

1 Généralités

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

1.1 Dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

1.2 EDO du premier ordre

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \longrightarrow y = Ce^{kt}}$$

1.3 EDP du premier ordre

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$$

$$= F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

1.4 EDP du deuxième ordre

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

Parabolique : $B^2 - 4AC = 0$

Hyperbolique : $B^2 - 4AC > 0$

Elliptique : $B^2 - 4AC < 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

1.5 Opérateurs

Linéarité

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

linéaire non linéaire

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + u^3 &= 0 & u_t + uu_x + u_{xxx} &= 0 \\ u_x + u_y &= 0 & u_x + yu_y &= 0 & u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u_x + uu_y &= 0 & u_{tt} + u_{xxx} &= 0 & u_t - ju_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

Équation linéaire homogène $\mathcal{L}u = 0$

Équation linéaire non-homogène $\mathcal{L}u = g$

$$u_x + u_y + 1 = 0 \longrightarrow \text{inhomogène}$$

solution homogène + solution inhomogène = solution inhomogène

$$\boxed{a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}}$$

Puis faire

$$\underbrace{\int \frac{dy}{dx} dx}_y = \underbrace{\int \frac{b(x, y)}{a(x, y)} dx}_{\dots+c}$$

Combinaison linéaire de plusieurs solutions est aussi une solution

1.6 Conditions initiales

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

OU

$$u(x, t_0) = \phi(x) \quad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

1.7 Conditions aux bords

Dirichlet : u est spécifié

Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}$ est spécifié

Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ est spécifié

1.8 Problèmes bien posés

Les problèmes bien posés (au sens d'Hadamard) sont constitués d'une EDP dans un domaine et avec les propriétés suivantes :

Existence : il existe au moins une solution $u(x, t)$ qui satisfait toutes les conditions

Unicité : il existe au plus une solution

Stabilité : La solution unique $u(x, t)$ dépende de manière stable des données (peu de changement \rightarrow peu de variation)

1.9 Exemples

1.

$$au_x + bu_y = 0 \quad u(x, y) = f(bx - ay)$$

Avec $bx - ay = c$ les droites caractéristiques

2.

$$u_t + cu_x = 0$$

Au temps $t + h$, déplacement de $c \cdot h$

3.

$$u_{xx} = 0 \xrightarrow{\int dx} u_x = f(y) \xrightarrow{\int dx} u = g(y) + xf(y) \\ u(x, y) = f(y)x + g(y)$$

4.

$$u_{xx} + u = 0 \rightarrow u(x, y) = f(y) \cos(x) + g(y) \sin(x)$$

5.

$$u_{xy} = 0 \rightarrow u(x, y) = f(y) + g(x)$$

A noter que $f(y)$ et $g(x)$ sont les intégrales de fonctions intermédiaires.

6.

$$u_x + yu_y = 0 \rightarrow u(x, y) = f(e^{-x}y)$$

1.10 Séparation de variables

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad \text{ou} \quad u(x, t) = X(x)T(t)$$