1 Introduction

Identification : Observation pour déduire les caractéristiques du système et créer un modèle

Modélisation : Décrire le système sous forme d'équation pour créer un modèle

Types de modèles : Déterministes / stochastiques, dynamiques / statiques, temps continu / temps discret, paramètres ponctuels / distribués, change oriented / mu par événements discrets.

1.1 Formulation du problème

- Quel est le problème, pourquoi est-ce un problème
- Quelles sont les variables-clé ? variables ou paramètres ?
- Quel est l'horizon temporel et l'échelle de temps ?
- Quel est le comportement passé / futur ?

2 Algèbre linéaire

2.1 Indépendance linéaire

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \qquad \alpha_i \neq 0$$

Pour déterminer si les vecteurs sont linéairement indépendants on construit la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0 \longrightarrow \text{ linéairement indépendants}$$

$$\text{rang}(A) = N_{\text{colonnes}} \longrightarrow \text{ linéairement indépendants}$$

2.2 Bases

Une base E^n est un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants. Chaque vecteur est une somme de combinaison linéaire des vecteurs de base

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

2.2.1 Changement de base

$$\text{base } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{base } E = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice P est constituée des vecteurs de la nouvelle base

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{base } U \longrightarrow \text{base } E \qquad && x_E = P^{-1} x_U \\ &\text{base } E \longrightarrow \text{base } U \qquad && x_U = P x_E \end{aligned}$$

La matrice A dans la base U est équivalente à la matrice $P^{-1}AP$ dans la base E

2.2.2 Changement de base d'une matrice

$$B = P^{-1}AP$$

2.3 Valeurs propres

les valeurs propres λ sont les solutions de l'équation

$$\det(A - \lambda I) = \vec{0}$$

On cherche les solutions de l'équation

$$\boxed{Ax = \lambda x} \longleftrightarrow \boxed{(A - \lambda I)x = \vec{0}}$$

La multiplicité numérique d'une valeur propre est son exposant dans le polynôme caractéristique.

2.3.1 Vecteurs propres

On trouve les vecteurs propres $\vec{x}$ avec

$$(A - \lambda_i I)\,\vec{x}_i = \vec{0}$$

Sur python on a :

```
val_propres, vect_propres = np.linalg.eig(A)
```

Les vecteurs propres sont linéairement indépendants

2.4 Matrice modale

C'est la matrice formée par les vecteurs propres d'une matrice

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

2.4.1 Diagonalisation de A

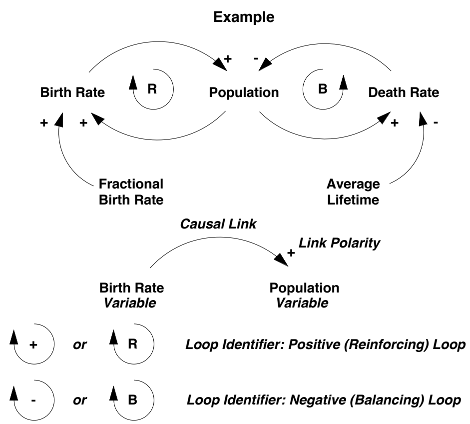
Les vecteurs propres de A constituent une nouvelle base. Λ est "l'opération" de Λ dans cette nouvelle base

$$\Lambda = M^{-1}AM$$

3 Stocks & Flows

- Capturer les hypothèses sur les causes du comportement dynamique d'un système
- Révélez nos "modèles mentaux"
- Implanter les éléments de rétroaction dans nos modèles

3.1 Diagrammes de boucles causales



Symbol	Interpretation	Mathematics	Examples
$X \xrightarrow{+} Y$	All else equal, if X increases (decreases), then Y increases (decreases) above what it would have been. In the case of accumulations, X adds to Y.	$\partial Y/\partial X > 0$ In the case of accumulations, $Y = \int_{t_0}^{t} (X + \dots)ds + Y_{t_0}$	Product Quality $\xrightarrow{+}$ Sales; Effort $\xrightarrow{+}$ Results; Births $\xrightarrow{+}$ Population
$X \xrightarrow{-} Y$	All else equal, if X increases (decreases), then Y decreases (increases) below what it would have been. In the case of accumulations, X subtracts from Y.	$\partial Y/\partial X < 0$ In the case of accumulations, $Y = \int_{t_0}^{t} (-X + \dots)ds + Y_{t_0}$	Product Price $\xrightarrow{-}$ Sales; Frustration $\xrightarrow{-}$ Results; Deaths $\xrightarrow{-}$ Population

Mettre des noms plutôt que des phrases et éviter les négations inutiles

3.1.1 Polarité de boucle

Multiplication de toutes les polarités.

3.1.2 A faire attention

- Si il y a une ambiguïté sur le signe de la flèche c'est qu'il manque une étape
- Des noms plutôt que des phrases (X,Y)
- Les noms de variables doivent avoir un sens en cohérence la sensibilité
- Choisir les labels dont l'évolution est normalement espérée ou mesurée ¿ 0

3.2 Stocks

- CLD ne représentent pas l'accumulation, les Stocks oui
- Stocks = état du système (et nos décisions dépendent de l'état)
- E.G.: l'inventaire d'une entreprise, le # d'employés, le montant sur le compte de paiements

État d'un système

$$\text{stock}(t) = \int_{t_0}^{t} \text{in}(s) - \text{out}(s)ds + \text{stock}(t_0)$$

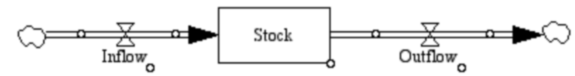
- Caractérisation de l'état d'un système
- Mémoire ou inertie
- Génération de retard

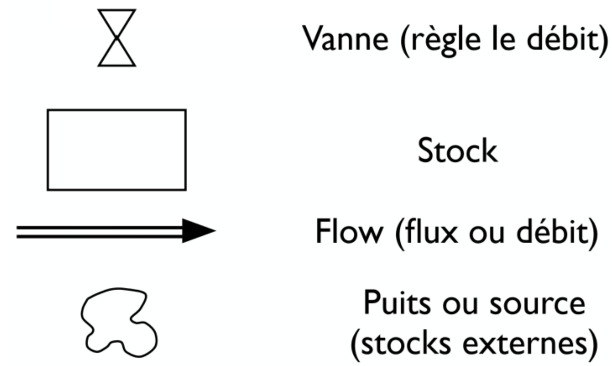
3.3 Flux (Flows)

Les flux changent les stocks

$$\frac{d\text{stock}(t)}{dt} = \text{in}(t) - \text{out}(t)$$

- Les flux changent les stocks
- L'inventaire change avec les livraisons
- # d'employés ch ange avec les recrutements, licenciements et départs à la retraite
- Souvent, on a des problèmes à décider comment distinguer flux et taux (l'inflation?)





