pour $t < D$, puis 1



$$S(t) = \int_0^t [u(s) - y(s)] ds$$
$$S_\infty = \int_0^D [u - 0] ds + \int_D^\infty [u - u] ds = Du$$

La loi de Little

- Le nbre moyen de clients dans un système stable = fréquence d'arrivée * le temps moyen passé
- Pour un système de premier ordre
 - $y=S/D$
- A l'équilibre $in=out$, $y=u$, alors ...
 - $S=Dy = Du$
- et cette loi est valable pour les systèmes de **tout ordre!**
- Exemples:
 - accumulation de toxiques dans la chaîne alimentaire
 - retard dans la construction de centrales

Instabilités et Oscillations

System	Stock	Supply Line	Loss Rate	Acquisition Rate	Order Rate	Typical Behavior
Inventory management	Inventory	Goods on order	Shipments to customers	Arrivals from supplier	Orders for goods	Business cycles
Capital investment	Capital plant	Plant under construction	Depreciation	Construction completion	New contracts	Construction cycles
Equipment	Equipment	Equipment on order	Depreciation	Equipment delivery	New equipment orders	Business cycles
Human resources	Employees	Vacancies & trainees	Layoffs and quits	Hiring rate	Vacancy creation	Business cycles
Cash management	Cash balance	Pending loan applications	Expenditures	Borrowing rate	Loan application rate	Cash flow cycles
Marketing	Customer base	Prospective customers	Defections to competitors	Recruitment of new customers	New customer contacts	Boom and bust in customer base
Hog farming	Hog stock	Immature and gestating hogs	Slaughter rate	Maturation rate	Breeding rate	Hog cycles
Agricultural commodities	Inventory	Crops in the field	Consumption	Harvest rate	Planting rate	Commodity cycles
Commercial real estate	Building stock	Buildings under development	Depreciation	Completion rate	Development rate	Real estate booms and busts
Cooking on electric range	Temperature of pot	Heat in coils of range	Diffusion to air	Diffusion from coils to pot	Setting of burner	Overcooked dinner
Driving	Distance to next car	Momentum of car	Friction	Velocity	Gas and brake pedals	Stop-and-go traffic
Showering	Water temperature	Water temp. in pipes	Drain rate	Flow from showerhead	Faucet settings	
Personal energy level	Glucose in bloodstream	Sugar and starch in GI tract	Metabolism	Digestion	Food consumption	Cycles of energy level
Social drinking	Alcohol in blood	Alcohol in stomach	Metabolism of alcohol	Diffusion from stomach to blood	Alcohol consumption rate	Drunkenness

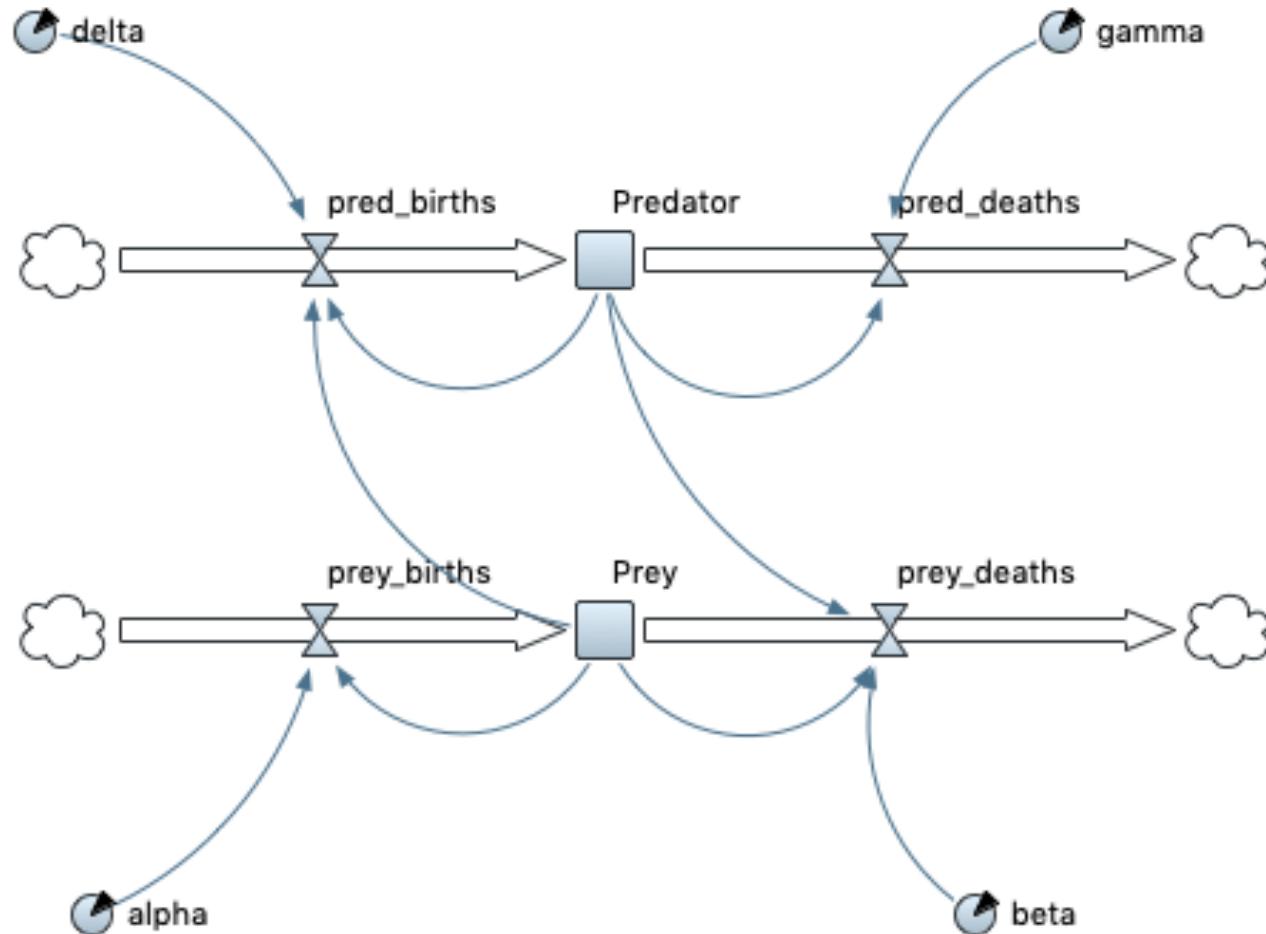
L'origine des oscillations

- Nous savons que les retards et la rétroaction négative peuvent générer des oscillations
- Mais c'est une condition **nécessaire** pas suffisante.
- Pourquoi?

Les oscillations expliquées

- Il est nécessaire que l'effet de compensation par la rétroaction négative n'agisse pas immédiatement
- De plus, l'effet de compensation doit perdurer au-delà d'une correction qui soit suffisante

Un modèle prédateur proie



Systèmes (quoi encore??)

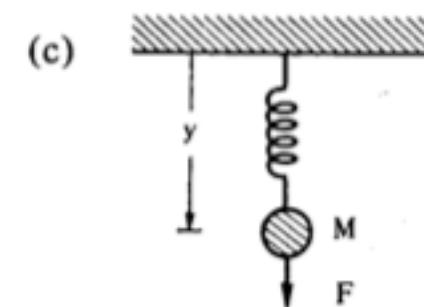
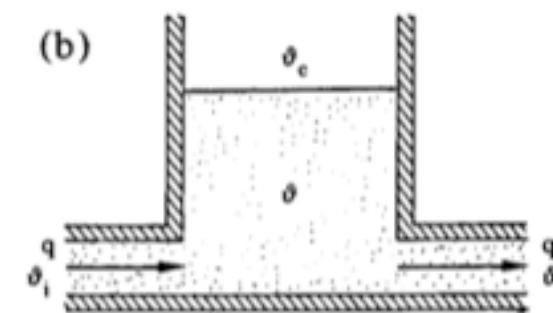
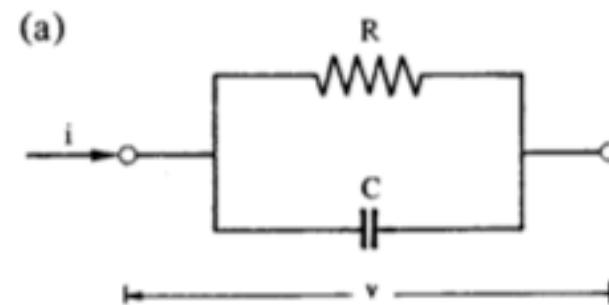
Théorie: définitions and propriétés
(Référence: Luenberger, Chapitres 4 et 5)

Quoi? Encore des Systèmes? Pfff.

- Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés aux systèmes au travers du prisme des dynamiques sous-jacentes
- Nous avons utilisé un formalisme facile d'accès pour développer un certain niveau d'intuition
- Nous avons besoin d'outils d'analyse plus puissants, pour renforcer la formalisation de notre univers de modélisation

Définition d'un système dynamique

- En appliquant une **entrée (input)** nous observons une **sortie (output)**
- Avec **un système dynamique**, les entrées et les sorties varient avec le temps
- le temps peut varier **en continu** (e.g. resistance/capacité, réservoir, masse-ressort) ou **de façon discrète** (e.g: compte en banque; réseau de communication)
- Pour les systèmes vraiment dynamiques, les sorties dépendent des entrées mais aussi de l'histoire passée past. Cette historique peut être compactée dans le concept **d'état du système**



Définition formelle

- Un système dynamique est défini par les 3 axiomes suivants

Axiome I

Soient les ensemble suivants:

- un ensemble ordonné du temps T , un ensemble U d'entrées,
- un ensemble de fonctions admissibles des entrées Ω
- un ensemble d'états X ,
- un ensemble de sorties Y ,
- un ensemble de fonctions de sortie Γ

Axiome 2

L'équation de transition de l'état $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ décrit comment obtenir la valeur de l'état au temps $t \in T$ à partir de l'état initial $x \in X$ au temps τ , pour la fonction d'entrée $u(\cdot) \in \Omega$, i.e.: $x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot))$

La fonction φ a les propriétés suivantes:

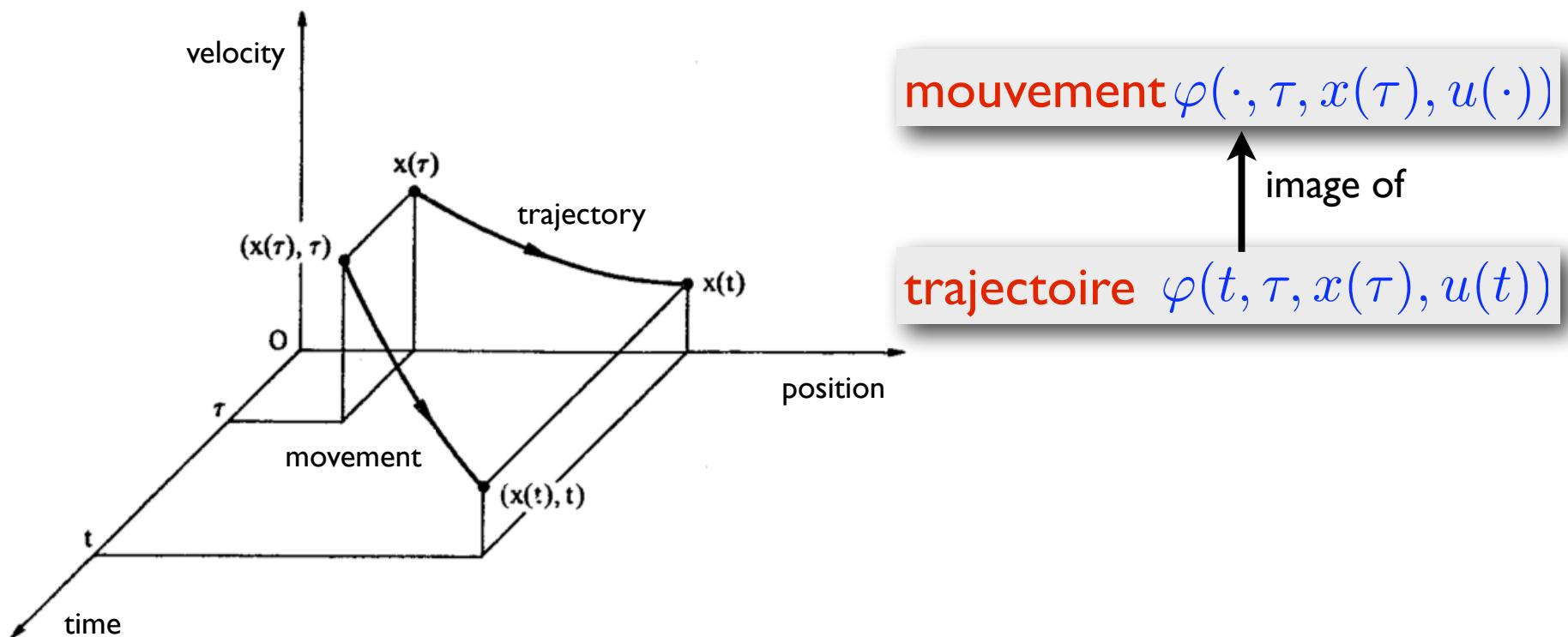
1. **consistance**: $\varphi(t, t, x, u(\cdot)) = x$ for all $(t, x, u(\cdot)) \in T \times X \times \Omega$
2. **irréversibilité**: φ est surjective pour tout $t \geq \tau$,
3. **composition**: $\varphi(t_3, t_1, x, u(\cdot)) = \varphi(t_3, t_2, \varphi(t_2, t_1, x, u(\cdot)), u(\cdot))$
for all $(x, u(\cdot)) \in X \times \Omega$
4. **causalité**: $u'_{[\tau, t)}(\cdot) = u''_{[\tau, t)}(\cdot)$ implique
 $\varphi(t, \tau, x, u'(\cdot)) = \varphi(t, \tau, x, u''(\cdot))$

Axiome 3

Soit la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$, dite transformation de sortie (**output transformation**). Elle définit la sortie comme: $y(t) = \eta(t, x(t))$

Mouvement et trajectoire

- Le couple (x, t) est défini comme un évènement
- L'ensemble des évènements est $T \times X$
- Exemple: la position et la vitesse de la masse constituent l'état du système masse-ressort



Equilibre

- Les mouvements constants (~immobiles) sont caractérisés par le fait qu'ils ont un état unique: l'**état d'équilibre**

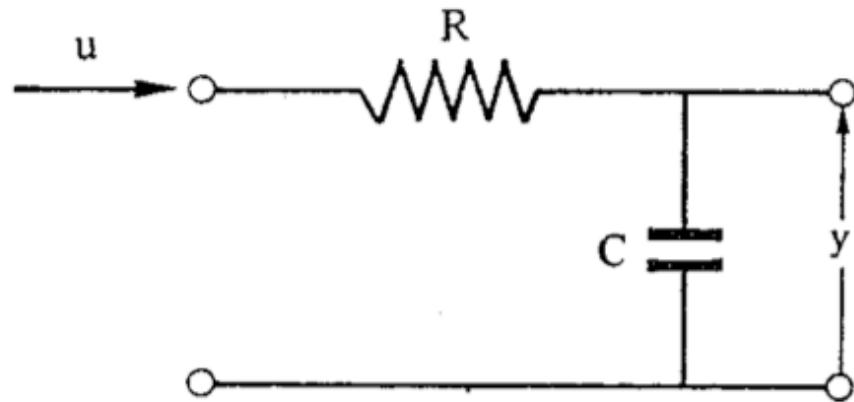
Définition

Un état $x \in X$, est un **équilibre à temps fini** si pour $t_1, t_2 \in T$ il existe une fonction $u(\cdot) \in \Omega$ telle que $\varphi(t, t_1, x, u(\cdot)) = x \quad \forall t \in [t_1, t_2]$

Définition

Un état $x \in X$, est un **équilibre à temps infini** si pour tout $\tau \in T$ il existe une fonction $u(\cdot) \in \Omega$ telle que $\varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = x \quad \forall t \geq \tau$
 $t \in T$

Exemple: circuit électrique



$$y(t) - y(\tau) = \int_{\tau}^t \frac{u(\xi)}{C} d\xi$$

$$T = X = U = Y = \mathbb{R}$$

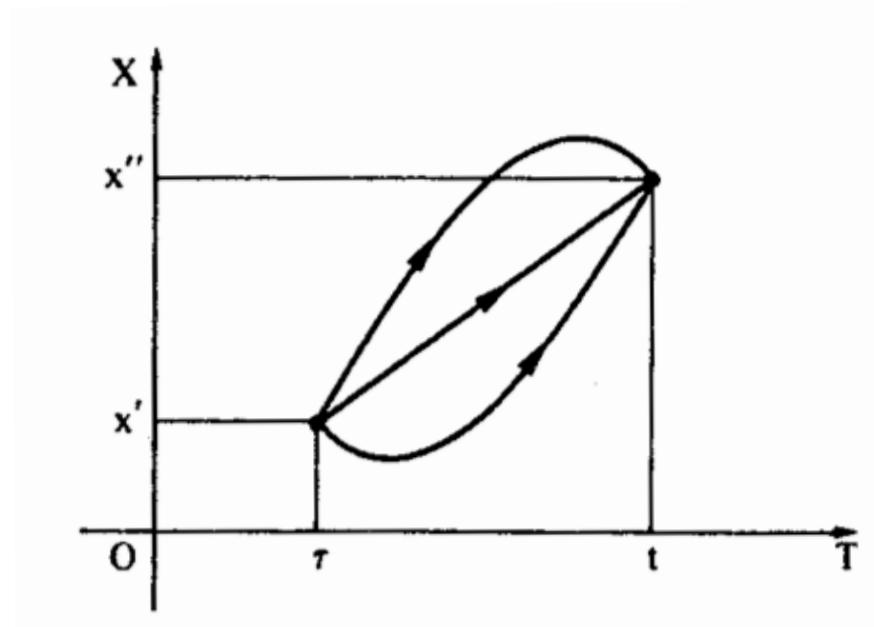
$$\Omega = \{\text{stepwise continuous functions}\}$$

$$\Gamma = \{\text{continuous functions}\}$$

$$x(t) - x(\tau) = \int_{\tau}^t \frac{u(\xi)}{C} d\xi \quad \phi$$

$$y(t) = x(t) \quad \eta$$

Exemple: circuit électrique

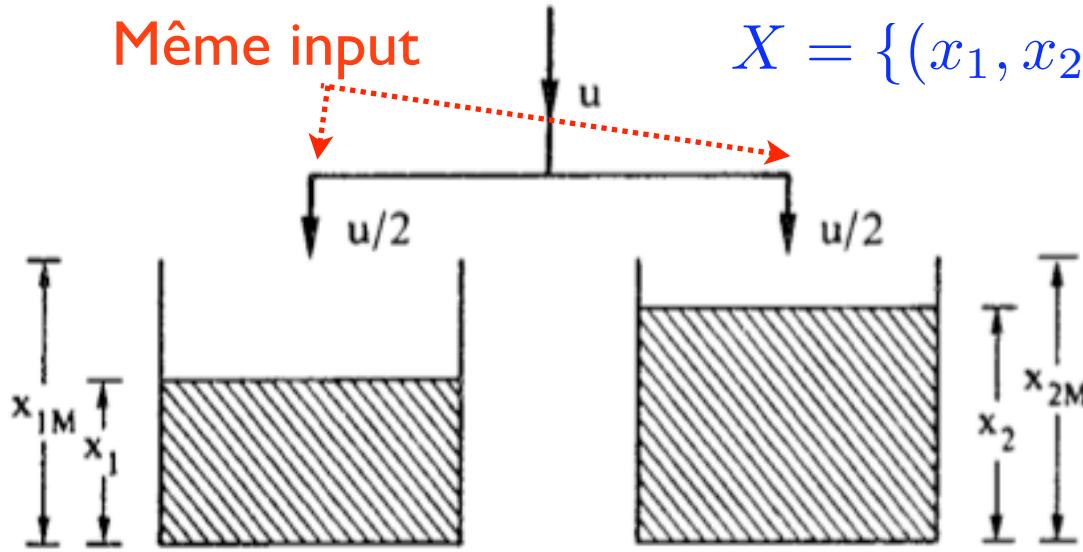


C'est connecté.
Peut-on optimiser le mouvement?

$$\min_u \int_{\tau}^t R u^2(\xi) d\xi$$

Exemple: 2 bacs

Même input



$$X = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq x_{1M}, 0 \leq x_2 \leq x_{2M}\}$$

$$U = \{u : -u_m \leq u \leq u_M\}$$

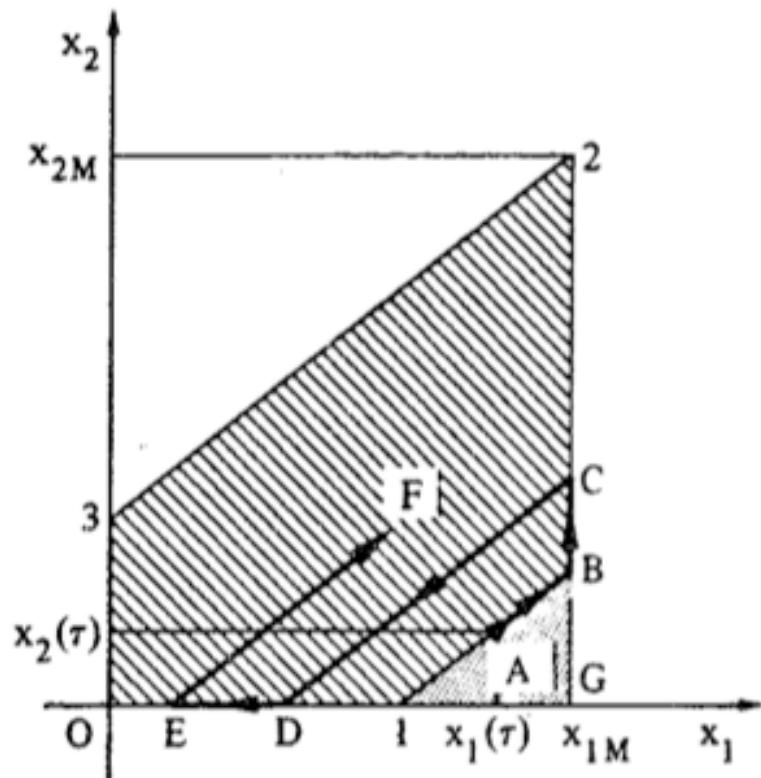
$$Y = \{y : 0 \leq y \leq A(x_1 + x_2)\}$$

$$\frac{d(\rho A x_i)}{dt} = \frac{u_i}{2}$$

$$x_i(t) - x_i(\tau) = \int_{\tau}^t \frac{u(\xi)}{2A} d\xi \quad \phi$$

$$y = A(x_1 + x_2) \quad \eta$$

Discussion sur les deux réservoirs



- Les trajectoires sont à 45 deg (même input dans les 2 réservoirs)
- Pour $x(\tau)$ (A) on peut atteindre tous les points de la zone hachurée
- On ne peut atteindre aucun point du triangle IGB
- L'état n'est pas observable avec la valeur de la sortie

Réduisons un peu le champ d'étude

- La définition d'un système est très large
- Si large que l'utilisation de l'analyse ou de l'algèbre linéaire est impossible ou trop difficile
- Par contre c'est faisable si on se concentre sur des sous-classes de systèmes dynamiques:
 - les systèmes **invariants** (« time invariant »)
 - les systèmes **réguliers**
 - les systèmes **linéaires**

Systèmes invariants

Définition

Un système est dit **invariant** si

- T est un groupe additif
- Pour tout $u \in \Omega$ et pour chaque $s \in T$ la fonction $u^s(\cdot)$ obtenue par translation ($u(t) = u^s(t + s)$) appartient également à Ω
- La fonction de translation a la propriété

$$\varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \varphi(t + s, \tau + s, x, u^s(\cdot))$$

- La transformation de sortie ne dépend pas explicitement du temps
 $y(t) = \eta(x(t))$

- Si $T = \mathbb{N}$ nous avons un système à **temps discret**
- Si $T = \mathbb{R}$ nous avons un système à **temps continu**

Systèmes réguliers

- Si les ensembles U , X , et Y sont des espaces vectoriels de dimensions finies, le système est dit de dimensions finies
- Le ‘circuit électrique’ et les ‘2 bacs’ sont deux exemples de systèmes de dimensions finies
- Si une norme est définie pour les espaces vectoriels, il est possible de mesurer la distance entre deux éléments et d'introduire la notion de régularité

Définition

Un système est régulier si

- U, X, Y, Γ, Ω sont des espaces normés
- φ est continue dans tous ses arguments et $\frac{d\varphi(t, \tau, x, u(\cdot))}{dt}$ est aussi continue en t partout où $u(\cdot)$ est continue
- η est continue dans tous ses arguments

Pourquoi les systèmes réguliers sont intéressants ?

Théorème

Le mouvement $x(\cdot) = \varphi(\cdot, \tau, x, u(\cdot))$ d'un système régulier de dimension finie est la solution d'un équation différentielle de la forme:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

qui satisfait la condition initiale $x(\tau) = x$

- Donc un système régulier est représenté par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), t) \end{cases}$$

Mouvement libre et forcé

- Quant U, X, Y, Γ, Ω sont des espaces normés nous pouvons imaginer des systèmes à conditions initiales et entrées nulles et examiner leurs mouvements:
- **Mouvement libre** $\varphi_l(\cdot, \tau, x) = \varphi(\cdot, \tau, x, 0)$ (autonome)
- **Mouvement forcé** $\varphi_f(\cdot, \tau, u(\cdot)) = \varphi(\cdot, \tau, 0, u(\cdot))$
- **Si** les transformations $\varphi_l(t, \tau, \cdot) : X \rightarrow X$ $\varphi_f(t, \tau, \cdot) : \Omega \rightarrow X$ ont les propriétés suivantes:
 $\varphi_l(t, \tau, ax_1 + bx_2) = a\varphi_l(t, \tau, x_1) + b\varphi_l(t, \tau, x_2)$
 $\varphi_f(t, \tau, cu_1(\cdot) + du_2(\cdot)) = c\varphi_f(t, \tau, u_1(\cdot)) + d\varphi_f(t, \tau, u_2(\cdot))$
- les transformations sont linéaires et on peut écrire:
 $\varphi_l(t, \tau, x) = \Phi_l(t, \tau)x$ $\varphi_f(t, \tau, u(\cdot)) = \Phi_f(t, \tau)u(\cdot)$

Systèmes linéaires

Definition

Un système est dit **linéaire** si

- U, X, Y, Γ, Ω sont des espaces normés
- φ est linéaire en $X \times \Omega$ pour tout $t, \tau \in T$:
$$\varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \Phi_l(t, \tau)x + \Phi_f(t, \tau)u(\cdot)$$
- η est linéaire en X pour tout t dans T
$$\eta(t) = C(t)x(t)$$

- Avec un système linéaire, le mouvement peut être décomposé en la somme des mouvements libre et forcé

mouvement libre

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{u(\xi)}{C} d\xi$$

mouvement forcé

Systèmes linéaires et réguliers

- Si un système de dimensions finies est linéaire et régulier, alors son état x satisfait:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I})$$

- Comme φ , solution de (I), est linéaire in x and u

$$f(x(t), u(t), t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

- Alors, un système linéaire est décrit par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

Equilibre, stabilité, oscillations

Le cas des systèmes linéaires
(Référence: Luenberger, Chapitre 5)

Points d'équilibre des systèmes à temps discret

- Définition d'un équilibre

Définition

Un état $\bar{x} \in X$, est un **équilibre** pour un système dynamique si, une fois l'état égal à \bar{x} , alors il reste égal à \bar{x} à tout temps ultérieur

- Cela signifie $\bar{x} = A\bar{x}$ pour les systèmes homogènes
 - Si \bar{x} est un vecteur propre de A avec une valeur propre de A unité, alors **tout** vecteur propre \bar{x} est point d'équilibre, sinon seulement l'origine est un équilibre
- Pour les systèmes non homogènes à entrée constante
$$\bar{x} = A\bar{x} + b \quad \bar{x} = (I - A)^{-1}b$$
 - Si I n'est pas valeur propre, alors il y a I équilibre $/= 0$

Points d'équilibre des systèmes à temps continu

- En équilibre un état ne change pas. Sa dérivée est donc par conséquent nulle
- Système homogène: $A\bar{x} = 0$ Si A est non singulière, 0 est le seul équilibre, sinon il peut y en avoir d'autres
- Systèmes non homogènes à entrée constante:
$$A\bar{x} + b = 0 \quad \bar{x} = -A^{-1}b$$
Si A est non singulière il y a une solution **unique**
- En général, 0 est un point d'équilibre pour les systèmes à temps discret et continus
- 1 est valeur propre critique pour les systèmes discrets, 0 est valeur propre critique pour les systèmes continus

Stabilité

- Un point d'équilibre est **stable** si, quand il est perturbé, il tend à retourner à sa position initial, ou si au minimum il ne diverge pas

Définition

Un point d'équilibre \bar{x} d'un système linéaire invariant (LTI) est **asymptotiquement stable** si, pour toute condition initiale, le vecteur d'état tend vers \bar{x} quand le temps croît. Le point est **instable** si pour certaines conditions initiales, le vecteur d'état diverge à l'infini

- Notez que:

$$x(t+1) - \bar{x} = Ax(t) + b - A\bar{x} - b$$

$$z(t+1) = Az(t) \quad z(t) = x(t) - \bar{x}$$

- la stabilité dépend des propriétés du système homogène, c'est **independant** des **entrées** et **conditions initiales**

Stabilité: systèmes à temps discret

- Soit le système $\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ il est possible de trouver la matrice modale telle que $\mathbf{A} = \mathbf{M}\Lambda\mathbf{M}^{-1}$
- Puisque $\mathbf{x}(t + k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(t)$ le système est stable si $\mathbf{A}^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$
- Comme

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\Lambda^k\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

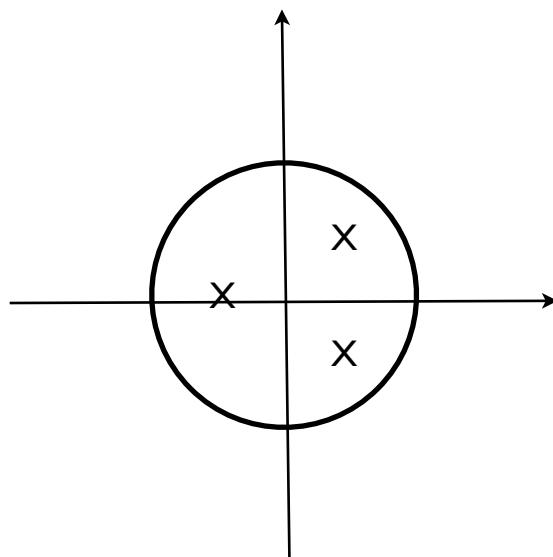
- la matrice tend vers 0 Ssi: $|\lambda_i| \leq 1$

Stabilité: Systèmes à temps discret

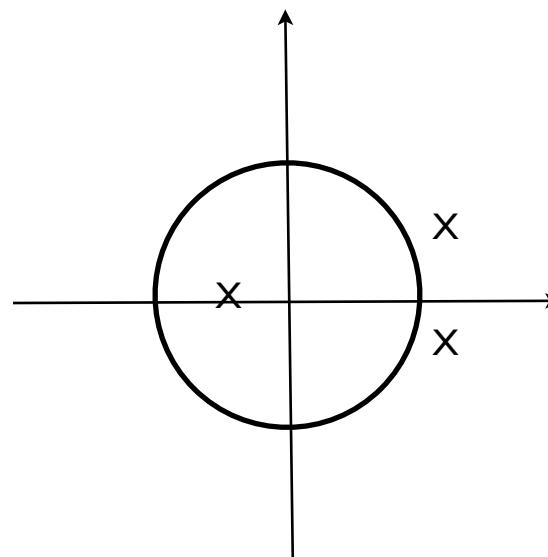
Théorème

Une **condition nécessaire et suffisante** pour qu'un point d'équilibre d'un système linéaire invariant (LTI) soit asymptotiquement stable est que les valeurs propres de A aient un module inférieur à 1 (**toutes les valeurs propres sont dans le cercle unité dans le plan complexe**). Il suffit qu'une des valeurs propres aie un module supérieur à 1 pour que le système soit instable

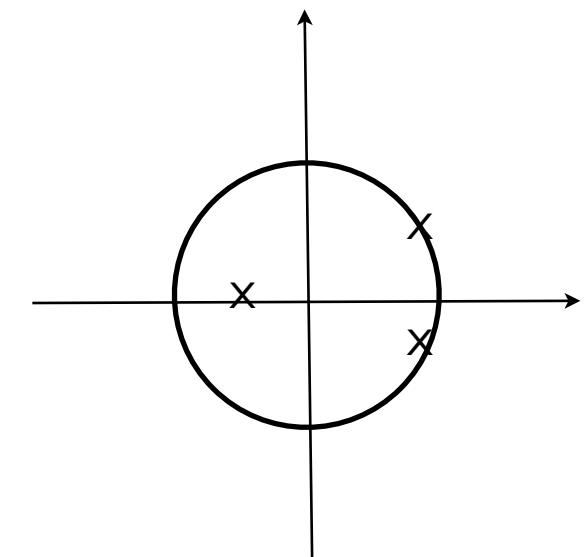
Stabilité: systèmes à temps discret



stable



instable



marginalement
stable

Stabilité: Systèmes à temps continu

- On étudie la stabilité du système homogène

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$$

- Sa solution est $\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}(0)$
- Si \mathbf{A} peut être diagonalisée ($\mathbf{A}=\mathbf{M}\Lambda\mathbf{M}^{-1}$), la solution peut être réécrite:

$$z_1(t) = e^{\lambda_1 t} z_1(0)$$

$$z_2(t) = e^{\lambda_2 t} z_2(0)$$

⋮

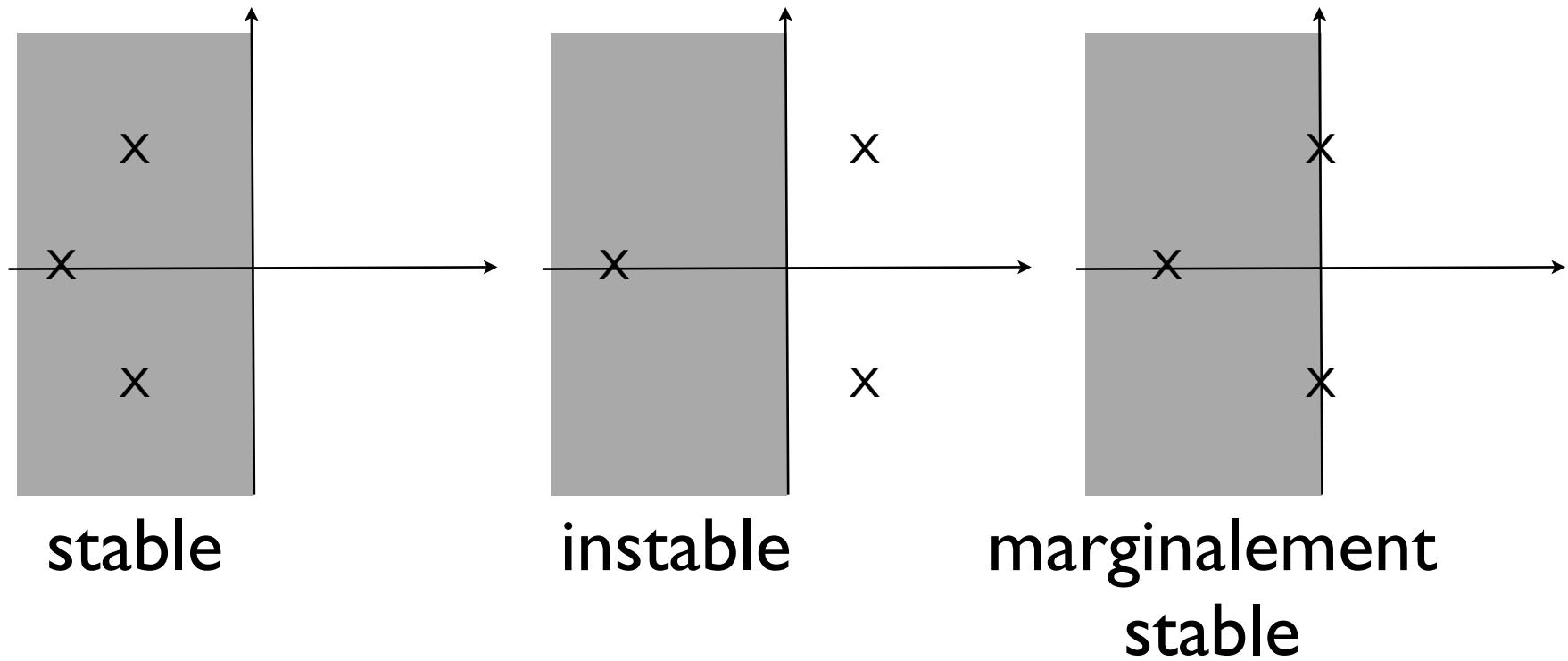
$$z_n(t) = e^{\lambda_n t} z_n(0)$$

Stabilité: Systèmes à temps continu

$$\lambda = \mu + i\omega$$

$$e^\lambda = e^\mu e^{i\omega} = e^\mu (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

$$e^\lambda \rightarrow 0 \quad \mu < 0$$



Stabilité: Systèmes continus LTI

Théorème

Une **condition nécessaire et suffisante** pour qu'un point d'équilibre d'un système **continu LTI** soit asymptotiquement stable est que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle négative (**toutes les valeurs propres sont dans le demi-plan complexe gauche**)

Il suffit qu'une valeur propre ait une partie réelle positive pour que le système soit instable.

Stabilité marginale

- Pour les systèmes LTI, il y a un cas qui n'est pas couvert par les théorèmes précédents
- LTI discret: quand une (ou plus) des valeurs propres est sur le cercle unité (les autres à l'intérieur)
- LTI continu: quand une (ou plus) des valeurs propres est sur l'axe imaginaire (les autres à gauche)
- Dans de tels cas, le système tend ni vers zéro, ni vers l'infini
- Le système est **marginalement stable**

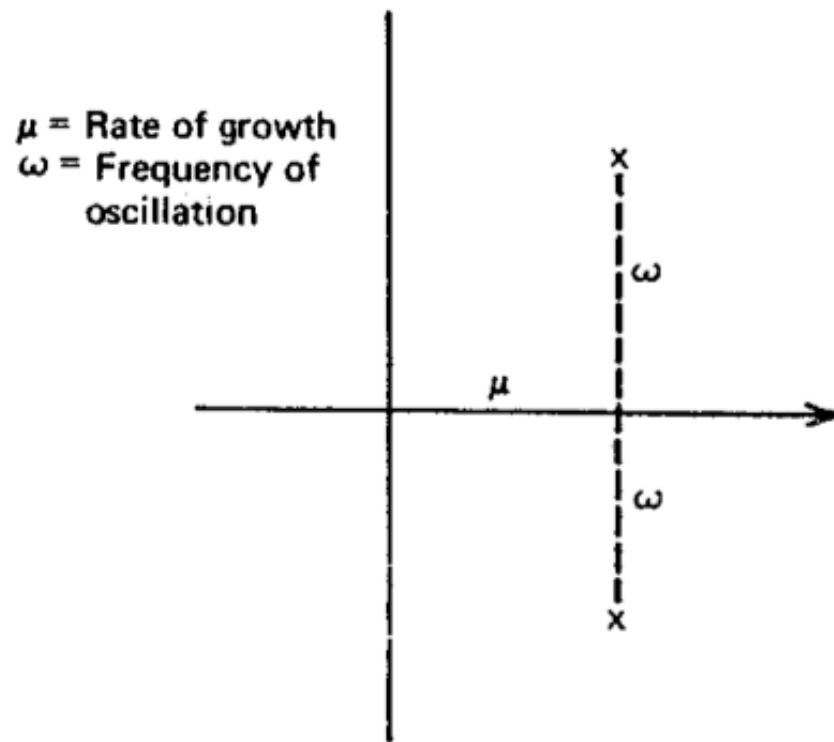
Oscillations

- Les valeurs propres non parlent de la stabilité d'un système
- Elles nous parlent également de son **comportement**
- Quel est le lien entre valeurs propres et temps caractéristiques d'un système?
- Chaque valeur propre définit **un taux de croissance caractéristique** et une **fréquence d'oscillation caractéristique**
- Pour les systèmes LTI la contribution de chaque valeur propre peut être considérée séparément!

