1 Équation de diffusion

$$\boxed{u_t = u_{xx}}$$

Plus difficile à résoudre que l'équation d'ondes

1.1 Principe du maximum

Valeur maximale de $u(x,t)$ atteinte à $t=0$ ou sur les côtés ($x=0$ ou $x=l$). Pareil pour la valeur minimale

1.2 Résolution

1. Résoudre l'équation pour une solution $\phi(x)$ particulière
2. Construire la solution générale

1.3 Propriétés

1. Une **translation** de la solution est aussi une solution
$$u(x-n,t) \equiv u(x,t)$$
2. **Dérivée** d'une solution est aussi une solution
$$u_t \equiv u_x \equiv u_{xx} \equiv u$$
3. Une **combinaison linéaire** de solutions est une solution
4. Une **intégrale** est aussi une solution
$$\int S(x-n,t)g(y)dy \equiv u(x,t)$$
5. Une solution **dilatée** est aussi une solution
$$u(\sqrt{a}x, at) \equiv u(x,t)$$

1.4 Résolution sans conditions aux bords

On résout le problème simplifié avec

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$Q(x,t) = g(p) \qquad p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$$

Solution générale :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

1. Remplacer la condition initiale $\phi(x)$

2. Développer l'intégrale et effectuer un changement de variable si nécessaire (voir **??**)

3. Exprimer en fonction de erf(...) si c'est nécessaire

Si nécessaire, on utilise la fonction d'erreur

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$\mathrm{erf}(x) = -\mathrm{erf}(-x) \qquad \text{(impaire)}$$

Si $\phi(y) = e^{\cdots}$ alors on peut utiliser la fonction suivante (à adapter) pour mettre tous les y dans le $()^2$

$$(y + 2kt - x)^2 = y^2 + 4k^2t^2 + x^2 + 4kty - 2xy - 4ktx$$

1.4.1 Notes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi}$$

Si on a deux intégrales (chacune avec un $\phi(y)$ différent, par exemple un ϕ par morceaux), alors on fait deux changements de variables différents : une fois $p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$ et une fois $p = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$

1.5 Résolution avec conditions aux bords

Par séparation de variables on a

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} T(t) = Ae^{-\lambda kt} \\ X(x) = B\cos(\beta x) + C\sin(\beta x) \end{cases} \qquad \lambda = \beta^2$$

Résoudre en appliquant les conditions aux bords à l'équation ci-dessus.
Si il est possible d'exprimer $u_{n=0}(x,t)$ avec une constante, on la nomme $\frac{A_0}{2}$