4 Équations aux différences

EDO vs Equation aux différences

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) \to y(t+1) = (a+1)y(t)$$

4.1 Polynôme caractéristique

On pose le polynôme en fonction du "décalage" de la valeur

$$y(k+1) - 1.1y(k) = 0 \longrightarrow \lambda - 1.1 = 0$$

De manière plus générale

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + ... + a_0 y(k) = 0$$

Va donner

$$\lambda^{k+n} + a_{n-1}\lambda^{k+n-1} + ... + a_0\lambda^k = 0$$

Et si on divise par λ^k

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0\lambda = 0$$

4.2 Équations aux différences $\longrightarrow$ Équation différentielle

On utilise la formule de la dérivée (pour un h petit)

$$u'(x) = \lim_{h\to} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

4.3 Solutions générales

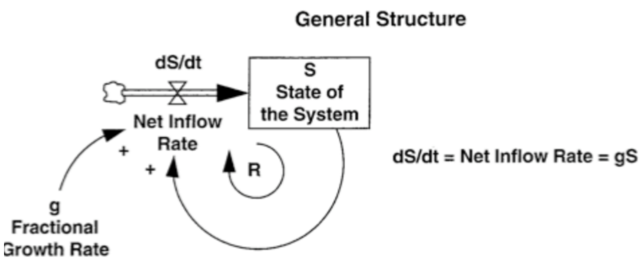
$$y(k+1) = ay(k) \qquad \longrightarrow y(k) = a^k$$

4.3.1 Exemple EDO

$$\frac{dy}{dt} = ay \to y(t) = Ce^{at}$$
$$y(0) = Ce^{a\cdot 0} = Ce^0 = C$$
$$y(t) = y(0)e^{at}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$
$$my'' = -ky$$
$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \to \lambda = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega$$
$$y(t) = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$$

5 Modèles dynamiques

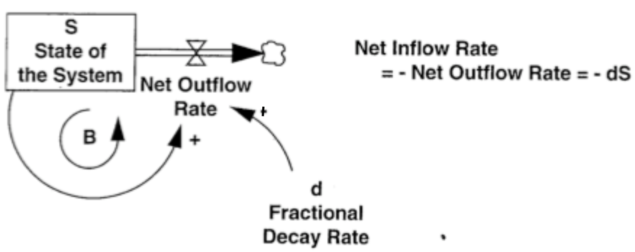
5.1 Rétroaction positive



Le stock accumule du inflow $S(t) = S(0)e^{gt}$

Le temps de doublement du stock est de $2S(0) = S(0)e^{gt_d}$ on a donc $t_d = \frac{ln(2)}{g} = \frac{70}{100g}$

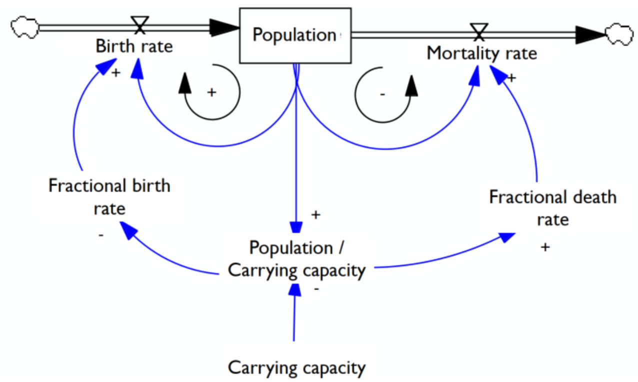
5.2 Rétroaction négative et décroissance exponentielle



Le stock perd du outflow $S(t) = S(0)e^{-dt}$

Le temps de division par 2 du stock est de $t_d = ln(2)\tau = 0.70\tau$

5.3 Système non linéaires croissance en S



L'équation du système est $\frac{dP}{dt} = b(\frac{P}{C})P - d(\frac{P}{C})P$

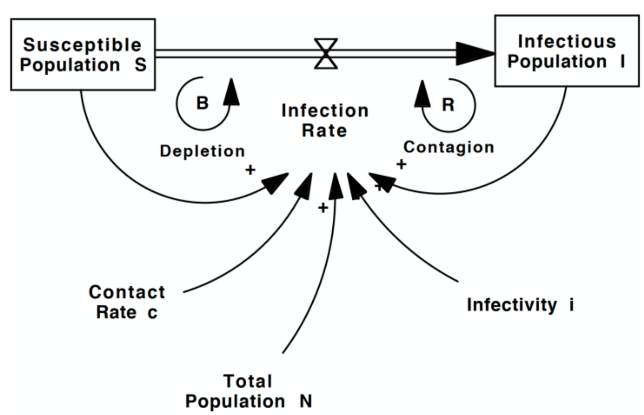
La croissance nette est une fonction de la population P : $\frac{dP}{dt} = g(P,C)P = g(1-\frac{P}{C})P$

Modèle logistique : $g(1-\frac{P}{C})$

Equation logistique : $P(t) = \frac{C}{1+[\frac{C}{P(0)}-1]e^{-gt}}$

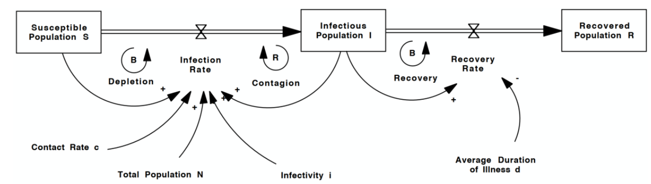
5.4 Modèle SI et SIR

- S : susceptibles
- I : infectés
- R : rétablit



5.4.1 Equation du modèle SI

$N = S + I \rightarrow \frac{dS}{dt} = -(ciS)\frac{I}{N} = -(I_R)$ IR = Infection Rate $\frac{dI}{dt} = ci \cdot I(1-\frac{I}{N})$