Oscillations en temps continu

- Chaque valeur propre peut s'écrire $\lambda = \mu + i\omega$
- La réponse caractéristique correspondante est de la forme: $e^\lambda = e^\mu e^{i\omega} = e^\mu (\cos \omega t + i \sin \omega t)$
- Si λ est réel, alors ω est 0, et la réponse ne peut pas changer de signe: **pas d'oscillations**
- if λ est complexe, son conjugué $\bar{\lambda} = \mu - i\omega$ est aussi une valeur propre. La réponse est réelle, alors les imaginaires doivent disparaître. La réponse oscille avec une fréquence de $\omega/2\pi$ et est modulée par une croissance exponentielle e^μ

Oscillations en temps continu

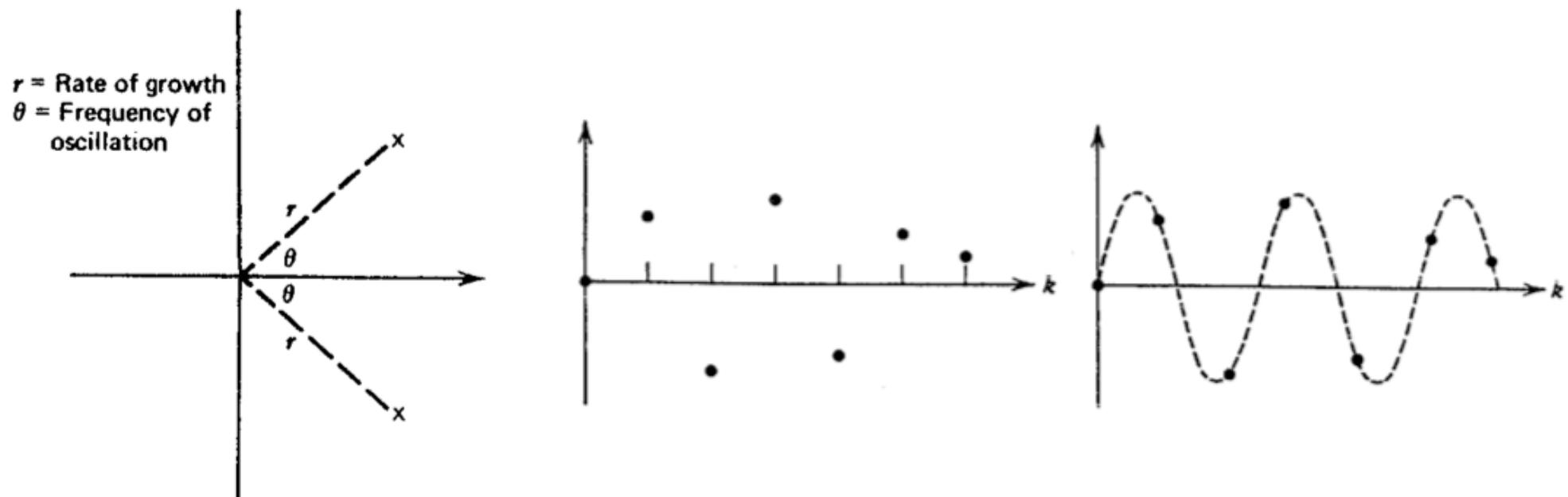


Oscillations en temps discret

- Soit λ une valeur propre, exprimée en coordonnées polaires: $\lambda = \rho e^{i\theta} = \rho (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$
- la réponse caractéristique est:
$$\lambda^t = \rho^t e^{i\theta t} = \rho^t \cos t\theta + i \rho^t \sin t\theta$$
- Si λ est **réelle** et **positive**, la réponse sera dominée par la croissance géométrique ρ^t (croissante pour $\rho > 1$ et décroissante pour $\rho < 1$) **pas d'oscillations**
- Si λ est **réelle** et **négative**, la réponse sera une croissance géométrique alternante
- Si λ est **complexe** et $\theta \neq 0$ la réponse changera de signe

Oscillations en temps discret

- Si θ est un multiple irrationnel de 2π alors chaque valeur de t produit une valeur différente. Le cycle est apériodique.
- Il est donc pratique de surimposer un signal sinusoïdal pour estimer la fréquence (ce qui revient à supposer t - ou k selon les notations - quasi continu).



Equilibre, stabilité, oscillations

Que se passe-t-il si le système est non linéaire
(Référence: Luenberger, Chapitre 9)

Équations d'un système nonlinéaire

- Forme vectorielle d'un ensemble d'équations décrivant un système **non linéaire**
 - temps discret $\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$
 - temps continu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$
- Equations dans le cas invariant (time invariant)
 - temps discret $\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$
 - temps continu $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$
- Système **non linéaire** = \mathbf{f} est un vecteur de fonctions, dont au moins une n'est pas linéaire

Exemple: temps d'échappement fini (finite escape time)

- On analyse un modèle de croissance pour lequel la croissance augmente avec la taille (e.g. une avalanche)

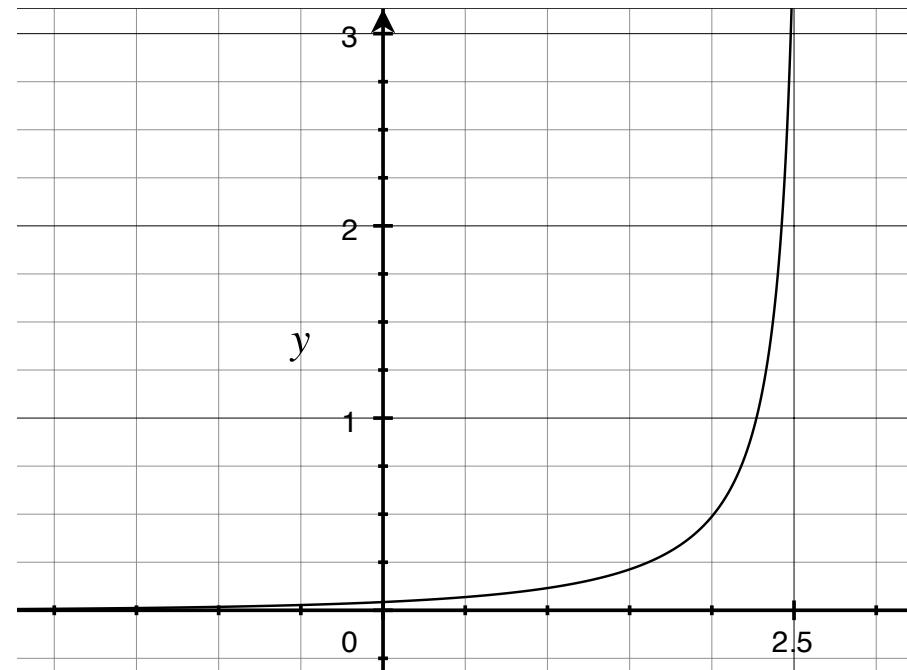
$$\dot{x}(t) = a(1 + x(t)/c)x(t)$$

- la solution est

$$x(t) = \frac{c}{be^{-at} - 1}$$

- qui tend vers l'infini

en temps fini



Que cherche-t-on dans les systèmes non linéaires?

- Nous outils d'analyse classiques sont inadaptés
- On va donc procéder une “inspection superficielle”
 - # de points d'équilibre
 - sont-ils stables?
 - taux de croissance estimés?
 - comportement aux limites et/ou phénomène d'échappement en temps fini
 - saturation ou effets de seuil
- On cherche une vision d'ensemble, pas le détail

Points d'équilibre

- Même définition générale que pour les sys. linéaires

Définition

Un état $\bar{x} \in X$, est un point d'équilibre d'un système dynamique, si, une fois que l'état est égal à \bar{x} , alors il reste égal à \bar{x} ultérieurement

- On les obtient en résolvant
 - $\bar{x} = f(\bar{x}, t)$ (cas discret)
 - $0 = f(\bar{x}, t)$ (cas continu)
- Mais les choses ne sont pas si simples pour les sys. NL
 - résoudre les équations n'est pas trivial
 - les systèmes peuvent avoir 1, aucun, de nombreux points d'équilibre.

Exemples

- La courbe logistique

$$\dot{x}(t) = a(1 - x(t)/c)x(t)$$

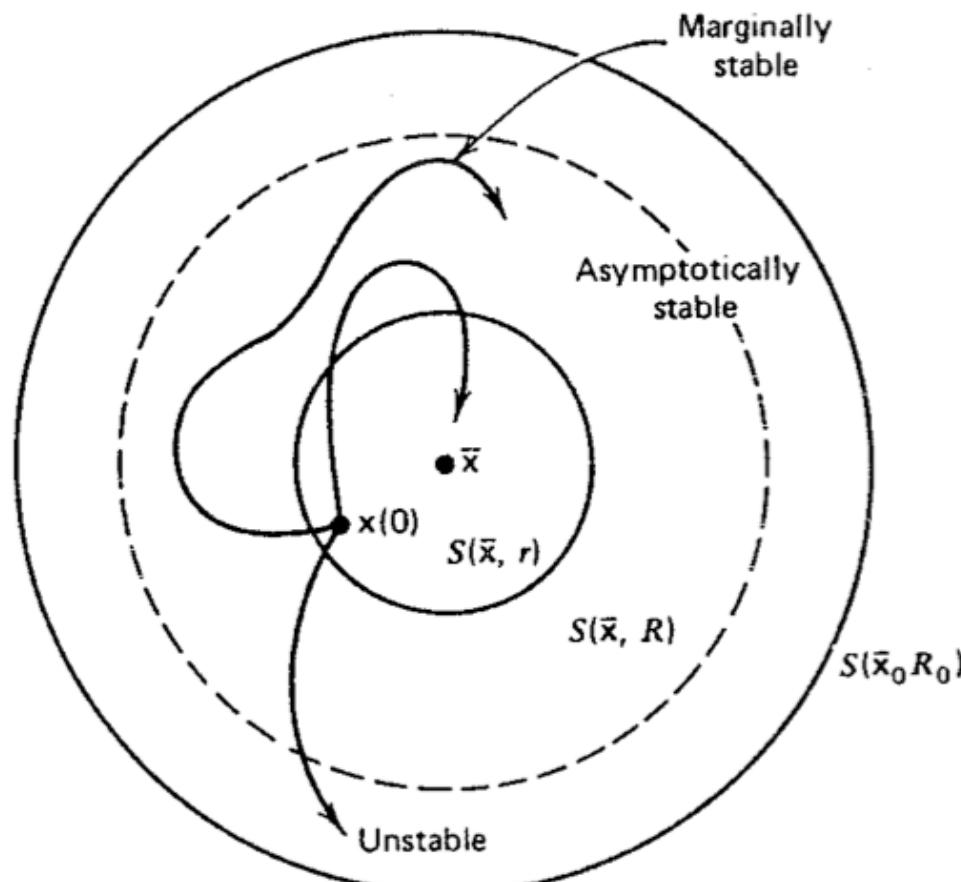
- Un système NL à temps discret

$$x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + x_2^2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k)$$

Stabilité

- Un point d'équilibre est **stable** si, une fois perturbé, le système tend à retourner au point d'équilibre, ou si, tout du moins, il ne diverge pas



Définition: stabilité

Définition (stabilité)

Un point d'équilibre \bar{x} est stable si il existe $R_0 > 0$ tel que:

$\forall R < R_0, \exists r, 0 < r < R : \text{if } \mathbf{x}(0) \in S(\bar{x}, r) \text{ then:}$

$$\mathbf{x}(t) \in S(\bar{x}, R) \quad \forall t > 0$$

Stabilité

Définition (stabilité asymptotique)

Un point d'équilibre $\bar{\mathbf{x}}$ est **asymptotiquement stable** si il est stable et qu'en plus il existe $R_0 > 0$ tel que quel que soit la valeur de l'état initial dans $S(\bar{\mathbf{x}}, R_0)$, l'état tend vers $\bar{\mathbf{x}}$ quand t augmente

Définition (stabilité marginale)

Un point d'équilibre $\bar{\mathbf{x}}$ est **marginalement stable** s'il est stable mais pas asymptotiquement stable

Définition (instabilité)

Un point d'équilibre $\bar{\mathbf{x}}$ est **instable** s'il n'est pas stable. De façon équivalente, un point d'équilibre est instable si:

$$R > 0, r > 0 : \exists \mathbf{x}(0) \in S(\bar{\mathbf{x}}, r) \text{ then } \exists t : \mathbf{x}(t) \notin S(\bar{\mathbf{x}}, R)$$

Exemples

- Equation différentielle du premier ordre

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

- L'équation logistique

$$\dot{x}(t) = a(1 - x(t)/c)x(t)$$

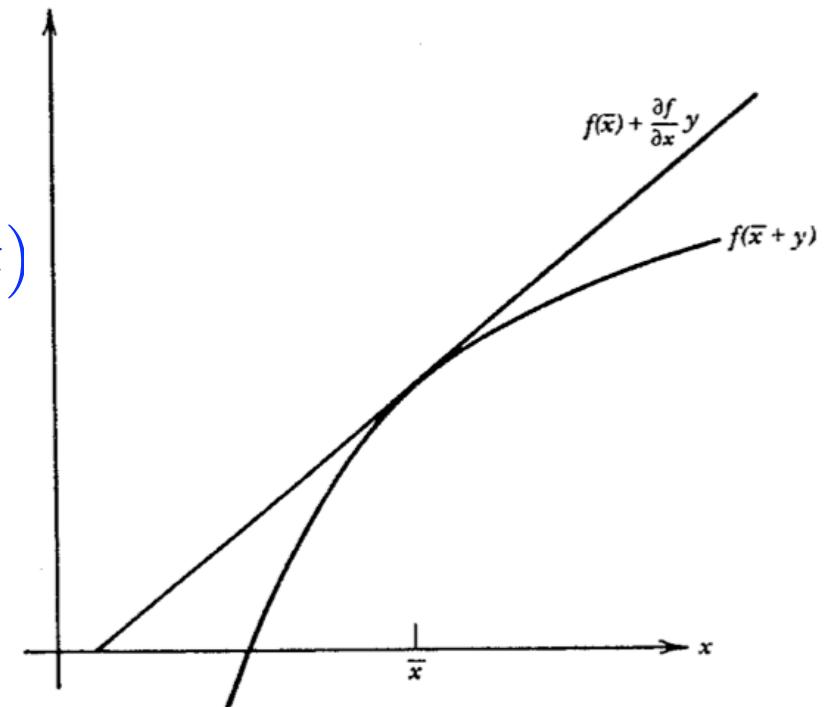
- Système à temps discret (issu de la génétique, fréquence de genes récessifs)

$$x(k+1) = \frac{x(k)}{1 + x(k)}$$

Linéarisation et stabilité

- Cette idée, connue sous le nom de **méthode indirecte de Lyapunov**, est d'étudier le comportement du système dans le voisinage d'un équilibre
- Si la zone (intervalle) est suffisamment petite, le système NL peut être approché par un développement en série de Taylor au 1er ordre (linéaire)

$$f(\bar{x} + \delta x(t)) = f(\bar{x}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}} \delta x(t)$$



Approximation linéaire d'une fonction de dimension n

- Dans le cas d'un système de dimension n

$$f_i(\bar{x}_1 + \delta x_1, \bar{x}_2 + \delta x_2, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n) \approx$$

$$\begin{aligned} & f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \\ & \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_1} \delta x_1 + \\ & \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_2} \delta x_2 + \\ & \dots \\ & + \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_n} \delta x_n \end{aligned}$$

- Sous forme vectorielle

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}(t)) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{F} \delta \mathbf{x}(t)$$

Le Jacobien

- La Matrice \mathbf{F} ci-dessous est appelée **Jacobien** de f

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Exemples

- Système quadratique du premier ordre

$$\dot{x} = ax(t) + cx^2(t)$$

- Système discret

$$x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + x_2^2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k)$$

- supposons $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$

Linéarisation

Systèmes discrets

On substitue $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t)$ dans $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$
on obtient $\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t)) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}\delta\mathbf{x}(t)$
mais à l'équilibre: $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ et donc

$$\delta\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\delta\mathbf{x}(t)$$

Systèmes Continus

On substitue $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t)$ dans $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$
on obtient $\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t)) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}\delta\mathbf{x}(t)$
mais à l'équilibre; $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = 0$ et aussi: $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\delta\mathbf{x}(t)$$

Méthode de Lyapunov directe

- On cherche à exhiber une **fonction de Lyapunov (summarising function)**
- C'est une fonction du vecteur d'état qui résume le comportement du système
- Il est possible d'écrire une équation différence/aux différences approchée du premier ordre qui décrit le comportement de la summarising function
- L'idée a été introduite par Lyapunov pour l'étude des systèmes NL
- **L'Energie** est une grandeur typique qui permet d'obtenir une summarising function. Elle décrit correctement le comportement d'un système.

L'énergie comme summarising function: le pendule

- Les équations du système sont non linéaires

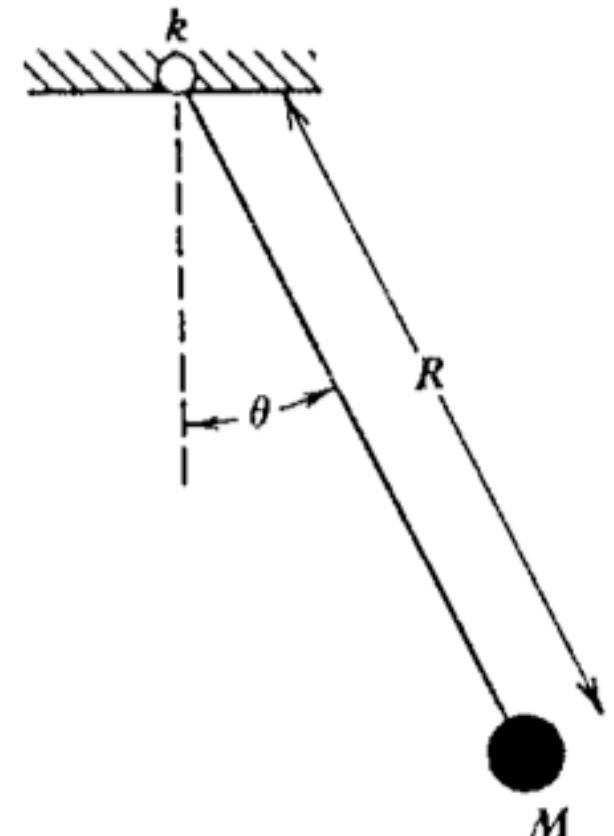
$$MR\ddot{\theta}(t) = -Mg \sin \theta(t) - Mk\dot{\theta}(t)$$

- Modèle d'état:

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{g}{R} \sin \theta - \frac{k}{R}\omega$$

- Le système est clairement stable. Comme établir cette propriété de façon rigoureuse?
- Utilisons le concept d'énergie mécanique (= Energie cinétique + potentielle)



Le pendule

- Energie mécanique

- En. cinétique $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$

- En. potentielle $Mgh = MgR(1 - \cos \theta)$

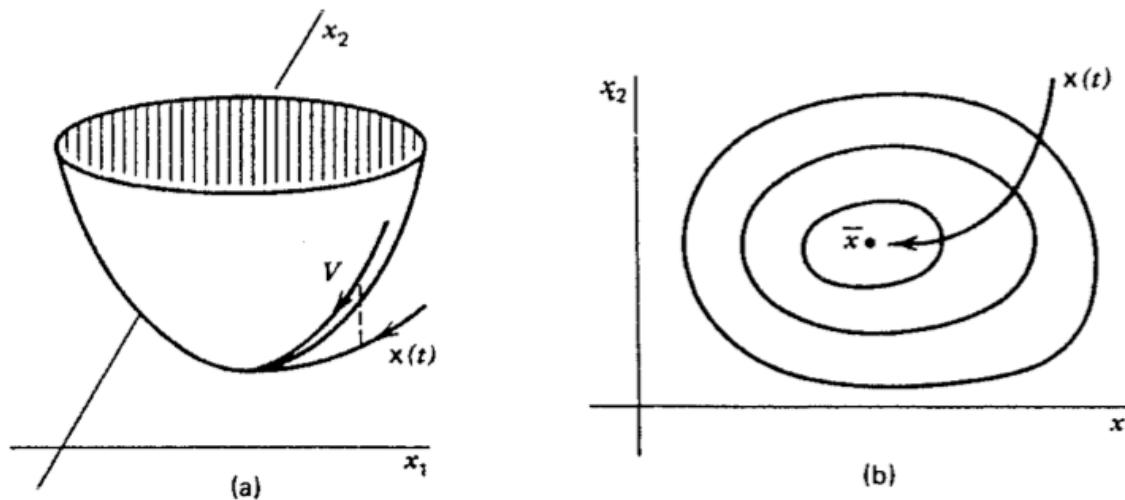
- Nous avons donc une fonction descriptive

$$V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + MgR(1 - \cos \theta)$$

- Cette fonction décroît de façon continue jusqu'à l'équilibre

La fonction de Lyapunov

- La philosophie derrière:
 - trouver une fonction $V(x)$, définie positive des états qui a un minimum unique au point d'équilibre du système



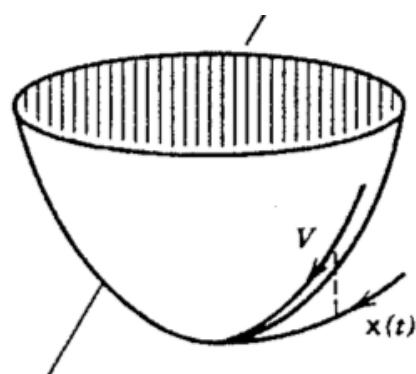
- la fonction est continue ainsi que ses dérivées partielles de premier ordre
- La dérivée $\dot{V}(x)$ est négative ou nulle pour tout x

Le théorème de Lyapunov

Théorème

S'il existe une fonction de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ dans une boule $S(\bar{\mathbf{x}}, R_0)$ de centre $\bar{\mathbf{x}}$, alors le point d'équilibre $\bar{\mathbf{x}}$ est **stable**. Si, de plus, $\dot{V}(\mathbf{x})$ est strictement négatif en tout point (sauf $\bar{\mathbf{x}}$), alors la stabilité est **asymptotique**.

Intuitivement, on comprend bien en inspectant le graphique:



Si on perturbe une trajectoire, on restera dans la boule, car les dérivées de la fonction de Lyapunov sont négatives.
Imaginez une bille dans un bol...

Note

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n(t)$$

mais $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ et donc

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}(t)) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(\mathbf{x}(t)) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x}(t))$$

selon la définition du gradient de $V(\mathbf{x})$:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]$$

nous pouvons écrire au final

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \nabla V(\mathbf{x}(t)) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

Revenons au pendule

- Energie mécanique

- En. cinétique $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$

- En. potentielle $Mgh = MgR(1 - \cos \theta)$

- Nous avons donc une fonction descriptive

$$V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + MgR(1 - \cos \theta)$$

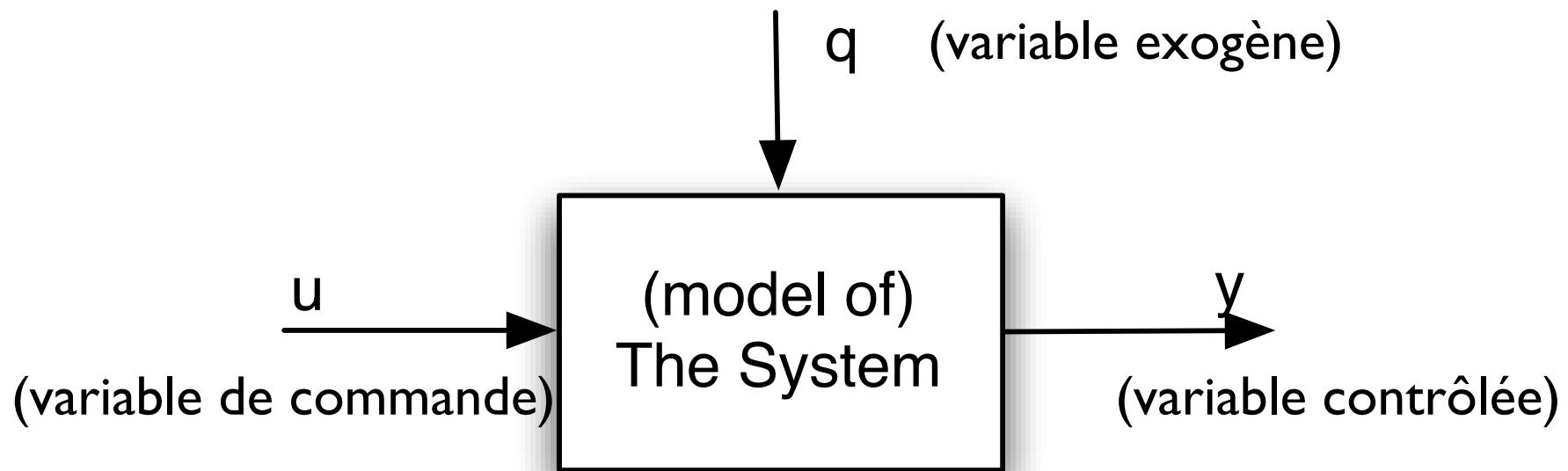
- Est-ce que la dérivée $\dot{V}(\theta, \omega)$ est bien négative ?

Concepts de Contrôle- Commande

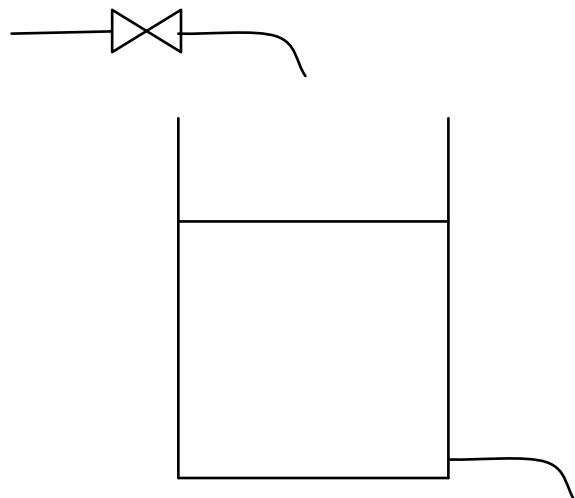
Une brève introduction à l'automatique

Qu'est-ce que le « contrôle »?

- Jusqu'à présent nous nous sommes concentrés sur la modélisation du comportement dynamique des systèmes, soumis au choix d'une ou plusieurs entrées
- De tels systèmes peuvent être schématisés comme suit:

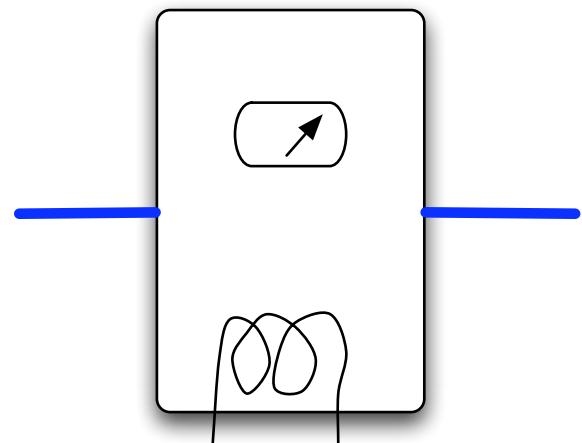


Exemple: un réservoir d'eau



- Système contrôlé: le réservoir
- Variable contrôlée: la hauteur d'eau
- Trajectoire désirée pour la variable contrôlée: valeur constante
- Perturbation: débit de sortie
- Variable manipulée: débit d'alimentation

Exemple: le boiler



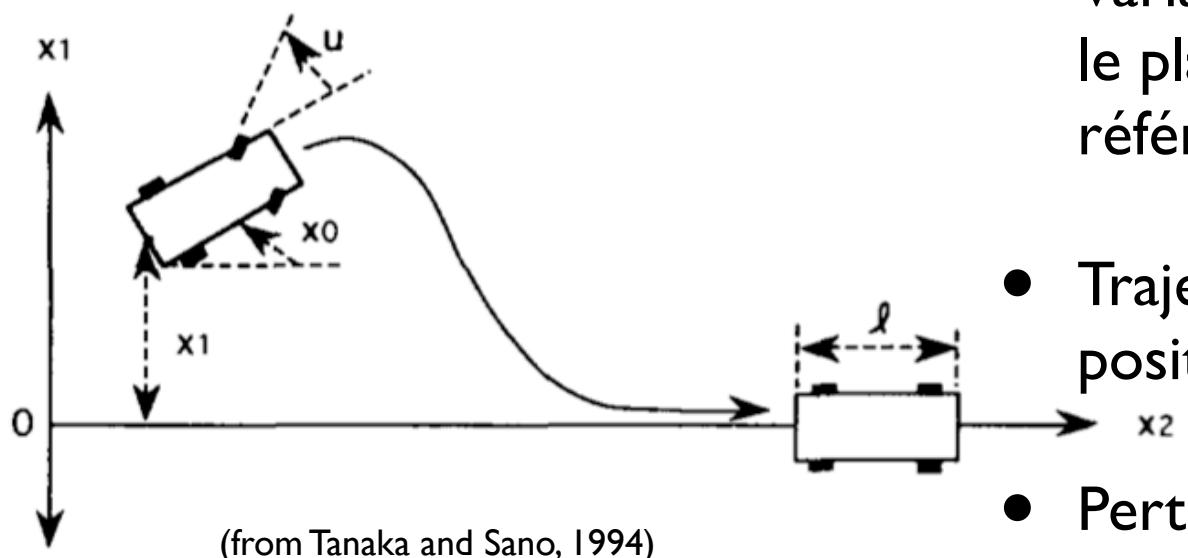
- Système contrôlé: le boiler
- Variable commandée: la température de sortie de l'eau
- Trajectoire souhaité: température constante
- Perturbation: débit d'alimentation en eau
- Variable manipulée: puissance électrique

Exemple: Vitesse d'un train



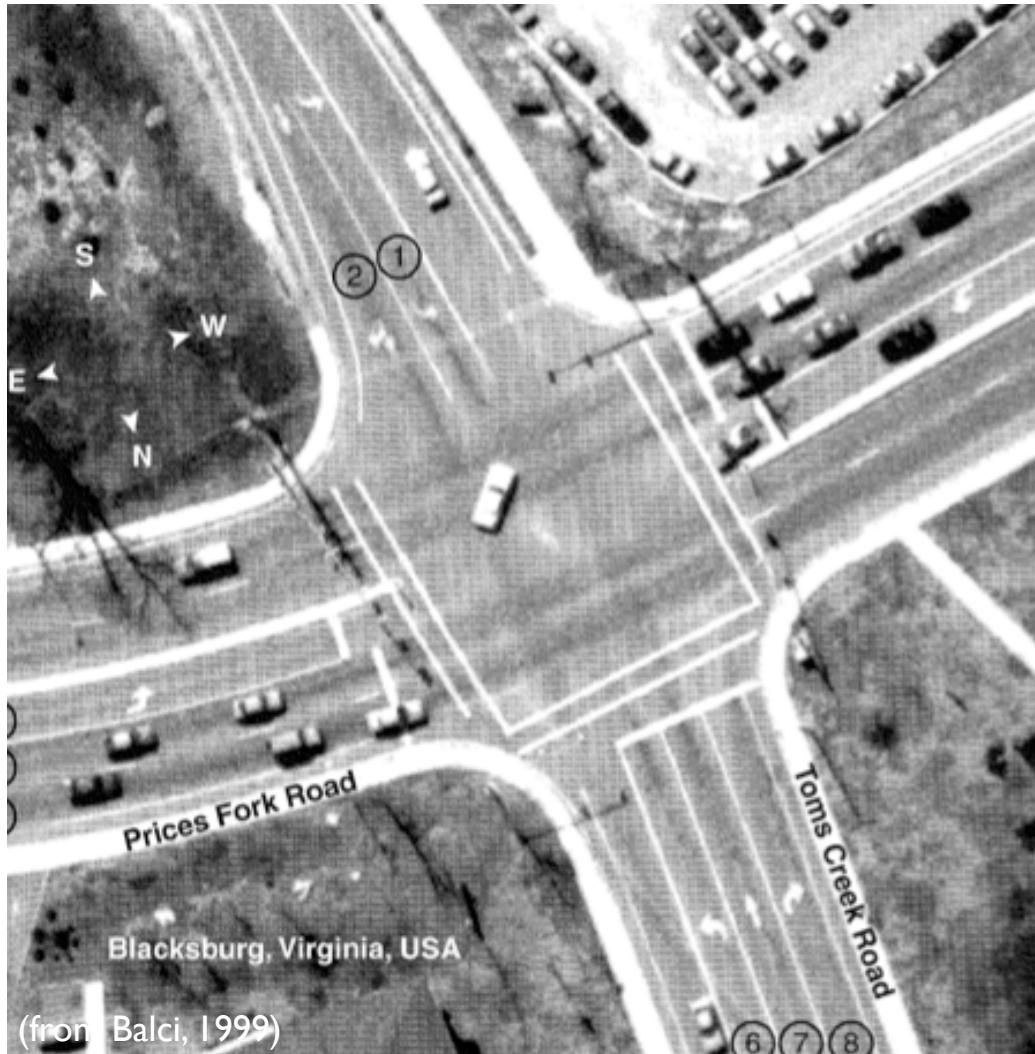
- Système: le train
- Variable contrôlée: la vitesse (suivi de trajectoire)
- Trajectoire désirée: fixée en temps réel par le conducteur
- Perturbations: variations de charges (passagers) et de profil (déclivité de la route, ...)
- Variable manipulée: couple aux roues

Exemple: la trajectoire d'un véhicule



- Système contrôlé: le véhicule
- Variable contrôlée: position dans le plan (suivre trajectoire de référence jusqu'à position finale)
- Trajectoire désirée: séquence de positions dans le plan
- Perturbations: changements de charge et de l'environnement
- Variables manipulées: couple aux roues, position angulaire du volant

Exemple: contrôle à un carrefour



- Système contrôlé: le carrefour
- Variable commandée: les véhicules dans le carrefour
- Trajectoire désirée: longueur des files
- Variables manipulées: les feux de circulation (cycles on/off)
- Variables exogènes (perturbations): les véhicules qui arrivent

La loi de commande (control action)

- La loi de commande peut être
 - continue
 - discrète (on/off)
 - basée sur les évènements
- La loi de commande peut être implantée
 - manuellement
 - de façon *automatique*
 - analogique
 - digitale

Dimensionnement des contrôleurs

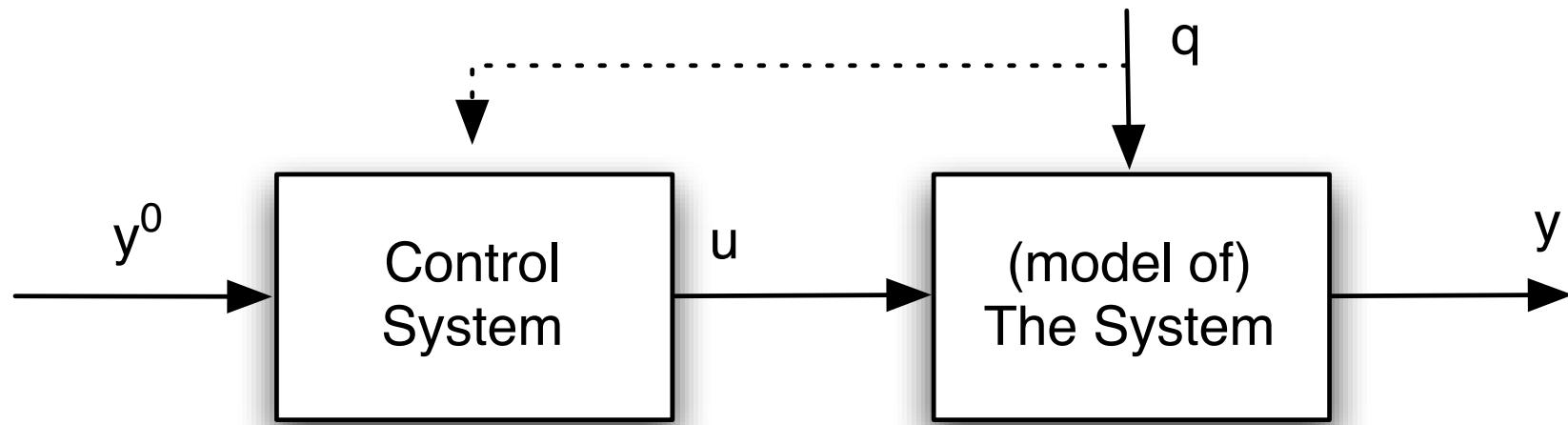
- Méthodes empiriques
 - basées sur l'expérience et le flair
 - dans le domaine fréquentiel ou temporel
- Méthodes rationnelles
 - basées sur la théorie et sur l'expérience
 - approches fréquentielles, temporelles et state-space
- Problèmes fréquemment rencontrés
 - automation & automatique (instruments, temps réel s/w)
 - modélisation, identification, simulation
 - optimisation
 - analyse de données

Contrôleur / système de contrôle

- Le contrôleur adapte la variable de commande (manipulée), pour atteindre la valeur désirée pour la variable contrôlée
- Il y a deux classes principales de stratégie de contrôle
 - feedforward (anticipation) ou open-loop (boucle ouverte)
 - feedback (rétroaction) ou closed-loop (boucle fermée)
- Parfois les deux sont implantées simultanément (FB/FF)
 - FF traite le rejet de perturbation et/ou l'anticipation du chat de consigne
 - FB cible le suivi de trajectoire
 - FB/FF très fréquent en chemical engineering

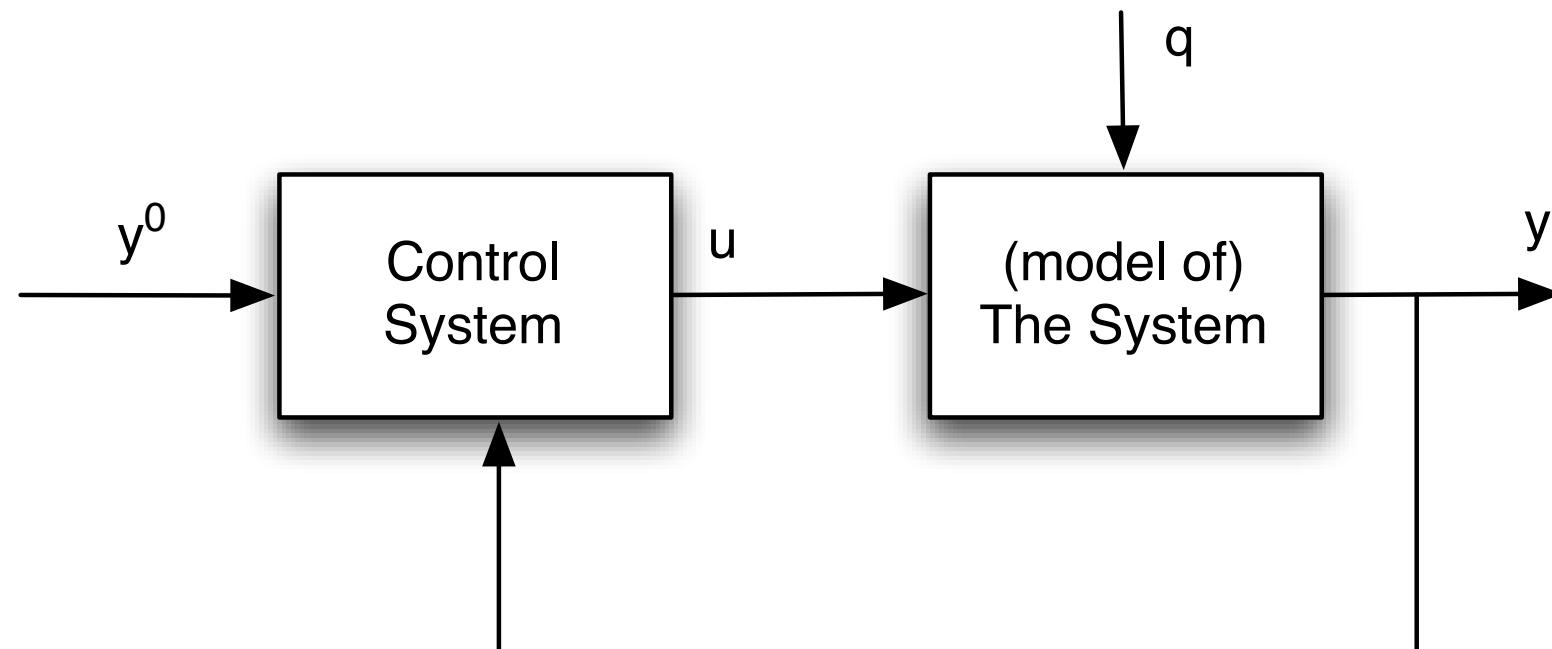
Commande en boucle ouverte (OL)

- La loi de commande est déterminée indépendamment de la valeur de la variable contrôlée



Commande en boucle fermée (CL)

- La commande dépend de la valeur de la grandeur contrôlée

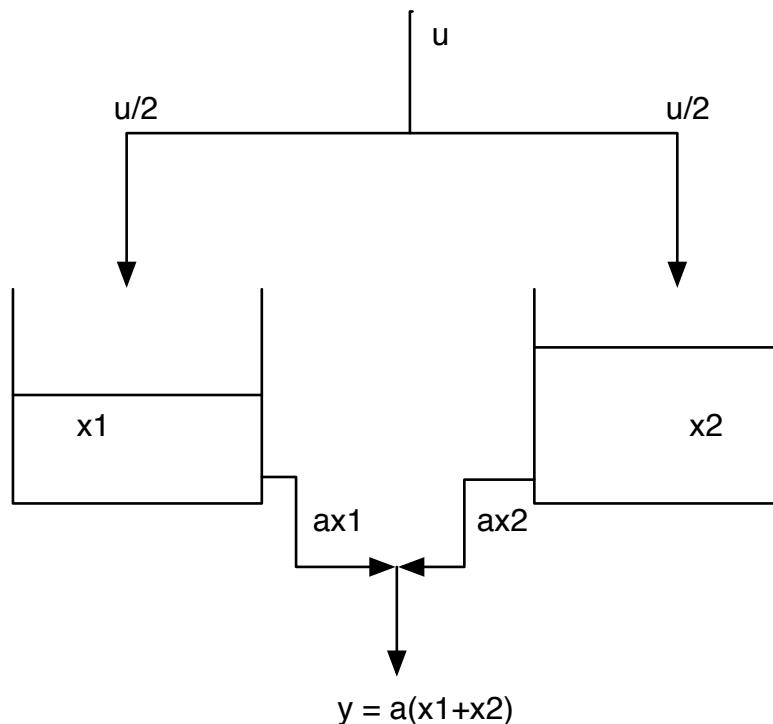


Contrôlabilité

(Référence: Luenberger, Chapitre 8)

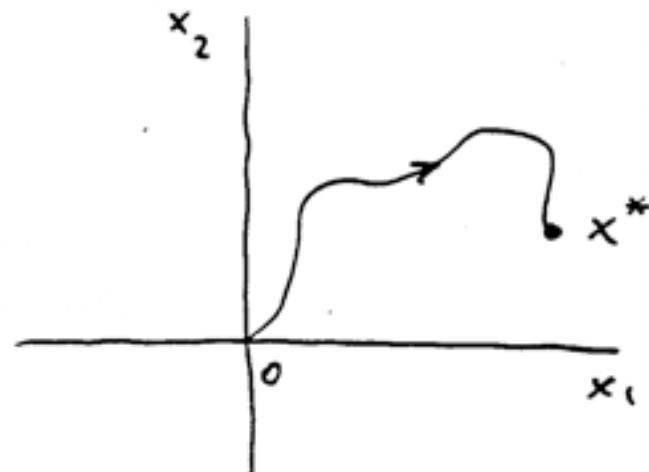
Peut-on tout contrôler?

