

1 Équation d'onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

1.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k(u(x+h), t) - u(x, t) - k(u(x, t) - u(x-h, t))$$
$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec $N \rightarrow \infty$ et donc $h \rightarrow 0$ ($L = Nh$)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$u(x, t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

avec f et g des fonctions quelconques à une seule variable

1.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct = \text{constante}$. Somme de deux fonctions : $g(x-ct)$ qui va à droite et $f(x+ct)$ qui va à gauche. La vitesse est c .

1.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty$$
$$u(x, 0) = \phi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$
$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

1.2 Avec conditions aux bords

La solution est de la forme (séparation de variable)

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\begin{cases} X(x) &= C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \\ T(t) &= A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \end{cases}$$

λ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \quad \beta > 0$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\beta x) = \phi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta c \sin(\beta x) = \psi(x)$$