5.4.2 Equation du modèle SIR

$$\frac{dS}{dt} = -(ciS)\frac{I}{N}$$
$$R_R = \frac{I}{d}$$
$$\frac{dI}{dt} = (ciS)\frac{I}{N} - \frac{I}{d}$$
$$\frac{dR}{dt} = \frac{I}{d}$$
$$N = S + I + R$$

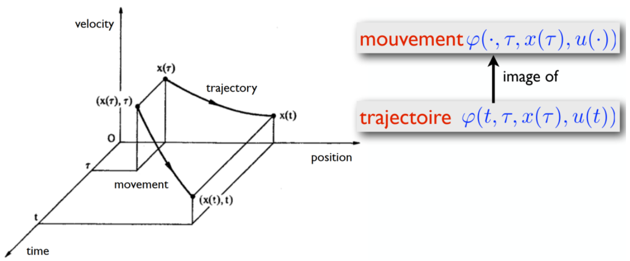
Point de bascule $I_R > R_R \rightarrow ciS(\frac{I}{N}) > \frac{I}{d}$ ou $cid(\frac{S}{N} > 1)$

5.5 Retard

Un retard est un processus dont la sortie correspond à l'entrée translatée dans le temps

6 Systèmes

6.1 Mouvement et trajectoire



6.2 Systèmes invariants

Un système est dit invariant si

- T est un groupe additif
- Pour tout $u \in \Omega$ et pour chaque $s \in T$ la fonction $u^s(\cdot)$ obtenue par translation ($u(t) = u^s(t+s)$) appartient également à Ω
- La fonction de translation à la propriété $\varphi(t,\tau,x,u(\cdot)) = \varphi(t+s,\tau+s,x,u^s(\cdot))$
- La transformation de sortie ne dépend pas explicitement du temps $y(t) = \eta(x(t))$
- Si $T = \mathbb{N}$ nous avons un système à temps discret
- Si $T = \mathbb{R}$ nous avons un système à temps continu

6.3 Systèmes réguliers

- Si les ensembles U, X, et Y sont des espaces vectoriels de dimensions finies, le système est dit de dimensions finies
- Le 'circuit électrique' et les '2 bacs' sont deux exemples de systèmes de dimensions finies
- Si une norme est définie pour les espaces vectoriels, il est possible de mesurer la distance entre deux éléments et d'introduire la notion de régularité

  Un système est regulier si
- U, X, Y, Γ, Ω sont des espaces normés
- φ est continue dans tous ses arguments et $\frac{d\varphi(t,\tau,x,u(\cdot))}{dt}$ est aussi continue en t partout où u() est continue
- η est continue dans tous ses arguments

Le mouvement d'un système régulier de dimension finie est la solution d'un équation différentielle de la forme: $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t)$ qui satisfait la condition initiale $x(\tau) = x$

Donc un système régulier est représenté par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t) \\ y(t) = g(x(t),t) \end{cases} \tag{1}$$

6.4 Systèmes linéaires

Un système est dit linéaire si

- U, X, Y, Γ, Ω sont des espaces normés
- φ est linéaire en $X \times \Omega$ pour tout $t, \tau \in T$:
- η est linéaire en X pour tout t dans T $\eta(t) = C(t)x(t)$

Avec un système linéaire. le mouvement peut être décomposé en la somme des mouvements libre et forcé

$x(t) = x(\tau) + \int_\tau^t \frac{u}{C(\xi)} d\xi = MouvementLibre + MouvementForce$

6.5 Système linéaires et réguliers

- Si un système de dimensions finies est linéaire et régulier, alors son état x satisfait: $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t)$ (1)
- Comme φ, solution de (1), est linéaire en x et u $f(x(t),u(t),t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$
- Alors, un système linéaire est décrit par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \tag{2}$$

7 Équilibre, Stabilité, Oscillations

7.1 Équilibre

En équilibre un état ne change pas. Sa dérivée est donc par conséquent nulle

7.1.1 Temps discret

Si le système est homogène alors $\bar{x} = A\bar{x}$ si $\bar{x}$ est un vecteur propre A avec une valeur propre de A unité, alors tout vecteur propre $\bar{x}$ est point d'équilibre, sinon seulement l'origine est un équilibre

Si le système est non-homogène alors $\bar{x} = A\bar{x} + b$ ou $\bar{x} = (I - A)^{-1}b$ si I n'est pas une valeur propre, alors il y a l'équilibre différent de 0

7.1.2 Temps continu

Si le système est homogène: $A\bar{x} = 0$ Si A est non singulière, 0 est le seul équilibre, sinon il peut y en avoir d'autres

Si le système est non-homogène à entrée constante: $A\bar{x} + b = 0$ ou $\bar{x} = -A^{-1}b$ si A est non singulière il y a une solution unique

- En général, 0 est un point d'équilibre pour les systèmes à temps discret et continus
- I est valeur propre critique pour les systèmes discrets, 0 est valeur propre critique pour les systèmes continus

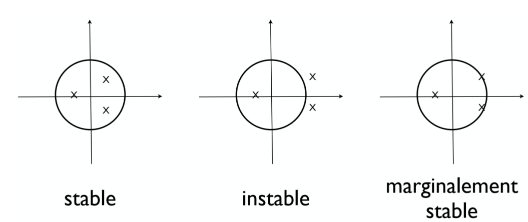
7.2 Stabilité

Un point d'équilibre est stable si, quand il est perturbé, il tend à retourner à sa position initial, ou si au minimum il ne diverge pas.