- Selon les schémas de contrôle vus précédemment (OL et CL) il semble qu'avec une séquence appropriée de commandes u , on peut amener y à n'importe quelle valeur
- Est-ce le cas?



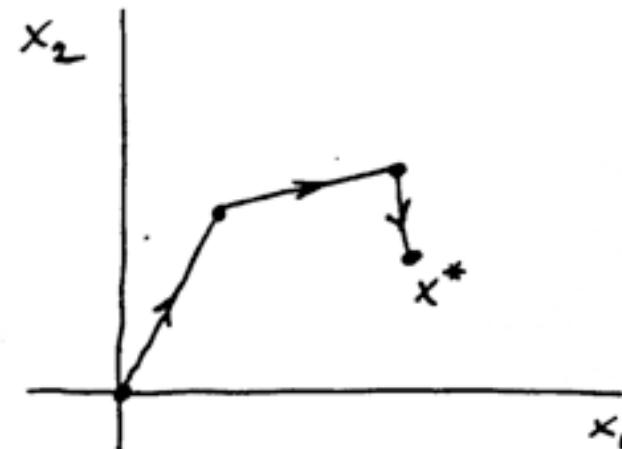
Le concept de contrôlabilité

$$\dot{x} = Ax + Bu$$



contrôlable
en temps fini

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$



contrôlable en 3 étapes

- Si l'ensemble des états que l'on peut atteindre en partant de zéro est l'espace d'états entier, alors le système est dit **complètement contrôlable**

Contrôlabilité: définition et théorème

Définition

Le système $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)$ est complètement contrôlable si pour $\mathbf{x}(0) = 0$ et pour tout état \mathbf{x}^* , il existe un temps fini t^* et une entrée continue par morceaux $\mathbf{u}(t)$ dans $[0 \ t^*]$ telle que $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*$

Théorème

Un système à temps continu (discret) est complètement contrôlable si, et seulement si, la matrice de contrôlabilité:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \text{ est rang } n$$

Eléments de démonstration

- Dans le cas discret

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

$$x(2) = ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

⋮

$$x(N) = A^{N-1}Bu(0) + A^{N-2}Bu(1) + \cdots + Bu(N-1)$$

- $x(N)$ peut être atteint (calculé) seulement s'il peut être exprimé comme une combinaison linéaire de puissances de A et B
- On a donc contrôlabilité si la suite B, AB, A^2B, \dots a un nombre fini de colonnes qui spannent l'espace de dimension n

Exemple: le bâton en équilibre

- On peut obtenir les équations des lois de Newton

$$\ddot{u} \cos \theta(t) + L \ddot{\theta}(t) = g \sin \theta(t)$$

- On sait que

$$x(t) = u(t) + L \sin \theta(t)$$

- pour les petits angles

$$\sin \theta \approx \theta$$

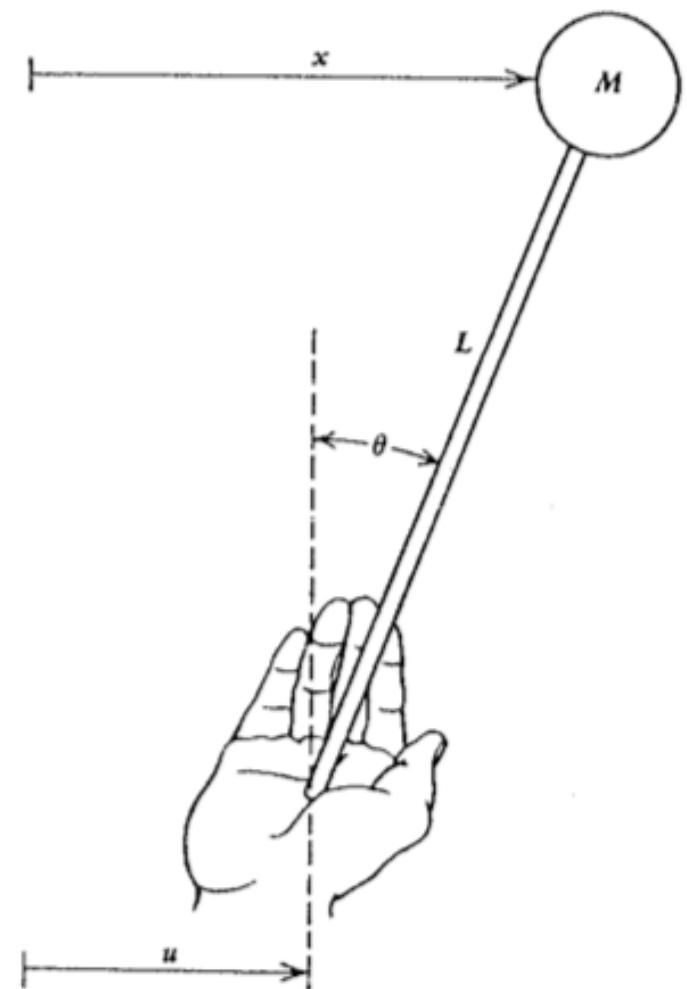
- on peut écrire

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{L} [x(t) - u(t)]$$

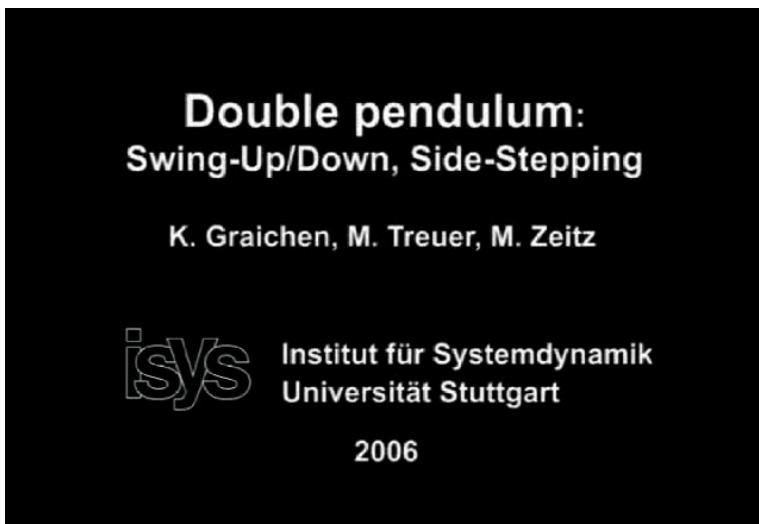
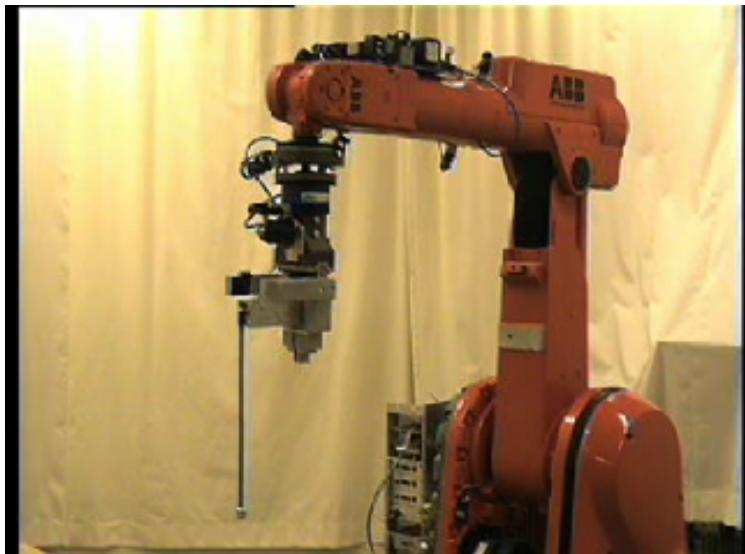
$$v(t) = \dot{x}(t)$$

- Donc (avec $L = 1\text{m}$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$



Exemple: le bâton en équilibre



- La matrice de contrôlabilité est selon le calcul effectué au tableau

$$\mathbf{M} = g \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Cette matrice est de rang 2 et le système est bien complètement contrôlable

Forme canonique de la contrôlabilité

- Une équation différentielle d'ordre n peut être remappée en un système de n équations du premier ordre

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = u$$

- On pose $y = \mathbf{x}_1$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_1 x_n + \cdots - a_n x_1 + u$$

Forme canonique

- L'ensemble d'équations différentielles linéaires peut être vu comme un système LTI avec une entrée et une sortie identifiée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]$$

Forme canonique

- Le système (A, b, c) a des propriétés intéressantes
- La dernière ligne est composée des coefficients du polynôme caractéristique

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

- c'est complètement contrôlable
- on dit que c'est sous la forme canonique de contrôlabilité

Théorème

Tout système complètement contrôlable est équivalent à un système sous forme canonique de contrôlabilité

Transformation

- C'est possible de mettre tout système complètement contrôlable sous sa forme canonique par une simple transformation $x = Mz$
- avec $M = \begin{bmatrix} b & | & Ab & | & \dots & | & A^{n-1}b \end{bmatrix}$
- On obtient $\bar{A} = M^{-1}AM$
ce qui est la forme canonique compagnon de contrôlabilité

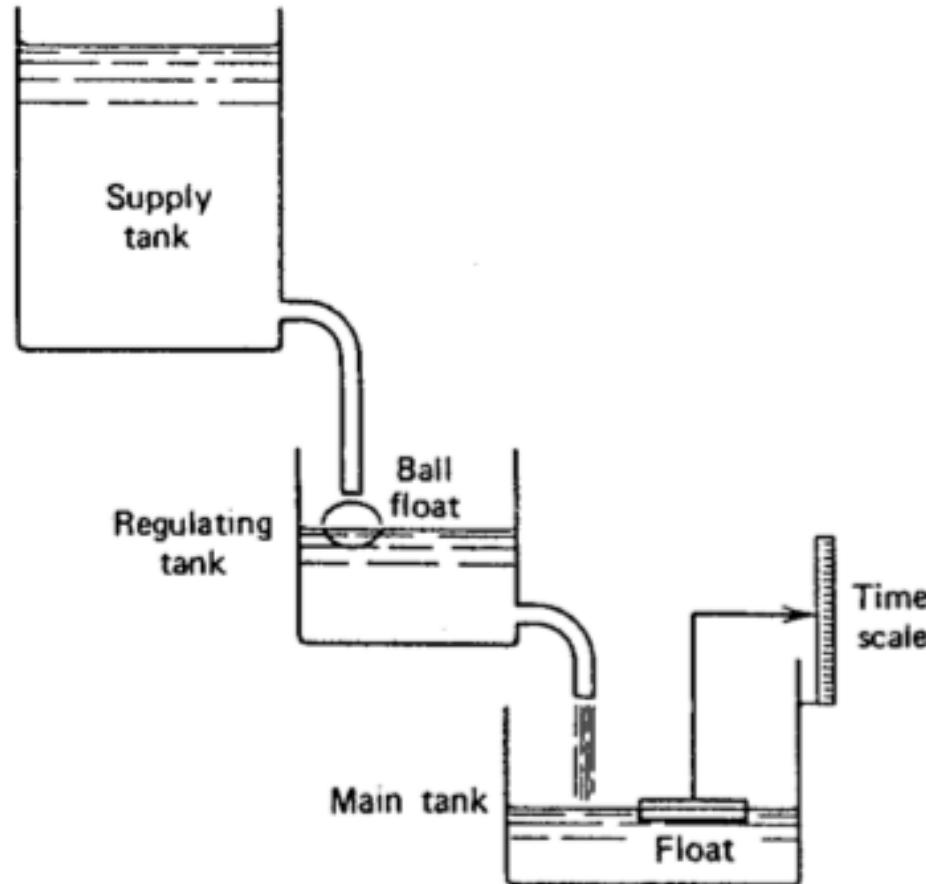
Rétroaction...

... et la loi de commande
(Référence: Luenberger, Chapitre 8)

Open loop vs closed loop

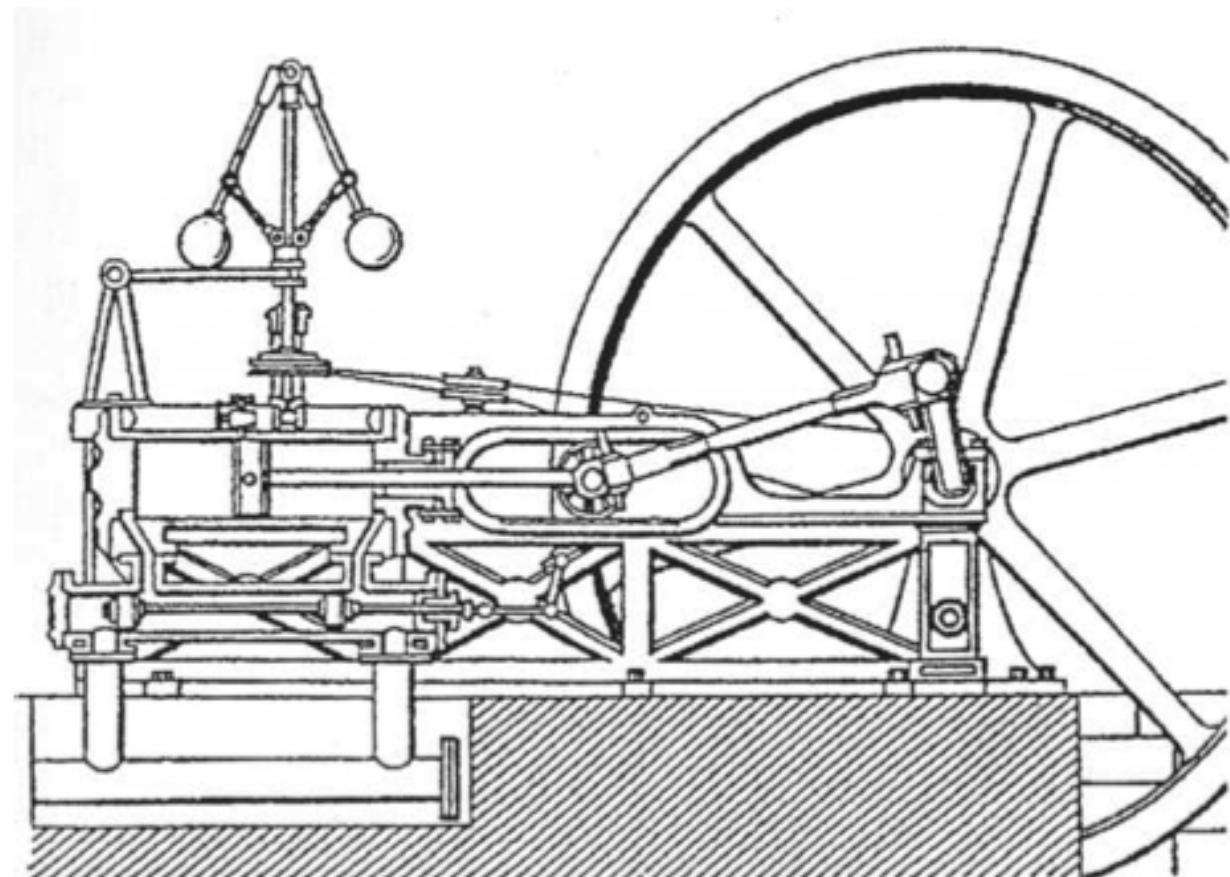
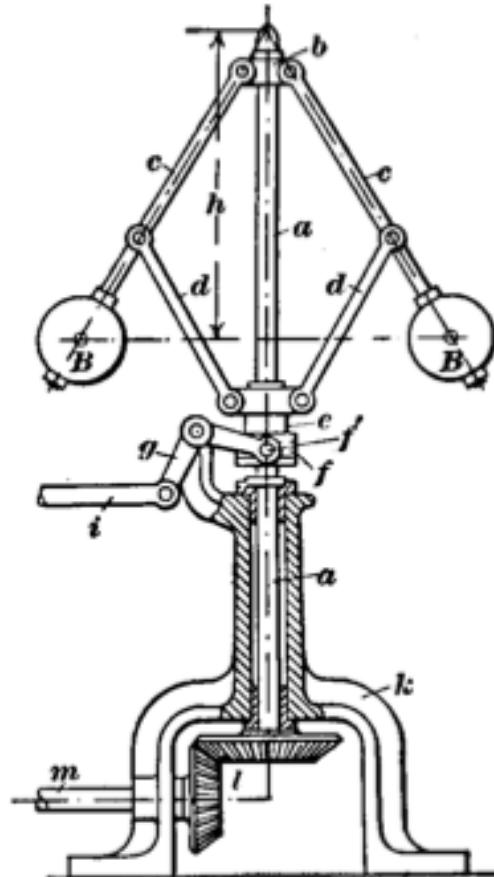
- Open loop control
 - la fonction d'entrée est déterminée par un process externe
 - e.g. un feu de circulation à cycle fixe
- Closed loop control
 - la commande est déterminée par le comportement du système
 - e.g. a thermostat
- La boucle fermée est plus facile à réaliser
- La boucle fermée requiert du temps de calcul

Exemple: la clépsydre



Ktesibios, 3ème siècle avant JC

Exemple: le régulateur centrifuge (aka « à boules » aka « deWatt »)



utilisé par James Watt, mais en service depuis le 17eme siècle

Exemple: un système simple

- On veut que l'état du système simple décrit par l'équation différentielle $\dot{x} = u$ prenne la valeur x_0
- Open-loop control: déterminer la fonction appropriée u . Mais, le system est **marginalement** stable. Tout erreur sera maintenue
- Closed-loop control: choisissons $u = \alpha(x_0 - x)$, le système devient $\dot{x} = \alpha(x_0 - x)$
- On définit l'erreur $\varepsilon = x_0 - x$ et on montre facilement qu'on obtient $\dot{\varepsilon} = -\alpha\varepsilon$
- Le système est maintenant **stable**

Rendre un système stable

- L'objectif de la rétroaction est d'adapter le comportement du système pour qu'il ait des propriétés souhaitées comme:
 - stabilité
 - oscillations réduites
 - pas d'erreur une fois le transient passé
 - etc
- Nous savons qu'un système est stable si ses *valeurs propres* respectent certaines contraintes ...

Théorème

Soit (A, B) un système complètement contrôlable. Alors, pour tout choix d'un polynôme $p(\lambda)$ d'ordre n $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$, il existe une matrice réelle K telle que le polynôme caractéristique de $A + BK$ est $p(\lambda)$

Preuve

On se limite au cas monovariable, $B = b$ et $K = k^T$

Comme (A, B) est complètement contrôlable, on peut mettre le système sous la forme canonique de stabilité

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

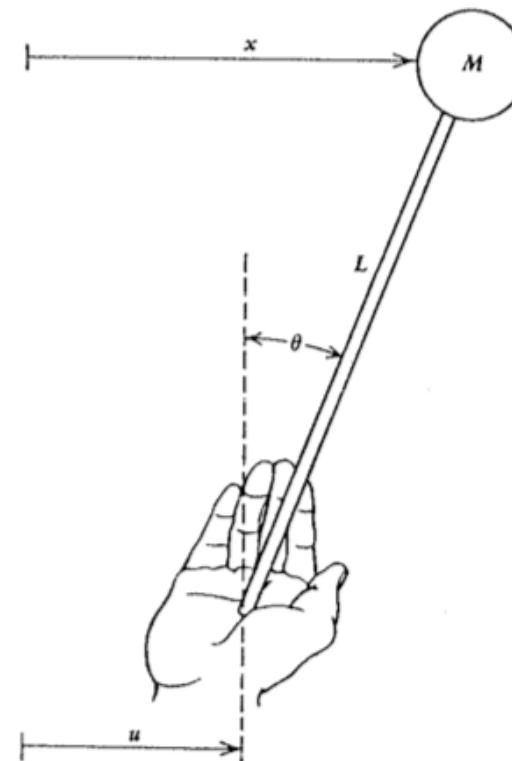
On choisit les coefficients de $k^T = [k_n \ k_{n-1} \ \cdots \ k_1]$ tels que

$$Bk^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ bk_n & bk_{n-1} & bk_{n-2} & \cdots & bk_1 \end{bmatrix}$$

et la matrice $A + Bk^T$ a un polynôme caractéristique de coefficients $(a_i - bk_i)$ qu'on peut choisir arbitrairement

Exemple: le bâton

- Pouvons-nous le contrôler en appliquant une commande qui ne dépende que de la valeur de la position? (déplacement x)?
- Et si on considère également la vitesse?



Observabilité

(Référence: Luenberger, Chapitre 8)

Observabilité vs contrôlabilité

- Ces deux concepts sont analogues.
- Forte dualité qui ...



- ne veut pas dire équivalence

Observabilité: définition et théorème

Définition

Le système

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

est **complètement observable** s'il existe un temps fini $t^* > 0$ tel que la connaissance de $\mathbf{y}(t)$ sur $[0 \ t^*]$ est suffisante pour déterminer la valeur de l'état initial $\mathbf{x}(0)$

Théorème

Un système à temps continu (discret) est **complètement observable** si et seulement si la matrice d'observabilité:

$$\mathbf{S}^T = \left[\mathbf{C}, \mathbf{CA}, \mathbf{CA}^2, \dots, \mathbf{CA}^{n-1} \right]^T = \left[\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^{n-1})^T \mathbf{C}^T \right]$$

est de rang n

Des pistes pour la démonstration

- Dans le cas discret:

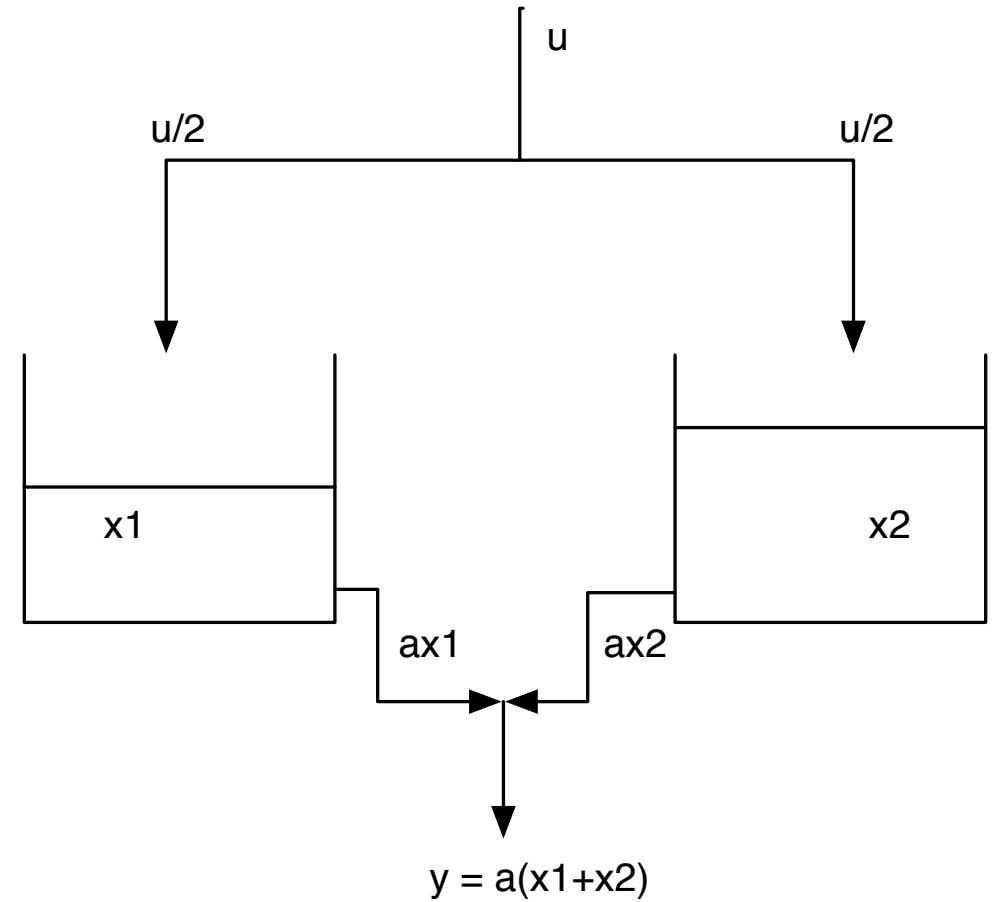
$$\begin{bmatrix} y(0) & = & Cx(0) \\ y(1) & = & CAx(0) \\ y(2) & = & CA^2x(0) \\ \vdots & & \\ y(n-1) & = & CA^{n-1}x(0) \end{bmatrix}$$

L'exemple du réservoir

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2S} \\ \frac{1}{2S} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a}{S} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{S} \end{bmatrix}$$

$$C = [a \quad a]$$



Observateurs

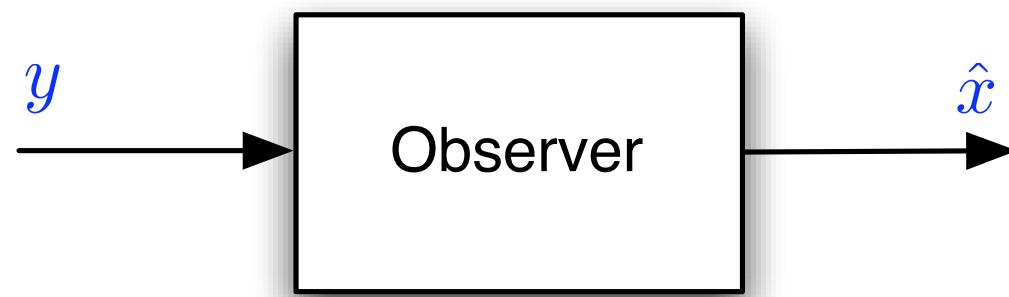
Estimation d'état asymptotique
(Référence: Luenberger, Chapitre 8)

Mesures

- Le théorème de positionnement des valeurs propres suppose que toutes les variables d'état peuvent être mesurées
- Ce n'est pas toujours le cas!!
 - trop cher
 - trop long
 - voire même impossible
- Notre contrôle doit être fonction des mesures disponibles (le plus simple le mieux)
- Rappel: un système est complètement observable si en observant les sorties on peut déterminer l'état initial

L'observateur

- Un observateur est un système dynamique



- qui donne une retourne une estimation de la valeur de l'état quand on le ‘nourrit’ avec les sorties mesurées

Un observateur trivial

- Un observateur très simple = une copie du système

- Si le système est

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

En fait on connaît
uniquement \mathbf{u} & y

- Cet observateur serait

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

- Mais nous avons un problème: regardons la dynamique de l'erreur

$$\varepsilon(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)$$

- Elle est gouvernée par cette équation

$$\dot{\varepsilon}(t) = \mathbf{A}\varepsilon(t) \quad \text{l'erreur ne disparaît que si le système est stable}$$

L'observateur identité

- Soit un système (m entrées, n états, p sorties)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

On ne connaît que u
& y

- On construit un observateur de la forme

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{E}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{z}(t)] + \mathbf{B}u(t)$$

- avec E à spécifier

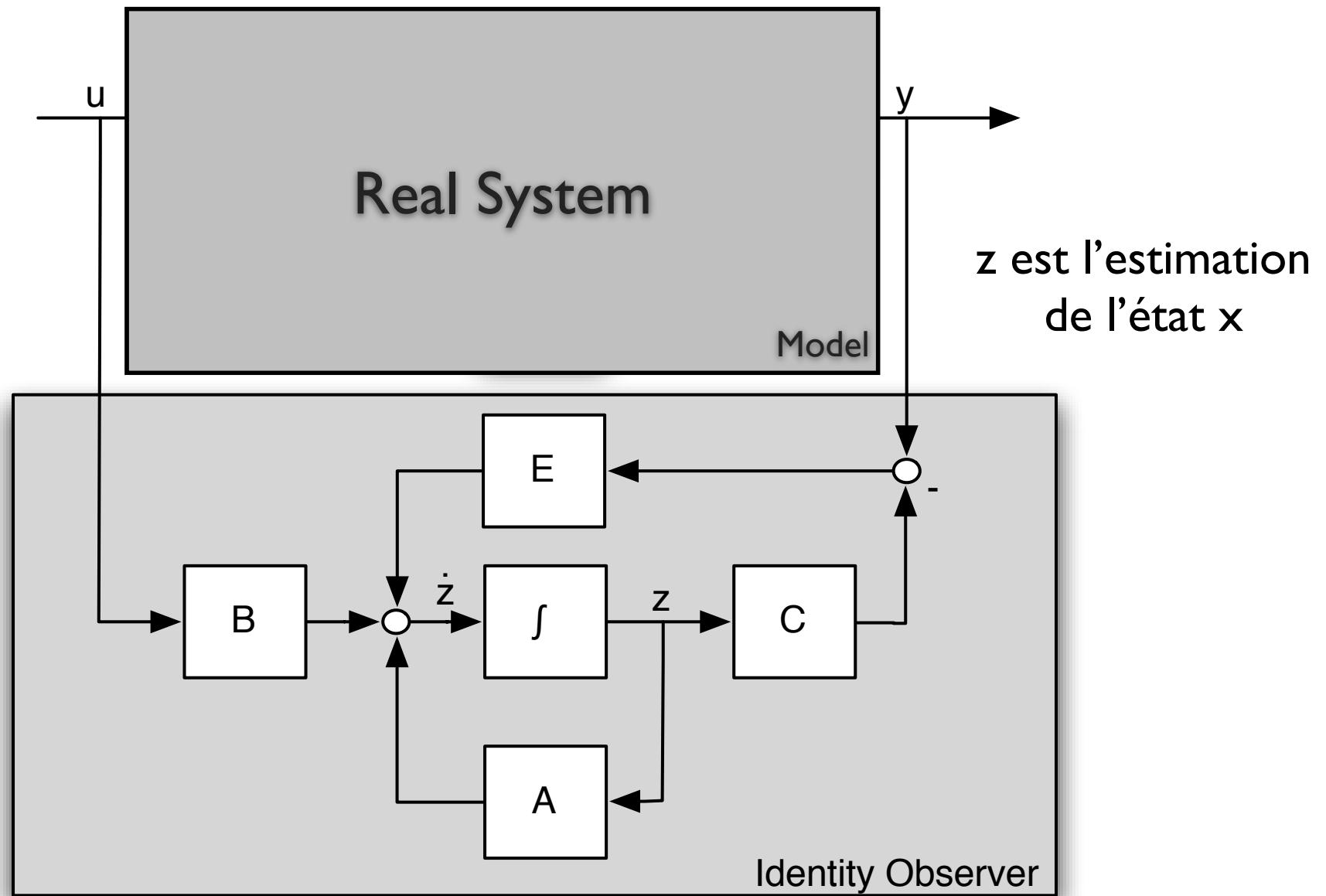
- Ses entrées sont

- les mesures y

- une copie des entrées u du système

OK, on utilise
(seulement) u et y...

L'observateur identité



L'observateur identité

- Si $z(t) = x(t)$ alors nous revenons dans le cas de l'observateur trivial
- On a dynamique de l'erreur:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = [A - EC] (\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)) = [A - EC] \varepsilon(t)$$

- Si $z(0) = x(0)$ alors $z(t) = x(t)$ pour tout $t > 0$
- Observateur \triangleq observateur identité car il suit l'état en entier
- Si $z(0) \neq x(0)$ le vecteur d'erreur est gouverné par $[A - EC]$
- On peut placer les valeurs propres de cette matrice, avec le degré de liberté que constitue E

Observateur d'ordre réduit

- L'observateur identité reconstruit tout l'état même si p variables d'état sont déjà connues avec précision
- Un observateur d'ordre réduit ($n - p$) peut être construit, pour que l'effort soit sur les $(n - p)$ variables ‘inconnues’
- Soit

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

- avec (\mathbf{A}, \mathbf{C}) complètement observable et \mathbf{C} $(p \times n)$ de rang p (les mesures sont linéairement indépendantes)

Construction de l'observateur d'ordre réduit

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

\mathbf{V} est une matrice $(n - p) \times n$ telle que \mathbf{P} ($n \times n$) est non singulière

On change de variable $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ et on partitionne le nouveau vecteur d'état comme:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{w}(t)$ de dimension $(n - p)$ et les dernières p variables d'état qui sont les sorties $\mathbf{y}(t)$

On peut réécrire le système original sous forme partitionnée

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t)$$

Construction de l'observateur d'ordre réduit (2)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t)$$

on multiplie le bas (qui correspond à $\dot{\mathbf{y}}(t)$) par une matrice $(n - p) \times p$ quelconque \mathbf{E} et on retranche le tout à la partie du haut ($\dot{\mathbf{w}}(t)$)

$$\dot{\mathbf{w}}(t) - \mathbf{E}\dot{\mathbf{y}}(t) = [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{EA}_{21}] \mathbf{w}(t) + [\mathbf{A}_{12} - \mathbf{EA}_{22}] \mathbf{y}(t) + [\mathbf{B}_1 - \mathbf{EB}_2] u(t)$$

On ajoute $-[\mathbf{A}_{11} - \mathbf{EA}_{21}] \mathbf{Ey}(t) + [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{EA}_{21}] \mathbf{Ey}(t) = \mathbf{0}$

et on pose $\mathbf{v}(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{Ey}(t)$

on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{EA}_{21}] \mathbf{v}(t) \\ &+ [\mathbf{A}_{11}\mathbf{E} - \mathbf{EA}_{21}\mathbf{E} + \mathbf{A}_{12} - \mathbf{EA}_{22}] \mathbf{y}(t) \\ &+ [\mathbf{B}_1 - \mathbf{EB}_2] u(t) \end{aligned}$$

\mathbf{v} : inconnues,
 \mathbf{y}, \mathbf{u} : entrées

L'observateur à ordre réduit

- On peut maintenant utiliser une copie du système qui décrit la dynamique de v comme l'observateur z

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{EA}_{21}] \mathbf{z}(t) \\ &+ [\mathbf{A}_{11}\mathbf{E} - \mathbf{EA}_{21}\mathbf{E} + \mathbf{A}_{12} - \mathbf{EA}_{22}] \mathbf{y}(t) \\ &+ [\mathbf{B}_1 - \mathbf{EB}_2] u(t)\end{aligned}$$

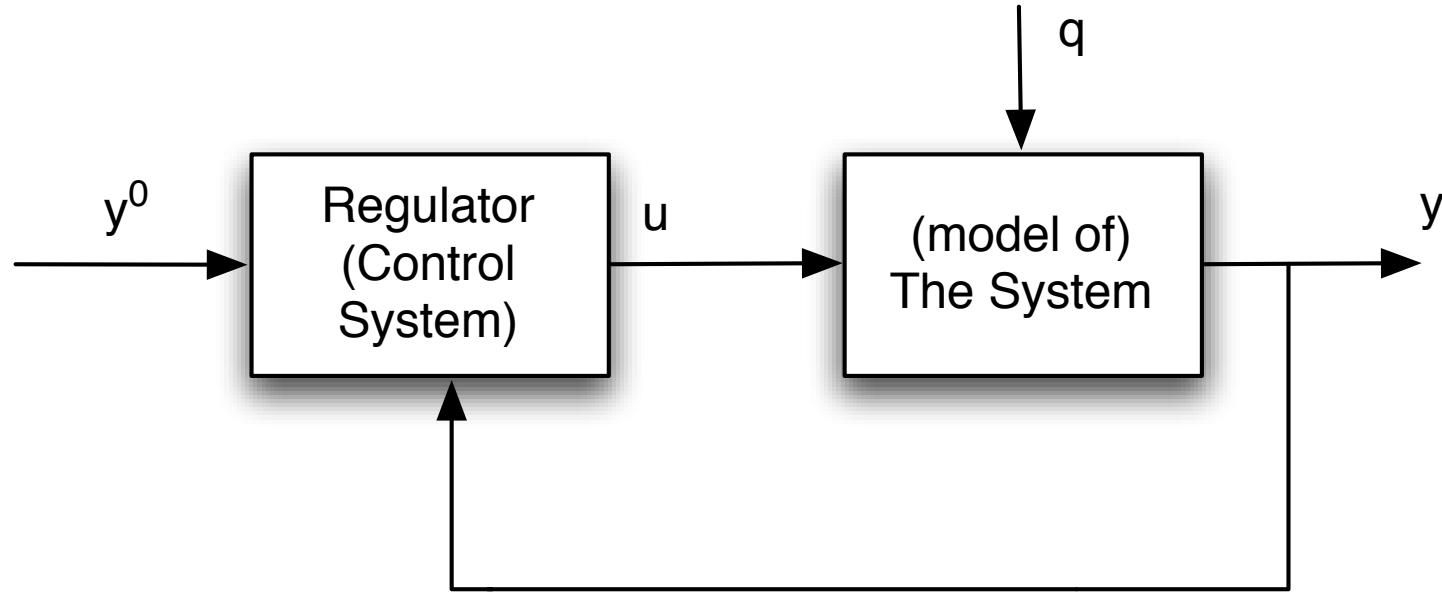
- z tend vers v selon les valeurs propres de $[\mathbf{A}_{11} - \mathbf{EA}_{21}]$
- Comme $v = w - Ey$, l'état du système est observé par

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \mathbf{Ey}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$$

Contrôleur stabilisant

(Référence: Luenberger, Chapitre 8)

Le schéma de principe

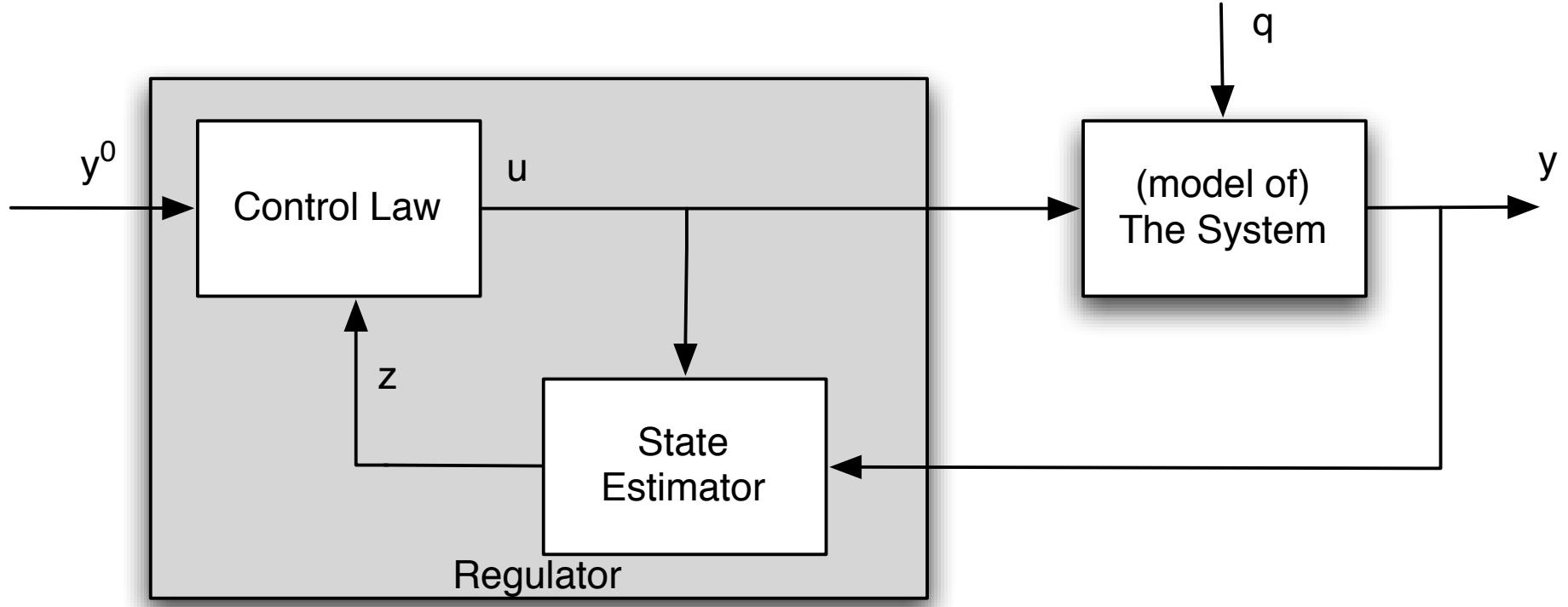


En général un contrôleur n'est pas une fonction simple et explicite du type (cf PID !):

$$u(t) = \Psi(y_o(t), y(t))$$

mais constitue un système dynamique per se

Contrôleur: loi de commande + observateur



La synthèse du contrôleur et de l'estimateur doivent être réalisées simultanément

Théorème de séparation des valeurs propres

Théorème

Soit le système

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

l'observateur identité

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{E}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{z}(t)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

et la loi de commande

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{z}(t)$$

Le polynôme caractéristique de ce composite est égal au produit des polynômes caractéristiques de $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ et de $\mathbf{A}-\mathbf{EC}$:

$$\Delta_{A+BK}(\lambda) \cdot \Delta_{A-EC}(\lambda)$$

- Les matrices \mathbf{K} et \mathbf{E} peuvent être fixées indépendamment
- Ce théorème s'applique aux systèmes linéaires

Preuve

- On élimine u avec la loi de commande et y (transformation de sortie) dans les équations du système et de l'observateur:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}z(t)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{E}[\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\mathbf{z}(t)] + \mathbf{B}\mathbf{K}z(t)$$

- On définit $\varepsilon(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)$ et on retranche la première équation à la deuxième

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\varepsilon(t)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C}]\varepsilon(t)$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{E}\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Le filtre de Kalman

(basé sur un article de Ramsey Faragher, BAE Systems
Advanced Technology)

Qu'est ce que c'est?

