

# 1 Généralités

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

## 1.1 Dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

## 1.2 EDO du premier ordre

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \rightarrow y = Ce^{kt}}$$

## 1.3 EDP du premier ordre

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$$

$$= F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

### 1.3.1 Résolution

$$\boxed{a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}}$$

$au_x + bu_y$  est la dérivée directionnelle dans le sens du vecteur  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Tout ce qui suit à vérifier (ok pour les coefficients constants mais peut-être quelques modifications pour les coefficients variables)

**Coefficients constants** Droite caractéristique :  $bx - ay = c$  (solution constante sur ces droites)

$$u(x, y) = f(bt - ax)$$

Puis appliquer les conditions données.

**Coefficients variables** Trouver les **courbes caractéristiques** (solution constante sur les courbes) en résolvant l'équation  $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$  avec, par exemple :

$$\underbrace{\int \frac{dy}{dx} dx}_y = \underbrace{\int \frac{b(x, y)}{a(x, y)} dx}_{\dots + c} \rightarrow u(x, t) = f("c")$$

OU

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = y \rightarrow y = Ce^x$$

$$u(x, t) = f("C") = f(ye^{-x})$$

**Autres cas** : par exemple  $3u_y + u_{xy}$  on effectue une substitution  $v = u_y$  pour simplifier le problème. Combinaison linéaire de plusieurs solutions est aussi une solution

## 1.4 EDP du deuxième ordre

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

**Parabolique** :  $B^2 - 4AC = 0$

**Hyperbolique** :  $B^2 - 4AC > 0$

**Elliptique** :  $B^2 - 4AC < 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

## 1.5 Opérateurs

**Linéarité**

$$\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

linéaire non linéaire

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0 \quad u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$u_x + u_y = 0 \quad u_x + yu_y = 0 \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x + uu_y = 0 \quad u_{tt} + u_{xxx} = 0 \quad u_t - ju_{xx} = 0$$

### 1.5.1 Homogénéité (seulement si linéaire)

**Équation linéaire homogène**  $\mathcal{L}u = 0$

**Équation linéaire non-homogène**  $\mathcal{L}u = g$

$$u_x + u_y + 1 = 0 \rightarrow \text{inhomogène}$$

solution homogène + solution inhomogène = solution inhomogène

## 1.6 Conditions initiales

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

OU

$$u(x, t_0) = \phi(x) \quad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

## 1.7 Conditions aux bords

**Dirichlet** :  $u$  est spécifié

**Neumann** :  $\frac{\partial u}{\partial n}$  est spécifié

**Robin** :  $\frac{\partial u}{\partial n} + au$  est spécifié

## 1.8 Problèmes bien posés

Les problèmes bien posés (au sens d'Hadamard) sont constitués d'une EDP dans un domaine et avec les propriétés suivantes :

**Existence** : il existe au moins une solution  $u(x, t)$  qui satisfait toutes les conditions

**Unicité** : il existe au plus une solution

**Stabilité** : La solution unique  $u(x, t)$  dépende de manière stable des données (peu de changement  $\rightarrow$  peu de variation)

## 1.9 Exemples

1.

$$au_x + bu_y = 0 \quad u(x, y) = f(bx - ay)$$

Avec  $bx - ay = c$  les droites caractéristiques

2.

$$u_t + cu_x = 0$$

Au temps  $t + h$ , déplacement de  $c \cdot h$

3.

$$u_{xx} = 0 \xrightarrow{f dx} u_x = f(y) \xrightarrow{f dx} u = g(y) + xf(y)$$

$$u(x, y) = f(y)x + g(y)$$

4.

$$u_{xx} + u = 0 \rightarrow u(x, y) = f(y) \cos(x) + g(y) \sin(x)$$

5.

$$u_{xy} = 0 \rightarrow u(x, y) = f(y) + g(x)$$

A noter que  $f(y)$  et  $g(x)$  sont les intégrales de fonctions intermédiaires.

