

Exercice1_SDZ

January 26, 2022

1 Série 5 - Exercice 1 (SDZ)

1. Résoudre $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ avec les conditions aux bords:

$$\begin{aligned} u_x &= -a \text{ sur } x = 0 & u_x &= 0 \text{ sur } x = a \\ u_y &= b \text{ sur } y = 0 & u_y &= 0 \text{ sur } y = b \end{aligned}$$

Aide: Un raccourci consiste à supposer que la solution est un polynôme quadratique en x et y .

On sait que la solution sera de la forme

$$u(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

On applique les conditions aux bords de manière successive. D'abord sur x :

$$u_x(0, y) = -a \quad u_x(a, y) = 0$$

$$u_x(0, y) = C_y + D = -a \longrightarrow \boxed{C = 0} \quad \boxed{D = -a}$$

$$u_x(a, y) = 2Aa - a = 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

Ensuite sur y

$$u_y(x, 0) = b \quad u_y(x, b) = 0$$

$$u_y(x, 0) = C_x + E = b \longrightarrow \boxed{E = b}$$

$$u_y(x, b) = 2Bb + b \longrightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

On a directement la solution finale

$$\boxed{u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - ax + by + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R}}$$