- Un des plus importants algorithmes de *data fusion*
- peut être utilisé pour
 - filtrer des données bruitées
 - estimer l'état d'un système
- pas de charge computationnelle trop élevée
- Applications partout! (ex. ordinateur de navigation de Apollo 11 navigation computer)



Rudolf Emil Kálmán (1930-2016)

Le travail de Kálmán est basé sur des idées de Peter Swerling, développées en collaboration avec Richard S. Bucy

Position du problème

- L'état du système suit l'équation de transition des états mais...

$$x_t = \mathbf{A}x_{t-1} + \mathbf{B}u_t + w_t \quad \diamond$$

- ... il y a un terme supplémentaire: le bruit de process w_t
- Et le système peut être mesuré, mais ...

$$z_t = \mathbf{H}x_t + v_t$$

- ... il y a un terme supplémentaire: le bruit de mesure v_t
 - w_t est un bruit blanc gaussien $\text{WGN}(0, Q_t)$
 - v_t est un bruit blanc gaussien $\text{WGN}(0, R_t)$

Un exemple simple

- Problème: suivre la position d'un train sur ses rails, avec une mesure de position bruitée



- Etat et entrée:

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} \quad u_t = \frac{f_t}{m}$$

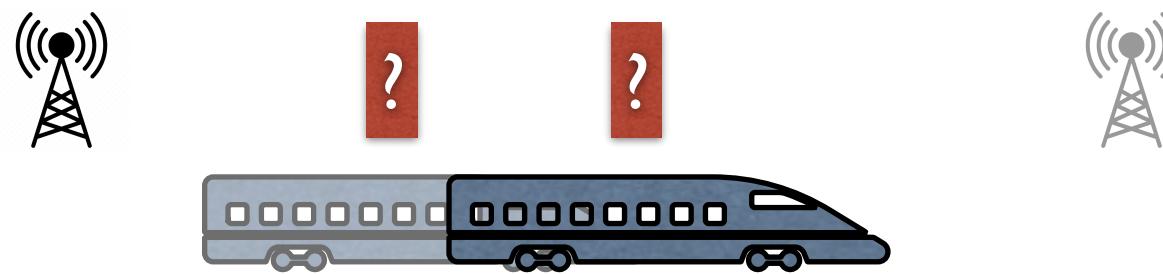
- Les équations sont:

$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-1} + \frac{f_t \Delta t}{m}$$

$$x_t = x_{t-1} + \dot{x}_{t-1} \Delta t + \frac{f_t \Delta t^2}{2m}$$

Un exemple simple

- Problème: suivre la position d'un train sur ses rails, avec une mesure de position bruitée



- Etat et entrée:

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} \quad u_t = \frac{f_t}{m}$$

- Les équations sont:

$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-1} + \frac{f_t \Delta t}{m}$$

$$x_t = x_{t-1} + \dot{x}_{t-1} \Delta t + \frac{f_t \Delta t^2}{2m}$$

Modèle d'état

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ \dot{x}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} \frac{f_t}{m}$$

- Et donc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

- Si on ajoute de l'**incertitude** à la mesure de position du train et à la mesure de sa vitesse, alors le véritable état du système n'est pas directement observable

Propriété principale du filtre de Kalman

- SI
 - le système est “bien modélisé”
 - le système est linéaire et monodimensionnel
 - les bruits de mesure sont WGN
- ALORS
 - Le Filtre de Kalman a été prouvé être l'**ESTIMATEUR OPTIMAL**

Dérivation du filtre de Kalman

Les ingrédients

- Connaissance : l'état courant
- Prédictions avec les équations du modèle
- Mesures bruitées
- Le KF est en deux étapes, réalisées itérativement:
 - I. Prédiction
 2. Correction (amélioration de l'estimation par mise à jour)

La matrice de covariance P

- Comme le système n'est pas observable, le KF fournit des **estimations**
- Le KF rend ces estimations comme des fonctions Gaussiennes
- La matrix P_t contient les variances de l'état du système sur la diagonale, et les covariances hors diagonale

$$P_t = \begin{bmatrix} Var[x_t^1] & Covar[x_t^1 x_t^2] & Covar[x_t^1 x_t^3] & \cdots & Covar[x_t^1 x_t^n] \\ Covar[x_t^2 x_t^1] & Var[x_t^2 x_t^2] & \cdots & \cdots & Covar[x_t^2 x_t^n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & Var[x_t^i] & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & Covar[x_t^{n-1} x_t^n] & Var[x_t^n] \end{bmatrix}$$

- P_t clairement symétrique ...

L'étape de prédition

- Les équations de prédictions sont

$$\hat{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\hat{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}u_t \quad \star$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_t$$

- La variance associée à la prédition $\hat{x}_{t|t-1}$ est par définition:

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = E[(x_t - \hat{x}_{t|t-1})(x_t - \hat{x}_{t|t-1})^T]$$

- L'erreur $x_t - \hat{x}_{t|t-1}$ s'obtient en soustrayant l'équation \star de l'équation de transition de l'état (❖ slide 3)

$$x_t - \hat{x}_{t|t-1} = \mathbf{A} (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1|t-1}) + w_t$$

Mise à jour de la matrice de covariance P

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{t|t-1} &= E \left[\left(\mathbf{A} \left(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \right) + \mathbf{w}_t \right) \cdot \left(\mathbf{A} \left(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \right) + \mathbf{w}_t \right)^T \right] \\ &= \mathbf{A} \cdot E \left[\left(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \right) \cdot \left(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \right)^T \right] \cdot \mathbf{A}^T \\ &\quad + \mathbf{A} \cdot \left[E \left[\left(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \right) \cdot \mathbf{w}_t^T \right] + E \left[\mathbf{w}_t \cdot \left(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \right)^T \right] \right] \cdot \mathbf{A}^T + E \left[\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_t^T \right]\end{aligned}$$

Les erreurs d'estimation des états et du bruit de process ne sont pas corrélées, on obtient donc:

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A} \cdot E \left[\left(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \right) \cdot \left(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \right)^T \right] \cdot \mathbf{A}^T + E \left[\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_t^T \right]$$

qui s'écrit

$$\boxed{\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{t-1|t-1} \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_t}$$

L'étape de correction (amélioration)

- Les équations de correction (mise à jour avec les mesures)sont:

estimation a-priori

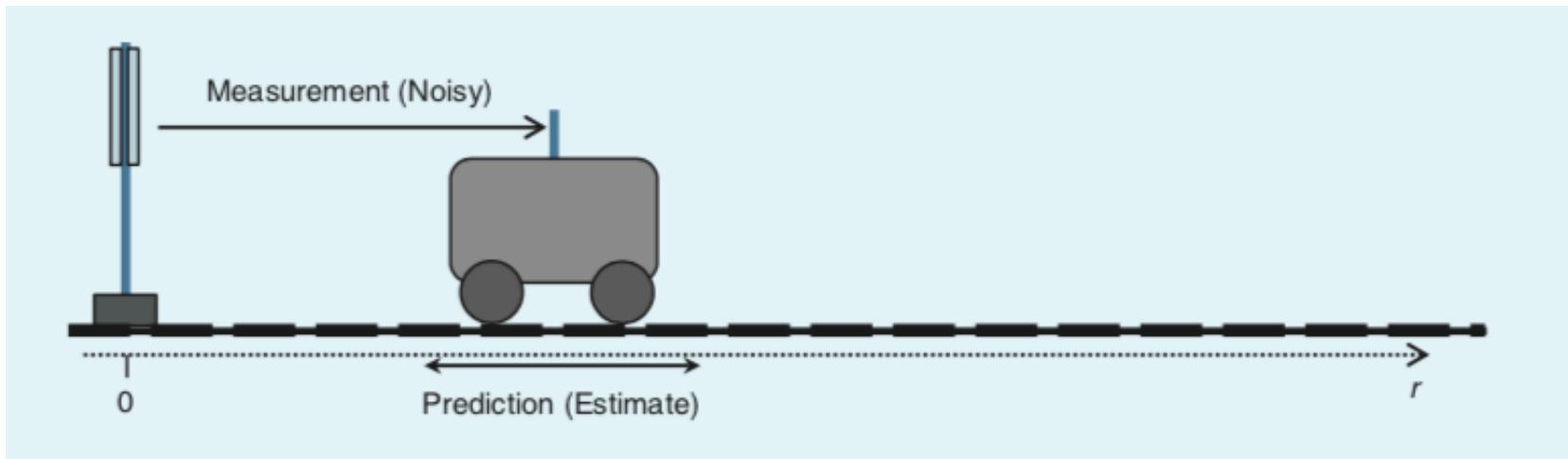
$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \cdot (y_t - \mathbf{H}\hat{x}_{t|t-1})$$
$$\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1}$$

- où la matrice de gain de Kalman \mathbf{K}_t est donnée par:

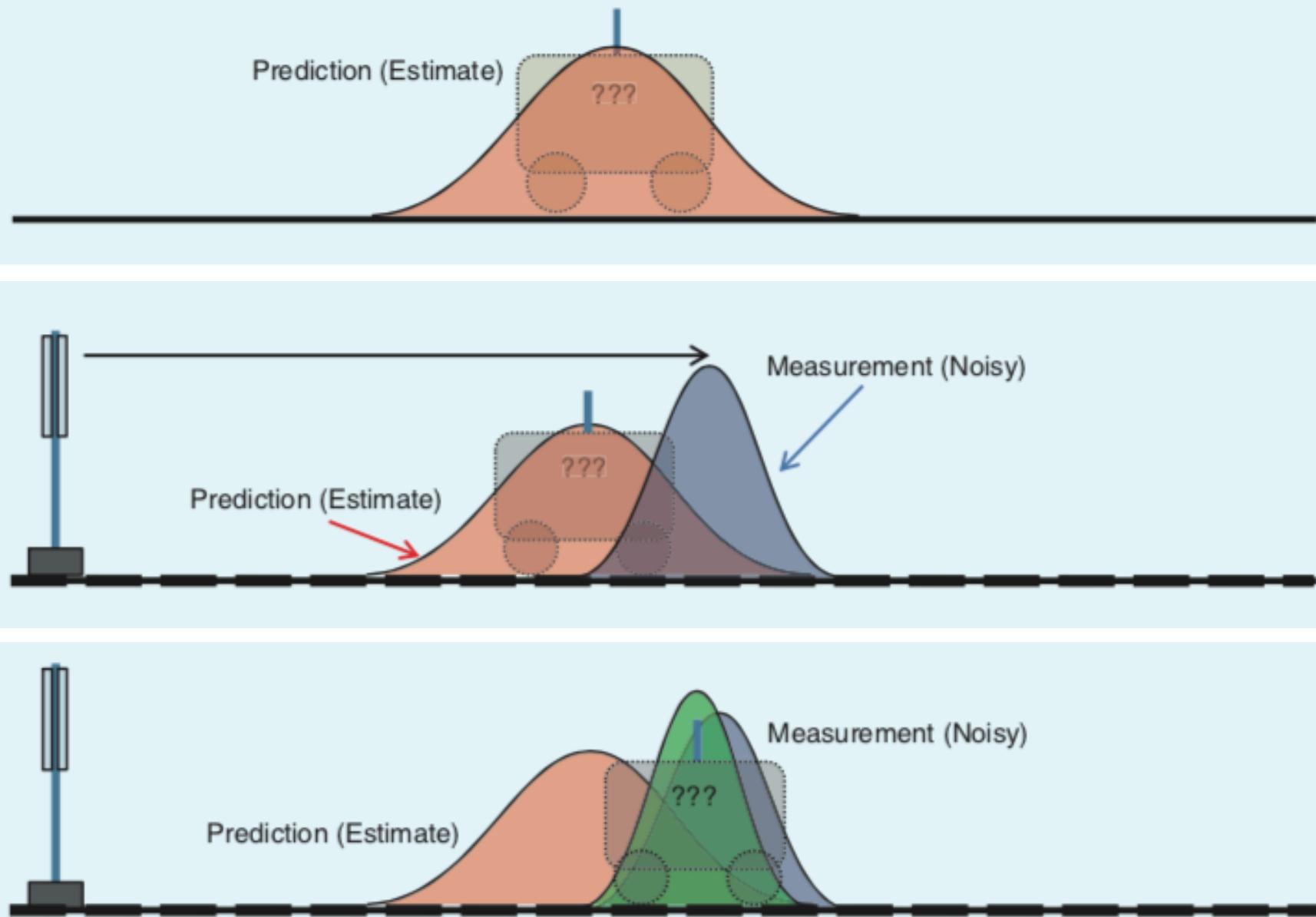
$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

Dérivation simplifiée des équations de correction

- De retour dans notre train: à chaque instant d'échantillonnage on veut la meilleure estimation de la position.
- Nous avons comme informations:
 - des prédictions (dernière position et vitesse)
 - les mesures d'un capteur le long de la voie



Data fusion = multiplication des PDFs



Fusion des PDFs de prédiction et de mesure

- La PDF de prédiction

$$y_1(r; \mu_1, \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

- La PDF de mesure

$$y_2(r; \mu_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

- PDF fusionnée

https://ccrma.stanford.edu/~jos/sasp/Product_Two_Gaussian_PDFs.html

$$y_f(r; \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} e^{-\left(\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}$$

On réarrange

- La PDF fusionnée devient:

$$y_f(r; \mu_f, \sigma_f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-\frac{(r-\mu_f)^2}{2\sigma_f^2}}$$

- avec:

$$\mu_f = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_f^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

l'étape de mise à jour des mesures

$$\mu_f = \mu_1 + \frac{\sigma_1^2(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Cas plus général

- La mesure et la prédiction peuvent ne pas venir du même domaine, par exemple:
 - position of train prédite en mètres
 - temps de vol de mesures radio en secondes
- On a des unités différentes : on a besoin d'une transformation H pour mapper les 2 unités et permettre la multiplication des PDFs
- y_1 : distance le long de la voie
- y_2 : temps de vol de la mesure radio depuis le transmetteur positionné à $x=0$. Scaling: $c = \text{vitesse de la lumière}$

Metttons tout dans le même domaine

- La mesure de distance est remappée dans le domaine temporel en convertissant l'espace en temps ($r \rightarrow s$) , en divisant par la vitesse de la lumière c :

$$y_1(s; \mu_1, \sigma_1, c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{\sigma_1}{c})^2}} e^{-\frac{(s - \frac{\mu_1}{c})^2}{2(\frac{\sigma_1}{c})^2}}$$

- La PDF de la mesure radio reste inchangée:

$$y_2(s; \mu_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(s - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

La moyenne de la fusion

- Si on applique les règles de multiplication des PDFs on obtient la moyenne fusionnée:

$$\frac{\mu_f}{c} = \frac{\mu_1}{c} + \frac{\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^2 \left(\mu_2 - \frac{\mu_1}{c}\right)}{\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^2 + \sigma_2^2}$$

- C'est à dire:

$$\mu_f = \mu_1 + \left(\frac{\frac{\sigma_1^2}{c}}{\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^2 + \sigma_2^2} \right) \left(\mu_2 - \frac{\mu_1}{c} \right)$$

La variance fusionnée

- La variance fusionnée:

$$\frac{\sigma_f^2}{c^2} = \left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^4}{\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^2 + \sigma_2^2}$$

- Peut être réécrite comme:

$$\sigma_f^2 = \sigma_1^2 - \frac{\frac{\sigma_1^2}{c}}{\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^2 + \sigma_2^2} \frac{\sigma_1^2}{c}$$

Les matrices H et K et la moyenne **mean fusionnée**

- Soit:

$$H = \frac{1}{c} \quad K = \frac{H\sigma_1^2}{H^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

- de:

$$\mu_f = \mu_1 + \left(\frac{\frac{\sigma_1^2}{c}}{\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^2 + \sigma_2^2} \right) \left(\mu_2 - \frac{\mu_1}{c} \right)$$

- on obtient

$$\boxed{\mu_f = \mu_1 + K(\mu_2 - H\mu_1)}$$

Les matrices H et K et la variance fusionnée

- Soit

$$H = \frac{1}{c} \quad K = \frac{H\sigma_1^2}{H^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

- De:

$$\sigma_f^2 = \sigma_1^2 - \frac{\frac{\sigma_1^2}{c}}{\left(\frac{\sigma_1}{c}\right)^2 + \sigma_2^2} \frac{\sigma_1^2}{c}$$

- On obtient:

$$\boxed{\sigma_f^2 = \sigma_1^2 - KH\sigma_1^2}$$

On met tout ensemble:

- Le vecteur d'état après fusion des données

$$\mu_f \rightarrow \hat{x}_{t|t}$$

- le vecteur d'état avant la data fusion: la prédiction

$$\mu_1 \rightarrow \hat{x}_{t|t-1}$$

- le vecteur de mesure

$$\mu_2 \rightarrow z_t$$

Les covariances

- La matrice de covariance (confiance) après data fusion

$$\sigma_f^2 \rightarrow \mathbf{P}_{t|t}$$

- la matrice de covariance (confiance) avant data fusion

$$\sigma_1^2 \rightarrow \mathbf{P}_{t|t-1}$$

- la matrice d'incertitude associée à un ensemble de mesures bruitées

$$\sigma_2^2 \rightarrow \mathbf{R}_t$$

Les matrices H et K

- La matrice de transformation utilisée pour mapper les paramètres du vecteur d'état dans le domaine des mesures:

$$H \rightarrow H_t$$

- Le **Gain de Kalman gain** s'obtient de

$$K = \frac{H\sigma_1^2}{H^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

- Qui devient

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1}$$

Les équations de récurrence

- La moyenne et la variance fusionnées sont mises à jour

$$\mu_f = \mu_1 + K(\mu_2 - H\mu_1)$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_1^2 - KH\sigma_1^2$$

- Elles deviennent

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t(z_t - \mathbf{H}_t \hat{x}_{t|t-1})$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1}$$

En résumé

Entrée l'estimé précédent et sa variance \hat{x}_0 et $P_{0| -1}$

Mise à jour du gain du filtre de Kalman

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1}$$

Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t|t-1} &= A_t \hat{x}_{t-1|t-1} + B_t u_t \\ P_{t|t-1} &= A_t P_{t-1|t-1} A_t^T + Q_t\end{aligned}$$

Correction de la prédiction

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t (z_t - H_t \hat{x}_{t|t-1})$$

Mise à jour de la covariance
(update stage)

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t H_t P_{t|t-1}$$

z_0, z_1, \dots

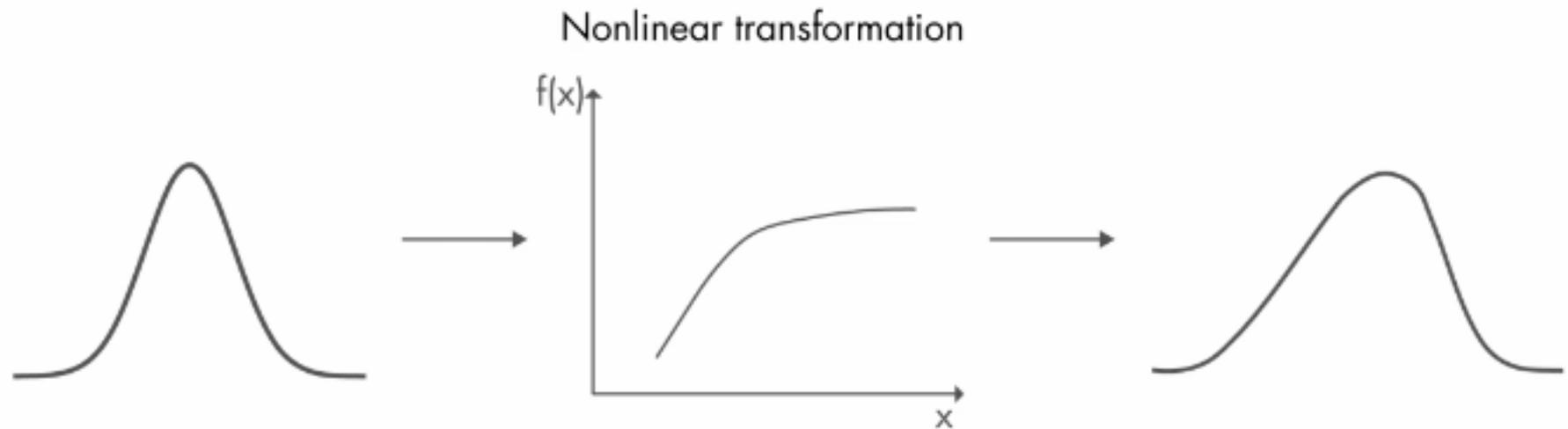
$\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots$

Filtres non linéaires

Le filtre de Kalman est pour les systèmes linéaires

- Si le système est non linéaire, la distribution du bruit de process/de mesure peut être transformée en qqch de non gaussien. Tout s'écroule :)

$$\dot{x}(t) = f(x, u, v)$$



Le filtre de Kalman linéarisé

- On linéarise le système le long d'une trajectoire **connue à l'avance**.
- Taylor series expansion
- On utilise le filtre pour estimer les **déviations** de la trajectoire nominale
- Comme on utilise le KF pour estimer Δx , on doit ajouter l'estimation de Δx à l'état nominal x pour obtenir l'estimation de x . Cela vient de $\Delta x = x - \bar{x}$
- Si le véritable état x s'éloigne de trop de l'état nominal \bar{x} , alors le KF linéarisé ne donnera pas de bons résultats.

Linéarisation

- Les équations du système non linéaire

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k$$

$$y_k = g(x_k) + v_k$$

- Sont linéarisées au voisinage de la trajectoire nominale

$$x_{k+1} \approx f(\bar{x}_k, u_k) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k) \Delta x_k + w_k$$

$$y_k \approx g(\bar{x}_k) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k) \Delta x_k + v_k$$

- avec

$$\Delta x_{k+1} = x_{k+1} - \bar{x}_k = x_{k+1} - f(\bar{x}_k, u_k)$$

$$\Delta y_k = y_k - \bar{y}_k = y_k - g(\bar{x}_k)$$

- on obtient

$$\Delta x_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k) \Delta x_k + w_k \quad \Delta y_k = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k) \Delta x_k + v_k$$

Résumé du KF linéarisé

- A chaque pas de temps calculer

$$\mathbf{A}_k = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k) \quad \mathbf{H}_k = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k)$$

- calculer $\Delta y_k = y_k - g(\bar{x}_k)$
- Executer les équations du KF:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

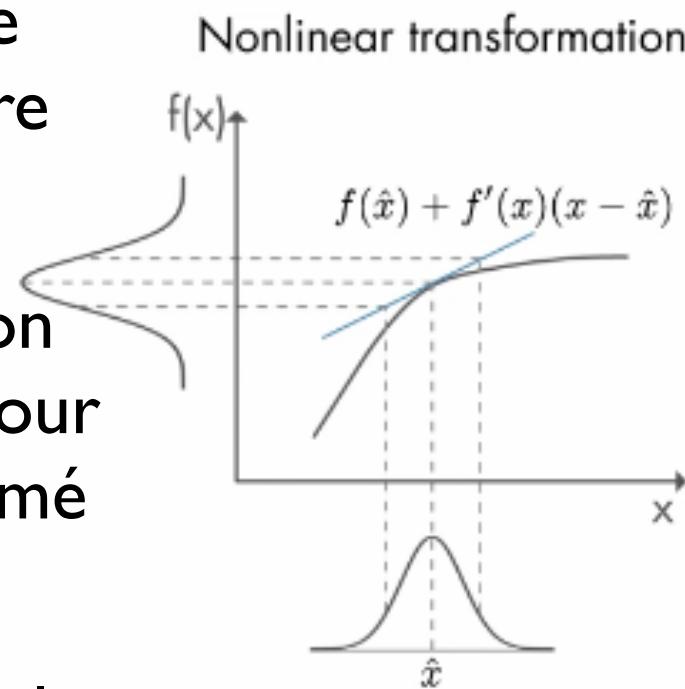
$$\Delta \hat{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \Delta \hat{x}_k + \mathbf{K}_t (\Delta y_k - \mathbf{H}_k \Delta \hat{x}_k)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{A}_k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_t$$

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \Delta \hat{x}_{k+1}$$

Le filtre de Kalman étendu

- Comment faire si on ne connaît pas la trajectoire nominale?
- L'EKF linéarise l'équation de transition d'état autour de la moyenne de l'estimé courant
- A chaque pas de temps, la linéarisation est réalisée



System:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k) + w_k$$

$$y_k = g(x_k) + v_k$$

Jacobians:

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{k-1}, u_k}$$

$$G = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_k}$$

Linearized system:

$$\Delta x_k \approx F \Delta x_{k-1} + w_k$$

$$\Delta y_k \approx G \Delta x_k + v_k$$

L'EKF: l'idée

- Utiliser l'estimation de \mathbf{x} à la place de la trajectoire nominale du KF linéarisé, c'est à dire on choisit: $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$
- Nos équations deviennent:

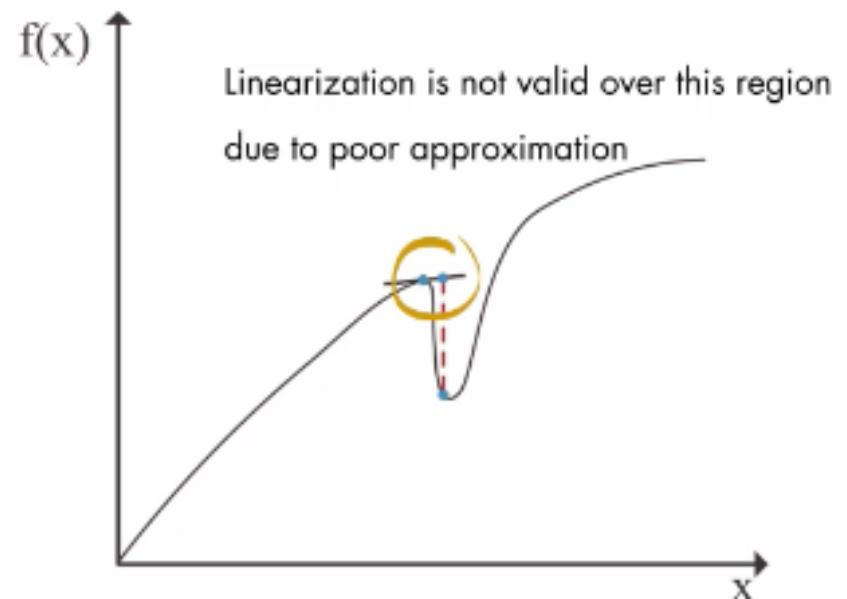
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = f(\hat{\mathbf{x}}_k, u_k) + \mathbf{K}_k (y_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k))$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{A}_k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_t$$

Désavantages

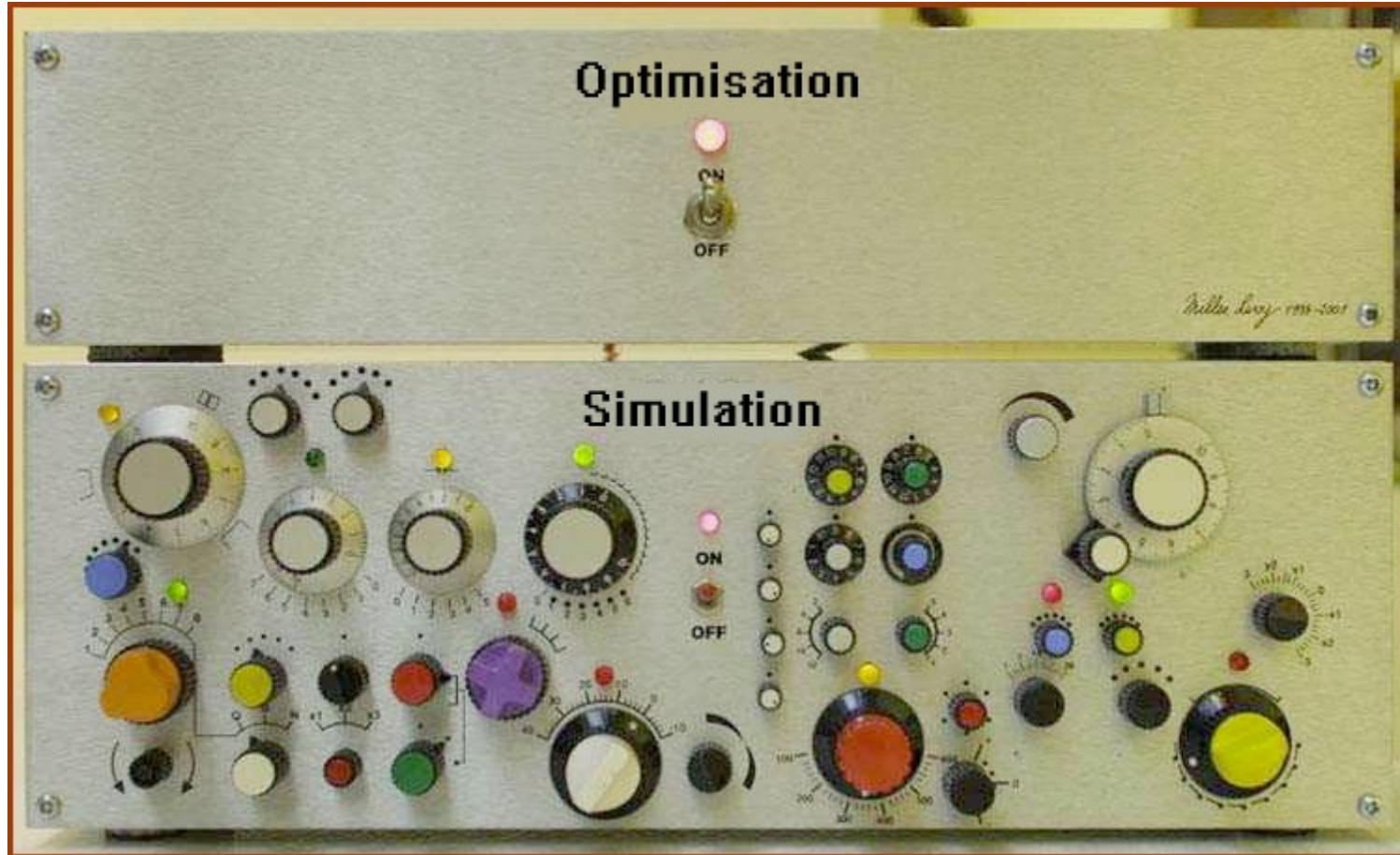
- Difficulté de calculer les Jacobiens A et H
- Coût numérique
- EKF fonctionne seulement si le système est différentiable
- Si le système est fortement NL, alors EKF est pas optimal

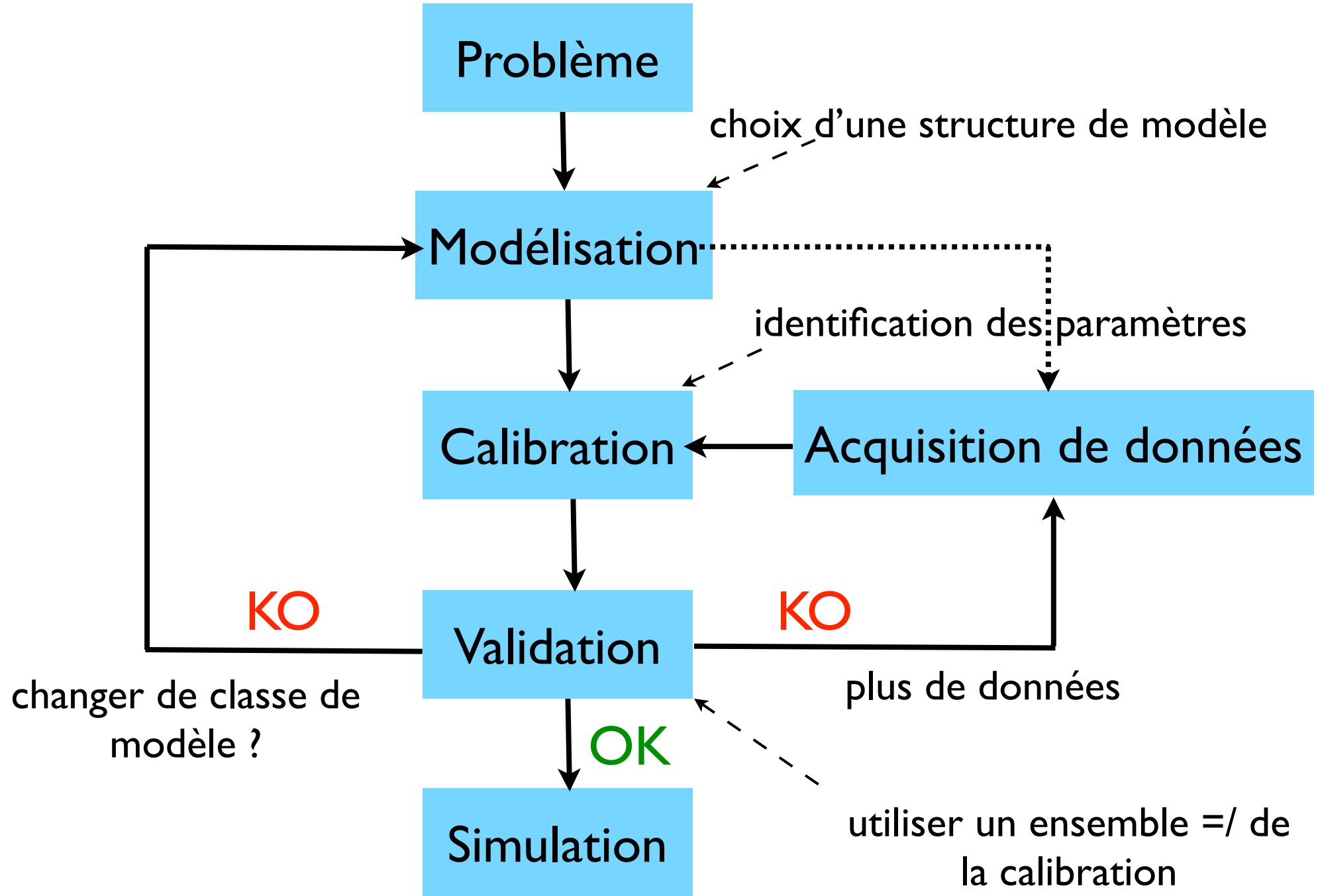


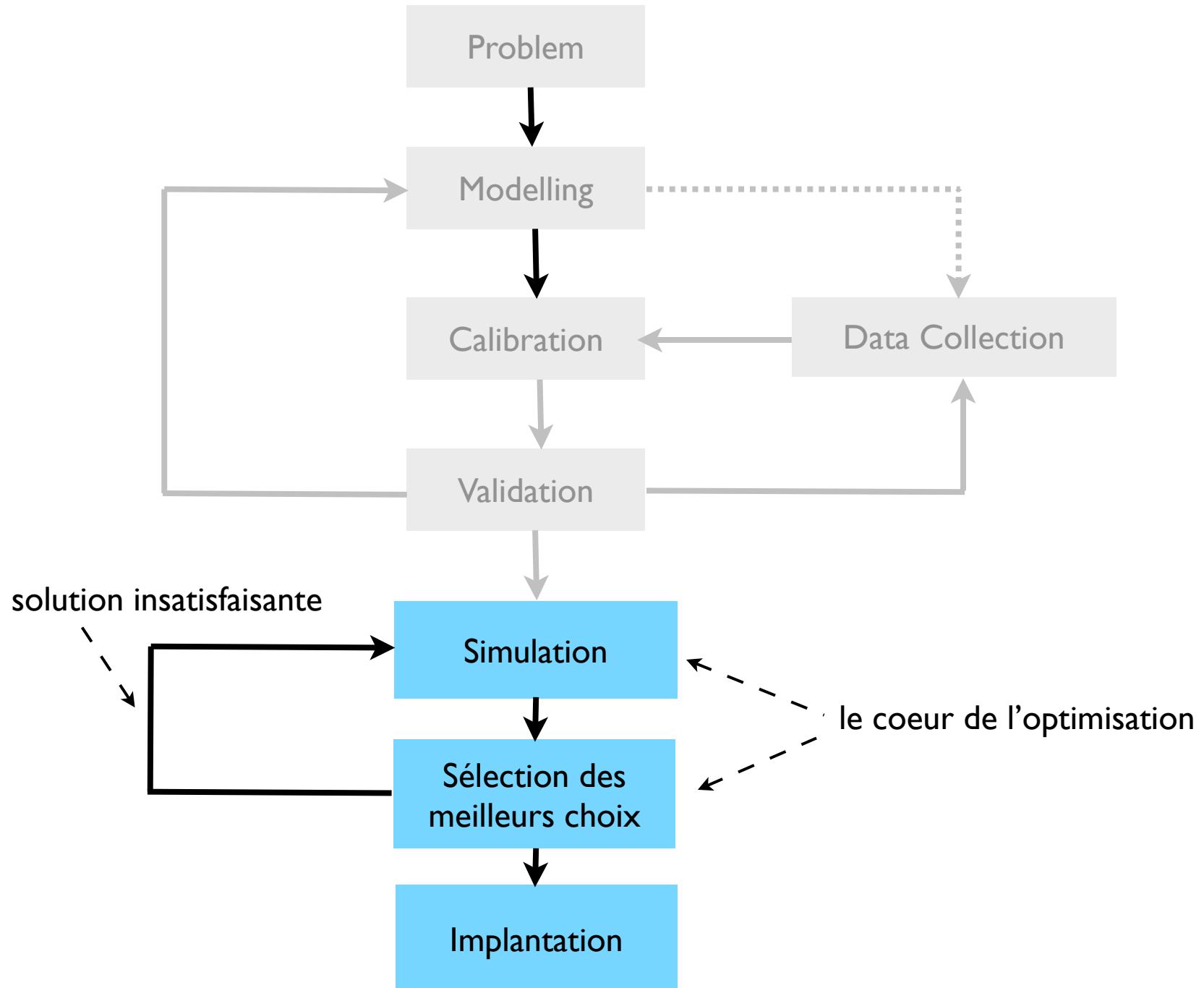
Introduction l'Optimisation

Simuler avec un objectif

Simulation vs Optimisation







Formulation d'un problème d'optimisation

- On doit transformer le problème en un système d'équations

$$\begin{array}{c} \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \in \mathcal{U} \end{array}$$

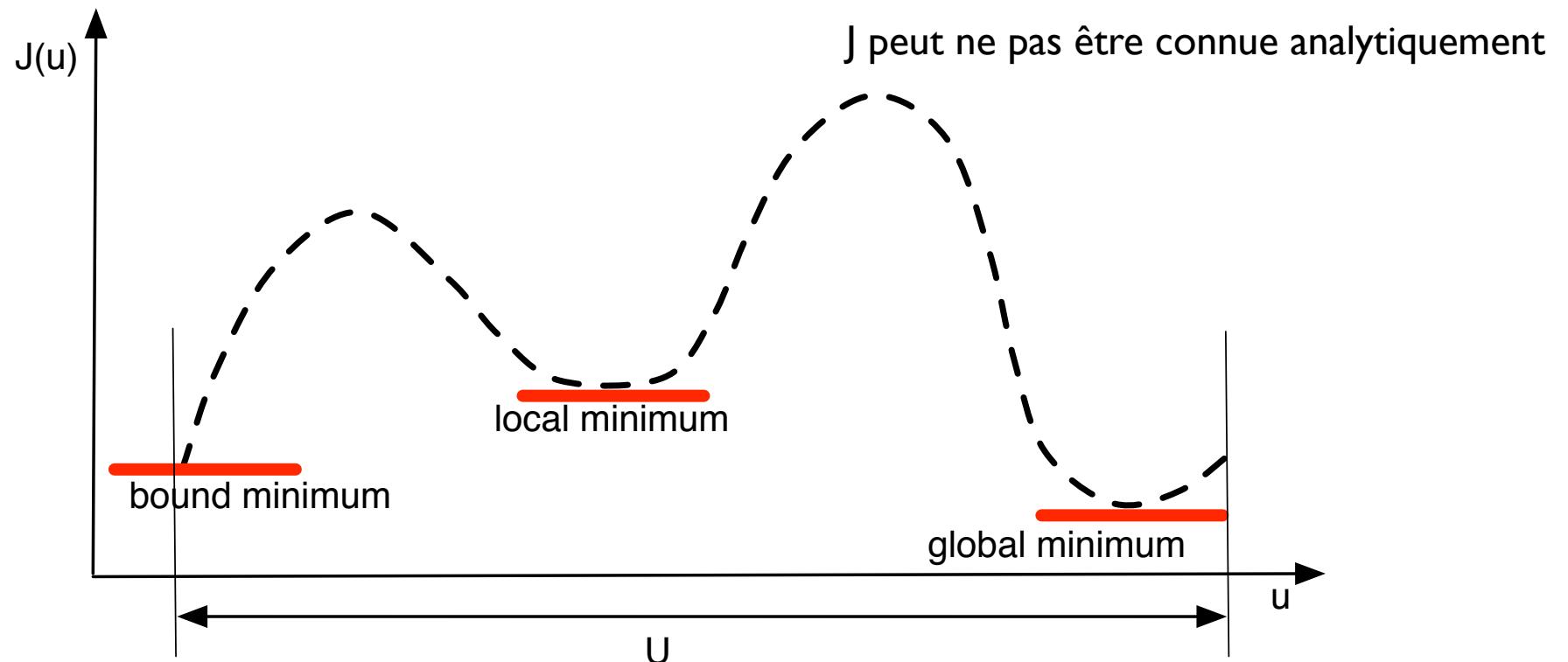
- \mathbf{u} est un vecteur de variables de décision (entrées)
- $J(\cdot)$ est l'indicateur de performances
- \mathcal{U} est l'ensemble des valeur admissible des valeurs des variables de décision

Classification des problèmes d'optimisation

- Systèmes à l'équilibre (statiques): équations algébriques
 - Programmation Mathématique (LP, NLP, MILP, MINLP)
- Systèmes dynamiques: équations différentielles
 - On veut la « meilleure trajectoire » : Optimisation Dynamique
 - Commande optimale
 - Programmation dynamique
 - On veut le meilleur point d'équilibre ou le meilleur point final: Optimisation à St-State ou Statique
 - éventuellement Programmation Mathématique

Résoudre le problème: systèmes à l'équilibre

- On résout le problème en explorant U
- Exemple: J est une fonction d'un seul u

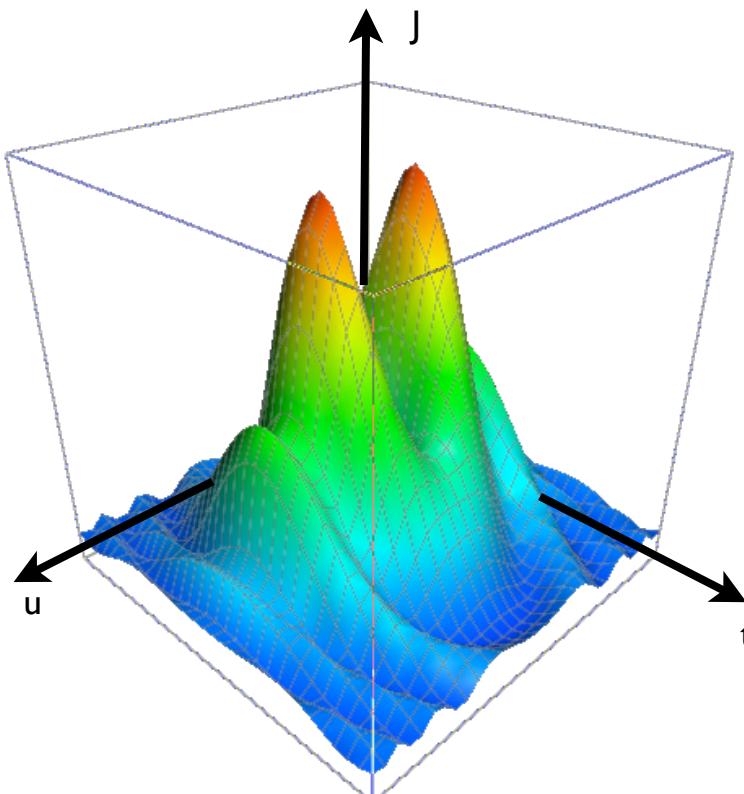


Recherche systématique ?