6.

$$u_x + yu_y = 0 \rightarrow u(x, y) = f(e^{-x}y)$$

## 1.10 Séparation de variables

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad \text{ou} \quad u(x, t) = X(x)T(t)$$

## 2 Équation d'onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$c$  est la vitesse de l'onde. Pour une corde on a

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Avec  $T$  la tension et  $\rho$  la densité

## 2.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k(u(x+h, t) - u(x, t)) - k(u(x, t) - u(x-h, t))$$

$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec  $N \rightarrow \infty$  et donc  $h \rightarrow 0$  ( $L = Nh$ )

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

avec  $f$  et  $g$  des fonctions quelconques à une seule variable

### 2.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques  $x \pm ct = \text{constante}$ . Somme de deux fonctions :  $g(x - ct)$  qui va à droite et  $f(x + ct)$  qui va à gauche. La vitesse est  $c$ .

### 2.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

## 2.2 Conditions aux bords

La solution est de la forme (séparation de variable)

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X(x) &= C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \\ T(t) &= A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \end{cases} \quad (1)$$

$\lambda$  est une constante tel que  $\lambda = \beta^2 \quad \beta > 0$

## 2.3 Conditions aux bords de Dirichlet

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\beta x) = \phi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta c \sin(\beta x) = \psi(x)$$

Les fréquences sont  $\frac{n\pi c}{l}$  avec la fondamentale en  $n = 1$

### 2.3.1 Conditions aux bords = 0

$$u_n(x, t) = \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi c}{l}x\right)$$

## 2.4 Conditions aux bords de Neumann

Solution générale pour un problème avec conditions aux bords de Neumann  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$  (à utiliser dans l'examen) :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Avec les conditions initiales

$$\phi(x) = u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

## 2.5 Conditions aux bords mixtes

Appliquer les conditions à l'équation 1

$u(0, t) = u_x(l, t) = 0$  par exemple.

$$\lambda_n = \frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2}$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l}x\right)$$

### 3 Équation de diffusion

$$u_t = u_{xx}$$

Plus difficile à résoudre que l'équation d'ondes

#### 3.1 Principe du maximum

Valeur maximale de  $u(x, t)$  atteinte à  $t = 0$  ou sur les côtés ( $x = 0$  ou  $x = l$ ). Pareil pour la valeur minimale

#### 3.2 Résolution

1. Résoudre l'équation pour une solution  $\phi(x)$  particulière
2. Construire la solution générale

#### 3.3 Propriétés

1. Une **translation** de la solution est aussi une solution

$$u(x - n, t) \equiv u(x, t)$$

2. **Dérivée** d'une solution est aussi une solution

$$u_t \equiv u_x \equiv u_{xx} \equiv u$$

3. Une **combinaison linéaire** de solutions est une solution

4. Une **intégrale** est aussi une solution

$$\int S(x - n, t) g(y) dy \equiv u(x, t)$$

5. Une solution **dilatée** est aussi une solution

$$u(\sqrt{a}x, at) \equiv u(x, t)$$

#### 3.4 Résolution sans conditions aux bords

On résout le problème simplifié avec

$$Q(x, 0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$Q(x, t) = g(p) \quad p = \frac{x - y}{\sqrt{4kt}}$$

Solution générale :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

1. Remplacer la condition initiale  $\phi(x)$
2. Développer l'intégrale et effectuer un changement de variable si nécessaire (voir 9)
3. Exprimer en fonction de  $\text{erf}(\dots)$  si c'est nécessaire

Si nécessaire, on utilise la fonction d'erreur

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$\text{erf}(x) = -\text{erf}(-x) \quad (\text{impaire})$$

Si  $\phi(y) = e^{\dots}$  alors on peut utiliser la fonction suivante (à adapter) pour mettre tous les  $y$  dans le  $()^2$

$$(y + 2kt - x)^2 = y^2 + 4k^2t^2 + x^2 + 4kty - 2xy - 4ktx$$

##### 3.4.1 Notes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi}$$

Si on a deux intégrales (chacune avec un  $\phi(y)$  différent, par exemple un  $\phi$  par morceaux), alors on fait deux changements de variables différents : une fois  $p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$  et une fois  $p = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$

#### 3.5 Résolution avec conditions aux bords

Par séparation de variables on a

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} T(t) = Ae^{-\lambda kt} \\ X(x) = B \cos(\beta x) + C \sin(\beta x) \end{cases} \quad \lambda = \beta^2$$

Résoudre en appliquant les conditions aux bords à l'équation ci-dessus.