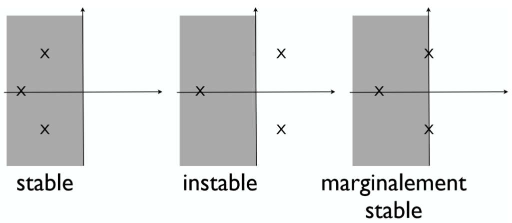
$x(t+1) - \bar{x} = Ax(t) + b - A\bar{x} - b$ $z(t+1) = Az(t)$$z(t) = x(t) - \bar{x}$

On peut déterminer la stabilité du système avec ces pôles en boucles fermé.

7.2.1 Temps discret



7.2.2 Temps continu



7.3 Oscillations

Les valeurs propres nous parlent de la stabilité d'un système

Elles nous parlent également de son comportement

Les valeurs propres peuvent s'écrire $\lambda = \mu + j\omega$ si $\omega \neq 0$ alors il y aura des oscillations

A chaque λ il existe un $e^{\lambda} = e^{\mu}(cos(\omega t) + jsin(\omega t))$

7.4 Pôles en boucle ouverte

Les pôles en boucle ouverte sont les valeurs propres de A

8 Système non-linéaire

Nous ne pouvons pas utilisé les outils d'analyse classique

- temps discret : $x(t+1) = f(x(t), t)$
- temps continu : $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$

Si le système est LTI alors f n'a pas de dépendance en temps

8.1 Équilibre

On les obtient en résolvant

- $\bar{x} = f(\bar{x}, t)$ (cas discret)
- $0 = f(\bar{x}, t)$ (cas continu)

Mais les choses ne sont pas si simples pour les sys. NL

- Résoudre les équations n'est pas trivial
- Les systèmes peuvent avoir 1, aucun, de nombreux points d'équilibre.

8.2 Lyapunov indirect

La méthode consiste à étudier le système dans le voisinage d'un point équilibre

Si la zone est suffisamment petite alors le système NL peut être approché par un développement en série de Taylor au 1er ordre (linéaire)

$f(\bar{x} + \delta x(t)) = f(\bar{x}) + [\frac{\partial f}{\partial x}]_{\bar{x}} \delta x(t)$

8.3 Le Jacobien

$$F_J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Linéarisation avec le Jacobien

8.3.1 Temps discret

$\delta \bar{x}(t) = F_J \delta x(t)$

8.3.2 Temps continu

$\delta \bar{x}(t) = F_J \delta x(t)$

8.4 Lyapunov direct

S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ dans une boule $S(\bar{x}, R_0)$ de centre $\bar{x}$, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est stable. Si, de plus, $\dot{V}(x)$ est strictement négatif en tout point (sauf $\bar{x}$), alors la stabilité est asymptotique.

Pas dans l'examen trop complexe sur papier.

8.5 Linéarisation

8.5.1 Une variable

$$\boxed{L(x) = f(x_0) + \frac{d}{dx} f(x_0)(x - x_0)}$$

8.5.2 Deux variables

Les deux notations sont identiques

$$L(x,y) = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} \cdot (y - y_0)$$

$$L(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

9 Concept de contrôle-commande

9.1 Exemple du train

- Système: le train
- Variable contrôlée: la vitesse (suivi de trajectoire)
- Trajectoire désirée: fixée en temps réel par le conducteur
- Perturbations: variations de charges (passagers) et de profil (déclivité de la route, ...)
- Variable manipulée: couple aux roues

9.2 La loi de commande

- La loi de commande peut être
  - continue
  - discrète (on/off)
  - basée sur les évènements
- La loi de commande peut être implantée
  - manuellement
  - automatique
    - analogique
    - digitale

9.3 Système de contrôle

- Le contrôleur adapte la variable de commande (manipulée), pour atteindre la valeur désirée pour la variable contrôlée
- Il y a deux classes principales de stratégie de contrôle
  feedforward (anticipation) ou open-loop (boucle ouverte)
  feedback (rétroaction) ou closed-loop (boucle fermée)
- Parfois les deux sont implantées simultanément (FB/FF)
  FF traite le rejet de perturbation et/ou l'anticipation du chat de consigne
  FB cible le suivi de trajectoire
  FB/FF très fréquent en chemical engineering

9.4 Commande

- Boucle Ouverte
  La loi de commande est déterminée indépendamment de la valeur de la variable contrôlée
- Boucle Fermée

La commande dépend de la valeur de la grandeur contrôlée

10 Contrôlabilité

Si l'ensemble des états que l'on peut atteindre en partant de zéro est l'espace d'états entier, alors le système est dit complètement contrôlable. (On peut aller partout)

10.1 Définition

Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est complètement contrôlable si pour $x(0) = 0$ et pour tout état x^*, il existe un temps fini t^* et une entrée continue par morceaux $u(t)$ dans $[0, t^*]$ telle que $x(t^*) = x^*$

10.2 Théorème

Un système à temps continu (discret) est complètement contrôlable si, est seulement si, la matrice de contrôlabilité: $M = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$ est de rang n (rang plein)

10.3 Forme canonique contrôlabilité

Une équation différentielle d'ordre n peut être remappée en un système de n équations du premier ordre
$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_n y = u$
On pose y=x1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ &\vdots\\ \dot{x}_{n-1} &= x_n\\ \dot{x}_n &= -a_1 x_n - ... - a_n x_1 + u\end{aligned}$$

On a donc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Le système (A,b,c) a des propriétés intéressantes, La dernière ligne est composée des coefficients du polynôme caractéristique
$\Delta_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$
Tout système complètement contrôlable est équivalent à un système sous forme canonique de contrôlabilité

10.4 Transformation

Il est possible de mettre tout système complètement contrôlable sous sa forme canonique par une simple transformation $x = Mz$ avec $M = [b|Ab|...|A^{n-1}b]$
On obtient $\bar{A} = M^{-1}AM$ qui est la forme canonique compagnon de contrôlabilité

10.5 Rétroaction

10.5.1 Contrôle en boucle ouverte

- la fonction d'entrée est déterminée par un process externe
- exemple: un feu de circulation à cycle fixe

10.5.2 Contrôle en boucle fermée

- la commande est déterminée par le comportement du système
- exemple: un thermostat
- La boucle fermée est plus facile à réaliser
- La boucle fermée requiert du temps de calcul

