

Exercice3_SDZ

January 26, 2022

1 Série 6 - Exercice 3 (SDZ)

3. Soit $\phi(x) \equiv x$ sur $]0, \ell[$. Sur le même graphique, dessiner les fonctions suivantes.

- (a) La somme des trois premiers termes (différents de zéro) de la série de Fourier en sinus.
- (b) La somme des trois premiers termes (différents de zéro) de la série de Fourier en cosinus.

1.1 (a)

On commence par poser l'équation

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

On fait une intégration par parties

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \frac{2}{l} \left(\left(-x \frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right)_0^l + \underbrace{\int_0^l \frac{1}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx}_0 \right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \left(-\frac{l^2}{n\pi} \cos(n\pi) \right) = \frac{-2l(-1)^n}{n\pi}$$

$A_1 = \frac{2l}{\pi}$	$A_2 = \frac{-2}{\pi}$	$A_3 = \frac{2l}{3\pi}$
------------------------	------------------------	-------------------------

$\phi(x) \approx \frac{2l}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) - \frac{l}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) + \frac{2l}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)$
--

1.2 (b)

Comme avant, on écrit l'équation

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

On fait une intégration par parties

$$A_n = \frac{2}{l} \left(\underbrace{\left(x \frac{l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right)_0^l}_0 - \int_0^l \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \right)$$

$$A_n = -\frac{2}{n\pi} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = -\frac{2}{n\pi} \left(-\frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right)_0^l = \frac{2l}{n^2\pi^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2l((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}$$

$$\begin{cases} n \text{ impaire} & \longrightarrow \frac{-4l}{n^2\pi^2} \\ n \text{ paire} & \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\phi(x) \approx \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) - \frac{4l}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right)}$$