Si il est possible d'exprimer  $u_{n=0}(x, t)$  avec une constante, on la nomme  $\frac{A_0}{2}$

### 4 Séries de Fourier

#### 4.1 Séries de Fourier en sinus

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

#### 4.2 Séries de Fourier en cosinus

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Le  $1/2$  dans la série pour  $A_0$  vient de la

**Important** : Si la fonction  $\phi(x)$  est paire, on peut se concentrer sur la moitié uniquement (la valeur de  $l$  est ce nouvel intervalle). Ceci permet de beaucoup simplifier le problème.

## 4.3 Séries de Fourier

Sur  $] -l, l[$

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

## 5 Fonctions harmoniques

Laplacien

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

En coordonnées polaires on a

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r$$

### 5.1 Principe du maximum / minimum

Le maximum et le minimum de la fonction sont atteints sur les bords du domaine

### 5.2 Procédure

1. Séparation des variables

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$$

2. Insertion des conditions aux bords
3. Somme de la série
4. Ajout du terme inhomogène ou conditions aux bords

## 5.3 Autres

Polynôme quadratique en  $x$  et  $y$  :

$$u(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

## 6 Transformée de Laplace

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

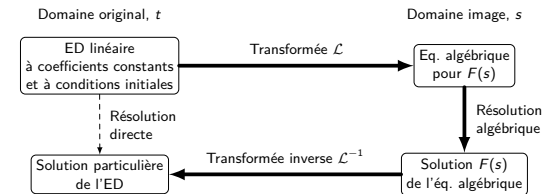
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} s^{-3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi} s^{-1/2}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$H(t-b)$	$\frac{1}{s} e^{-bs}$
$\delta(t-b)$	$e^{-bs}$
$a(4\pi t^3)^{-1/2} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
$(\pi t)^{-1/2} e^{-a^2/4t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$
$1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{\sqrt{4t}}\right)$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$

## 6.1 Propriétés

Fonction	Transformée
(i) $af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
(ii) $\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
(iii) $\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
(iv) $e^{bt}f(t)$	$F(s-b)$
(v) $\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s') ds'$
(vi) $tf(t)$	$-\frac{dF}{ds}$
(vii) $H(t-b)f(t-b)$	$e^{-bs}F(s)$
(viii) $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
(ix) $\int_0^t g(t-t')f(t')dt'$	$F(s)G(s)$

## 6.2 Méthode



## 7 Différences finies

### 7.1 Différences finies progressives (downwind)

#### 7.1.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	1					
2	-3/2	2	-1/2				
3	-11/6	3	-3/2	1/3			
4	-25/12	4	-3	4/3	1/4		
5	-137/60	5	-5	10/3	-5/4	1/5	
6	-49/20	6	-15/2	20/3	-15/4	6/5	-1/6

$$n = 2$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}f(x) + 2f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+2h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

### 7.1.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	1	-2	1				
2	2	-5	4	-1			
3	35/12	-26/3	19/2	-14/3	11/12		
4	15/4	-77/6	107/6	-13	61/12	-5/6	
5	203/45	-87/5	117/4	-254/9	33/2	-27/5	137/180

$n = 3$

$$f''(x) = \frac{\frac{35}{12}f(x) - \frac{26}{3}f(x+h) + \frac{19}{2}f(x+2h) - \frac{14}{3}f(x+3h) + \frac{11}{12}f(x+4h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

### 7.1.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	3	-3	1			
2	-5/2	9	-12	7	-3/2		
3	-17/4	71/4	-59/2	49/2	-41/4	7/4	
4	-49/8	29	-461/8	62	-307/8	13	-15/8