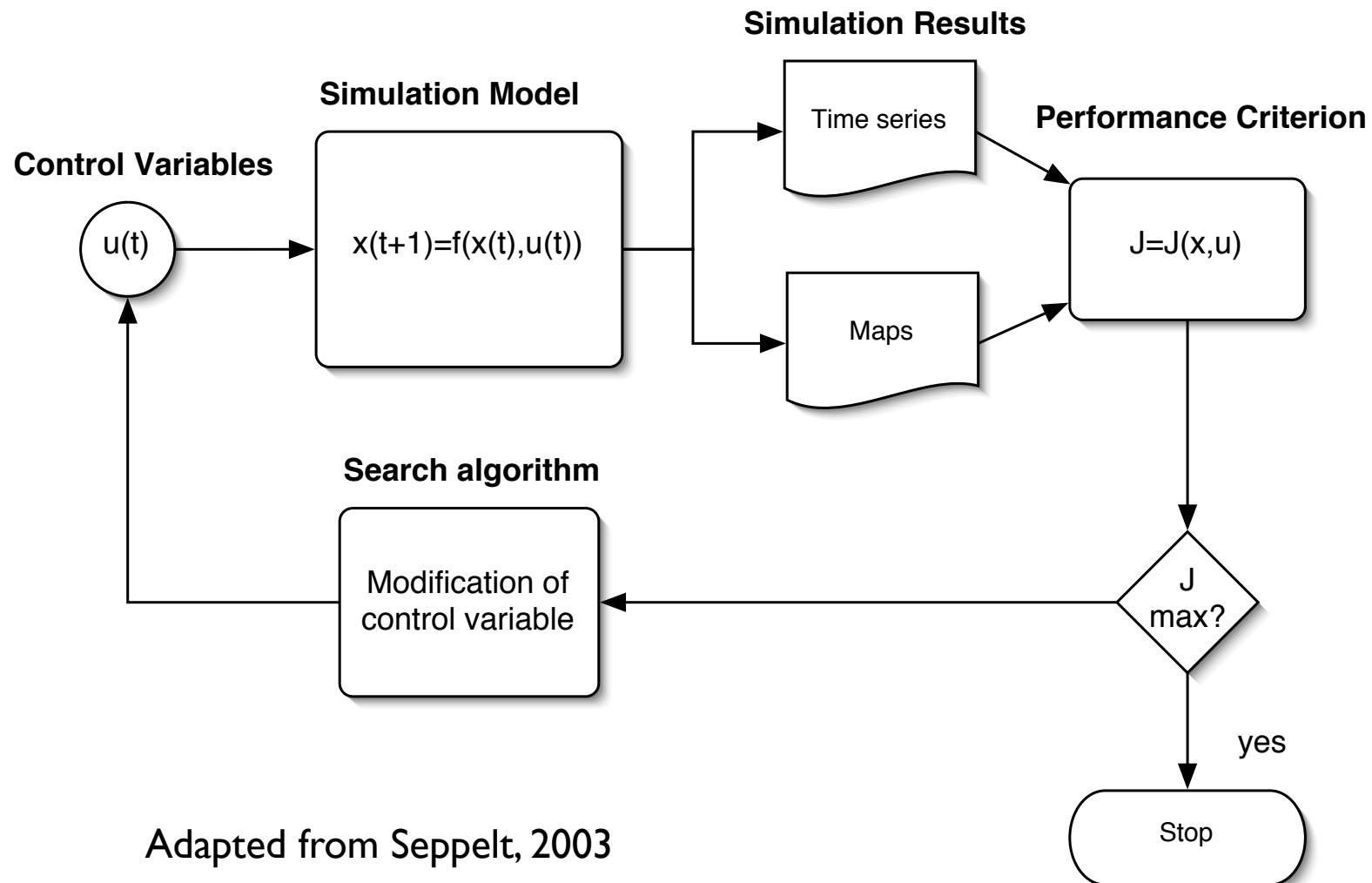
- Si J est connue analytiquement, on annule sa dérivée
- Si J n'est pas complètement connue, mais nous avons de l'information à propos du gradient, on peut explorer l'espace de recherche
 - Aussi possible en opération (ES-Control, e.g.)
- On peut aussi utiliser des méthodes heuristiques, pour bénéficier de la structure particulière du problème
- Et utiliser des métaheuristiques comme:
 - simulated annealing
 - algorithmes génétiques, ...

Résolution des problèmes pour les systèmes dynamiques

- Si le système est contraint par l'équation de transition
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
- La commande dépendra du temps comme J dépend de \mathbf{x} et \mathbf{u}



Le processus de recherche



Donc in a nutshell

- La fonction d'entrée **est de dimension infinie**
 - La recherche est **clairement** un problème
- On doit simplifier et exploiter au mieux la structure du problème
 - commande optimale (calcul des variations, programmation dynamique et optimisation dynamique)

Commande optimale

- Comme le système est en évolution les décisions sont prises en **étapes**
- L'impact de chaque décision pourrait ne pas être complètement prédictible, mais peut être anticipée avant la prochaine décision
- Les décisions ne peuvent pas être prises indépendamment, car on doit trouver l'équilibre entre un bas coût immédiat et éviter un haut coût ultérieur



the cicada and the ant

Commande Optimale

Survol rapide
(Référence: Luenberger, Chapitre II)

Formulation du problème de base

- Problème de commande optimale de base
 - un système dynamique régulier $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$
 - condition initiale fixée $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$
 - un ensemble de commande admissibles $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$
 - une fonction coût

$$J = \psi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

à maximiser (ou minimiser) par rapport à $\mathbf{u}(t)$

coût terminal

coût intégral

Interprétation

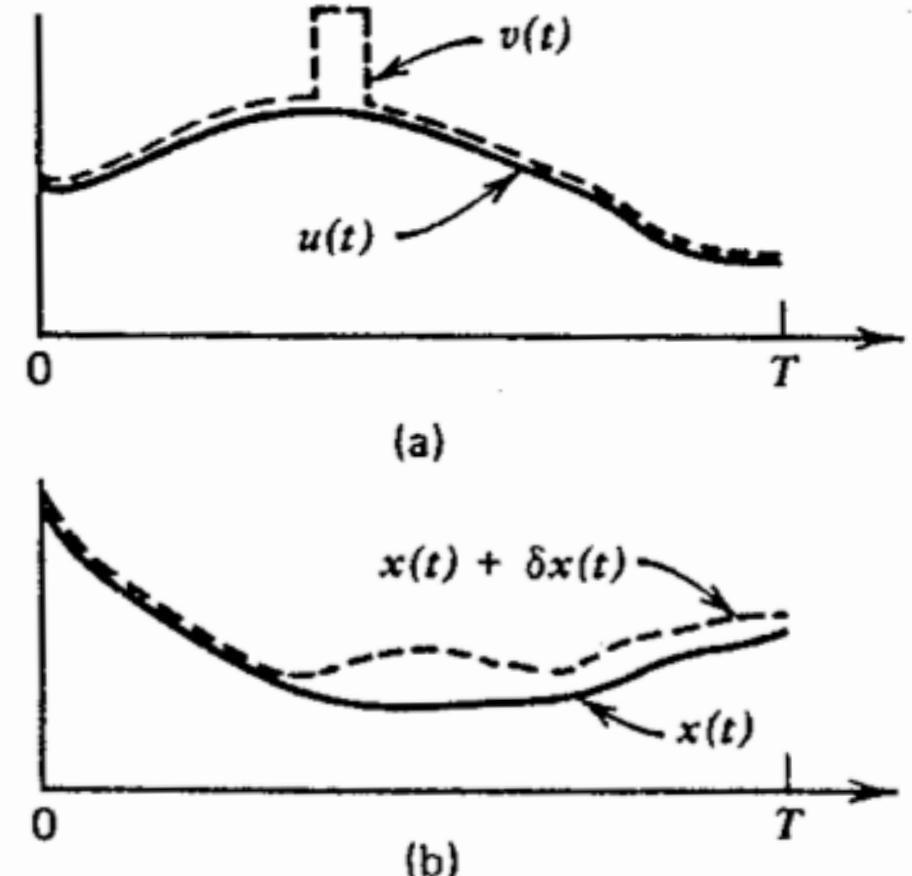
- La fonction d'entrée $u(t)$ est inconnue sur l'intervalle $[0 T]$
- une fois $u(t)$ spécifié, avec une condition initiale et la dynamique du système
 - on obtient une trajectoire unique du vecteur $x(t)$ sur $[0 T]$
 - on injecte $x(t)$ et $u(t)$ dans la fonction coût J et on obtient une valeur pour J
- le problème est de trouver un, parmi les possibles, $u(t)$ tel que J is maximisé (minimisé)

Comment trouver une solution

- On ne peut pas générer tous les profils de $u(t)$ et choisir le meilleur
- On doit utiliser des méthodes malignes, qui exploitent la structure du problème
- La commande optimale est une extension de la maximisation des fonctions mono variables
- On utilise “une approche variationnelle”

L'approche variationnelle

- Supposons $u(t)$ optimal
- On trace l'effet de $v(t)$, un changement arbitraire de $u(t)$
- on a besoin que ce changement n'améliore pas (la valeur de J décroît)
- comme changer u change x , il est difficile de quantifier l'effet de u seulement
- on a besoin d'une approche **indirecte**



La fonction coût modifiée

- Pour obtenir une fonction coût qui soit indépendante des changement de la trajectoire on utilise une astuce:

$$\bar{J} = J - \int_0^T \lambda(t)^T [\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))] dt$$

- Pour toute trajectoire l'intégrale= 0 ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$), donc le choix de $\lambda(t)$ est arbitraire. On veut que $\lambda(t)$ soit simple!
- On définit la fonction Hamiltonienne

$$H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

- On obtient

$$\bar{J} = \psi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T \{H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \lambda^T \dot{\mathbf{x}}\} dt$$

Sketch du process

- Pour $u(t)$ on obtient la trajectoire $x(t)$
- On perturbe $u(t)$ avec une petite variation et on définit $v(t)$ où

$$\int_0^T |u_i - v_i| dt < \varepsilon \quad \text{pour tout } i \text{ de } 1 \text{ à } m, \text{ avec } \varepsilon \text{ petit}$$

- $v(t)$ conduit à une nouvelle trajectoire $x(t) + \delta x(t)$ qui est proche de $x(t)$
- On doit calculer $\delta \bar{J} = \bar{J}(x + \delta x, v) - \bar{J}(x, u)$

Etapes principales de la méthode

- Si on calcule $\delta \bar{J}$ on obtient

$$\delta \bar{J} = [\nabla_x \psi(\mathbf{x}(T)) - \lambda^T(T)]^{(1)} + \lambda(0)^T \delta \mathbf{x}(0)^{(2)}$$

$$+ \int_0^T [\nabla_x H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \dot{\lambda}^T] \delta \mathbf{x} dt^{(3)}$$

$$+ \int_0^T [H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u})] dt + p(\varepsilon)^{(4)}$$

- notez que $\delta \mathbf{x}(0) = 0$ (un changement de \mathbf{u} n'affecte pas les conditions initiales). (2) is donc nul.
- On choisit $\lambda(t)$ (c'est arbitraire après tout) pour que (3) disparaisse et qu'il ne reste que (1) & (4)

Sketch de la méthode: l'équation adjointe

- Pour supprimer (3) on choisit $\lambda(t)$ comme la solution de l'équation différentielle adjointe

$$-\dot{\lambda}^T = \nabla_x H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

- ce qui donne

$$-\dot{\lambda}^T = \lambda^T \nabla_x \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \nabla_x l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

- avec la condition finale $\lambda(T)^T = \nabla_x \psi(\mathbf{x}(T))$
- on peut alors résoudre l'équation adjointe et obtenir $\lambda(t)$ et on peut calculer la variation de la fonction coût

$$\delta \bar{J} = \int_0^T [H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u})] dt + p(\varepsilon)$$

Le principe d'optimalité de Pontryagin

- Si $u(t)$ est maximal alors, pour tout t :
$$H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$
 et pour tout \mathbf{v} dans U
- Si on met tout ensemble on obtient le **Principe du Maximum de Pontryagin**



Lev Semenovich Pontryagin
(1908-1988)

Le principe du maximum

Théorème

Supposons que $u(t)$ dans U et $x(t)$ sont les entrées optimales et la trajectoire correspondante pour le problème de commande optimale (slide 2). Alors, il y a une trajectoire adjointe $\lambda(t)$ tels qu'ensemble $u(t)$, $x(t)$ et $\lambda(t)$ vérifient:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t), u(t)) \quad (\text{équation d'état})$$

$$x(0) = x_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$-\dot{\lambda}^T = \lambda^T \nabla_x \mathbf{f}(x(t), u(t)) + \nabla_x l(x(t), u(t)) \quad (\text{équation adjointe})$$

$$\lambda(T)^T = \nabla_x \psi(x(T)) \quad (\text{condition finale des adjoints})$$

pour tout, $0 \leq t \leq T, v \in \mathcal{U}$

$$H(\lambda(t), x(t), v(t)) \leq H(\lambda(t), x(t), u(t)) \quad (\text{condition de maximalité})$$

et H :

$$H(\lambda(t), x(t), v(t)) = \lambda^T(t) \mathbf{f}(x(t), u(t)) + l(x(t), u(t))$$

Systèmes linéaires à coût quadratique

- Grâce à la puissance de la linéarisation on peut reformuler de nombreux modèles comme des systèmes **linéaire**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

- La commande optimale peut être mise sous la forme d'un feedback linéaire
- La fonction coût est “quadratique”

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt$$

- \mathbf{Q} ($n \times n$) et \mathbf{R} ($m \times m$) sont symétriques
- \mathbf{Q} est s.d.p et \mathbf{R} est d.p.
- On veut **minimiser** le coût

Procédure pour la solution

- Le problème est un cas spécial du problème à point terminal libre (note: $\min J = \max -J$)
- Equation adjointe:
$$-\dot{\lambda}^T = \lambda^T \nabla_x f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \nabla_x l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$
$$-\dot{\lambda}^T = \lambda^T \mathbf{A}(t) - \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}(t)$$
- Le Hamiltonian:
$$H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$
$$H = \lambda^T \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \lambda^T \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)$$
$$- \frac{1}{2} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)$$
- Maximiser $H(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ $\nabla H_u = 0$ $\lambda(t)^T \mathbf{B}(t) - \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) = 0$

La solution

- Résoudre la condition d'optimalité

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t)$$

- On l'injecte dans les équations du système et on réécrit l'équation adjointe dans sa forme transposée

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\boldsymbol{\lambda}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\mathbf{A}(t)^T\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) \quad \boldsymbol{\lambda}(T) = 0$$

- $2n$ équations différentielles, $2n$ conditions aux limites, $2n$ fonctions inconnues
- On a des conditions initiales et finales, on ne peut pas intégrer en avançant dans le temps!!

L'équation de Riccati

- Le système d'équations est linéaire, alors x et λ dépendent linéairement de x_0 et λ dépend linéairement de x
- On peut chercher une solution de la forme
$$\lambda(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$
- avec P une matrice $(n \times n)$ inconnue

L'équation de Riccati

- On injecte les solutions proposées dans les équations du système:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t) \quad (\text{a})$$

$$-\mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) = -[\mathbf{A}(t)^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)]\mathbf{x}(t) \quad (\text{b})$$

- On multiplie (a) par $\mathbf{P}(t)$ et on ajoute à (b):

$$0 = [\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T\mathbf{P}(t) \\ - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)]\mathbf{x}(t)$$

- L'équation est vérifiée par $\mathbf{x}(t)$ si $\mathbf{P}(t)$ est une solution de l'équation Riccati ci-dessous de condition terminale $\mathbf{P}(T)=0$

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T\mathbf{P}(t) \\ -\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)$$

Solution en boucle fermée

- On peut finalement obtenir la solution du problème de commande optimale LQ
- D'abord résoudre (généralement numériquement) backwards l'équation de Riccati
- Avec $P(t)$ résoudre $\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t)$
- La matrice $m \times n$ $\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)^T \mathbf{P}(t)$ peut être calculée hors-ligne

Cas LTI

- Si A, B et Q, R ne dépendent pas du temps et nous utilisons un horizon infini ($T \rightarrow \infty$) alors \dot{P} tend vers 0 et P est une solution de l'équation algébrique matricielle

$$0 = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q$$

- La commande optimale est:
$$u(t) = R^{-1}B^T P x(t) = Kx(t)$$
- La dynamique du système contrôlé est:
$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$$

Programmation Dynamique

« diviser pour mieux régner »
(Référence: Luenberger, Chapitre II)

Programmation dynamique

- Exploite la structure dynamique du problème
- Le problème est découpé en étapes
- Chaque étape est connectée à la précédente par l'équation de transition des états
- D.P. a été inventée par Richard Bellman en 1953



Richard P Bellman (1920-1984)

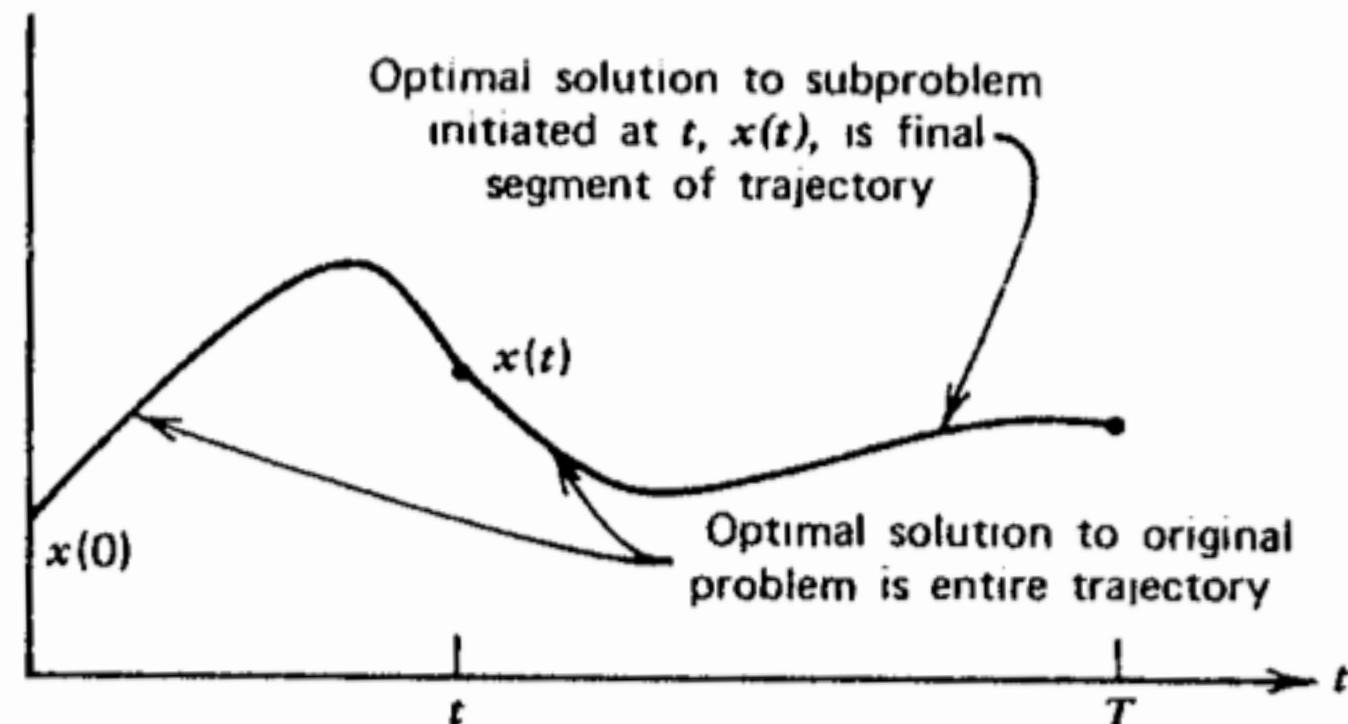
Principe d'optimalité: introduction

- Pb de commande optimale P1: trouver $\mathbf{u}(t)$ pour le système dynamique $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ qui maximise la fonction coût $J(\mathbf{u}(t))$ sur $t_0 .. t_F$ et respecte les contraintes
- Supposons que l'on connaît la solution de P1 sur $t_0 .. t_F$
 - On suit la trajectoire correspondante et on s'arrête en $t = t_1, t_0 < t_1 < t_f$ au point $\mathbf{x}(t_1)$
 - Si à partir $\mathbf{x}(t_1)$ on résout le problème P2 équivalent à P1, mais sur l'horizon $t_1 .. t_F$
 - Alors la solution de P2 correspond à ce qui « restait » de la solution de P1

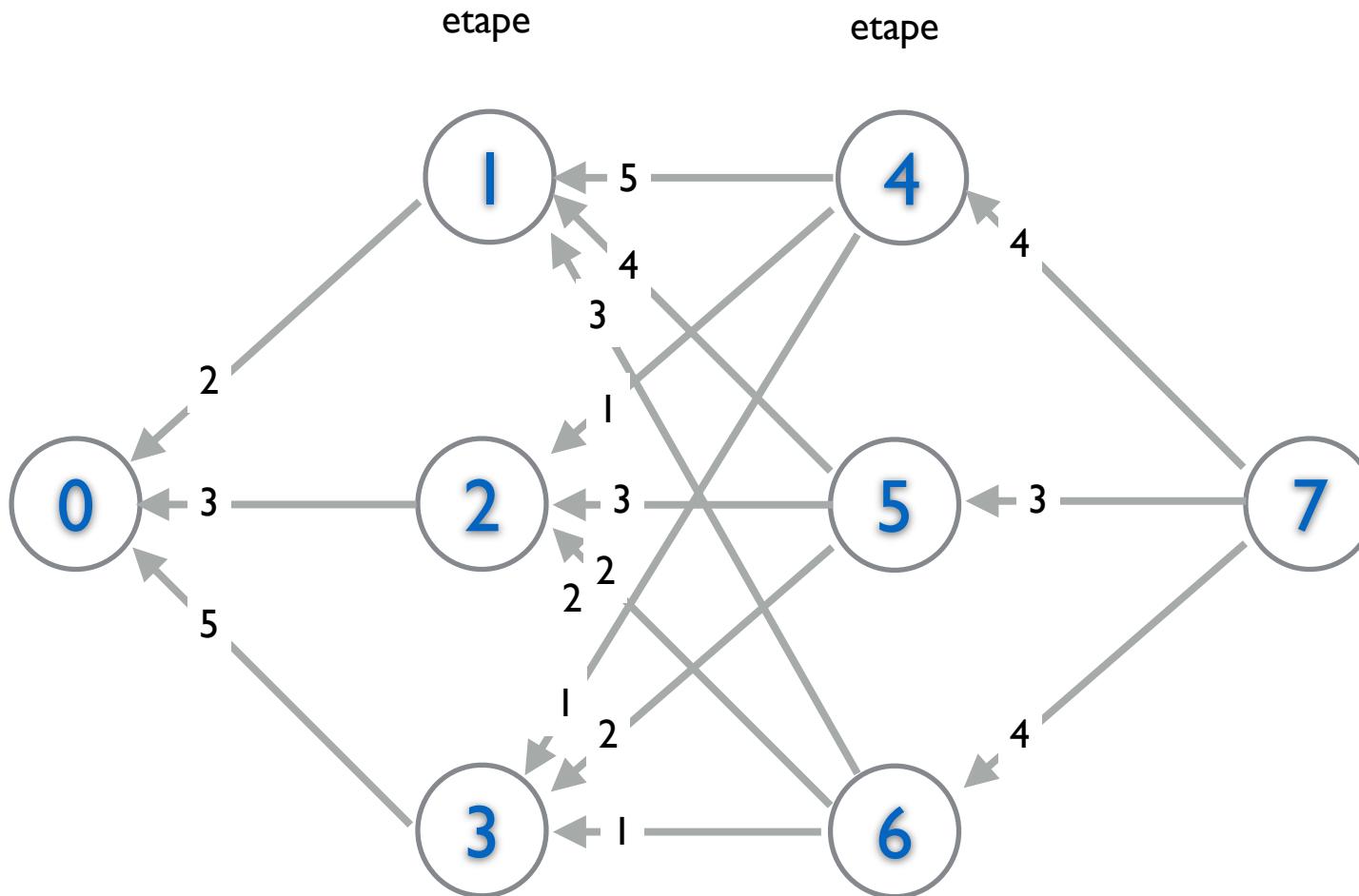
Principe d'optimalité: définition

Définition

A partir de tout point d'une trajectoire optimale, la trajectoire restante est optimale pour le problème d'optimisation initialisé en ce point

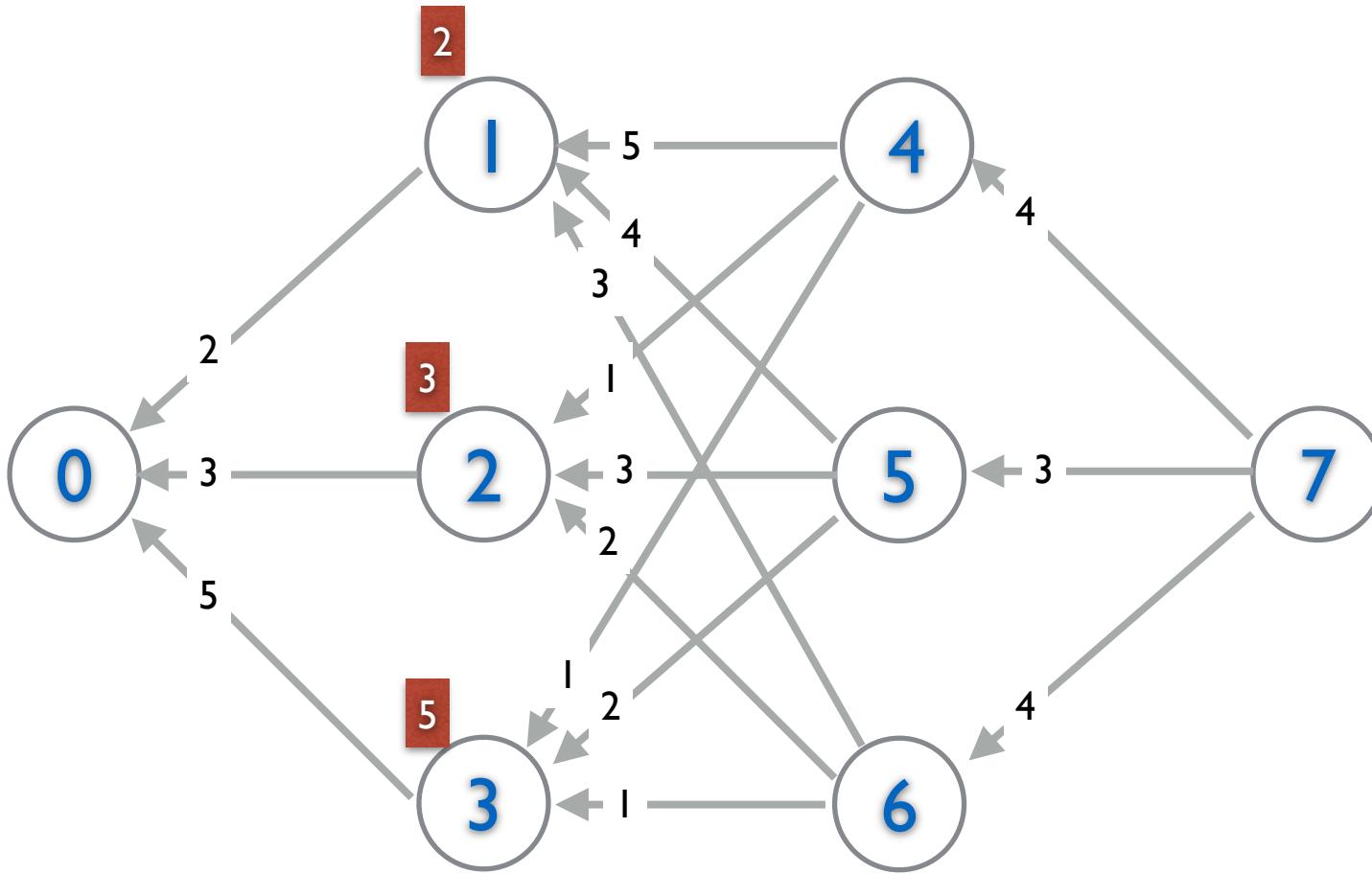


Exemple: le voyage de commerce

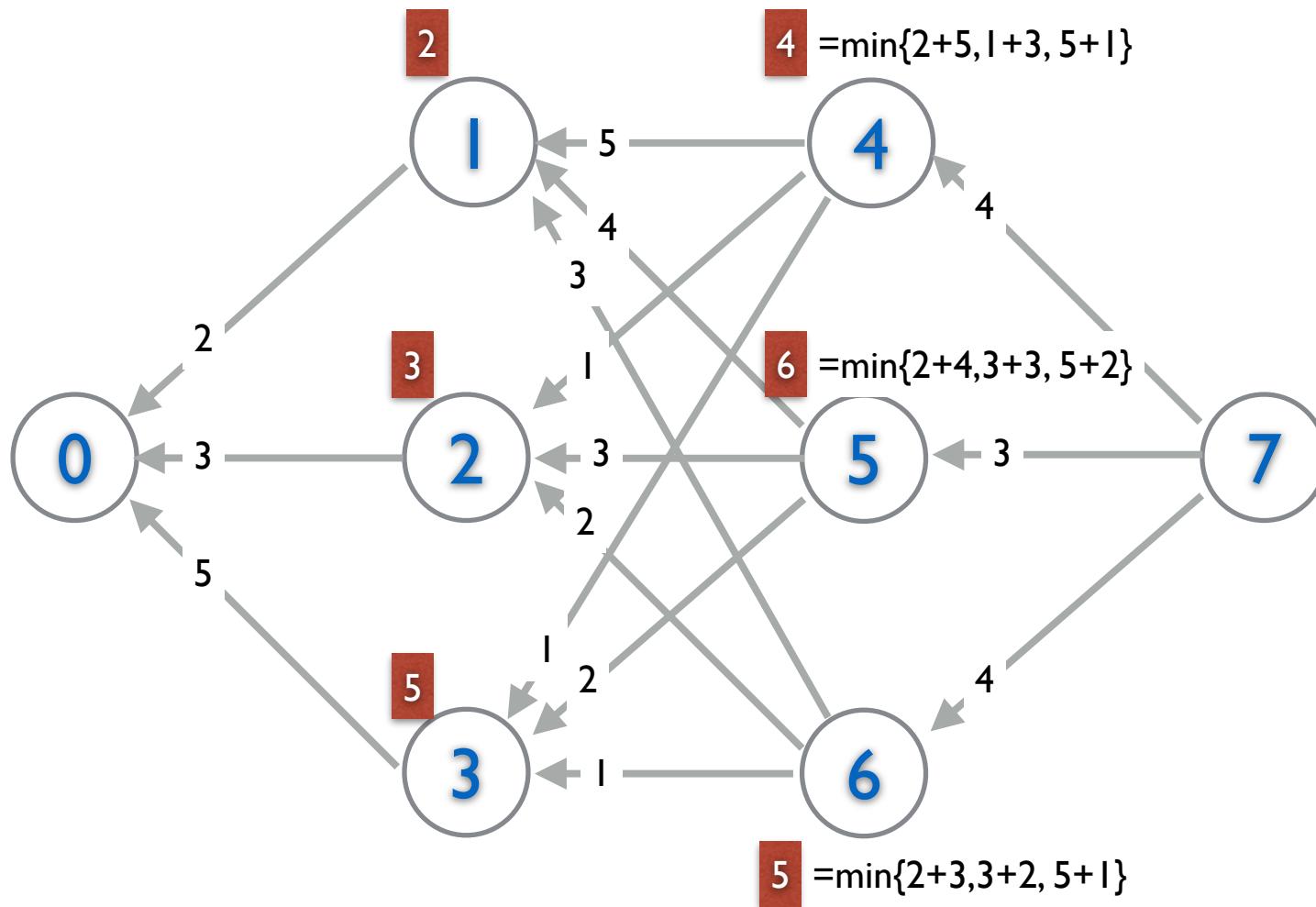


- Objectif aller du point 7 au point 0 à coût de transport minimal
- Coût indiqué le long des flèches

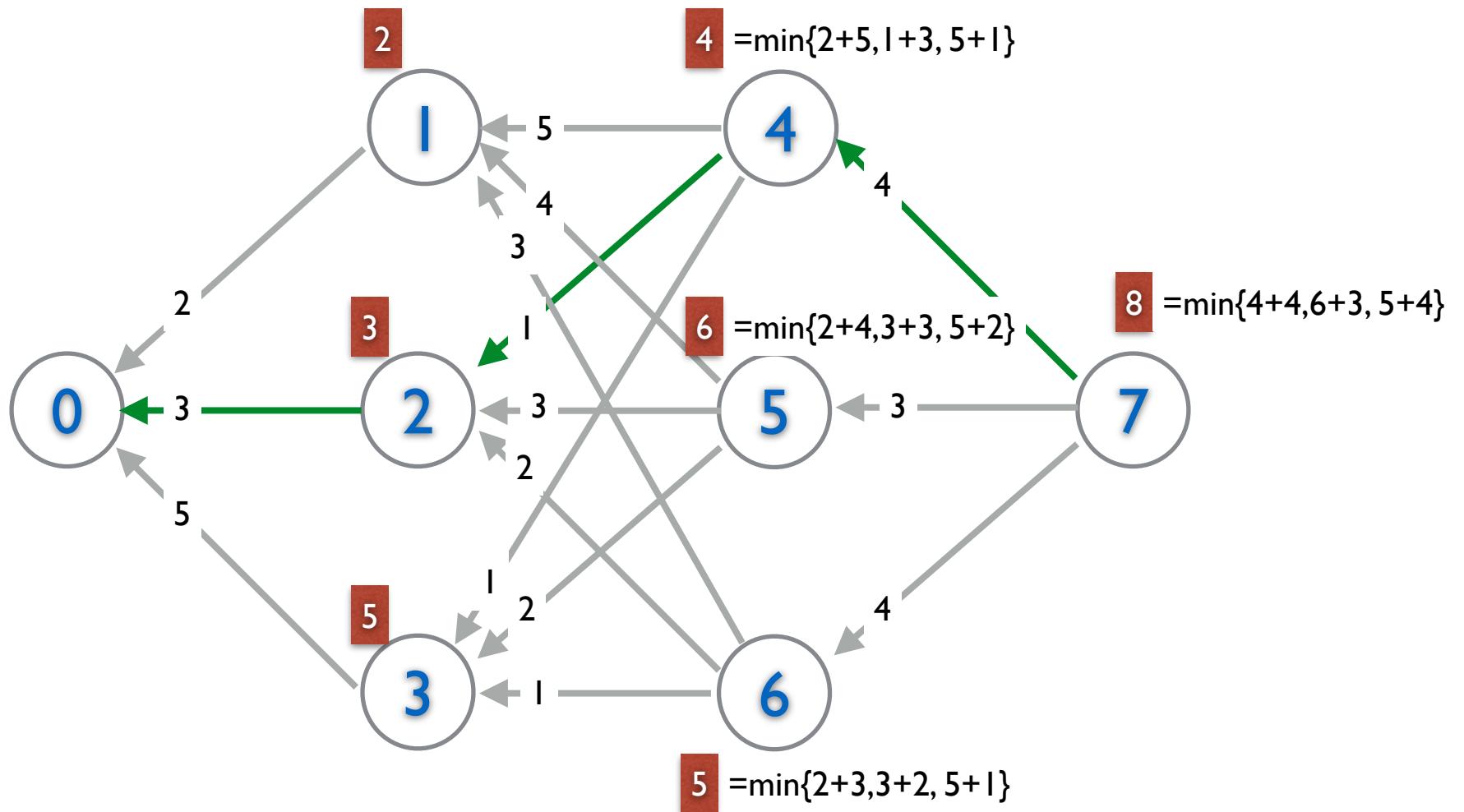
Exemple



Exemple



Exemple



Optimal Return Function (ORF)

- Traduit sous forme mathématique l'expression du principe d'optimalité
- Soit un état x , on définit $V(x,t)$ comme la fonction qui à x associe la valeur **maximum** de la fonction coût qui peut être obtenue en partant de x au temps t
- $V(x,t)$ est l'**optimal return function**

L'ORF

- Problème de commande originel

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

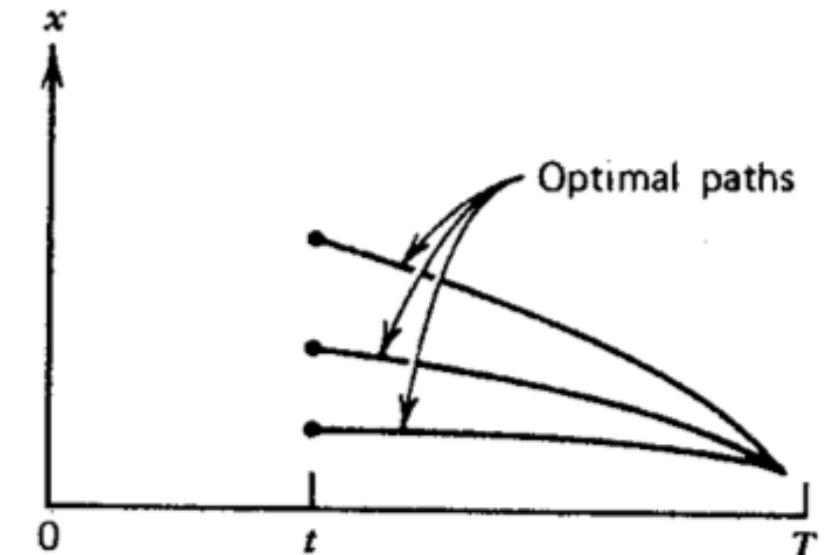
$$J = \psi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

- Soit le sous-problème débutant au temps t et à l'état \mathbf{x}

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$$

$$J = \psi(\mathbf{x}(T)) + \int_t^T l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau$$



On note $V(x, t)$ la valeur maximale possible de J pour ce sous-problème

DP en temps discret

- Soit le problème classique en temps discret

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}$$

$$J = \psi(\mathbf{x}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} l(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

- Soit l'optimal return function : $V(\mathbf{x}(k), k)$
- Le sous-problème le plus simple est celui qui débute en $k=N$, avec $\mathbf{x}(N)$ given
 - aucune entrée ne peut être choisie
 - l'optimal return vaut $V(\mathbf{x}(N), N) = \psi(\mathbf{x}(N))$

DP en temps discret. Comment calculer $V(x,k)$?

