1 Équation d'onde

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

c est la vitesse de l'onde. Pour une corde on a

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Avec T la tension et ρ la densité

1.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k\left(u(x+h),t) - u(x,t)\right) - k\left(u(x,t) - u(x-h,t)\right)$$

$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec $N \to \infty$ et donc $h \to 0$ ($L = Nh$)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$\boxed{u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$

avec f et g des fonctions quelconques à une seule variable

1.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct =$ constante. Somme de deux fonctions : $g(x-ct)$ qui va à droite et $f(x+ct)$ qui va à gauche. La vitesse est c.

1.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

1.2 Conditions aux bords

La solution est de la forme (séparation de variable)

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X(x) &= C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \\ T(t) &= A\cos(\beta ct) + B\sin(\beta ct) \end{cases} \tag{1}$$

λ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \qquad \beta > 0$

1.3 Conditions aux bords de Dirichlet

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\beta x) = \phi(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta c \sin(\beta x) = \psi(x)$$

Les fréquences sont $\frac{n\pi c}{l}$ avec la fondemantale en $n = 1$

1.3.1 Conditions aux bords $= 0$

$$\boxed{u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi c}{l}x\right)}$$

1.4 Conditions aux bords de Neumann

Solution générale pour un problème avec conditions aux bords de Neumann $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ (à utiliser dans l'examen) :

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

Avec les conditions initiales

$$\phi(x) = u(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

1.5 Conditions aux bords mixtes

Appliquer les conditions à l'équation 1
$u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ par exemple.

$$\lambda_n = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{l^2}$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\right)$$