$n = 1$

$$f'''(x) = \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^1)$$

## 7.2 Différences finies rétrogrades (up-wind)

1. Remplacer  $x + kh$  par  $x - kh$
2. Si dérivée paire : Pas de changement de coefficient
3. Si dérivée impaire : Changement du signe

## 7.3 Différences finies centrées

### 7.3.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				-1/2	0	1/2			
4			1/12	-2/3	0	2/3	-1/12		
6		-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60	
8	1/280	-4/105	1/5	-4/5	0	4/5	-1/5	4/105	-1/280

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h)}{h^1} + \mathcal{O}(h^2)$$

### 7.3.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				1	-2	1			
4			-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12		
6		1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90	
8	-1/560	8/315	-1/5	8/5	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560

$n = 2$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

### 7.3.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2			-1/2	1	0	-1	1/2		
4		1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8	
6	-7/240	3/10	-169/120	61/30	0	-61/30	169/120	-3/10	7/240

$n = 2$

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

## 7.4 Différences finies pour EDP elliptiques + Dirichlet

$$-u''(x) = f(x) \quad u(0) = \alpha \quad u(L) = \beta$$

,

$$u''(x_j) \approx \frac{u(x_j-h) - 2u(x_j) + u(x_j+h)}{h^2}$$

Ce qui donne un système d'équations linéaires

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$A_h \vec{x} = \vec{f}$$

les valeurs sont inversées car  $-u''(x)$ .

### 7.4.1 2D

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i-h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i+h, y_j)}{h^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{y(x_i, y_j-h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j+h)}{h^2}$$

## 7.5 Différences finies pour EDP paraboliques

1. Discrétiser l'espace (sous-intervalles de largeur  $h$ )
2. Application des conditions aux bords puis recherche des valeurs aux nœuds en fonction du temps

$$x_i \rightarrow u_i(t)$$

$$u_i(t) \approx u(x_i, t)$$

3. On applique les conditions initiales

$$u_i(0) = u_0(x_i)$$

4. Résoudre le problème de Cauchy ( $\frac{du}{dt} = g(x, t)$  en matrices)

## 7.6 Méthode d'Euler explicite

$$\frac{du}{dt} = F(t_0, u_0)$$

Vu d'un autre angle, on veut approcher

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) \approx \frac{u(t_i + \tau) - u(t_i)}{\tau}$$

## 7.7 Relation entre le pas de temps et le pas temporel

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\mu}$$

Avec  $\mu$  la constante de l'équation  $u_t - \mu u_{xx} = f(x, t)$

## 7.8 Équation de transport

$$v \leq \frac{h}{\tau} \longleftrightarrow \frac{v\tau}{h} = r \leq 1$$

C'est la condition CFL : avec downwind c'est impossible de résoudre le problème. Avec les upwind on peut y arriver parce qu'on utilise les valeurs précédentes (la condition sur  $v$  reste valable).

L'analyse de Von Neumann montre que le schéma centré n'est pas stable (même si la condition CFL est vérifiée).

## 7.9 Exemple Différences finies

$$-u''(x) = f(x) = (3x + x^2)e^x \text{ Avec CB (D) } = 0$$

$$h = 1/5 \rightarrow 0 \frac{1}{5} \frac{2}{5} \frac{3}{5} \frac{4}{5} 1$$

### 7.10 méthode d'Euler

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \tau \left( -A\vec{u}_k + \vec{b}(t_k) \right)$$

### 7.11 Méthode d'Euler implicite

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \tau \left( -A\vec{u}_{k+1} + \vec{b}(t_{k+1}) \right)$$

Vérifier les formules... c'est illisible sur le polycop

## 8 Éléments finis

### 8.1 Forme forte

$$-u''(x) = f(x)$$

### 8.2 Forme faible / variationnelle (Ritz-Galerkin)

$$-u''(x)v(x) = f(x)v(x)$$

On multiplie des deux côtés par une fonction  $v(x)$  qui respecte

$$v(0) = v(l) = 0$$

$$\int_0^l -u''(x)v(x)dx = \int_0^l f(x)v(x)$$

### 8.2.1 Exemple

Avec  $-u''(x) = x^2$ . On aura un problème de la forme

$$A_h c = b_h$$

Avec les  $c$  qui correspondent au poids de chaque fonction de base.