- On travaille à **rebours du temps** (backwards in time). Supposons que $V(x(k+1), k+1)$ est connu $\forall x$, on cherche $V(x(k), k)$
- Comme $x(k)=x$, on choisit $u(k)=u$ et on peut calculer $x(k+1)=f(x,u)$
- Mais nous avons déjà la valeur de la fonction coût de $k+1$ à N . Alors:
- $J = l(x, u) + V(x(k+1), k+1) = l(x, u) + V(f(x, u), k+1))$
- L'orf est le maximum de J pour tout choix possible de u :
- $$V(x, k) = \max_{u \in U} [l(x, u) + V(f(x, u), k+1)]$$

Exemple: allocation de ressource

- Une ressource donnée u , limitée à A doit être répartie selon N activités
- Chaque activité conduit à un retour sur investissement. Une allocation de u unités sur la k ème activité renvoie la valeur $g_k(u)$
- Le problème d'optimisation est alors formulé comme:

$$\max_u J = \max_u \sum_{i=0}^{N-1} g_i(u(i))$$

- sous la contrainte

$$\sum_{i=0}^{N-1} u(i) = A$$

Exemple: allocation de ressource

- Supposons $g(\cdot) = \sqrt{(\cdot)}$

- Le problème devient

$$\max_u \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{u(i)} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=0}^{N-1} u(i) = A$$

- que nous pouvons reformuler comme un problème à étapes, d'allocation séquentielle de u unités

$$\max_u \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{u(i)}$$

$$x(k+1) = x(k) - u(k) \quad x(0) = A \quad x(N) = 0$$

Programmation dynamique pour allocation de ressources

- $V(x, k)$ est la meilleure valeur que l'on peut obtenir en allouant x unités de ressource u sur les $N-k$ derniers projets (ou étapes)

- Valeur optimale en N : toutes les ressources ont été allouées:

$$V(x(N), N) = 0$$

- Equation de Bellman:

$$V(x(N - 1), N - 1) = \max_u [\sqrt{u(N - 1)} + V(x(N), N)]$$

- Le mieux est d'allouer x au dernier projet

$$V(x(N - 1), N - 1) = \sqrt{x(N - 1)}$$

Programmation dynamique pour allocation de ressources

- Avant-dernière étape:

$$V(x(N-2), N-2) = \max_u [\sqrt{u(N-2)} + V(x(N-1), N-1)]$$

$$V(x(N-2), N-2) = \max_u [\sqrt{u(N-2)} + \sqrt{x(N-1)}]$$

- mais: $x(N-1) = x(N-2) - u(N-2)$

- alors:

$$V(x(N-2), N-2) = \max_u [\sqrt{u(N-2)} + \sqrt{x(N-2) - u(N-2)}]$$

- La meilleure valeur est obtenue pour $u(N-2) = \frac{x(N-2)}{2}$

- Et on obtient: $V(x(N-2), N-2) = \sqrt{2x(N-2)}$

Programmation dynamique pour allocation de ressources

- Avant-avant dernière étape:

$$V(x(N-3), N-3) = \max_u [\sqrt{u(N-3)} + V(x(N-2), N-2)]$$

$$V(x(N-3), N-3) = \max_u [\sqrt{u(N-3)} + \sqrt{2x(N-2)}]$$

$$V(x(N-3), N-3) = \max_u [\sqrt{u(N-3)} + \sqrt{2x(N-3) - 2u(N-3)}]$$

- meilleure valeur de u : $u(N-3) = \frac{x(N-3)}{3}$

- Donc: $V(x(N-3), N-3) = \sqrt{3x(N-3)}$

- On peut démontrer par récurrence que:

- $u(N-k) = \frac{x(N-k)}{k}$

- $V(x(N-k), N-k) = \sqrt{kx(N-k)}$

Programmation dynamique en Temps Continu

- Le problème est

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$$

$$J = \psi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

- On veut définir une fonction $V(x,t)$ selon la même logique dans le cas discret

Programmation dynamique en Temps Continu

- On segmente l'horizon $[0, T]$ en N parties selon l'intervalle de discréétisation $\delta = T/N$

- On dénote

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\delta) \quad k = 0, 1, \dots, N$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(k\delta) \quad k = 0, 1, \dots, N$$

- On approche le système par

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \delta$$

- et la fonction coût comme:

$$J = \psi(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^N l(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \delta$$

Programmation dynamique en Temps Continu

- On applique DP à cette approximation discrétisé
- On aurait $V(x,t)$ l'orf au temps t et à l'état x pour le problème en temps continu
 - On utilise $V'(x,t)$ l'orf pour le problème discrétisé
 - Les équations DP sont

$$V'(\mathbf{x}, N\delta) = \psi(\mathbf{x}_N)$$

$$V'(\mathbf{x}, k\delta) = \min_u \left[l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \delta + V'(\mathbf{x}_{k+1}, (k+1) \cdot \delta) \right] \quad (*)$$

- avec

$$V'(\mathbf{x}_{k+1}, (k+1) \cdot \delta) = V'(\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \delta, (k+1) \cdot \delta)$$

Programmation dynamique en Temps Continu (sketch)

- La procédure de dérivation continue comme suit
 - Développer $V'(\mathbf{x}_{k+1}, (k+1) \cdot \delta)$ en série de Taylor au premier ordre pour obtenir l'approximation

$$V'(\mathbf{x}_{k+1}, (k+1) \cdot \delta) = V'(\mathbf{x}, k\delta) + \nabla_t V'(\mathbf{x}, k\delta) \cdot \delta + \nabla_x V'(\mathbf{x}, k\delta)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \delta + o(\delta)$$

- on injecte dans (*) et on obtient

$$\begin{aligned} V'(\mathbf{x}, k\delta) &= \min_u \left[l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \delta + V'(\mathbf{x}, k\delta) \right. \\ &\quad \left. + \nabla_t V'(\mathbf{x}, k\delta) \cdot \delta + \nabla_x V'(\mathbf{x}, k\delta)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \delta + o(\delta) \right] \end{aligned} \tag{**}$$

- on suppose que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, k\delta=t} \left\{ V'(\mathbf{x}_k, k\delta) \right\} = V(\mathbf{x}, t)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Dans (**) on élimine $V'(\mathbf{x}, k\delta)$ des deux côtés, on divise par δ en on prend la limite quand $\delta \rightarrow 0$
- On obtient

$$0 = \min_{u \in U} [l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \nabla_t V(\mathbf{x}, t) + \nabla_x V(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})]$$

$$V(\mathbf{x}, T) = \psi(\mathbf{x}(T))$$

- qui est l'équation **HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman equation)**
- On peut démontrer que ‘ $V(\mathbf{x}, t)$ est solution de HJB’, est une condition suffisante d’optimalité de \mathbf{u}

Exemple: commande optimale LQ

- Le problème est la *minimisation* d'un coût quadratique pour un système formulé comme un système linéaire

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt$$

- L'équation hJB

$$V(\mathbf{x}, T) = 0$$

$$0 = \min_{u \in U} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)]$$

(a)

$$+ \nabla_t V(\mathbf{x}, t) + \nabla_x V(\mathbf{x}, t)^T (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t))]$$

- On suppose une solution de la forme

$$V(\mathbf{x}, T) = \frac{1}{2} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t)$$

(b)

Exemple: Commande LQ

- On injecte (b) dans (a) et on obtient

$$0 = \min_{u \in U} \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right] \quad (c)$$

$$+ \frac{1}{2} \mathbf{x}(t)^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}(t) (\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t))]$$

- le minimum par rapport à u implique seulement

$$\min_{u \in U} \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \right]$$

- on dérive w.r.t. u et on résout

$$\mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) = 0$$

- ce qui donne $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t)$ (d)

HJB vs le principe du maximum

- En injectant (d) dans (c) et en remarquant que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}$$

- on obtient

$$0 = \mathbf{x}^T(t) (\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\mathbf{P}(t))\mathbf{x}(t)$$

- ce qui est vérifié partout si $\mathbf{P}(t)$ est choisi comme une solution de l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T\mathbf{P}(t) \\ -\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\mathbf{P}(t) &+ \mathbf{Q}(t) \end{aligned}$$

- on retrouve le résultat obtenu avec le PMP !

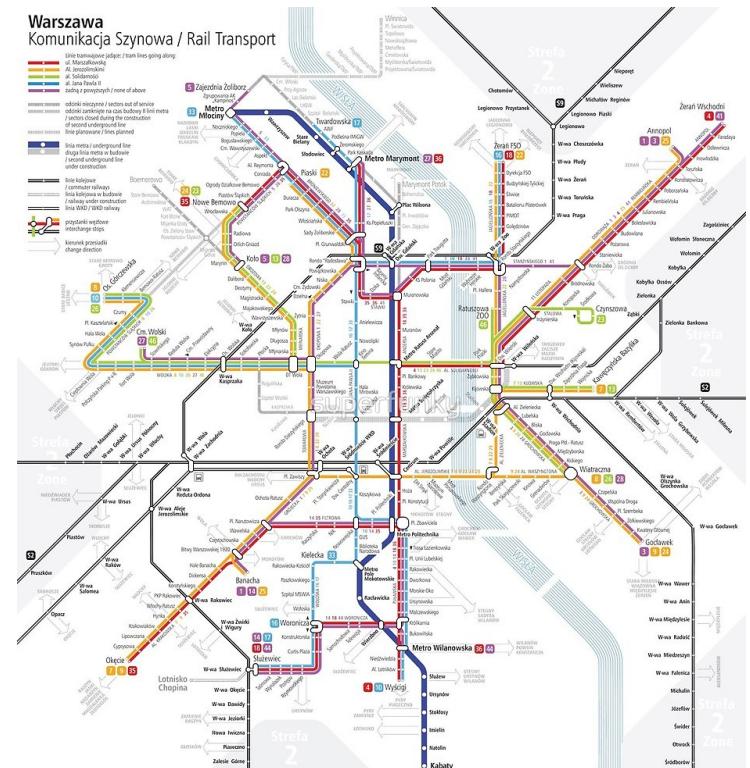
Introduction aux systèmes à évènements discrets (DES)

aka systèmes d'évènements discrets

(Référence: Cassandras-Lafortune Ch I)

Exemple de DES

- Systèmes à files d'attentes
- Systèmes informatiques
- Systèmes de communication
- Systèmes de production
- Systèmes de transport/trafic
- Systèmes de bases de données
- Systèmes logiciels
-



métro de Varsovie (PL)

Systèmes à évènements discrets (DES)

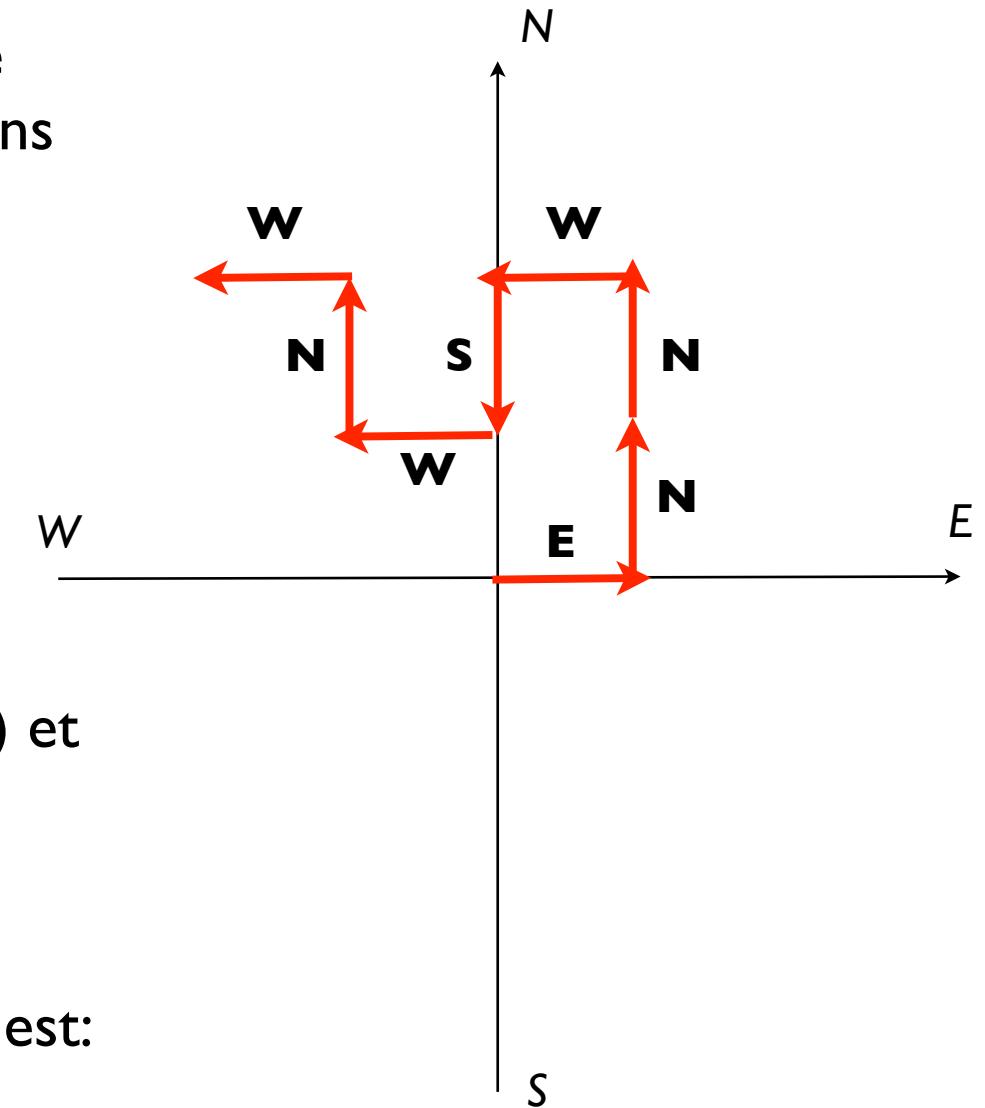
- L'espace d'état du système est un espace **discret**
- Les transitions ne sont observés qu'à des instants **discrets**
- Les **transitions** d'état sont **associées aux évènements**: on a un DES

Le concept d'évènement

- Un évènement a lieu instantanément
- Un évènement cause une transition d'un état à un autre
- Un évènement peut:
 - être la conséquence d'une action (e.g. bouton pressé)
 - être une occurrence spontanée (e.g. oups il pleut)
 - être la conséquence de plusieurs causes simultanées (e.g. une température excède sa valeur de consigne)

Exemple: la marche aléatoire

- En 2D, une particule peut déplacer selon les 4 directions cardinales N,S,E,W
- La direction est choisie aléatoirement et est indépendante de la position courante
- L'état est donné ($x_1=x$, $x_2=y$) et ne prend que des valeurs entières
- L'ensemble des évènements est: $E=\{N,S,W,E\}$

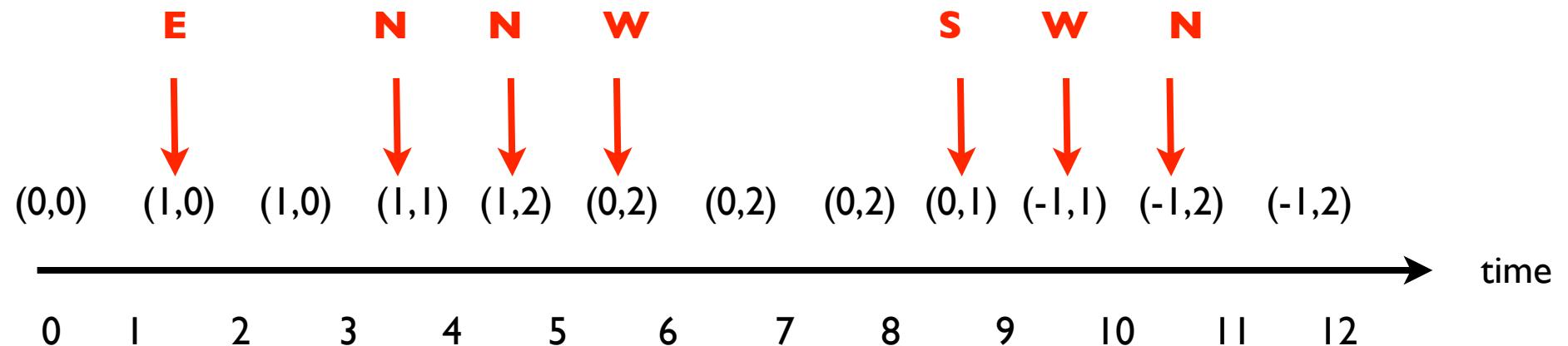


Systèmes mus par le temps vs mus par les évènements

- Avec un système à temps continu, l'état évolue au fur et à mesure du temps
 - L'état change quand la trotteuse de l'horloge de la simulation « tique », quand le temps s'écoule.
 - C'est un système **time-driven**
- Pour les systèmes à temps discrets, l'état ne change qu'en certaine valeurs du temps. 2 possibilités:
 - à chaque temps discret un évènement a lieu (peut être évènement nul). C'est toujours système time-driven
 - à des instants de temps divers, un évènement s'annonce. C'est un système **event-driven**.

Exemple: marche aléatoire event-driven

- Imaginons qu'il y a 4 joueurs, un pour chaque point cardinal, chacun envoyant un évènement « direction » de manière asynchrone



Propriétés caractéristiques des DES

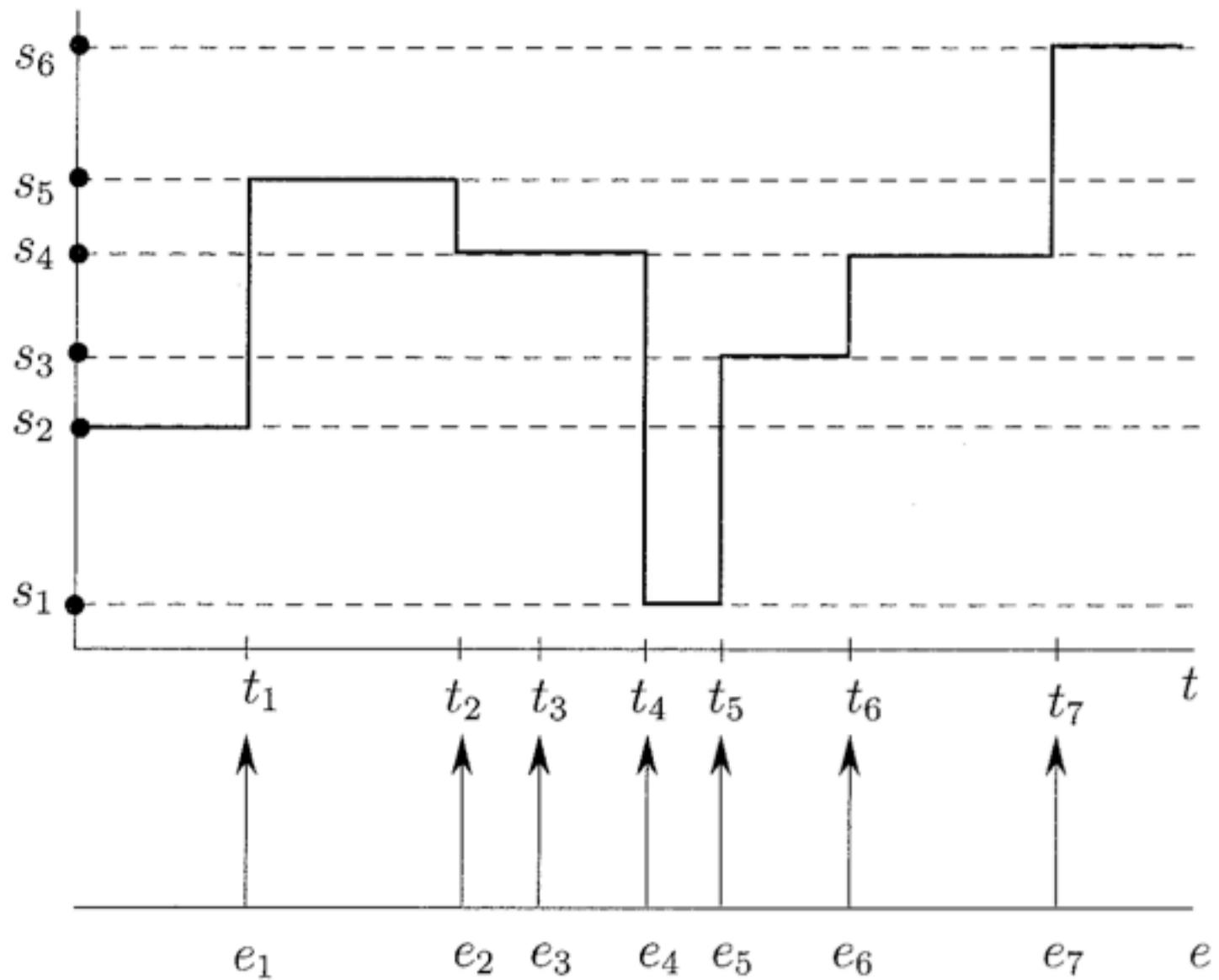
Définition

Un système à évènements discrets (DES) est un système *discrete-state et event-driven*. C'est-à-dire que l'évolution de l'état ne dépend que de l'occurrence dans le temps d'évènements discrets asynchrones

- Exemple
 - l'état d'une machine peut être {ON,OFF} ou {BUSY,IDLE,DOWN}
 - un ordinateur exécutant un programme peut être {WATING FOR INPUT, RUNNING, DOWN}
 - un système d'inventaire
 - les jeux de plateau

Mouvements (Sample paths) des DES

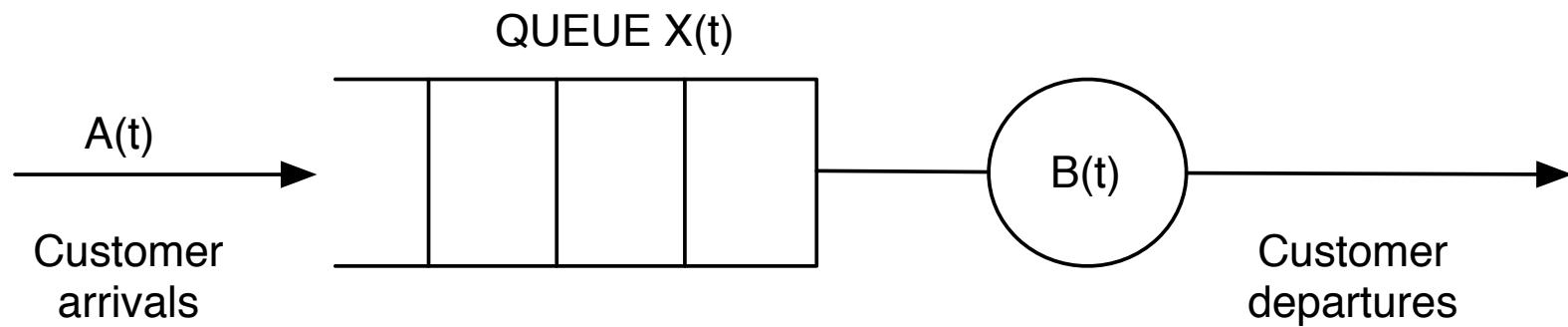
- Pour les systèmes dynamiques continus l'espace d'état est l'ensemble \mathbb{R}^n . Les mouvements (**sample paths**) évoluent continûment dans cet espace
- Pour les systèmes DES, l'espace des états est un espace **discret**. Les sample paths ne peuvent être que des sauts d'un état à un autre quand un évènement a lieu



Eléments de théorie des files d'attente

(Référence: Cassandras-Lafortune, Chapitre 8)

C'est quoi une « file d'attente » ?



Qu'est ce que la théorie des files d'attente

- Cela s'étend de l'analyse de simple serveurs uniques à des réseaux complexes de files d'attente
- On présente seulement les techniques essentielles pour analyser des systèmes simples
- C'est un outil descriptif: détermine (analytiquement) la performance de systèmes à files d'attentes, n'identifie pas des politiques d'opération

Domaine analytique

Domaine numérique

Théories des files
d'attente

Simulation

Théorie de la
Commande Optimale

Optimisation

Spécification des modèles de files d'attente

- Spécification de **modèles stochastiques** pour les arrivées et les processus de services
- Spécification des **paramètres structurels** du système (e.g. capacité d'accueil d'une file)
- Spécification des **politiques opératoires** utilisées (e.g. prioritisation)

Modèles stochastiques d'arrivée

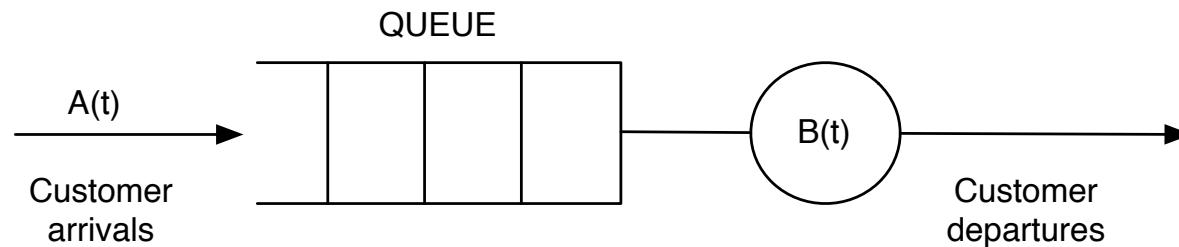
- Les évènements d'arrivées sont associés à un **processus stochastiques**
 - le processus stochastique génère une suite $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ de variables *aléatoires*, où Y_k est le temps **inter-arrivées**
 - On fixe $Y_0=0$ tel que Y_1 est le temps d'arrivée du 1er client
 - En supposant que les évènements d'arrivée sont **indépendants et identiquement distribués** (iid) une distribution de probabilités unique $A(t) = P[Y \leq t]$ décrit la suite de temps inter-arrivées
 - Soit $E[Y] \triangleq \lambda^{-1}$ la moyenne de $A(t)$ [temps moyen entre 2 clients]
 - λ est le **taux moyen d'arrivée (fréquence)** [clients par unité de temps]

Modèle stochastique du service

- On associe à un évènement de service processus stochastique qui génère une suite $\{Z_1, Z_2, \dots\}$
- Z_k est le k-ème temps de service = temps nécessaire pour que le kème client soit servi
- Si $\{Z_k\}$ est iid, on définit la probabilité de distribution $B(t) = P[Z \leq t]$
- La moyenne de $B(t)$ est définie comme $E[Z] \triangleq \mu^{-1}$
- μ est le fréquence moyenne de service [clients servis par unité de temps]

Paramètres structurels

- Les paramètres d'intérêt sont
 - la **capacité de stockage** d'une file, généralement dénotée K
 - le **nombre de serveurs**, généralement notés m
- Exemples
 - $K=3, m = 1$



- Cas d'étude fréquent: $K=\infty$ (capacité de stockage de clients infinie) et $m = 1$ (serveur unique)

Politiques d'opération

- est-ce que la distribution de temps de service est la même pour tous les clients?
- il-y-a-t-il des priorités de service pour les clients?
- politique de sélection: est-ce que tous les clients sont admis dans le système?
- politique de service: comment le serveur choisit le client suivant (e.g. suivant dans la file, aléatoire, etc)?
- hésitation/reculade: est-ce que les clients peuvent quitter la file avant d'être servis
- préemption de service: est ce que le serveur peut préempter un client pour servir un client à plus haut niveau de priorité?

La notation A/B/m/K

- A: type de distribution de temps inter-arrivées
- B: type de distribution de temps de service
- m: nombre de serveurs
- K: capacité de stockage

Notation pour les distributions A et B

- G: Distribution **générale**, rien de connu sur le processus d'arrivée/de service
- GI: distribution **générale** dans un processus de **renouvellement** d'arrivée/de service (tous les temps dans les processus sont iid)
- D: cas **déterministe**
- M: cas **Markovien** (le temps inter-arrivées/de service sont distribués exponentiellement, le processus d'évènement sous-jacent est **Poisson**)

Performances d'un système de file d'attente

- On a défini
 - Y_k temps inter-arrivée du client k
 - Z_k temps de service du client k
- On définit également
 - A_k temps d'arrivée de k
 - D_k temps de départ de k
 - W_k temps d'attente de k (depuis l'arrivée jusqu'à ce que le service démarre)
 - S_k temps de système de k (de l'arrivée au départ)

Quelques relations (triviales)

- $S_k = D_k - A_k$
 - temps de système (aussi temps de réponse ou délai) est égal au temps de départ moins le temps d'arrivée
- $S_k = W_k + Z_k$
 - temps de système est égal au temps d'attente + temps de service
- $D_k = A_k + W_k + Z_k$
 - temps de départ = arrivée + attente + service

Longueur de file d'attente et charge

- $X(t)$ longueur de file au temps t ; notez que la file inclut une élément dans le serveur. Donc c'est mieux de l'appeler le nombre (taille) de clients dans le système
- $U(t)$ charge au temps t . Quantité de temps nécessaire pour vider le système au temps t (pour autant qu'il n'y ait pas d'arrivées après le temps t). Aussi appelé travail non terminé

Temps moyen d'attente et de service

- $\{W_k\}$ dépend du client k
- Si $k \rightarrow \infty$, alors il peut exister une distribution stationnaire (régime établi) $P[W \leq t]$ indépendante de k telle que: $\lim_{k \rightarrow \infty} P[W_k \leq t] = P[W \leq t]$
- W est une variable aléatoire qui décrit le temps d'attente d'un client typique
 - $E[W]$ est le temps moyen d'attente en régime permanent
- La même observation vaut pour $\{Z_k\}$
 - $E[Z]$ est le temps de service moyen en régime établi

Longueur de file moyenne et charge de travail

- Le même concept s'applique à $\{X(t)\}$ et $\{U(t)\}$
- X est la longueur de file en régime établi
 - $\pi_n = P[X=n]$ probabilité que la longueur de la file en régime établi vaille n
 - $E[X]$ nombre moyen de clients dans le système en régime établi (longueur de la file + clients en service)
- U est la charge de travail en régime établi
 - $E[U]$ charge de travail moyenne en régime permanent

Optimiser la performance

- On est face à un compromis:
 - on veut **minimiser le temps d'attente**: le serveur ne peut pas être tout le temps busy
 - on veut **maximiser l'utilisation du serveur** (le serveur n'est jamais n'est jamais idle): la file ne peut jamais être vide
- On se concentre sur la performance en régime établi

$E[W]$ temps d'attente moyen

$E[Z]$ temps de service moyen

$E[X]$ nb moy clients dans le système

utilisation: fraction du temps pendant lequel le serveur est occupé

débit (throughput): fréquence à laquelle les clients quittent le syst.

Minimiser

Maximiser

Intensité du trafic

- L'utilisation ne peut jamais excéder 100%
- Le throughput ne peut jamais excéder le taux de service maximum
- En régime établi les débit d'entrée et de sortie doivent être à l'équilibre: taux d'arrivée = throughput

$$[\text{Intensité du trafic}] \triangleq \frac{[\text{Fréquence d'arrivée}]}{[\text{Fréquence de sortie}]}$$

- Pour un système à serveur unique $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

- Pour un système à m serveurs $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$

Utilisation et throughput

- π_0 est la probabilité que la longueur de file vale $n = 0$ (serveur unique) en régime permanent (*file vide*)
 - correspond à la fraction de temps durant laquelle le serveur est idle
- Comme l'utilisation est la fraction du temps durant laquelle le serveur est occupé, l'utilisation vaut $1-\pi_0$
- Le serveur opère à taux μ
- [throughput] = [taux de départ des clients] = $\mu \cdot (1-\pi_0)$
- En régime permanent, les clients entrant et sortant du système doivent être à l'équilibre, i.e. le taux d'arrivée doit être égal au throughput $\lambda = \mu(1-\pi_0)$

Utilisation et throughput

- Ainsi pour un système à serveur unique ($m = 1$ en régime établi)

- Le serveur opère au taux μ
- Le taux d'arrivée = le throughput: $\lambda = \mu (1 - \pi_0)$

- De la définition de l'intensité du trafic, en régime établi

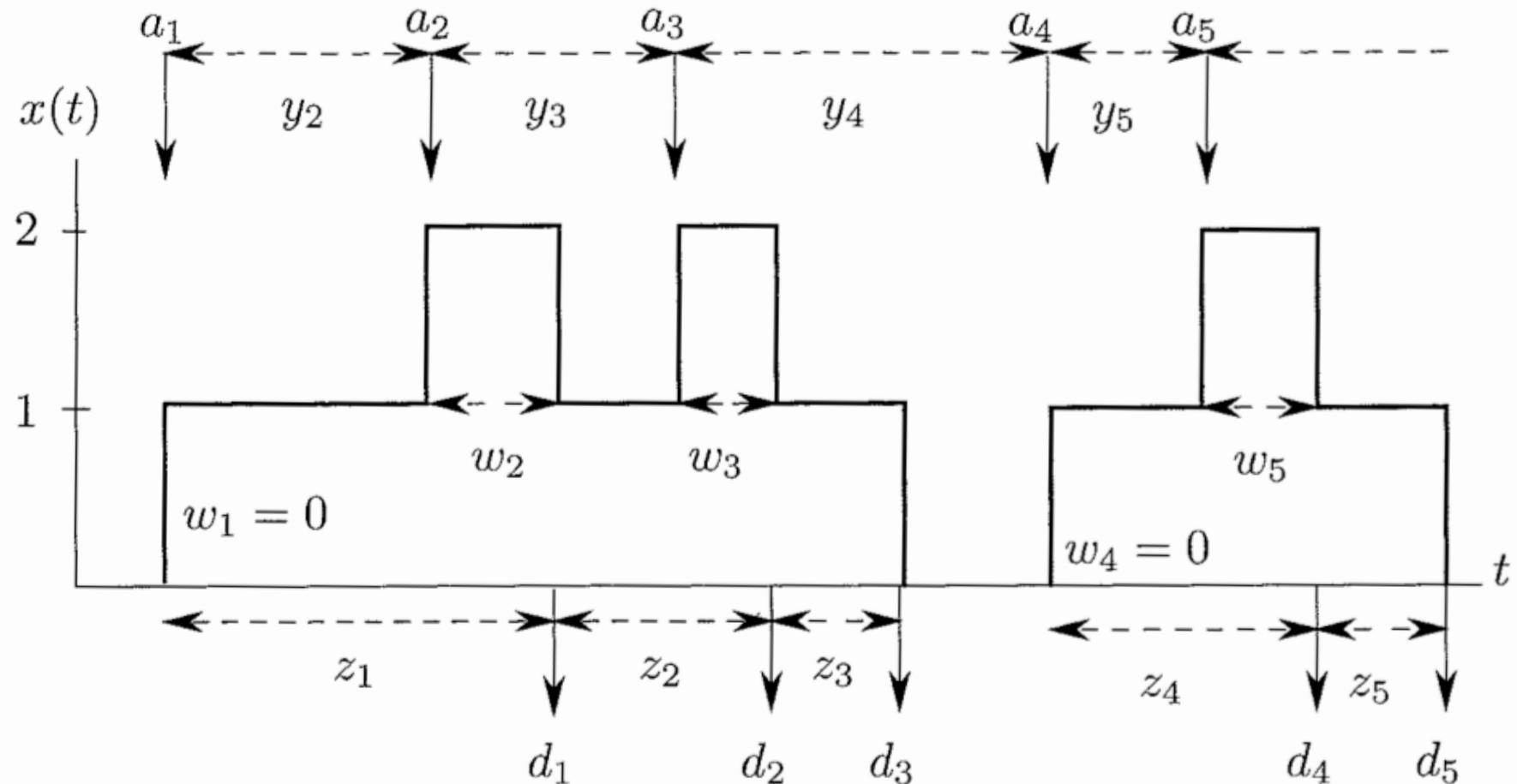
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = (1 - \pi_0)$$

- intensité du trafic = utilisation (= fraction de temps pendant lequel le système est occupé)
- Cela ne vaut que pour les systèmes mono-serveurs avec capacité de stockage de file infini

Dynamique des systèmes à files d'attente

- On examine le comportement dynamique d'un système à file d'attente simple au moyen d'un **sample path**
- **Sample paths** déjà rencontrés sous le nom 'mouvements' (cf lecture @ systems definitions)
- On représente les changements de l'états par rapport au temps (~ trajectoires)
- Ici, l'**état** est le **nombre de clients dans la file**
 - cas 1: le client arrive dans une file vide
 - cas 2: le client rejoint une file

Mouvement classique dans une file d'attente



Analyse des 2 cas possibles

- Cas 1: système vide
 - $W_k = 0$ client k n'attend pas dans la file
 - le système est vide seulement si le client ($k-1$) quitte avant que k arrive: $D_{k-1} \leq A_k \Leftrightarrow W_k = 0$ (a)
- Cas 2: système occupé
 - Le client rejoint la file donc $W_k > 0$
 - Le client attend jusqu'à ce que le précédent quitte
 - $D_{k-1} > A_k \Leftrightarrow W_k = D_{k-1} - A_k > 0$ (b)

Equation de Lindley

- Combinons (a) et (b)

$$W_k = \begin{cases} 0 & \text{si } A_k \geq D_{k-1} \\ D_{k-1} - A_k & \text{si } A_k < D_{k-1} \end{cases}$$

- On peut reformuler comme

$$W_k = \max \{0, D_k - A_{k-1}\}$$

- En rappelant $Y_k = A_k - A_{k-1}$ et $D_k - A_k = S_k = W_k + Z_k$ on obtient la récurrence de Lindley

$$W_k = \max \{0, W_{k-1} + Z_{k-1} - Y_k\}$$

- Une équation similaire pour le tps de départ:

$$D_k = \max \{A_k, D_{k-1}\} + Z_k$$



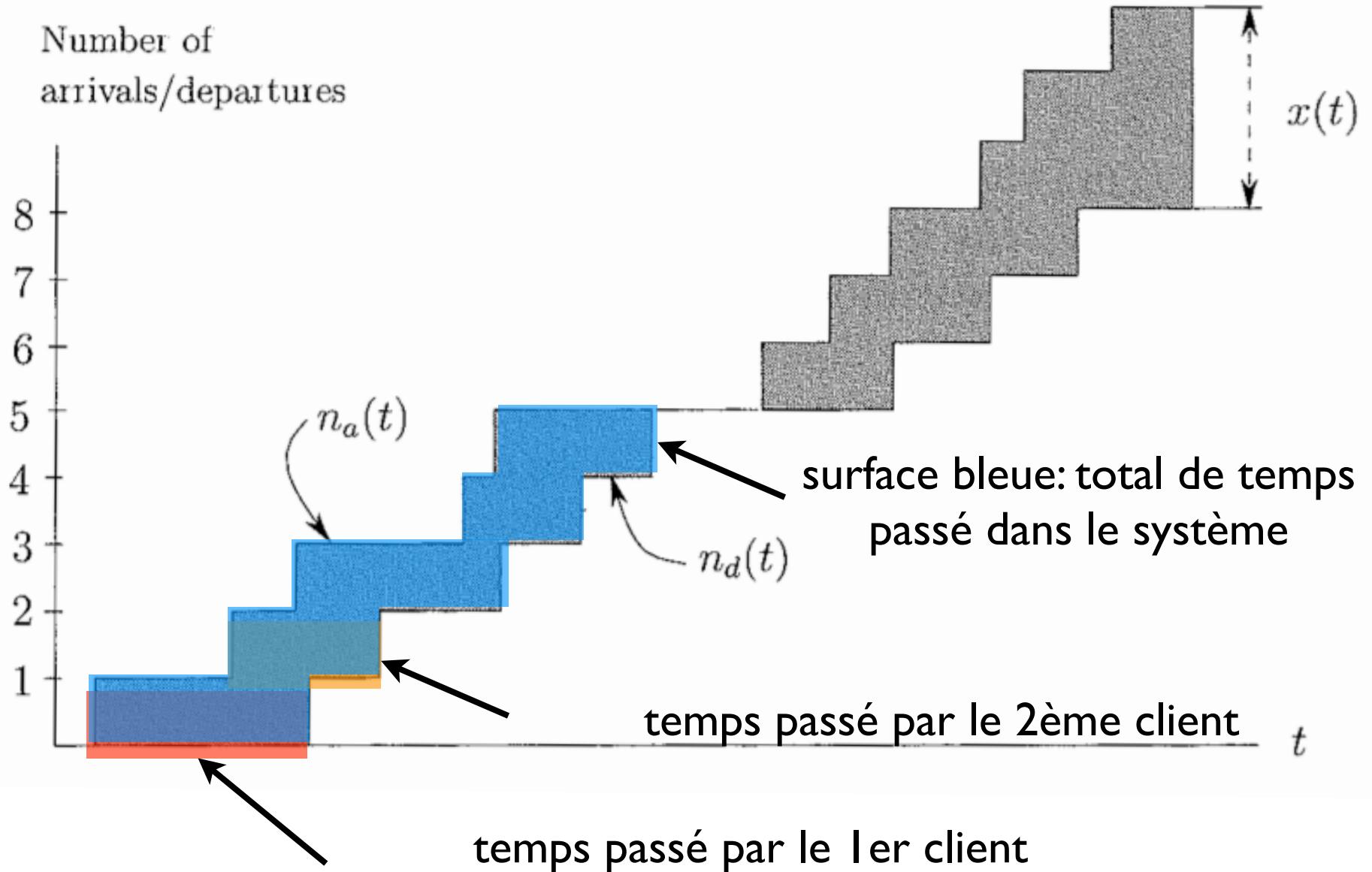
Dennis Victor Lindley (1923 - 2013)

