Serie5_SDZ

January 13, 2022

1 Exercice 1

1. Résoudre $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ avec les conditions aux bords:

$$u_x = -a \text{ sur } x = 0 \qquad u_x = 0 \text{ sur } x = a$$
$$u_y = b \text{ sur } y = 0 \qquad u_y = 0 \text{ sur } y = b$$

Aide: Un raccourci consiste à supposer que la solution est un polynôme quadratique en x et y.

La solution est de la forme $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$ (Si on a des termes en trop ils vont s'annuler). On va appliquer les conditions aux bords successivement

$$u_x(0, y) = Cy + D = -a \longrightarrow \boxed{C = 0} \quad \boxed{D = -a}$$
$$u_x(a, y) = 2Aa + D = 2Aa - a = 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$
$$u_y(x, 0) = E = b \longrightarrow \boxed{E = b}$$
$$u_y(x, b) = 2Bb + E = 2Bb + b = 0 \longrightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

On obtient finalement

$$\boxed{u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - a + by + F \qquad F \in \mathbb{R}}$$

2 Exercice 2

2. Résoudre $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ avec les conditions aux bords:

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = 0$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = 1$$

On commence par poser le problème

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < a \quad 0 < y < b$$
$$u(0,y) = 0 \qquad u(a,y) = 0 \qquad u(x,0) = 0 \qquad u(x,b) = 1$$

Comme on a

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

Et donc

$$X'' + \lambda X = 0 \longrightarrow \text{cos et sin}$$
$$Y'' - \lambda Y = 0 \longrightarrow \text{cosh et sinh}$$

(A vérifier si on interchanger X et Y...)

$$X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$$
$$Y(y) = C\cos(\beta y) + D\sin(\beta y)$$
$$X(0) = 0 \longrightarrow \boxed{A = 0}$$
$$X(a) = 0 \longrightarrow \boxed{\beta = \frac{n\pi}{a}}$$
$$u(x,0) = 0 \longrightarrow Y(0) = 0 \longrightarrow \boxed{C = 0}$$

Pour le moment on a

$$u(x,y) = E\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Lorsqu'on pose la dernière condition on obtient

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} E\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

C'est une série de Fourier en sinus

3 Exercice 3

3. Montrer que les fonctions propres $\{1, \cos(n\pi x/\ell), \sin(n\pi x/\ell)\}$ sont orthogonales entre elles sur l'intervalle $[-\ell, \ell]$, c'est-à-dire que

   (a)
   $$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = 0 \quad \text{pour tout } m, n$$

   (b)
   $$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = 0 \quad \text{pour } m \neq n$$

   (c)
   $$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = 0 \quad \text{pour } m \neq n$$

   (d)
   $$\int_{-\ell}^{\ell} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = 0 = \int_{-\ell}^{\ell} 1 \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx$$

   (e) Montrer enfin que
   $$\int_{-\ell}^{\ell} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \ell = \int_{-\ell}^{\ell} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx \qquad \text{et} \qquad \int_{-\ell}^{\ell} 1^2 dx = 2\ell$$

3.1 (a)

On utilise la formule trigo

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx =$$

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{m\pi x}{l} + \frac{n\pi x}{l}\right) - \sin\left(\frac{m\pi x}{l} - \frac{n\pi x}{l}\right)\right) dx$$

On remplace avec

$$a = m + n \in \mathbb{N} \qquad b = m - n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \left(\underbrace{\sin\left(\frac{a\pi x}{l}\right)}_{0} - \underbrace{\sin\left(\frac{b\pi x}{l}\right)}_{0}\right) dx = 0$$

3.2 (b)

On utilise la même méthode que pour (a) mais avec les cosinus

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{m\pi x}{l}+\frac{n\pi x}{l}\right)}_{1} - \underbrace{\cos\left(\frac{m\pi x}{l}-\frac{n\pi x}{l}\right)}_{1}\right)dx$$

3.3 (c)

$$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \int_{-l}^{l} -\cos\left(\frac{m\pi x}{l}+\frac{n\pi x}{l}\right)+\cos\left(\frac{m\pi x}{l}-\frac{n\pi x}{l}\right)dx = 0$$

3.4 (d)

On fait un changement de variable

$$y = \frac{\pi}{l}x \qquad x = \frac{l}{\pi}y \qquad dy = \frac{\pi}{l}dx$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{\pi}{l}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ny)\,dx = 0$$

Pareil pour le sinus

3.5 (e)

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \int_{-l}^{l}\frac{1+\cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)}{2}dx = \int_{-l}^{l}\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}l+\frac{1}{2}l = l$$

4 Exercice 4

4. Montrer que les fonctions propres $\{\sin(my)\sin(nz)\}$ sont orthogonales sur le carré $\{0 < y < \pi, 0 < z < \pi\}$.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(my)\sin(mz)dydz = \int_0^{\pi}\sin(mz)\underbrace{\int_0^{\pi}\sin(my)dy}_{0}\,dz = 0$$