### Calcul de $A$ (matrice de rigidité)

$$a_{ij} = \int_0^L N'_i(x)N'_j(x)dx$$

Calcul de  $b$   $\vec{b}$  est le reste de l'équation (partie droite)

$$\int_0^L -u''(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x)$$

La plupart du temps on aura

$$b_i = \int_0^l f(x)N_i(x)$$

### 8.3 Maillage

Il ne doit pas y avoir de chevauchement d'éléments ou de points qui ne sont pas connectés ensembles.

## 9 Autres

### 9.1 Intégration par partie

$$\int_a^b u'v = uv \Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

### 9.1.1 exemple

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \cdot \sin(n\pi x)dx &= \int_0^1 f dg = fg \Big|_0^1 - \int_0^1 g df \\ f &= x^2, dg = \sin(n\pi x)dx \\ df &= 2x \cdot dx, g = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \\ &= -\frac{x^2 \cdot \cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x \cdot \cos(n\pi x)}{n\pi} \end{aligned}$$

## 9.2 Changement de variable

### 9.2.1 Méthode 1

Lorsque la dérivée  $\varphi'(t)$  est présente

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

### 9.2.2 Méthode 2

Si  $\varphi'(t) = \varphi' = \text{constante}$

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \frac{1}{\varphi'} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

## 9.3 Solutions générales

$$\begin{aligned} X'' &= -\beta^2 X &\longrightarrow X(x) &= A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \\ X'' &= \beta^2 X &\longrightarrow X(x) &= A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) \\ X' &= aX &\longrightarrow X(x) &= ce^{ax} \\ X'' &= 0 &\longrightarrow X(x) &= Ax + B \end{aligned}$$

## 9.4 Équation d'euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

## 9.5 Séparation en éléments simples

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x(x+1)}{(x-1)(x-0.25)(x-0.5)} \\
 &\downarrow \\
 f(x) &= \frac{x(x+1)}{(x-1)(x-0.25)(x-0.5)} \\
 &\downarrow \\
 f(x) &= \frac{R_1}{(x-1)} + \frac{R_2}{(x-0.25)} + \frac{R_3}{(x-0.5)}
 \end{aligned}$$

Attention ! Pas de  $()^n$  dans le dénominateur.  
Sinon résolution à la main

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{1(1+1)}{(1-0.25)(1-0.5)} \\
 R_2 &= \frac{0.25(0.25+1)}{(0.25-1)(0.25-0.5)} \\
 R_3 &= \frac{0.5(0.5+1)}{(0.5-1)(0.5-0.25)}
 \end{aligned}$$

## 9.6 Matrices

### 9.6.1 Inverses

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Même principe si on renverse

$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ad} & \frac{1}{d} & 0 \\ \frac{be-cd}{adf} & -\frac{e}{fd} & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Pour une matrice  $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## 9.7 A faire attention

- Dès qu'on utilise  $n$  on doit directement écrire la série de Fourier
- Ne pas oublier des termes (duh), genre devant des parenthèses
- Écrire les sin et cos lorsqu'on demande "les x premiers termes"
- Les  $+c$

## 10 Exercices

Résoudre l'équation d'onde sans CB	10.1
Équation de diffusion avec CI, sans CB	10.2
Équation de diffusion avec CI, sans CB	10.3
Équation de diffusion avec CI, sans CB, séparation $p / q$	10.4
Diffusion avec CB mixtes	10.5
Onde avec CB mixtes	10.6
Polynôme quadratique	10.7
Fourier	10.8
Onde + Fourier	10.9
Laplace	10.10