10.5.3 Théorème

Soit (A, B) un système complètement contrôlable. Alors, pour tout choix d'un polynôme $p(\lambda)$ d'ordre n $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$, il existe une matrice réelle K telle que le polynôme caractéristique de est $A + BK$ est $p(\lambda)$

11 Observabilité

11.1 Définition

Le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $y = Cx(t)$ est complètement observable s'il existe un temps fini $t^* > 0$ tel que la connaissance de $y(t)$ sur $[0t^*]$est suffisante pour déterminer la valeur de l'état initial $x(0)$

11.2 Théorème

Un système à temps continu (discret) est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité: $S^T = [C, CA, CA^2, ..., CA^{n-1}]^T = [C^T, A^TC^T, (A^2)^TC^T, ..., (A^{n-1})^TC^T]$

est de rang n (rang plein)

11.3 Observateur

Un observateur est un système dynamique qui retourne une estimation de la valeur de l'état quand on le 'nourrit' avec les sorties mesurées.

11.3.1 Observateur trivial (copie)

Pour un système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

L'observateur est $\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$

Mais avec cette observateur l'erreur $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$ donc $\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t)$ l'erreur disparait que lorsque le système est stable.

11.3.2 Observateur identité

Pour un système

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) = Cx(t)\end{cases} \tag{3}$$

avec u et y connu

L'observateur est $\dot{z}(t) = Az(t) + E[y(t) - Cz(t)] + Bu(t)$ ou E est à choix

La dynamique de l'erreur est $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{z}(t) - \dot{x}(t) = [A - EC](z(t) - x(t)) = [A - EC]\varepsilon(t)$

- Si $z(0) = x(0)$ alors $z(t) = x(t)$ pour tout $t > 0$
- Si $z(0) \neq x(0)$ le vecteur d'erreur est gouverné par $[A - EC]$
- On peut placer les valeurs propres de cette matrice, avec le degré de liberté que constitue E

$A - EC$ donne la dynamique de l'observateur (qu'on va utiliser pour faire un placement de pôle de l'observateur). Attention ! La fonction place ou acker va déterminer K dans $A - BK$. On doit donc faire `acker(A.T, C.T).T` (voir 6)

11.3.3 Observateur d'ordre réduit

Un observateur d'ordre réduit peut être construit, pour que l'effort soit sur les variables "inconnues"

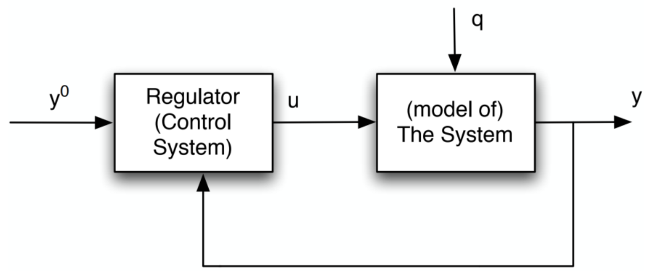
Pour un système

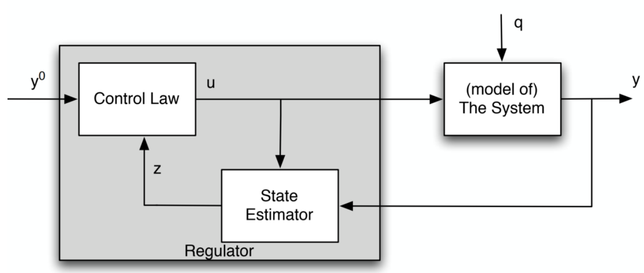
$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) = Cx(t)\end{cases} \tag{4}$$

avec (A, C) complètement observable et C(pxn) de rang p

Voir les pages 14-16 du polycopier 2_11 Observability

11.4 Contrôleur stabilisant





11.4.1 Théorème

Pour un système

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) = Cx(t)\end{cases} \tag{5}$$

avec l'observateur identité $\dot{z}(t) = Az(t) + E[y(t) - Cz(t)] + Bu(t)$ et la loi de commande $u(t) = Kz(t)$

Le polynôme caractéristique de ce composite est égal au produit des polynômes caractéristiques de $A + BK$ et de $A - EC$:

$\Delta_{A+BK}(\lambda) \cdot \Delta_{A-EC}(\lambda)$

- Les matrices K et E peuvent être fixées indépendamment
- Ce théorème s'applique aux systèmes linéaires

12 Kalman

C'est un algorithme de **data fusion** utilisé pour

- Filtre des données bruitées
- Estimer l'état d'un système

Le système est donné par

$$\boxed{x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + w_t}$$

Avec w_t le bruit de process. Si on souhaite mesurer le système il existe également un bruit de mesure v_t. Les deux bruits sont des bruits blancs gaussiens.

$$z_t = Hx_t + v_t$$

12.1 Propriétés

Si

- Le système est "bien modélisé"
- Le système est linéaire et mono dimensionnel
- Les bruits de mesure sont WGN

Alors le filtre de Kalman a été prouvé être l'estimateur optimal

12.2 Fonctionnement

1. Prédiction
2. Correction (amélioration de l'estimation)

12.2.1 Prédiction

$$\hat{x}_{t|t-1} = A\hat{x}_{t-1|t-1} + Bu_t$$
$$P_{t|t-1} = AP_{t-1|t-1}A^T + Q_t$$

Mise à jour de la matrice de covariance P

$$P_{t|t-1} = AP_{t-1|t-1}A^T + Q_t$$

12.2.2 Correction

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - H\hat{x}_{t|t-1})$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t H_t P_{t|t-1}$$

Avec K_t la matrice de gain de Kalman

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H - t^T + R_t)^{-1}$$

12.2.3 Fusions de deux densités de probabilité

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$y_{1+2} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{(r-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(r-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}$$

$$\boxed{\mu_{12} = \mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(\mu_2 - \mu_1)}$$

$$\boxed{\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

Il faut faire attention à tout ramener au même domaine avant de rassembler les mesures.