La loi de Little

- $n_a(t) \triangleq$ nombre d'arrivées de clients jusqu'au temps t
- $n_d(t) \triangleq$ nombre de départs de clients jusqu'au temps t
- $X(t)$ clients dans le système au temps t
- $X(t) = n_a(t) - n_d(t)$



John D.C. Little (1928 -)



Dérivation de la loi de Little (I)

- $u(t)$ est le temps total passé par tous les clients dans le système jusqu'au temps t (surface en bleu)
- $\bar{s}(t) = \frac{u(t)}{n_a(t)}$ = temps moyen dans le système / client
- $\bar{x}(t) = \frac{u(t)}{t} =$ nb moyen de clients dans le système
- $\lambda(t) = \frac{n_a(t)}{t}$ = fréquence moyenne d'arrivée
- Si on injecte le rapport des 2 1ères dans la 3ème, on obtient (presque la loi de Little ->):

$$\bar{x}(t) = \lambda(t)\bar{s}(t)$$

Dérivation de la loi de Little (2)

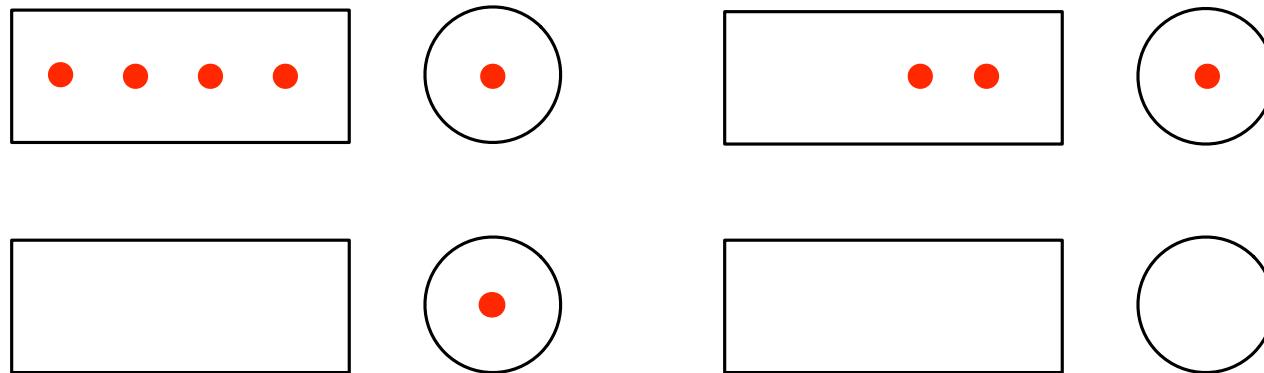
- Supposons que les deux limites ci-dessous existent
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda$ taux moyen d'arrivée en régime établi
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{s}(t) = s$ temps moyen du système en régime établi
- Alors, $\bar{x}(t)$ converge vers la valeur fixe $\bar{x} = \lambda s$
- Si on étend ce raisonnement à tous les mouvements
 - $\bar{x} = E[X]$ et $\bar{s} = E[S]$
 - On obtient la loi de Little $E[X] = \lambda E[S]$
- L'espérance du nombre de clients dans le système est égale à l'espérance du temps de système * le taux d'arrivée

Les systèmes à file d'attente Markoviens simples

- En régime établi $\lambda = \mu(1-\pi_0)$ et $\rho = (1-\pi_0)$
- Ainsi, connaissant la file stationnaire (clients dans le système) la probabilité de longueur $\pi_n = P[X=n]$ est un objectif majeur de la théorie des files
- Il y a deux approches pour obtenir π_n
 - dériver des **expressions analytiques** pour π_n en exploitant le fait que $\{X(t)\}$ peut être réduit à une **chaine de Markov continue**
 - **simuler/observer les mouvements et estimer** π_n

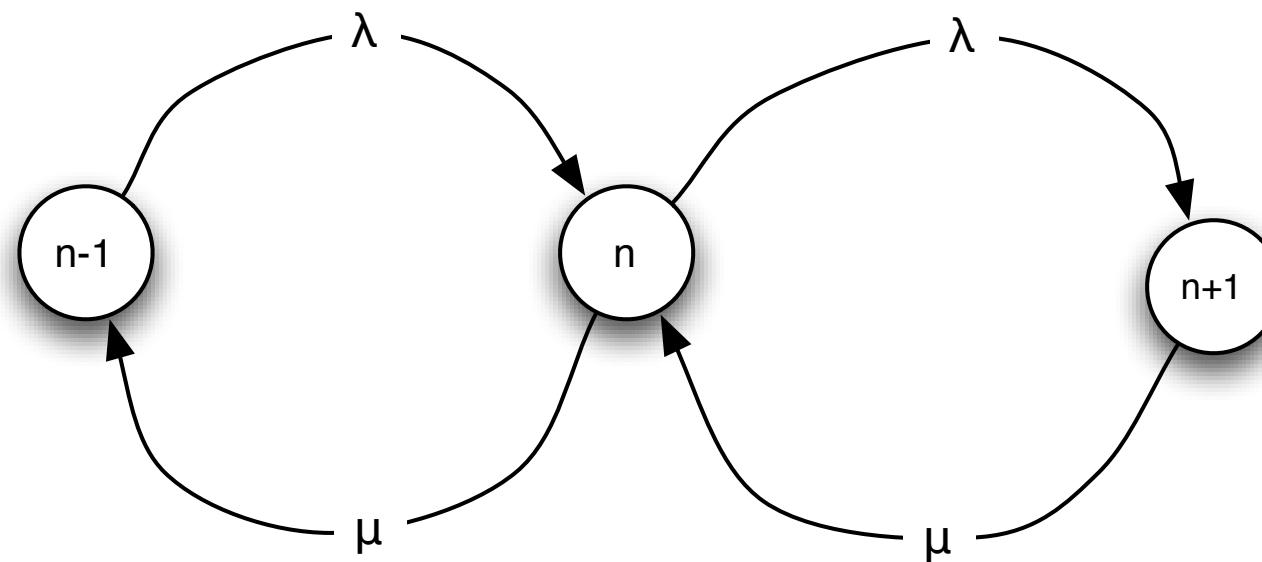
La file comme une chaîne de Markov continue: états du système et probabilités

- A un temps donné t une file peut être dans un nbre d'états différents, identifiés par le nombre n de clients dans le système



- Le système n'a pas de mémoire des états passés
- En régime établi, la probabilité d'être dans l'état n est donnée par π_n et est indépendante du temps

Taux de transition entre les états



- On peut modéliser le process comme un processus *naissance-décès*

Probabilités en régime établi

- En régime permanent les taux de transition s'équilibrent: on a vu que le taux d'arrivée devait être égal au throughput
 $\lambda = \mu(1-\pi_0)$
- En régime permanent la chaîne de Markov est à l'équilibre l'état ne change pas
 - $\lambda\pi_{n-1}$ est la probabilité d'aller de l'état $n-1$ à n
 - $\mu\pi_n$ est la probabilité d'aller de l'état n à $n-1$
 - Donc $\lambda\pi_{n-1} = \mu\pi_n$ et: $\pi_n = \rho\pi_{n-1}$
 - Ce qui est une récurrence pour calculer π_n

Utilisation de l'équation de récurrence

- Pour $n=0$: $\pi_1 = \rho\pi_0$
- $n > 0$
 - $\pi_2 = \rho\pi_1 = \rho^2\pi_0$
 - de proche en proche : $\pi_n = \rho^n\pi_0$
- La condition initiale π_0
 - on sait déjà que $\lambda = \mu(1 - \pi_0)$ donc $\pi_0 = 1 - \rho$
 - on peut trouver le même résultat avec les séries:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \pi_0 = 1$$

La file M/M/I

- Probabilité d'avoir n clients dans le système
 - $\pi_n = \rho^n \pi_0 = (1 - \rho) \rho^n$
 - Équation de récurrence (rappel): $\pi_n = \rho \pi_{n-1}$
 - Tous ces résultats ont été obtenus sous l'hypothèse de stabilité (en particulier $\pi_0 = (1 - \rho)$).
 - Pour que le système soit stable il faut $\rho < 1$ i.e. $\lambda < \mu$

Exemple: une clinique

- Salle des urgences: en moyenne 96 patients arrivent de manière aléatoire toutes les 24h. Un patient a besoin en moyenne de 10 minutes d'attention et un seul patient est traité à la fois. Supposons un comportement de file M/M/I (= arrivées **Markov**, service **Markov**, **I** serveur)
- Calculer
 - La proportion du temps d'occupation de la salle des urgences?
 - La probabilité d'avoir exactement I patient dans la clinique
 - La probabilité de + d'un patient dans la salle des urgences

Exemple: une clinique

- Salle des urgences: en moyenne 96 patients arrivent de manière aléatoire toutes les 24h. Un patient a besoin en moyenne de 10 minutes d'attention et un seul patient est traité à la fois. Supposons un comportement de file M/M/I.
- Calculer
 - La proportion du temps d'occupation de la salle des urgences?
 - On a $\lambda = \frac{96}{24 * 60} = \frac{1}{15}$ $\mu = \frac{1}{10}$ $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$
 - Donc en régime établi intensité du trafic = utilisation = fraction de temps où le système est occupé (ici = 2/3)

Exemple: une clinique

- Salle des urgences: en moyenne 96 patients arrivent de manière aléatoire toutes les 24h. Un patient a besoin en moyenne de 10 minutes d'attention et un seul patient est traité à la fois. Supposons un comportement de file M/M/1.
- Calculer
 - La probabilité d'avoir exactement 1 patient dans la clinique
 - On a $\pi_1 = \rho \pi_0 = \rho(1-\rho)$, donc $\pi_1 = \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Exemple: une clinique

- Salle des urgences: en moyenne 96 patients arrivent de manière aléatoire toutes les 24h. Un patient a besoin en moyenne de 10 minutes d'attention et un seul patient est traité à la fois. Supposons un comportement de file M/M/1.
- Calculer
 - La probabilité de + d'un patient dans la salle des urgences
 - On a $P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - (\pi_1 + \pi_0)$, donc

$$P[X > 1] = 1 - (\pi_0 + \pi_1) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

Utilisation et throughput

- Rappel pour un système M/M/1 : $\pi_0 = 1 - \rho$
- On définit l'utilisation comme la fraction de temps durant lequel le serveur est occupé: $1 - \pi_0$, donc **utilisation = ρ**
- throughput était donné par l'utilisation fois le taux de service moyen, donc **throughput = $\mu(1 - \pi_0) = \lambda$**
- Si le système est marginalement stable, alors le throughput peut être au maximum μ

Clients moyens dans le système

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n(1-\rho) = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

Définition de l'espérance

$$\frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\rho} \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

suites géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \quad \Rightarrow \quad E[X] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Attention: cela inclut la longueur de la file et l'élément en service

Temps moyen dans le système

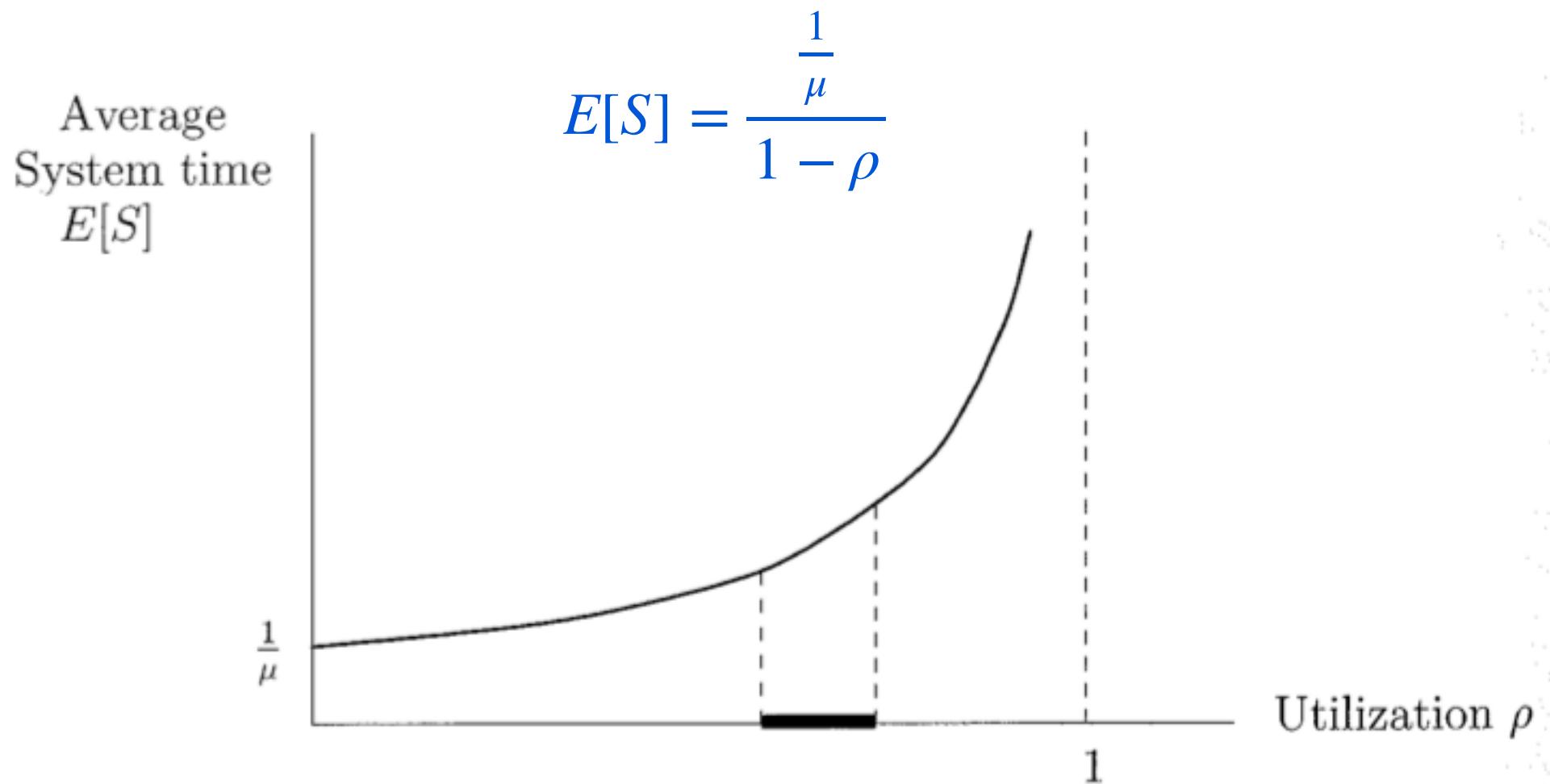
- D'après la loi de Little, $E[S] = E[X] / \lambda$
- La formule pour le temps moyen de système est donc:
(avec $\lambda = \rho\mu$)

$$E[S] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \rho} = E[W] + E[Z]$$

$E[Z] = 1/\mu$ est le temps moyen pour servir un client

- Comme $\rho \rightarrow 0$ $E[S] \rightarrow 1/\mu$: tout le temps passé dans le système l'est à être servi
- Comme $\rho \rightarrow 1$ $E[S] \rightarrow \infty$: tout le temps passé dans le système l'est à être dans la file, et ce temps est infini

Compromis entre utilisation et temps de service



$$E[Q] = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 - \lambda\mu}$$

Nombre moyen d'éléments dans la file, i.e. la longueur moyenne de file (en régime établi)

Temps d'attente moyen

- $E[S] = E[W] + E[Z]$
 - temps du système = tps d'attente + tps de service

$$\frac{1/\mu}{1 - \rho} = E[W] + \frac{1}{\mu}$$

- le temps moyen d'attente

$$E[W] = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{\lambda}{\mu^2 - \lambda\mu}$$

- une autre formulation de la loi de Little

$$E[Q] = \lambda E[W]$$

Le taux de service

- cela dépend de combien de clients de clients sont dans le système
- s'il y a $n < m$ clients, il y a n serveurs occupés est le taux est $n\mu$
- s'il y a le même nbre ou plus de clients que de serveurs ($n \geq m$) tel taux de service est à sa valeur maximale $m\mu$

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{for all } n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{if } 0 \leq n < m \\ m\mu & \text{if } n \geq m \end{cases}$$

Probabilité de 0 clients dans la file

- On peut montrer que $\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\lambda^n}{\mu \cdot 2\mu \cdots n\mu} + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!\mu^{m-1}} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m\mu} \right)^{n-m+1} \right]^{-1}$

- si on fixe $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m\mu} \right)^{n-m+1} = \sum_{n=m}^{\infty} \rho^{n-m+1} = \frac{\rho}{1-\rho}$$
$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

Probabilité de n clients dans la file

- On peut montrer que

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \frac{(m\rho)^n}{n!} & n = 1, 2, \dots, m-1 \\ \pi_0 \frac{m^m}{m!} \rho^n & n = m, m+1, \dots \end{cases}$$

- Ce sont des distributions de probabilités stationnaires

Utilisation et throughput

- Soit B la variable aléatoire pour le nombre de serveurs occupés
- Le nombre moyen de serveurs occupés est donné par:

$$E[B] = \sum_{n=0}^{m-1} n\pi_n + mP[X \geq m]$$

$$P[X \geq m] = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{m^m}{m!} \rho^n \pi_0 = \frac{m^m}{m!} \frac{\rho^m}{1-\rho} \pi_0$$

- On peut donc dériver: $E[B] = m\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
- En régime permanent le système doit être à l'équilibre, donc le throughput (utilisation x taux de service) est encore λ

Longueur de file moyenne

- La longueur moyenne de file est l'espérance de la variable aléatoire X

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$$

- On peut montrer que

$$E[X] = m\rho + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \pi_0$$

Temps moyen de système

- On utilise encore la loi de Little pour déterminer $E[S]$ de $E[X]$

$$m\rho + \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} \pi_0 = \lambda E[S]$$

- C'est à dire

$$E[S] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\pi_0}{m(1 - \rho)^2}$$

Probabilité d'attente de file

- C'est la probabilité qu'un client qui arrive ne trouve pas de serveur idle et ait à faire la queue
- C'est la probabilité d'avoir plus de m clients dans le système

$$P_Q = P[X \geq m] = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n$$

- On a déjà obtenu ce résultat en calculant $E[B]$

$$P_Q = \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\pi_0}{1 - \rho}$$

Formule C d'Erlang



A.K. Erlang (1878-1929)

Chaînes de Markov

(Références: Luenberger, Chapitre 7 et Cassandras-Lafontaine, Chapitre 7)

Chaines de Markov discrètes

- Une chaîne de Markov discrète est un processus à évènements discrets pour lequel l'espace des états est un ensemble dénombrable (souvent fini)
- S'il y a n états possibles on parle de chaîne d'ordre n
- Les états changent potentiellement à chaque étape suivant une règle probabilistique
- La règle est donnée par un ensemble de **probabilités de transition**



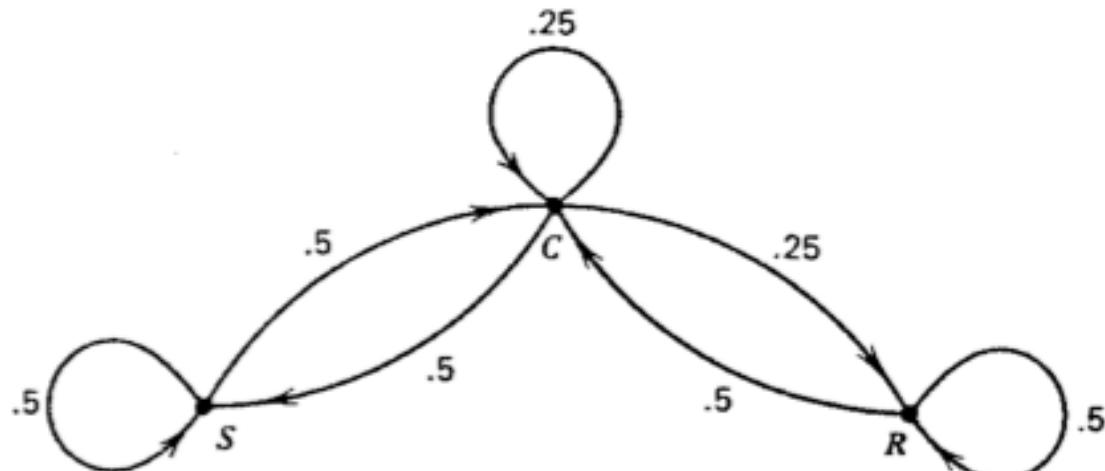
Andrey A. Markov (1856-1922)

L'absence de mémoire

- Une propriété fondamentale des chaines de Markov est que toute l'histoire passée peut être compactée dans la valeur présente
- Le système est donc sans mémoire
- $P[X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k, X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_0 = x_0]$
 $= P[X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k]$

Exemple: modèle du temps

Représentation graphique



Définition de la probabilité de transition

Représentation matricielle

	Sunny	Cloudy	Rain
Sunny	0.5	0.5	0
Cloudy	0.5	0.25	0.25
Rain	0	0.5	0.5

$$p_{ij}(k) \triangleq P[X_{k+1} = j | X_k = i]$$

Chaine de Markov homogène

- Une chaine de Markov homogène est une chaine de Markov pour laquelle la probabilité de transition de l'état i à j est toujours la même, indépendamment du point à laquelle elle est observée
- De façon rigoureuse, cela se traduit par la relation

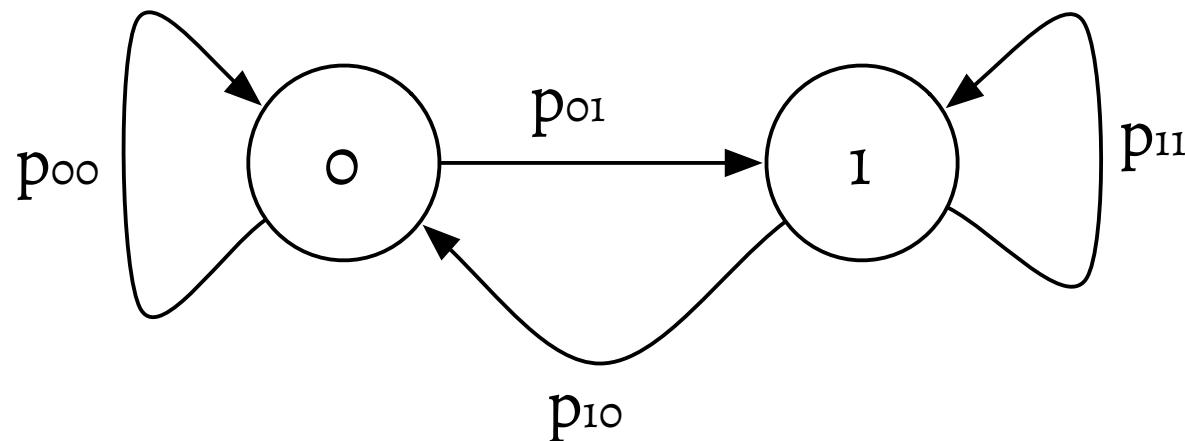
$$p_{ij} = P[X_{k+1} = j \mid X_k = i], \forall k \geq 0$$

Exemple: un processus d'appel simplifié

- Au plus un appel peut avoir lieu à la fois
- La probabilité d'un appel pendant un laps de temps donné est α
- Si l'appareil est libre, l'appel est pris, sinon l'appel est perdu
- La probabilité qu'un appel soit traité dans le slot considérée est de β
- Si un appel et une résolution ont lieu durant le même slot, un nouvel appel peut être processé

Exemple: appel téléphonique

- Etat 0: téléphone libre
- Etat 1: occupé
- Représentation graphique

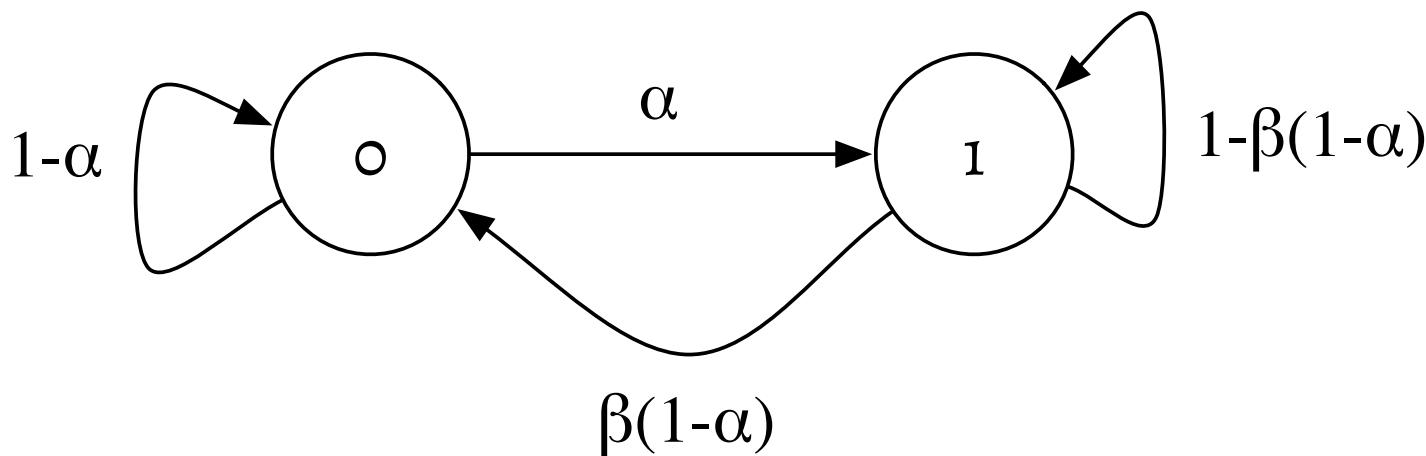


Exemple: appel téléphonique simplifié

- Etat 0: libre
- Etat 1: occupé
- Probabilités de transition
 - $p_{00}=1-\alpha$
 - $p_{01}=\alpha$
 - $p_{10}=\beta(1-\alpha)$ (appel résolu ET pas de nouvel appel)
 - $p_{11}=(1-\beta)+\alpha\beta$ (appel non résolu OU [appel résolu ET nouvel appel])

Exemple: appel téléphonique simplifié

- Etat 0: libre
- Etat 1: occupé
- Représentation graphique



La matrice de probabilités de transition

- Les probabilités de transition associées avec une chaîne de Markov peuvent être regardés comme les éléments d'une matrice $n \times n$

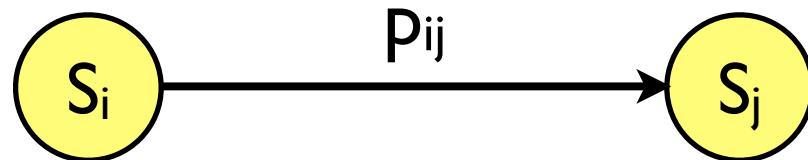
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice de probabilités de transition

- Tous éléments sont non négatifs
- Un vecteur de probabilité a des composants non négatifs et la somme de ses composants vaut 1
- Décrit les probabilités associées avec les différents états

Le processus de transition multistep

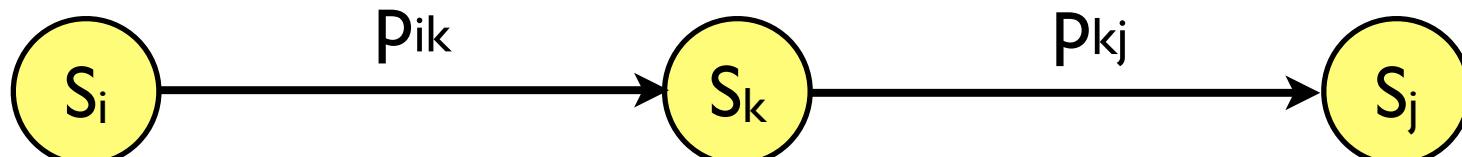
- dans une chaîne de Markov de matrice de transition \mathbf{P}



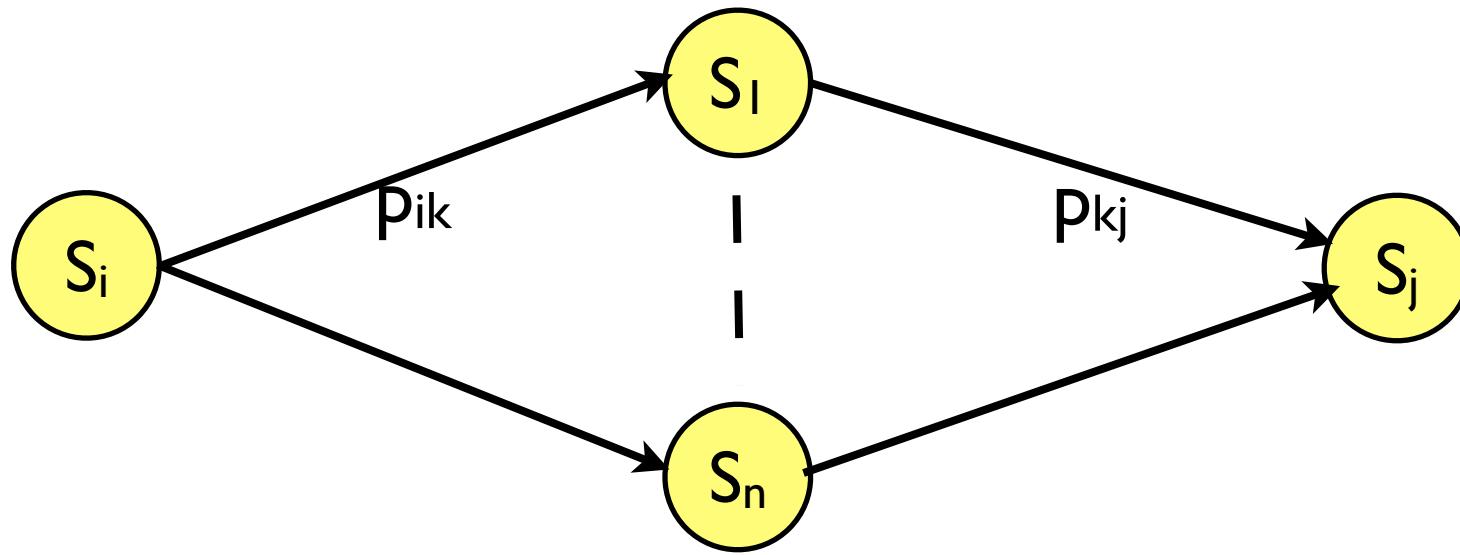
- après une étape S_i finit en S_j avec la probabilité P_{ij}
- Les probabilités des divers états après 1 étape peuvent être stockées dans un vecteur

$$[p_{i1} \quad p_{i2} \cdots p_{in}]$$

- quelles sont les probabilités de passer de i à j via k ?



Le processus de transition multistep



- On somme les probabilités de toutes les étapes possibles

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n p_{ik} p_{kj} = [\mathbf{P}^2]_{ij}$$

par définition de la
multiplication de matrices
ij-ème element de la matrice \mathbf{P}^2

- La matrice de transition en 2 étapes est \mathbf{P}^2

Le vecteur de probabilité d'état

- Supposons qu'un processus démarre à l'état S_i
- On utilise le vecteur suivant, noté $\pi(0)$, identiquement nul sauf son i -ème composant égal à 1, pour représenter cela

$$\pi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Le vecteur de probabilités de chaque état après une étape est:

$$\pi(0)^T \mathbf{P} = [p_{i1} \dots p_{in}]$$

Le vecteur de probabilité d'état

- Soit $\pi(k)^T$ le vecteur ligne dont le j-ème composant correspond à la probabilité que l'état soit S_j à l'étape k
- Si le processus démarre en S_i alors $\pi(0)^T$ est un vecteur de zéros sauf pour son i-ème composant égal à 1
[0 0 0 ... 1 ... 0]
- Les vecteurs de probabilités successives sont générés par la récurrence

$$\pi(k+1)^T = \pi(k)^T \mathbf{P}$$

- que l'on peut écrire

$$\pi(k+1) = \mathbf{P}^T \pi(k)$$

Remarque

- $\pi(k)$ n'est **pas** l'état de la chaîne de Markov
- l'état est un des S_i
- $\pi(k)$ donne les probabilités (après k étapes) que l'état soit en un des états parmi S_1, \dots, S_n
- Rappel: on considère des chaînes de Markov telles que **P** ne dépend pas du temps
 - ce sont des systèmes LTI !
 - techniquement on les appelle chaînes de Markov **homogènes**

Analyse transitoire

- L'analyse transitoire tente de répondre aux questions:
 - quelle est la proba de bouger de l'état i à j en n étapes
 - quelle est la proba d'être à l'état i au temps k
- Pour réaliser une analyse de transition, on s'appuie sur l'équation de récurrence

$$\boldsymbol{\pi}(k+1)^T = \boldsymbol{\pi}(k)^T \mathbf{P}$$

- et sur les relations :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(1)^T &= \boldsymbol{\pi}(0)^T \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\pi}(2)^T &= \boldsymbol{\pi}(1)^T \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}(0)^T \mathbf{P}^2\end{aligned}$$

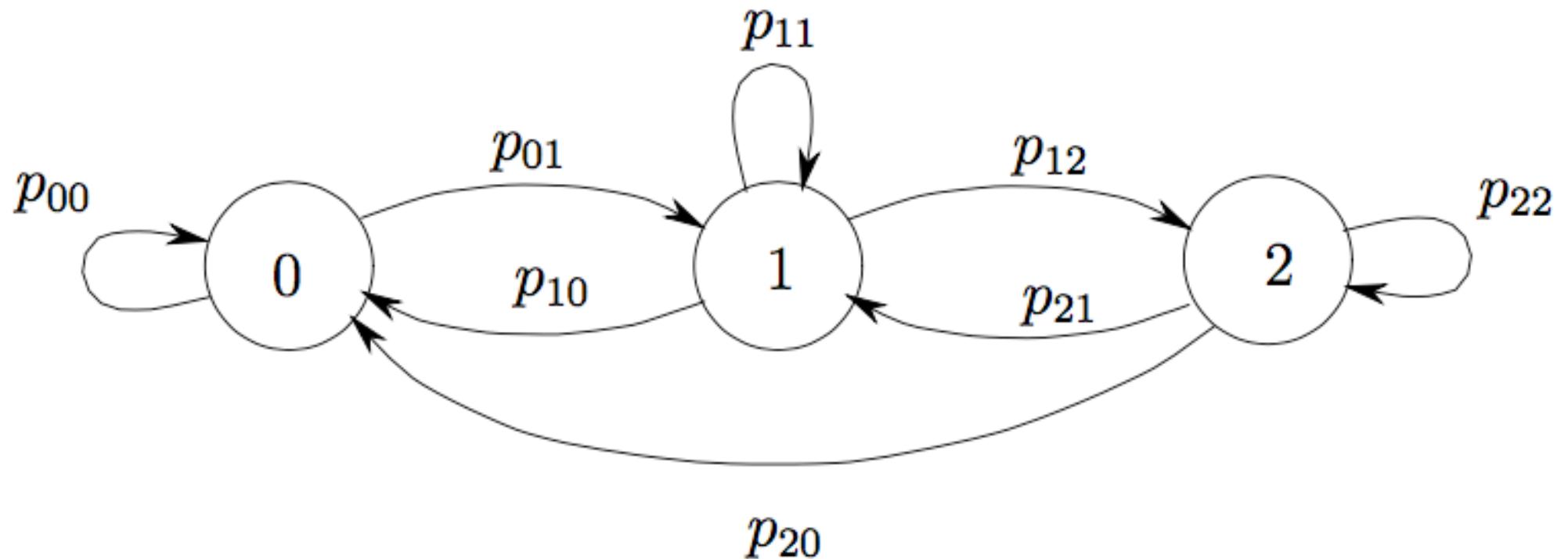
...

$$\boldsymbol{\pi}(k)^T = \boldsymbol{\pi}(0)^T \mathbf{P}^k$$

Exemple: un ordinateur à deux processeurs

- 2 processeurs travaillent en parallèle
- Au plus, un job peut être soumis dans un intervalle de temps donné.
La probabilité de soumission d'un job est α
- Quand un job est soumis, il est servi par le processeur disponible
- Si les deux sont disponibles, le job est attribué au #1
- Si les deux sont occupés, le job est perdu
- Quand un processeur est occupé, sa probabilité de devenir disponible en un intervalle de temps est β
- Si un job est soumis durant un intervalle pendant lequel les 2 processeurs sont occupés, et que 1 devient dispo, le job est réalisé
- X_k : # jobs réalisés durant le slot k: $X = \{0,1,2\}$

Exemple: représentation graphique



Exemple: probabilités de transition

- $p_{00} = (1-\alpha) \quad p_{01} = \alpha \quad p_{02} = 0$
- $p_{10} = \beta(1-\alpha) \quad p_{11} = (1-\beta)(1-\alpha) + \beta\alpha \quad p_{12} = (1-\beta)\alpha$
- $p_{20} = \beta^2(1-\alpha) \quad p_{21} = \beta(1-\beta)(1-\alpha) + (1-\beta)\beta(1-\alpha) + \beta^2\alpha$
- $p_{22} = (1-\beta)^2 + \beta(1-\beta)\alpha + \beta(1-\beta)\alpha$

$$p_{21} = \beta(1 - \beta)(1 - \alpha)$$

processeur 1 termine sa tâche, processeur 2 reste occupé, et pas de nouveau job

$$+ (1 - \beta)\beta(1 - \alpha)$$

processeur 2 termine sa tâche, processeur 1 reste occupé, et pas de nouveau job

$$+\beta^2\alpha$$

les deux processeurs terminent et arrivée d'un nouveau job

Exemple: probabilités de transition

- $p_{00} = (1-\alpha)$ $p_{01} = \alpha$ $p_{02} = 0$
- $p_{10} = \beta(1-\alpha)$ $p_{11} = (1-\beta)(1-\alpha) + \beta\alpha$ $p_{12} = (1-\beta)\alpha$
- $p_{20} = \beta^2(1-\alpha)$ $p_{21} = \beta(1-\beta)(1-\alpha) + (1-\beta)\beta(1-\alpha) + \beta^2\alpha$
- $p_{22} = (1-\beta)^2 + \beta(1-\beta)\alpha + \beta(1-\beta)\alpha$
- avec $\alpha=0.5$ et $\beta=0.7$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.35 & 0.5 & 0.15 \\ 0.245 & 0.455 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Exemple: analyse de transition

- Le système démarre à vide:
 $\pi(0) = [\pi_0(0), \pi_1(0), \pi_2(0)] = [1, 0, 0]$
- quelle est la probabilité que le système soit vide à k=3?

Chaines de Markov régulières et distributions limitantes

- La valeur propre de plus grande valeur absolue pour une matrice de probabilité de transition P est $\lambda_0 = 1$
- Définition: une chaîne de Markov est dite **régulière** s'il existe n tel que tous les éléments de P^n sont > 0

Théorème (Théorème basique de limites)

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière

- Il y a seul vecteur de probabilité $\pi^T > 0$ tel que: $\pi^T P = \pi^T$
- $\forall S_i$, état initial , qui correspond à un vecteur de probabilités initiales e_i^T , le vecteur limite: $v^T = \lim_{m \rightarrow \infty} e_i^T P^m$ existe et est indépendant de i.
- De plus $v^T = \pi^T$
- $\lim_{m \rightarrow \infty} P^m = \bar{P}$ avec \bar{P} la matrice ($n \times n$) ayant π^T comme lignes

Exemple: Analyse de transition

- Le système démarre à vide: $\pi(0)=[1,0,0]$
- Quelle est la probabilité que le système soit vide à $k=3$?
 - On doit calculer P^3 pour obtenir $\pi_0(3)$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.4059 & 0.4966 & 0.0975 \\ 0.3954 & 0.4946 & 0.1100 \\ 0.3867 & 0.4929 & 0.1205 \end{pmatrix}$$

$$\pi(3)^T = \pi(0)^T P^3 = (0.4059 \quad 0.4966 \quad 0.0975)$$

- Donc $\pi_0(3) = 0.4059$

Exemple: analyse de transition

- Le système démarre à vide: $\pi(0)=[1,0,0]$
- Quelle est la probabilité que le système reste vide en 1 et 2?