### 10.1 Série 2 - Exercice 1

1. Résoudre  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ,  $u(x, 0) = e^x$ ,  $u_t(x, 0) = \sin(x)$ .

On utilise la fonction générale

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \sin(s) ds =$$

$$\frac{1}{2}(e^{x+ct} + e^{x-ct}) + \frac{1}{2c}(-\cos(x+ct) + \cos(x-ct))$$

On peut simplifier un peu les expressions

$$\frac{1}{2}(e^{x+ct} + e^{x-ct}) + \underbrace{\frac{1}{2c}(-\cos(x+ct) + \cos(x-ct))}_{\frac{1}{2}(\sin(x)\sin(ct))} =$$

$$e^x \underbrace{\frac{1}{2}(e^{ct} + e^{-ct})}_{\cosh(ct)} + \frac{1}{2}\sin(x)\sin(ct)$$

### 10.2 Série 3 - Exercice 2

2. Résoudre l'équation de diffusion avec la condition initiale

$$\phi(x) = 1, \quad \text{pour } |x| \leq \ell \quad \text{et} \quad \phi(x) = 0, \quad \text{pour } |x| > \ell.$$

Ecrire la réponse en utilisant la fonction  $\mathcal{Erf}(x)$ .

On utilise la fonction de base

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

On applique la fonction  $\phi(x)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-l}^l e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$$

Puis on effectue un changement de variable  $p(y) = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$

$$dy = -\sqrt{4kt} dp \quad l \rightarrow \frac{x-l}{\sqrt{4kt}} \quad -l \rightarrow \frac{x+l}{\sqrt{4kt}}$$

$$u(x, t) = \frac{-\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp$$

On inverse les bornes (et le signe devant l'intégrale)

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp$$

On utilise la fonction erf

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}\left(\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}\left(\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}\right) \right)$$

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} \left( \text{erf}\left(\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}\right) \right)}$$

(même chose que le corrigé)

### 10.3 Série 3 - Exercice 3

3. Résoudre l'équation de diffusion avec la condition initiale  $\phi(x) = e^{3x}$ .

On commence par poser l'équation de base

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$



On remplace par l'expression de  $\phi(y)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{3y} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt} + 3y} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2 - 12kty}{4kt}} dy$$

On doit enlever le terme  $12kty$  qui empêche de faire la simplification avec erf. On s'intéresse à la puissance de  $e$  et on utilise  $(y + 2kt - x)^2$  (dans le résumé)

$$-\frac{(x-y)^2 - 12kty}{4kt} = -\frac{x^2 - 2xy + y^2 - 12kty}{4kt}$$

$$(y + 2kt - x)^2 = y^2 + 4k^2t^2 + x^2 + 4kty - 4ktx - 2xy$$

ça ressemble un peu mais on aimerait  $-12kty$  au lieu de  $4kty$ , on inverse  $x$  et  $y$  et on multiplie le terme central par 3

$$(x + 6kt - y)^2 = y^2 + 36k^2t^2 + x^2 + 12ktx - 12kty - 2xy$$

C'est parfait, on a plus qu'à adapter l'équation de base pour utiliser ce terme

$$-\frac{(x + 6kt - y)^2 - 36k^2t^2 - 12ktx}{4kt} = -\frac{x^2 - 2xy + y^2 - 12kty}{4kt}$$

Maintenant qu'on a le bon terme, il suffit de séparer pour garder les  $y$  d'un seul côté

$$-\frac{(x + 6kt - y)^2}{4kt} + \frac{36k^2t^2 + 12ktx}{4kt} = -\frac{(x + 6kt - y)^2}{4kt} + 9kt + 3x$$

On a plus qu'à remettre tout ça dans l'équation de base et résoudre

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+6kt-y)^2}{4kt} + 9kt + 3x} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x+6kt-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2} e^{9kt+3x} dy$$

Comme le dernier terme ne dépend pas de  $y$ , on le sort

$$e^{9kt+3x} \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x+6kt-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2} dy$$

On effectue le changement de variable

$$p(y) = \frac{x + 6kt - y}{\sqrt{4kt}} \rightarrow \begin{cases} \infty \rightarrow -\infty \\ -\infty \rightarrow \infty \\ dy \rightarrow -\sqrt{4kt} dp \end{cases}$$

$$e^{9kt+3x} \frac{\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-p^2} dy = e^{9kt+3x} \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-p^2} dy$$

On inverse les bornes (et le signe au début)

$$u(x, t) = e^{9kt+3x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dy}_{\sqrt{\pi}}$$