12.2.4 Matrices H et K

$$H = \frac{1}{c}$$

$$K = \frac{H\sigma_1^2}{H^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

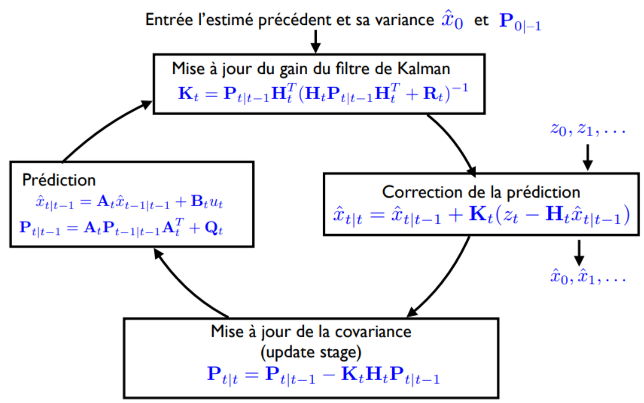
$$\mu_{12} = \mu_1 + K(\mu_2 - H\mu_1)$$

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 - KH\sigma_1^2$$

12.2.5 Équations de récurrence

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(z_t - H_t\hat{x}_{t|t-1})$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t H_t P_{t|t-1}$$



12.2.6 Matrice de covariance

$$P_t = \begin{bmatrix} \text{Var}(x_t^1) & \text{Covar}(x_t^1 x_t^2) & \cdots & \text{Covar}(x_t^1 x_t^n) \\ \text{Covar}(x_t^2 x_t^1) & \text{Var}(x_t^2 x_t^2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Covar}(x_t^n x_t^1) & \text{Covar}(x_t^n x_t^2) & \cdots & \text{Var}(x_t^n) \end{bmatrix}$$

12.3 Linéarisation

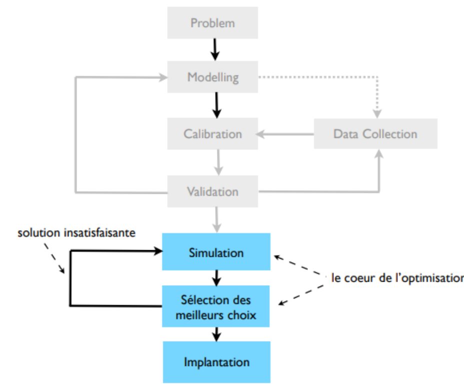
Si le système est non-linéaire, tout s'écroule. Il convient alors de linéariser le système.

$$x_{k+1} \approx f(\bar{x}_k, u_k) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k)\Delta x_k + w_k$$

$$y_k \approx g(\bar{x}_k) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_k, u_k)\Delta x_k + v_k$$

Voir page 32

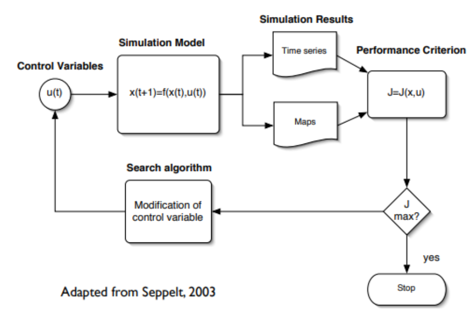
13 Optimisation



13.1 Classification

- Systèmes à l'équilibre (statiques) : équations algébrique
- Systèmes dynamiques : équations différentielles
  - Recherche de "la meilleure trajectoire"
  - Commande optimale
  - Programmation dynamique

13.2 Processus de recherche



14 Commande optimale

Système dynamique régulier :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Condition initiale fixe

$$x(0) = x_0$$

Un ensemble de commandes optimales possibles

$$u(t) \in U$$

Et une fonction de coût

$$J = \psi(x(T)) + \int_0^T l(x(t), u(t))dt$$

Le but est de trouver un $u(t)$ pour optimiser la fonction de coût. Pour cela on exploite la structure du problème

14.1 Approche variationnelle

On utilise une fonction de coût indépendante des changement de trajectoire

$$\bar{J} = J - \int_0^T \lambda(t)^T \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt$$

Fonction hamiltonienne

$$H(\lambda, x, u) = \lambda^T f(x, u) + l(x, u)$$

14.2 Principe d'optimalité de Pontryagin

Si $u(t)$ est maximal alors pour tout t

$$H(\lambda, x, v) \leq H(\lambda, x, u)$$

Il existe une trajectoire $\lambda(t)$ tels qu'ensemble $u(t)$, $x(t)$ et $\lambda(t)$ vérifient

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$x(0) = x_0$$

$$-\dot{\lambda}^T = \lambda^T \nabla_x f(x(t), u(t)) + \nabla_x l(x(t), u(t))$$

Condition de maximalité :

$$H(\lambda(t), x(t), v(t)) \leq H(\lambda(t), x(t), u(t))$$

14.3 Systèmes linéaires à coût quadratique

Système linéaire :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

On peut mettre la commande sous forme de feedback linéaire. La fonction de coût est quadratique

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left(x(t)^T Q(t)x(t) + u(t)^T R(t)u(t)\right) dt$$

Q et R sont symétriques. Voir la procédure à la slide 13. La solution est :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)R(t)^{-1}B(t)^T\lambda(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A(t)^T\lambda(t) + Q(t)x(t) \qquad \lambda(T) = 0$$

14.4 Équation de Riccati

x et λ dépendent linéairement de x_0. λ dépend linéairement de x. On peut chercher une solution de la forme

$$\lambda(t) = -P(t)x(t)$$

14.4.1 Solution en boucle fermée

$$u(t) = R(t)^{-1}B(t)^T P(t)x(t)$$

$$K(t) = R(t)^{-1}B(t)^T P(t)$$

Dans un cas LTI on a

$$u(t) = R^{-1}B^T Px(t) = Kx(t)$$

La dynamique du système est contrôlée par :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$$

15 Programmation dynamique

Séparation d'un problème en étapes. Par exemple :

Trouver $u(t)$ pour le système dynamique
$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ qui maximise la fonction de coût
$J(u(t))$ sur $t_0 ... t_f$ et respecte les contraintes

