

# Exercice5\_SDZ

January 16, 2022

## 1 Série 4 - Exercice 5 (SDZ)

5. Considérons l'équation  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  pour  $0 < x < \ell$ , avec les conditions aux bords  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u(\ell, t) = 0$  (Neumann à gauche, Dirichlet à droite).

(a) Montrer que les fonctions propres sont

$$\cos\left(\frac{(n + 1/2)\pi}{\ell}x\right).$$

(b) Donner le développement en série de la solution.

### 1.1 (a)

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda$$
$$\lambda = \beta^2$$

$$\begin{cases} T(t) = A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \\ X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \end{cases}$$

$$X'(0) = D\beta = 0 \longrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On va supposer que  $D = 0$ , sinon le problème n'est pas intéressant

$$X(l) = C \cos(\beta l) = 0 \longrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \beta l = n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On va supposer que c'est la deuxième option, sinon le problème n'est pas intéressant

$$\beta = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}$$

On a donc

$$X(x) = C \cos\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right)$$

**1.2 (b)**

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A \cos \left( \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l} ct \right) + B \sin \left( \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l} ct \right) \right) C \cos \left( \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l} x \right)$$