On a donc finalement

$$u(x, t) = e^{9kt+3x}$$

## 10.4 Série 3 - Exercice 4

4. Faire de même pour  $\phi(x) = 1$  pour  $x > 0$  et  $\phi(x) = 3$  pour  $x < 0$ .

On commence par poser l'équation de base

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

On applique la fonction  $\phi(y)$  et on trouve deux intégrales

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \left( 3 \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy + \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \right)$$

Important ! : on va effectuer deux changements de variables différents pour simplifier les calculs par la suite (voir le résumé)

$$p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}} \quad q = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \left( -3\sqrt{4kt} \int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp + \sqrt{4kt} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp \right)$$

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi kt}} \left( 3 \underbrace{\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\int_0^{\infty} - \int_0^x} + \underbrace{\int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\int_0^{\infty} + \int_0^x} \right)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 4 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} - 2 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp \right)$$

$$u(x, t) = 2 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$$

## 10.5 Série 4 - Exercice 4

4. Résoudre le problème de diffusion  $u_t = ku_{xx}$  sur  $0 < x < \ell$ , avec les conditions aux bords mixtes  $u(0, t) = u_x(\ell, t) = 0$ .

On pose l'équation séparée

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$T(t) = Ae^{-\lambda kt}$$

$$X(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$$

$$X(0) = A + 0 = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$X'(l) = B\beta \cos(\beta l) = 0 \longrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta l = n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On va choisir la dernière option pour éviter que le problème soit trop facile

$$\beta = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l} = \frac{\pi(n + \frac{1}{2})}{l}$$

$$X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right)$$

$$u(x, t) = T(t)X(x) = Ce^{-\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right) \quad C = AB$$

## 10.6 Série 4 - Exercice 5

5. Considérons l'équation  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  pour  $0 < x < \ell$ , avec les conditions aux bords  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u(\ell, t) = 0$  (Neumann à gauche, Dirichlet à droite).

(a) Montrer que les fonctions propres sont

$$\cos\left(\frac{(n + 1/2)\pi}{\ell}x\right).$$

(b) Donner le développement en série de la solution.

### 10.6.1 (a)

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda$$

$$\lambda = \beta^2$$

$$\begin{cases} T(t) = A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \\ X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \end{cases}$$

$$X'(0) = D\beta = 0 \longrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On va supposer que  $D = 0$ , sinon le problème n'est pas intéressant

$$X(l) = C \cos(\beta l) = 0 \longrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \beta l = n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On va supposer que c'est la deuxième option, sinon le problème n'est pas intéressant

$$\beta = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}$$

On a donc

$$X(x) = C \cos\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right)$$

### 10.6.2 (b)

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A \cos\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}ct\right) + B \sin\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}ct\right) \right) C \cos\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right)$$

## 10.7 Série 5 - Exercice 1

1. Résoudre  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  dans le rectangle  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  avec les conditions aux bords:

$$\begin{aligned} u_x &= -a \text{ sur } x = 0 & u_x &= 0 \text{ sur } x = a \\ u_y &= b \text{ sur } y = 0 & u_y &= 0 \text{ sur } y = b \end{aligned}$$

*Aide:* Un raccourci consiste à supposer que la solution est un polynôme quadratique en  $x$  et  $y$ .

On sais que la solution sera de la forme

$$u(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

On applique les conditions aux bords de manière successive. D'abord sur  $x$  :

$$u_x(0, y) = -a \quad u_x(a, y) = 0$$

$$u_x(0, y) = C_y + D = -a \longrightarrow \boxed{C = 0} \quad \boxed{D = -a}$$

$$u_x(a, y) = 2Aa - a = 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

Ensuite sur  $y$

$$u_y(x, 0) = b \quad u_y(x, b) = 0$$

$$u_y(x, 0) = C_x + E = b \longrightarrow \boxed{E = b}$$

$$u_y(x, b) = 2Bb + b \longrightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

On a directement la solution finale

$$\boxed{u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - ax + by + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R}}$$

## 10.8 Série 6 - Exercice 2

2. Soit

$$\phi(x) \equiv x^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1 = \ell.$$

(a) Calculer sa série de Fourier en sinus (impaire).