15.1 Principe d'optimalité

A partir de tout point d'une trajectoire optimale, la trajectoire restante est optimale pour le problème d'optimisation initialisé en ce point

15.1.1 Optimal return function (ORF)

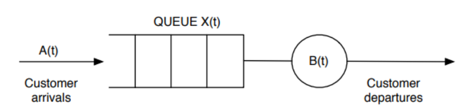
$V(x, t)$ est la fonction de retour optimale. Dans un système à temps discret, on travaille à rebours pour trouver $V(x, k)$

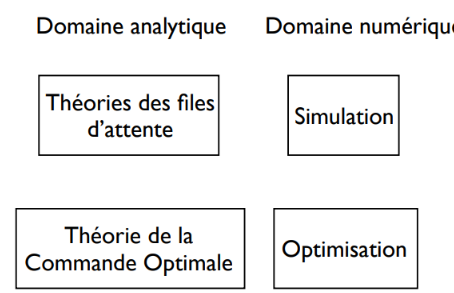
$$V(x, k) = \max_{u \in U} \left[l(xu) + V(f(x, u), k + 1)\right]$$

Dans le cas d'une allocation de ressources, on a

$$X(x(N-1), N-1) = \sqrt{x(N-1)}$$

16 Théorie des files d'attente





Temps inter-arrivée	Y_k
Taux moyen d'arrivée (fréquence)	λ
Temps moyen inter-arrivée	$E[Y] = 1/\lambda$
Temps de service	Z_k
Fréquence moyenne de service	μ
Moyenne des temps de service	$E[Z] = 1/\mu$
Capacité de stockage (parfois ∞)	K
Nombre de serveurs	m
Temps d'arrivée	A_k
Temps de départ	D_k
Temps d'attente	W_k
Temps de système	S_k
Longueur de file	$X(t)$
Charge	$U(t)$
Temps moyen d'attente (régime établi)	$E[W]$
Temps de service moyen (régime établi)	$E[Z]$
Nombre moyen de clients (régime établi)	$E[X]$
Charge de travail moyenne (rég. établi)	$E[U]$

Notation $A/B/m/K$

16.1 Relations

$$S_k = D_k - A_k = W_k + Z_k$$
$$D_k = A_k + W_k + Z_k$$

16.2 Temps moyen d'attente et de service

si $k \to \infty$ il peut y avoir une distribution stationnaire

16.3 Optimisation

On veut :

- Minimiser le temps d'attente
- Maximiser l'utilisation du serveur

Donc minimiser $E[W]$, $E[Z]$ et $E[X]$. On veut maximiser l'utilisation et le débit

16.4 Intensité du trafic

$$\text{intensité du trafic} = \frac{\text{fréquence d'arrivée}}{\text{fréquence de sortie}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = (1 - \pi_0)$$

16.5 Utilisation et throughput

π_0 probabilité que la file soit vide (fraction du temps pendant laquelle le serveur est inutilisé)

$$\text{throughput} = \text{taux de départ des clients} = \mu(1 - \pi_0)$$

En régime permanent :

$$\lambda = \mu(1 - \pi_0)$$

16.6 Équation de Lindley

$$W_k = \max\{0, W_{k-1} + Z_{k-1} - Y_k\}$$
$$D_k = \max\{A_k, D_{k-1}\} + Z_k$$

16.7 Loi de Little

Nombre d'arrivées de clients jusqu'au temps t	$n_a(t)$
Nombre de départs de clients jusqu'au temps t	$n_d(t)$
Nombre de clients dans le système au temps t	$X(t)$

$$X(t) = n_a(t) - n_d(t)$$

16.7.1 Dérivation

Temps moyen dans le système / client

$$\bar{s}(t) = \frac{u(t)}{n_a(t)}$$

Nombre moyen de clients dans le système

$$\bar{x}(t) = \frac{u(t)}{t}$$

Fréquence moyenne d'arrivée

$$\lambda(t) = \frac{n_a(t)}{t}$$

$$\bar{x}(t) = \lambda(t)\bar{s}(t)$$

Taux moyen d'arrivée en régime établi :

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \lambda$$

Temps moyen du système en régime établi :

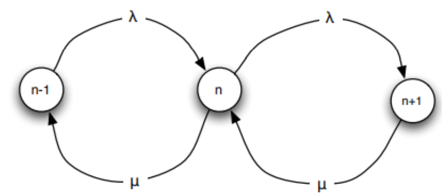
$$\lim_{t\to\infty} \bar{s}(t) = s$$

$$\bar{x} = E[X] \qquad \bar{s} = E[S]$$

16.8 Systèmes à file d'attente markoviens simples

En régime établi :

$$\lambda = \mu(1 - \pi_0) \qquad \rho(1 - \pi_0)$$



Probabilité d'aller de l'état $n-1$ à n

$$\lambda\pi_{n-1}$$

Probabilité d'aller de l'état n à $n-1$

$$\mu\pi_n$$

Probabilité d'avoir n clients dans le système

$$\pi_n = \rho^n \pi_0 = (1 - \rho)\rho^n$$

Équation de récurrence

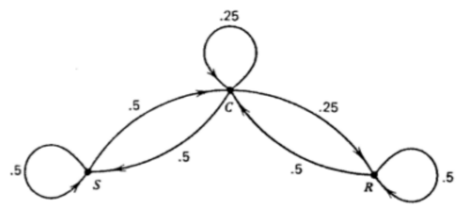
$$\pi_n = \rho\pi_{n-1}$$

17 Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov n'ont **pas de mémoire**. L'état actuel encode la totalité de la chaîne

Chaîne de Markov homogène : Chaîne pour laquelle la probabilité de transition de l'état i à j est toujours la même, indépendamment du points à laquelle est est arrivée.