Example: Transient analysis

- Le système démarre à vide: $\pi(0)=[1,0,0]$
- Quelle est la probabilité que le système reste vide pour les temps 1 et 2?
 - $P[X_1=0, X_2=0] = P[X_2=0 \mid X_1=0] P[X_1=0] = p_{00} \pi_0(1)$

Example: Transient analysis

- Le système démarre à vide: $\pi(0) = [1, 0, 0]$
- Quelle est la probabilité que le système reste vide en 1 et 2?
 - $P[X_1=0, X_2=0] = P[X_2=0 \mid X_1=0] P[X_1=0] = p_{00} \pi_0(1)$
 - Si $p_{00} = 0.5$
 - comme $\pi(0) = [1 \ 0 \ 0]$ on a
$$\pi(1)^\top = \pi(0)^\top \mathbf{P} = (0.5 \ 0.5 \ 0)$$
 - du coup $\pi_0(0) = 0.5$
 - et $P[X_1=0, X_2=0] = 0.5^2 = 0.25$

Exemple

- Calculons P^5, P^{10} pour le système

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0.3992 & 0.4953 & 0.1055 \\ 0.3984 & 0.4952 & 0.1064 \\ 0.3977 & 0.4950 & 0.1072 \end{pmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.3987 & 0.4952 & 0.1061 \\ 0.3987 & 0.4952 & 0.1061 \\ 0.3987 & 0.4952 & 0.1061 \end{pmatrix}$$

- On a $\pi = [0.3987 \ 0.4952 \ 0.1061]$

Analyse en régime établi de la processus de Markov naissance - mort

- La matrice de transition est:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p & 0 \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

- Considérons l'équation $\pi^T = \pi^T \mathbf{P}$

Analyse en régime établi de la processus de Markov naissance - mort

- Considérons l'équation

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0\dots \\ p & 0 & 1-p & 0\dots \\ 0 & p & 0 & 1-p\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- On obtient

$$(1) \pi_0 = \pi_0 p + \pi_1 p$$

$$(2) \pi_j = \pi_{j-1}(1-p) + \pi_{j+1}p, \forall j > 0$$

- et (depuis (1))

$$\pi_1 = \frac{1-p}{p} \pi_0$$

- et de (2) pour $j = 1$ $\pi_2 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \pi_0$

Analyse en régime établi de la processus de Markov naissance - mort

- Si on raisonne de la même façon, on obtient

$$\pi_j = \left(\frac{1-p}{p}\right)^j \pi_0, \forall j$$

- Comme π est le vecteur de probabilité, on a

$$\sum_{j \geq 0} \pi_j = 1$$

- ce qui implique

$$\sum_{j \geq 0} \pi_j = \sum_{j \geq 0} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j \pi_0 = \pi_0 \sum_{j \geq 0} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j = 1$$

Analyse en régime établi de la processus de Markov naissance - mort

- Donc

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j}$$

- Et comme

$$\pi_j = \left(\frac{1-p}{p}\right)^j \pi_0, \forall j$$

- on obtient

$$\pi_j = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^j}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j}, \forall j$$

Analyse en régime établi de la processus de Markov naissance - mort

- On a $\pi_j = \frac{(\frac{1-p}{p})^j}{\sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1-p}{p})^j}, \forall j$
- Supposons $(1-p)/p < 1$, alors $p > 1/2$ et la somme suivante converge
$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j = \frac{p}{2p-1},$$
- On obtient que $\pi_j = \frac{2p-1}{p} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j, \forall j$
- On peut vérifier que la chaîne est récurrente, i.e. chaque nœud est récurrente (la probabilité de retour à l'état i vaut 1)

Analyse en régime établi de la processus de Markov naissance - mort

- On a

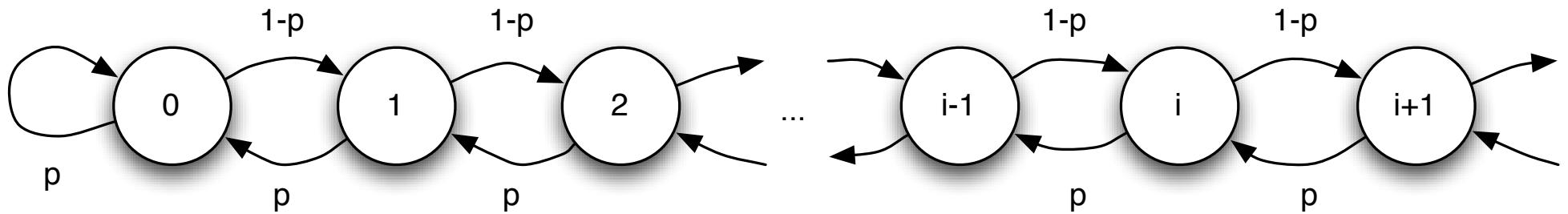
$$\pi_j = \frac{(\frac{1-p}{p})^j}{\sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1-p}{p})^j}, \forall j$$

- Supposons $p < 1/2$, alors la somme suivante ne converge pas

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1-p}{p})^j$$

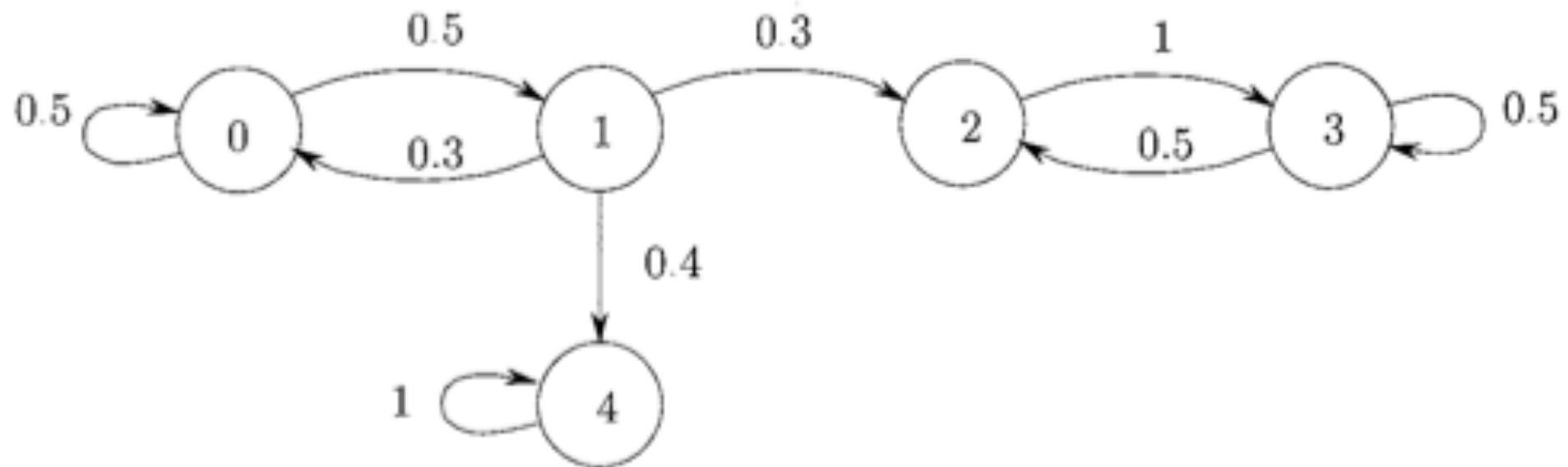
- D'où $\pi_j = 0$, ce qui suggère que la chaîne a tendance à dériver vers des valeurs de j de plus en plus grandes (les états évoluent, il n'y a pas de certitude de retour à une node)

La chaîne naissance-mort

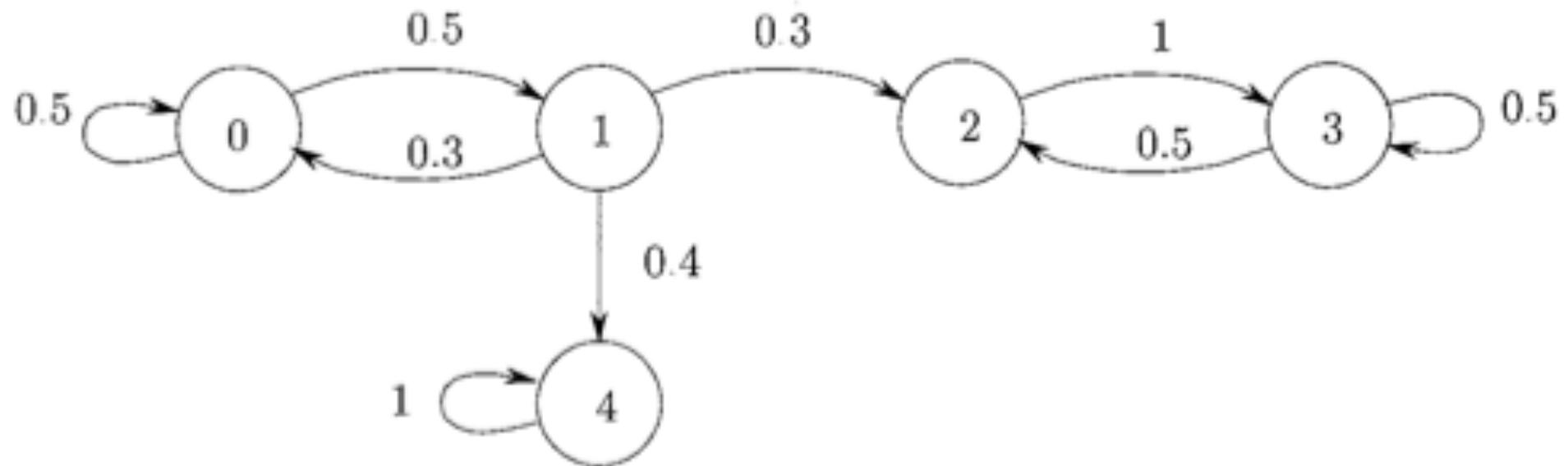


- une transition de l'état i à $i+1$ est une “naissance”, de probabilité $1-p$
- une transition de i à $i-1$ est une “mort” de probabilité p
- On commence à l'état 0
 - Si $p < 1/2$ on s'attend à ce que la chaîne diverge
 - Si $p > 1/2$ la chaîne devrait retourner périodiquement à 0 (état récurrent)

Classification des états



Classification des états



L'ensemble $\{2,3,4\}$ est fermé.

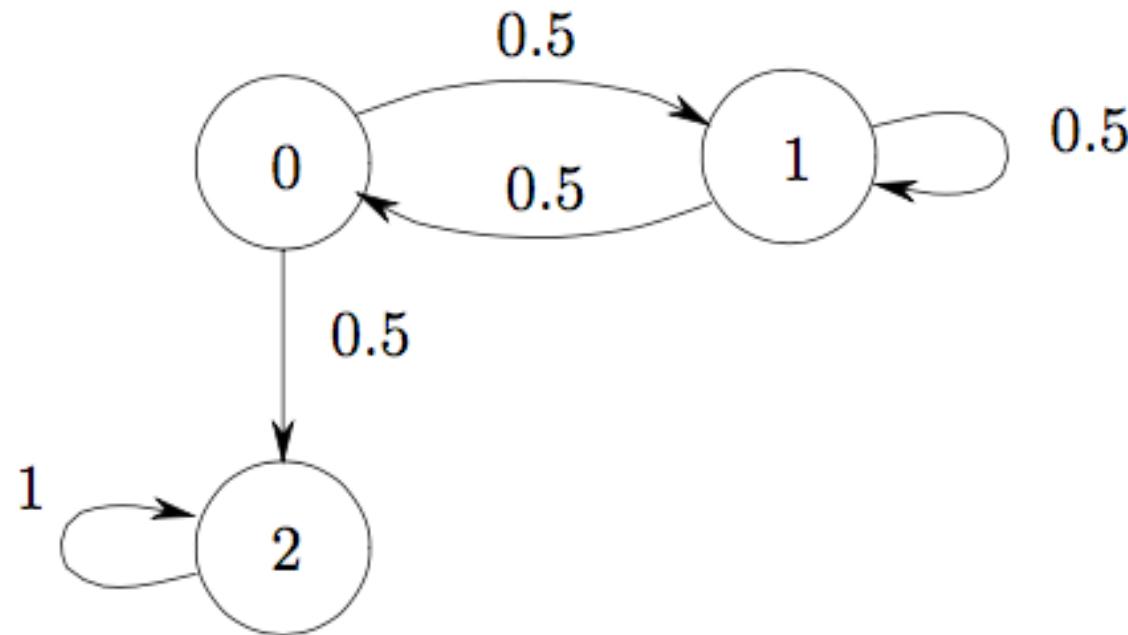
L'état 4 est absorbant

Les états 2 et 3 sont irréductibles

Pouvons nous dire quelque chose de 0 et 1?

Dans quel sens sont-ils différents?

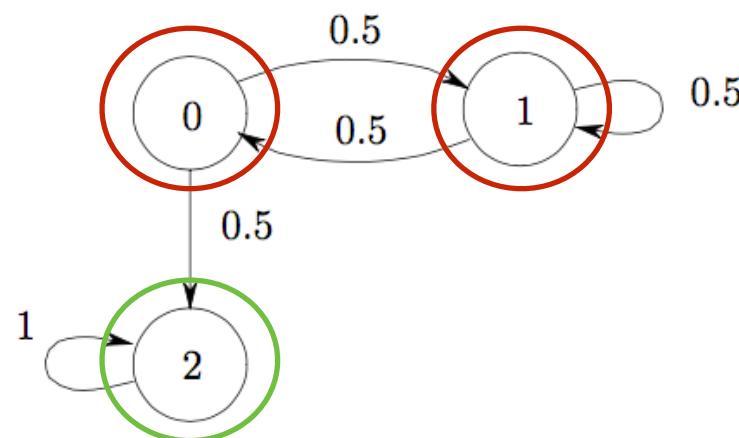
Classification des états



L'état 2 est absorbant
Que pouvons nous dire des états 0 et 1?

Etats récurrents et de transition

- Supposons qu'une chaîne est dans son état i
- La question suivante est raisonnable: est-ce que la chaîne reviendra à l'état il?
 - Si la réponse est “définitivement oui,” l'état i est **récurrent**,
 - Autrement **il est transient**.



Etats récurrents et de transition

- Le temps d'atteinte T_{ij} est défini comme le premier temps où la chaîne entre en l'état j en étant parti de l'état i .

$$T_{ij} = \min\{k > 0 \mid X_0 = i, X_k = j\}$$

- Quand $i=j$ alors le temps d'atteinte est le premier temps que la chaîne met à revenir à l'état i à partir du moment où elle y est
 - T_{ii} est la variable aléatoire qui dénote le temps de récurrence de l'état i
 - La probabilité que le temps de récurrence de l'état i soit de k est de:

$$\rho_i^k := P[T_{ii} = k]$$

Etats récurrents et de transition

- La probabilité que le temps de récurrence de l'état i soit de k est de:

$$\rho_i^k := P[T_{ii} = k]$$

- La probabilité de revenir en i , sachant que l'état courant est i , est donc donnée par

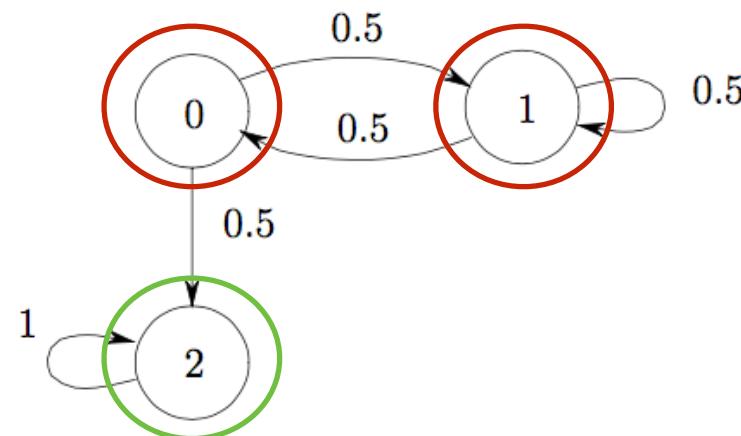
$$\rho_i = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^k$$

- L'évènement de revenir une fois en i , sachant que l'état courant est i est identique à l'évènement que le temps de récurrence de l'état i soit fini, donc

$$\rho_i = P[T_{ii} < \infty]$$

Etat récurrent et de transition

- Etat 2: **recurrent**,
- Etats 0 et 1 **transients**.

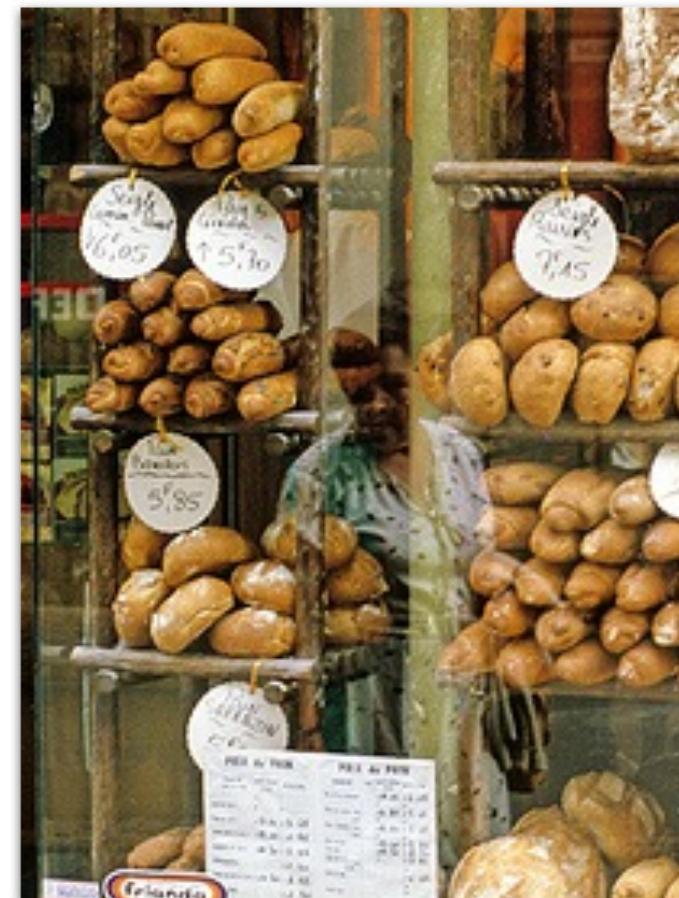


Introduction à la Simulation à Évènements Discrets

(Référence: Cassandras-Lafortune, chapitre 10)

Imaginez que ...

- Vous dirigez une petite boulangerie
- Vous avez un assistant qui vous aide à servir les clients
- Vous n'avez jamais plus de 4/5 clients qui attendent aux pics
- Un jour il est malade et...
- La file est si longue que vous perdez plein de clients...
- Comment est-ce arrivé?



Comment est-ce arrivé?

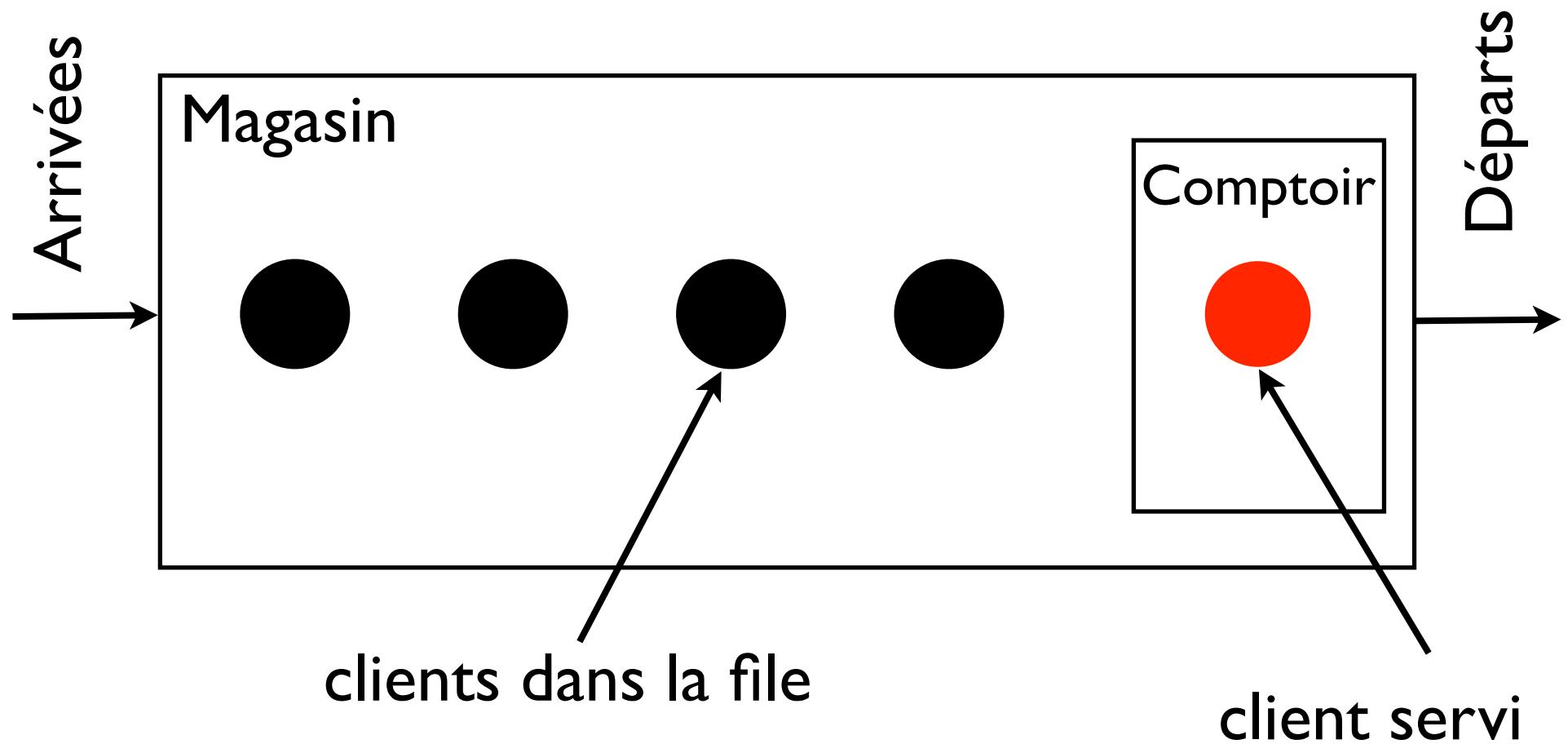
- Il y a deux façons de répondre à cette question
 - solution analytique au moyen de la théorie des files
 - c'est faisable dans ce cas simple
 - simuler numériquement un modèle du système
 - peut-être ok avec un modèle simplifié (e.g. dynamiques du système)
 - on peut avoir besoin d'un modèle plus détaillé des opérations: simulation à évènements discrets

La Simulation est utile!

- Quand le modèle est trop complexe pour dériver une solution analytique
- On peut utiliser la simulation
 - pour comprendre le passé (**interprétation**)
 - pour explorer le futur (**prévision**)
 - pour manager le présent (**contrôle**)
- “*Simulation is the imitation of the operation of a real-world process over time*”

Jerry Banks, the Handbook of Simulation

Un exemple de modèle



Temps d'arrivée, inter-arrivées et de service

Customer number	Arrival Time	Interarrival Time	Service Time
1	0	1.73	2.9
2	1.73	1.35	1.76
3	3.08	0.71	3.39
4	3.79	0.62	4.52
5	4.41	14.28	4.46
6	18.69	0.70	4.36
7	19.39	15.52	2.07
8	34.91	3.15	3.36
9	38.06	1.76	2.37
10	39.82	1.00	5.38
11	40.82		

Qu'est ce qu'on peut mesurer?

- Comme pour les systèmes de file, on s'intéresse à:
 - temps moyen d'attente dans la file: $E[W_k]$
 - temps t'attente maximum dans la file: W_k
 - temps moyen dans le système: $E[S_k]$
 - temps maximum passé dans le système: S_k
 - nombre moyen de clients dans la file: $E[X(t)]$
 - nombre maximum de clients dans la file: $X(t)$
 - utilisation et throughput

Eléments d'un modèle de simulation pour phénomènes à événements discrets

Entités

- Les entités sont les objets dynamiques de la simulation
 - clients
 - pièces à processer
 - tâches pour un processeur
- Cycle de vie: les entités sont créées, bougent dans les files, sont gérées et partent
- La plupart des simulations sont mappées à des objets du “monde réel”
- Certaines entités sont artificielles comme les **démons des pannes** et les **anges de la réparation** ...

Attributs

- Les attributs sont les caractéristiques communes des entités
- Exemple: un client d'une boulangerie peut avoir comme attributs le type et la quantité de pain qu'il veut acheter
- Dans la simulation on a aussi des variables globales, qui ne sont pas liées à une entité spéciale

Ressources

- Les ressources représentent les “ingrédients” qu’utilisent les entités pour réaliser leurs tâches
 - e.g. chariots élévateurs pour déplacer des conteneurs dans une cour ou un hangar
 - espace limité pour stocker
 - le/la vendeur.euse dans la boulangerie
- Les ressources sont *saisies* et *libérées* par les entités

Les files

- Quand une entité ne peut pas saisir une ressource parce qu'elle est occupée -> file
- La file est la place d'attente

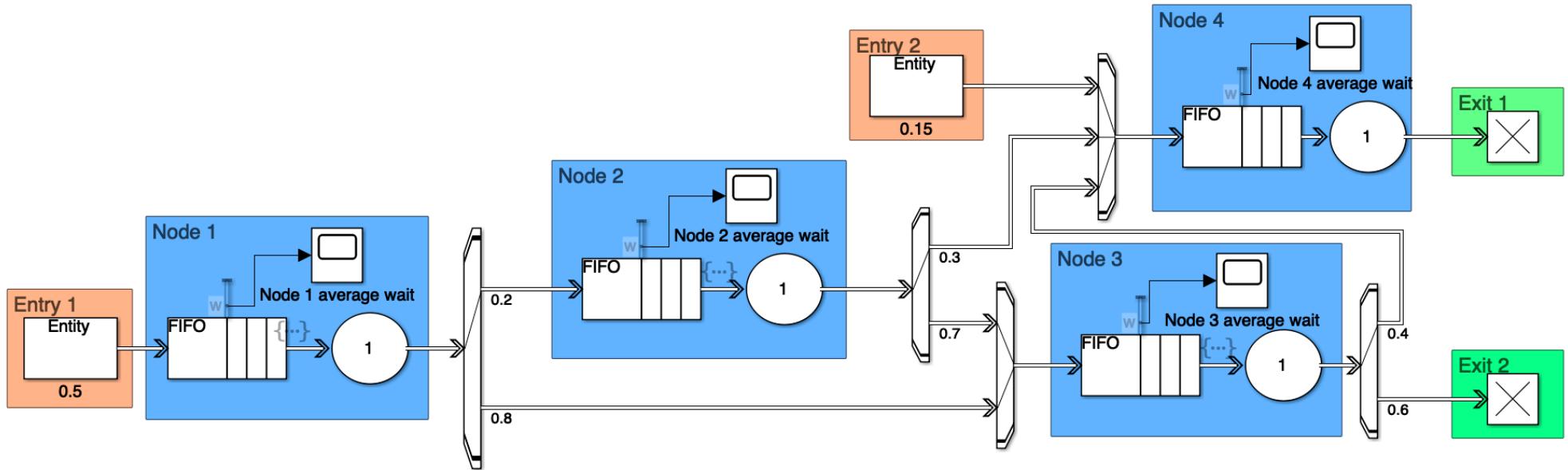
Accumulateurs statistiques

- Les accumulateurs sont utilisés pour mesurer la performance du système.
- Ils font partie des variables globales discutées précédemment
- Exemples:
 - nombre total d'entités gérées jusque là
 - temps total d'attente
 - throughput
 - utilisation
 - etc.

Evènements

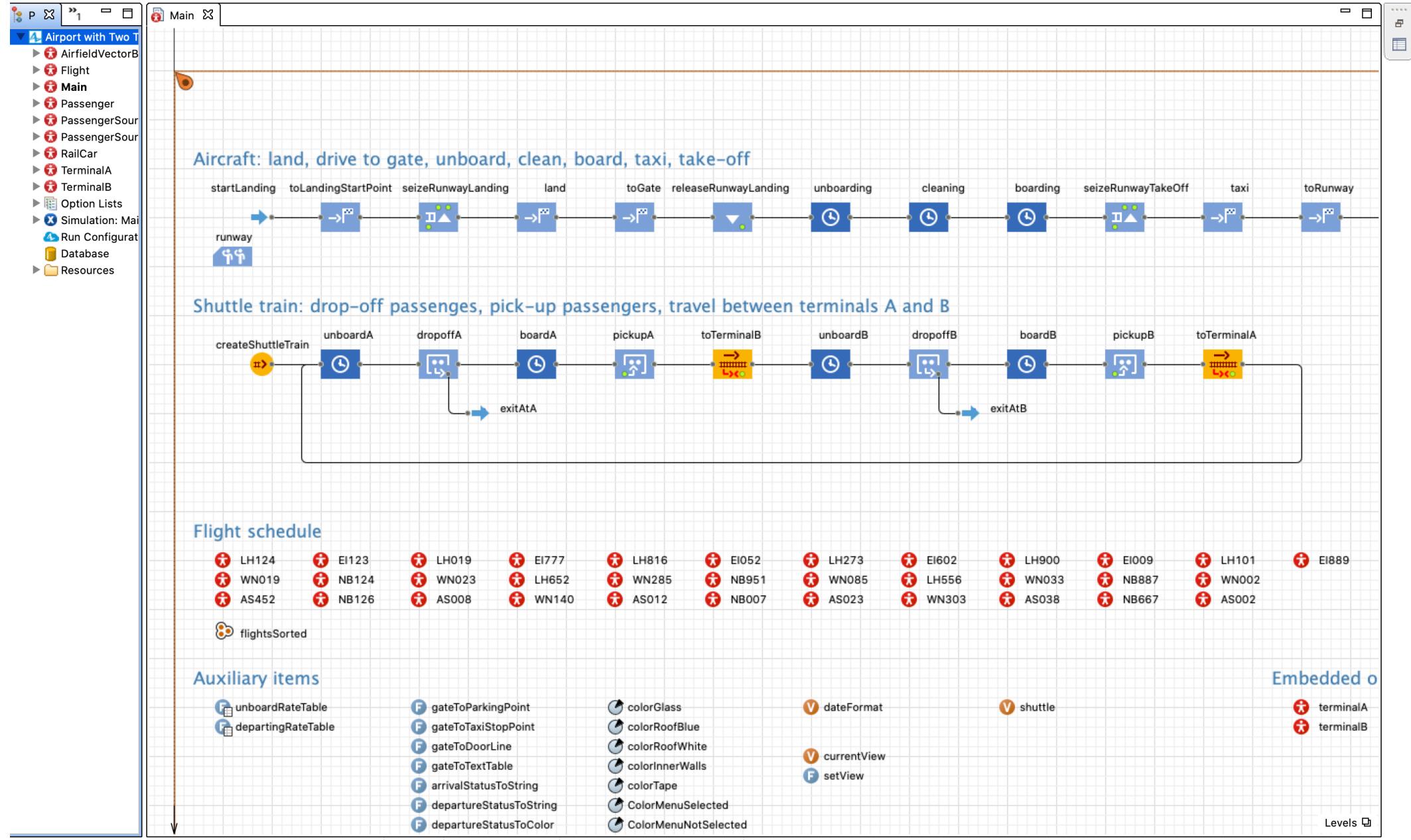
- Un évènement est qqch qui arrive à un instant (de temps simulé) qui peut changer:
 - attributs
 - variables
 - accumulateurs statistiques
- Les évènements sont:
 - arrivées
 - départs
 - fin de simulation (!)

A quoi ça peut ressembler



Copyright 2019 The MathWorks, Inc.

A quoi ca peut ressembler



Modéliser des données d'entrés

(Référence: Law and Kelton, Chapitre 6)

Eléments d'une simulation **continue**

- Un **système dynamique** complètement défini
- Un **horizon de temps** et un pas de simulation
- L'**état initial** du système
- Une **fonction d'entrée** bien définie (sur tout l'horizon)
- Un logiciel de simulation basé sur des algorithmes **d'intégration numérique**

Eléments de simulation **discrète**

- Un système évènements discrets complètement défini
- Un horizon de temps (simulations à temps final, vs simulations au régime permanent)
- L'état initial: généralement un système vide
- Distributions de probabilités pour les entrées
- Un logiciel de simulation basé un algorithme de planification des évènements futurs

Utilisation des distributions de probabilités

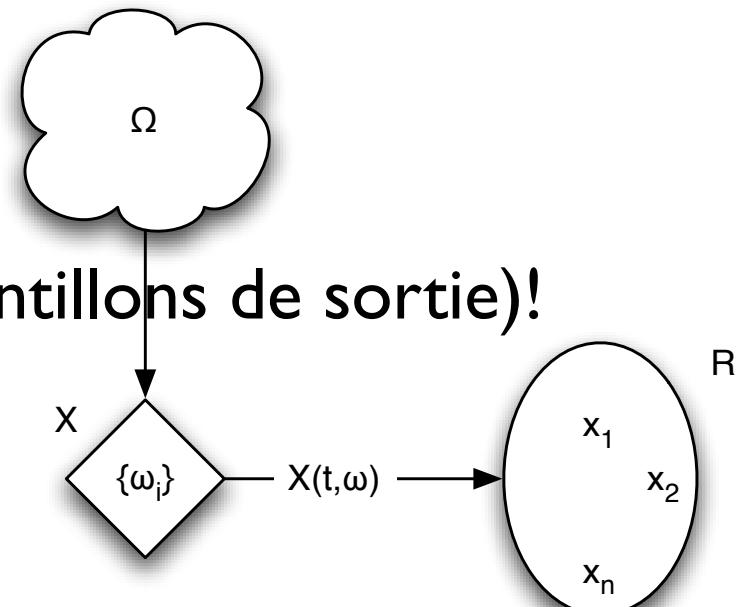
- Les distributions sont utilisées pour générer de façon synthétique:
 - Les temps inter-arrivées
 - Les temps de Service/machining
 - Les quantités et types de requête
 - ex: contenu d'un caddie de client de supermarché
 - Les temps de machine up/down
 - ...
- Et tout autre évènement de durée ou d'occurrence aléatoire

Comment générer des données d'entrée ?

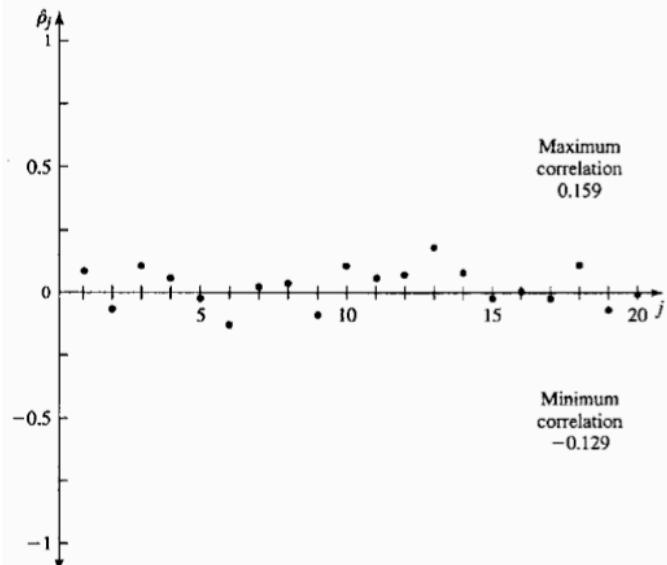
Use	Pros	Cons
<i>Trace-driven</i> Use actual data values to drive simulation	Valid vis à vis real world Direct	Not generalizable
<i>Empirical distribution</i> Use data values to define a “connect-the-dots” distribution (several specific ways)	Fairly valid Simple Fairly direct	May limit range of generated variates (depending on form)
<i>Fitted “standard” distribution</i> Use data to fit a classical distribution (exponential, uniform, Poisson, etc.)	Generalizable—fills in “holes” in data	May not be valid May be difficult

Fitter une distribution

- Soit une ensemble de données d'entrée observées, on veut trouver la distribution statistique qui approche au mieux la source des données
- C'est un pb d'**identification de modèle** entre:
 - des “entrées”, variables uniformément distribuées
 - des “sorties” variables aléatoires
- On suppose qu'il n'y a pas de corrélation (indépendance des échantillons de sortie)!

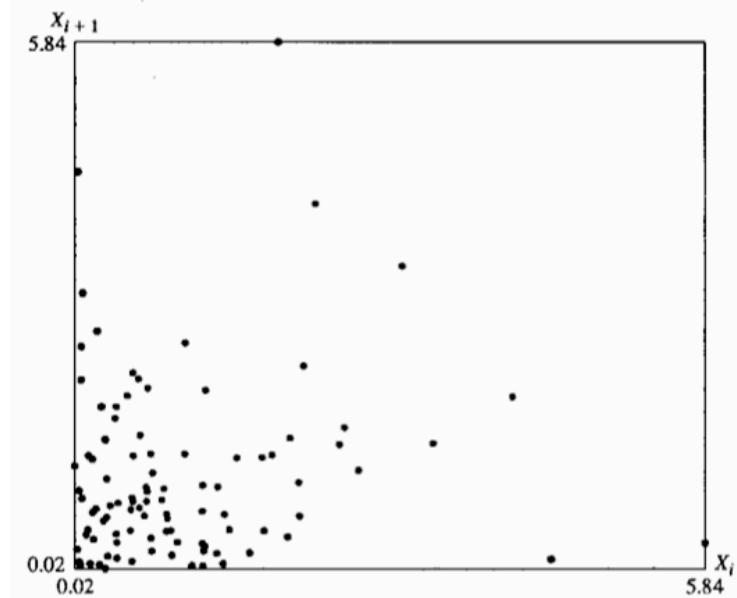


Techniques pour vérifier l'indépendance d'échantillons



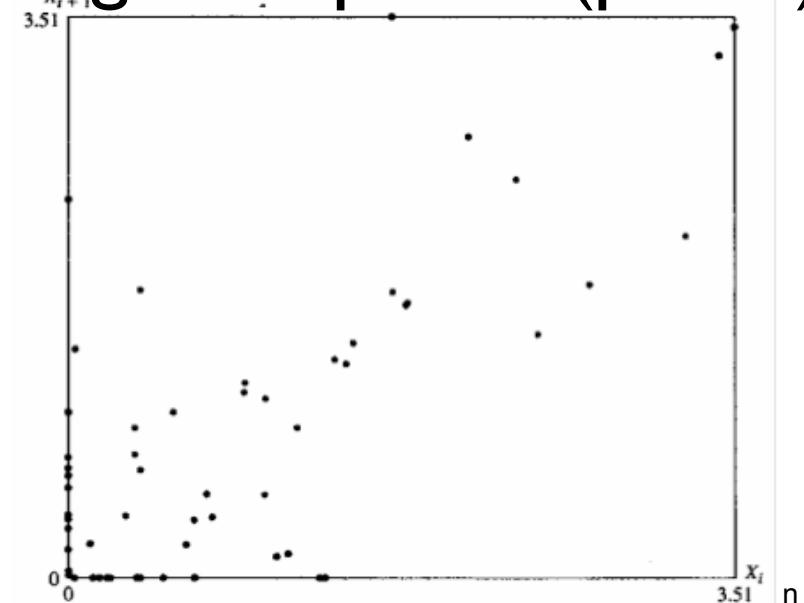
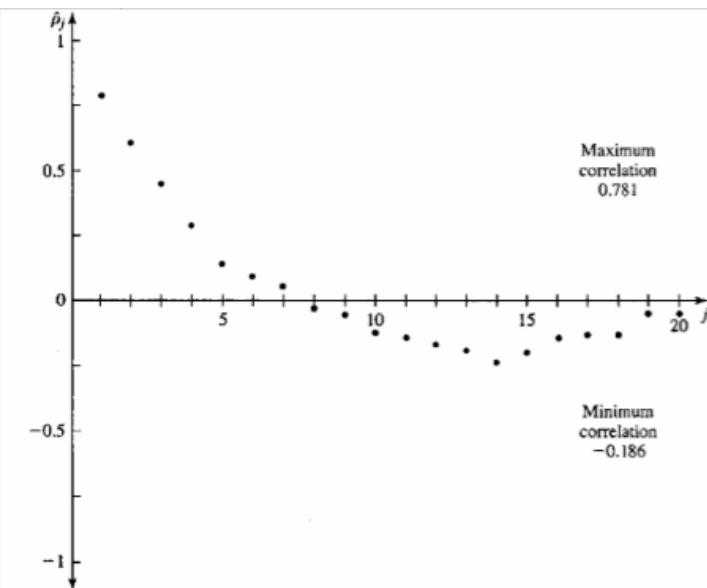
Tracé de la corrélation

exp



nuages de points (paires)

M/M/I



Les étapes pour fitter une distribution

- Step I: trouver la famille de distributions appropriée
- Step II: estimer les paramètres de la distribution
- Step III: évaluer la “qualité de fit”

Step I: choisir une famille de distribution

- Connaissance a priori insuffisante sauf
 - si les arrivées sont: 1 par 1, de taux moyen constant, indépendant: distribution **Exponentielle**
 - somme de nombreuse pièces indépendantes: Distribution **Normale**
 - produit de nombreuses pièces indépendantes: **Lognormal**
- Parfois la distribution exclut certains usages
 - la distribution « normale » suppose que les valeurs négatives sont possibles: elle **ne peut donc pas être utilisée pour des temps de service**

Activité II: estimer les paramètres

- Bcp de méthodes d'estimation des paramètres existent
- Maximum de Vraisemblance — Maximum likelihood estimation (MLE)
 - Observation de l'échantillon X_1, X_2, \dots, X_n
 - ... obtenu de certains vrai paramètres (inconnus) de la distribution
 - Choisissez le(s) valeurs de paramètre(s) qui rendent le plus probable ce que l'on a obtenu et observé
 - Résoudre le problème d'optimisation (souvent un problème un peu désordonné)

Activité III: tester la distribution ajustée

- A la fin on teste la qualité du fit, soit avec des:
 - Tests heuristiques
 - densité/histogrammes
 - comparaisons de fréquences
 - ...
 - Tests statistiques de la qualité de l'ajustement
 - Khi-carré (aka Khi-2)
 - Kolmogorov-Smirnov
 - ...

Choisir une distribution en l'absence de données

- Pas de données? (ça arrive)
- Doit s'appuyer dans une certaine mesure sur des informations subjectives (hypothèses)
- Demander de l’“expertise” de quelqu'un qui connaît bien le système et son opération pour connaître les:
 - min, max \Rightarrow distribution uniforme
 - min, max, modes \Rightarrow distribution triangulaire
 - min, max, mode, moyenne \Rightarrow distribution beta