(b) Calculer sa série de Fourier en cosinus (paire).

### 10.8.1 (a)

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

On utilise l'intégration par parties pour supprimer le  $x^2$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^1 \underbrace{x^2}_v \underbrace{\sin(n\pi x)}_{u'} dx = \frac{2}{l} \left( \left( -x^2 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right)_0^1 + \int_0^1 2x \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right)$$

On refait une intégration par parties

$$A_n = \frac{2}{l} \left( \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi) + \underbrace{\left( 2x \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) \right)_0^1}_0 - \int_0^1 2 \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) dx \right)$$

on effectue l'intégrale

$$A_n = \frac{2}{l} \left( \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2} \left( \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right)_0^1 \right) = \frac{-2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{4}{n^3\pi^3} (\cos(n\pi) - 1)$$

$$A_n = \frac{(4 - 2n^2\pi^2)(-1)^n - 4}{n^3\pi^3}$$

On obtient donc l'équation finale

$$\boxed{\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 - 2\pi^2 n^2)(-1)^n - 4}{\pi^3 n^3} \sin(n\pi x)}$$

### 10.8.2 (b)

Comme avant on pose les équations de base

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)$$

$$A_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \cos(n\pi x) dx$$

On commence par déterminer  $A_0$  qui est facile

$$A_0 = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left( \frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{2}{3}$$

On fait une intégration par parties

$$A_n = 2 \int_0^1 \underbrace{x^2}_v \underbrace{\cos(n\pi x)}_{u'} dx = 2 \left( \underbrace{\left( x^2 \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)_0^1}_0 - \int_0^1 2x \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) dx \right)$$

On peut simplifier puis on refait une intégration par parties

$$A_n = \frac{-4}{n\pi} \int_0^1 \underbrace{x}_v \underbrace{\sin(n\pi x)}_{u'} dx = \frac{-4}{n\pi} \left( \left( -x \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right)_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right)$$

$$A_n = \frac{-4}{n^2\pi^2} \left( \underbrace{\left( -x \cos(n\pi x) \right)_0^1}_{-\cos(n\pi)} + \underbrace{\left( \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)_0^1}_0 \right)$$

On a donc finalement

$$A_n = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Et l'équation finale

$$\phi(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$$

## 10.9 Série 6 - Exercice 5

5. Résoudre

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{pour } 0 < x < \pi$$

avec les conditions aux bords

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = \cos^2(x).$$

Utiliser le fait que  $\cos^2(x) = 1/2 + \cos(2x)/2$ .

On utilise la solution générale de l'équation d'onde pour un problème avec conditions aux bords de Neumann ( $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ )

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Avec les conditions initiales

$$\phi(x) = u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

On applique les conditions initiales

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} A_0 = 0 \\ A_n = 0 \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\frac{1}{2}B_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{B_0 = 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

On a  $n = 2$  et  $l = \pi$

$$\frac{2\pi c}{\pi} B_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\pi}x\right) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$2cB_2 \cos(2x) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$2cB_2 = \frac{1}{2}$$

$$4cB_2 = 1$$

$$\boxed{B_2 = \frac{1}{4c}}$$

On écrit donc la solution finale

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4c} \sin(2ct) \cos(2x)}$$

## 10.10 Série 7 - Exercice 4

4. Faire appel à la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle  $y'' - k^2y = 0$  satisfaisant les conditions initiales  $y(0) = A$  et  $y'(0) = B$ , où  $k$ ,  $A$  et  $B$  sont des constantes.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - k^2Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 - k^2) = sy(0) + y'(0)$$

$$Y(s) = \frac{sy(0)}{s^2 - k^2} + \frac{y'(0)}{s^2 - k^2} = A \frac{s}{s^2 - k^2} + \frac{B}{k} \frac{k}{s^2 - k^2}$$

$$\boxed{y(t) = A \cosh(kt) + \frac{B}{k} \sinh(kt)}$$