17.1 Représentation graphique



17.2 Représentation matricielle

	Sunny	Cloudy	Rain
Sunny	0.5	0.5	0
Cloudy	0.5	0.25	0.25
Rain	0	0.5	0.5

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

La somme de chaque colonne / ligne est 1

17.3 Vecteur de probabilité d'état

$\pi(0)$ est le vecteur de probabilité à l'itération 0 (1 à la ligne qui correspond à l'état initial). On calcule la probabilité de chaque état de manière itérative

$$\pi(1) = P^T \pi(0)$$

$$\pi(k+1) = P^T \pi(k)$$

$$\pi(k) = P^{T^k} \pi(0)$$

17.4 État récurrent

Si une chaine revient sur un état précédent, c'est un état récurrent

17.5 État stable

l'état de stabilité π est tel que

$$\pi = P^T \pi$$

$$\lim_{m \to \infty} P^m = \bar{P}$$

18 Simulation à événements discrets

Temps moyen d'attente dans la file	$E[W_k]$
Temps d'attente maximum dans la file	W_k
Temps moyen dans le système	$E[S_k]$
Temps maximum passé dans le système	S_k
Nombre moyen de clients dans la file	$E[X(t)]$
Nombre maximum de clients dans la file	$X(t)$

18.1 Entités

Les entités sont les objets dynamiques de la simulation (clients, pièces, tâches, etc...)

18.2 Attributs

Les attributs sont les caractéristiques communes des entités (par exemple la quantité que chaque client veut acheter)

18.3 Ressources

Les ressources représentes les "ingrédients" qu'utilisent les entités pour réaliser leurs tâches

18.4 File

Place d'attente lorsqu'une entité ne peut pas saisir une ressource

18.5 Accumulateurs statistiques

Par exemple : nombre total d'entités, temps total d'attente, etc...

18.6 Événements

Quelque chose (arrivée, départ, etc...) qui arrive à un instant t qui peut changer :

- des attributs
- des variables
- des accumulateurs statistiques

19 Modélisation des données d'entrée

Déterministes	Fixer une entrée → sortie en un point
Stochastiques	Sortie de système aléatoire
Dynamiques	varie en fonction du temps
Statiques	fixa dans le temps (on peut toujours trouver un modèles statiques à partir d'un modèle dynamique)
A temps continu	Signaux analogique (avec des EDO)
A temps discret	Signaux discret échantillonner (Eq aux différences)
A paramètres ponctuels	EDO
Distribués	EDP
Change oriented	style continu
Mu par des évènements discrets	une voiture qui arrive dans une file

19.1 Etapes principales

- Formulation du problème
- Design d'une structure de modèle
- Déploiement de l'outil de simulation
- Test et validation
- Utilisation du modèle
  descriptive: simulation, prévision
  prescriptive: décision et évaluation

20 Automatiques

20.1 Pôles en boucle ouverte

On calcule les valeurs propres λ de A

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

20.2 Observateur identité

Sa dynamique d'erreur est de la forme

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{z}(t) - \dot{x}(t) = (A - EC)(z(t) - x(t)) = (A - EC)\varepsilon(t)$$

Pour déterminer E, on utilise la méthode de Ackermann (voir 20.3.1) en remplaçant

$$\begin{cases} A & \longrightarrow A^T \\ B & \longrightarrow C^T \\ K & \longrightarrow E \end{cases}$$

20.3 Placement de pôles

Soit un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Si l'on souhaite le régler avec un régulateur d'état en utilisant un placement de pôle, on utilise la méthode de Ackermann

20.3.1 Méthode de Ackermann (exemple avec $n = 3$)

On veut avoir les pôles p_3, p_2, p_1. C'est à dire qu'on a un polynôme caractéristique de la forme

$$(s - p_3)(s - p_2)(s - p_1)$$

sur un système

$$A - BK$$

On cherche à déterminer K

$$(s - p_3)(s^2 - p_2 s - p_1 s + p_1 p_2)$$

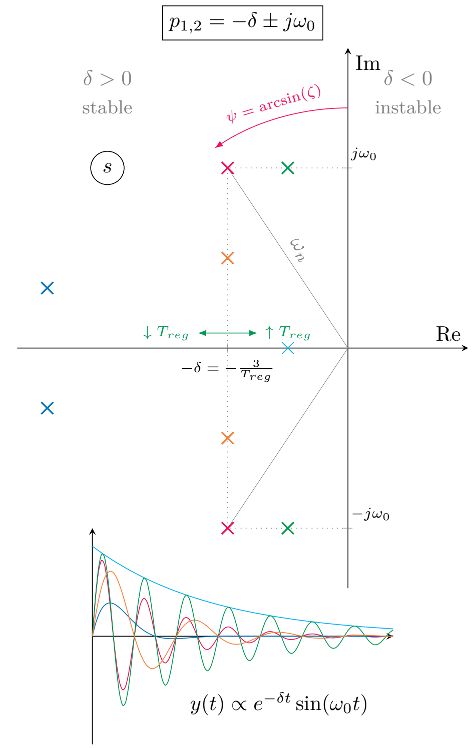
$$a_3 s^3 \underbrace{-(p_1 + p_2 + p_3)}_{a2} s^2 + \underbrace{(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)}_{a1} s \underbrace{-p_1 p_2 p_3}_{a0}$$

On calcule ensuite la matrice de contrôlabilité

$$M = \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B \end{pmatrix}$$

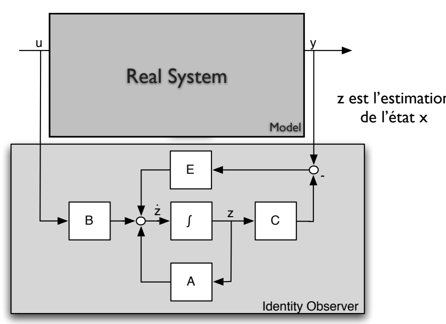
$$K = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} \left(\underset{\overset{\|}{1}}{a_3} A^3 + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 I \right)$$

20.4 Pôles



20.5 Retour d'état

Boucle fermée : $A_{bf} = A - BK$



21 Outils

21.1 Matrices

Multiplication matricielle

$$\underset{a\times b}{A} \cdot \underset{b\times c}{B} = \underset{a\times c}{C}$$

21.1.1 Transposition

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$

$$\boxed{A - BK = \left(A^T - K^T B^T\right)^T} \tag{6}$$

22 A faire attention

- Conversion d'unités ($\mathrm{L\,h^{-1}} \longrightarrow \mathrm{m^3\,s^{-1}}$)