

1 Introduction

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

1.1 Dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

1.2 EDO du premier ordre

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \rightarrow y = Ce^{kt}}$$

1.3 EDP du premier ordre

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) \\ = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

1.4 EDP du deuxième ordre

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \\ Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Parabolique : $B^2 - 4AC = 0$

Hyperbolique : $B^2 - 4AC > 0$

Elliptique : $B^2 - 4AC < 0$

1.5 Opérateurs

Linéarité

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

linéaire non linéaire

$$u_x + u_y = 0 \quad u_x + yu_y = 0 \quad u_x + uu_y = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0 \quad u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

Équation linéaire homogène $\mathcal{L}u = 0$

Équation linéaire non-homogène $\mathcal{L}u = g$

$$u_x + u_y + 1 = 0 \rightarrow \text{inhomogène}$$

solution homogène + solution inhomogène = solution inhomogène

$$\boxed{a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}}$$

Puis faire

$$\underbrace{\int \frac{dy}{dx} dx}_y = \underbrace{\int \frac{b(x, y)}{a(x, y)} dx}_{\dots+c}$$

Combinaison linéaire de plusieurs solutions est aussi une solution

1.6 Conditions initiales

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

OU

$$u(x, t_0) = \phi(x) \quad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

1.7 Conditions aux bords

Dirichlet : u est spécifié

Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}$ est spécifié

Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ est spécifié

1.8 Problèmes bien posés

Les problèmes bien posés (au sens d'Hadamard) sont constitués d'une EDP dans un domaine et avec les propriétés suivantes :

Existence : il existe au moins une solution $u(x, t)$ qui satisfait toutes les conditions

Unicité : il existe au plus une solution

Stabilité : La solution unique $u(x, t)$ dépende de manière stable des données (peu de changement \rightarrow peu de variation)

1.9 Exemples

1.

$$au_x + bu_y = 0 \quad u(x, y) = f(bx - ay)$$

Avec $bx - ay = c$ les droites caractéristiques

2.

$$u_t + cu_x = 0$$

Au temps $t+h$, déplacement de $c \cdot h$

3.

$$u_{xx} = 0 \xrightarrow{\int dx} u_x = f(y) \xrightarrow{\int dx} u = g(y) + xf(y)$$

$$u(x, y) = f(y)x + g(y)$$

4.

$$u_{xx} + u = 0 \rightarrow u(x, y) = f(y) \cos(x) + g(y) \sin(x)$$

5.

$$u_{xy} = 0 \rightarrow u(x, y) = f(y) + g(x)$$

A noter que $f(y)$ et $g(x)$ sont les intégrales de fonctions intermédiaires.

6.

$$u_x + yu_y = 0 \rightarrow u(x, y) = f(e^{-x}y)$$

2 Équation d'onde

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

2.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k(u(x+h), t) - u(x, t) - k(u(x, t) - u(x-h, t))$$

$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec $N \rightarrow \infty$ et donc $h \rightarrow 0$ ($L = Nh$)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

avec f et g des fonctions quelconques à une seule variable

2.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct = \text{constante}$. Somme de deux fonctions : $g(x - ct)$ qui va à droite et $f(x + ct)$ qui va à gauche. La vitesse est c .

2.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

2.2 Avec conditions aux bords

$$u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

La solution est de la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\begin{cases} X(x) &= C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \\ T(t) &= A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \end{cases}$$

λ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \quad \beta > 0$

3 Équation de diffusion

$$u_t = u_{xx}$$

Plus difficile à résoudre que l'équation d'ondes

3.1 Principe du maximum

Valeur maximale de $u(x, t)$ atteinte à $t = 0$ ou sur les côtés ($x = 0$ ou $x = l$). Pareil pour la valeur minimale

3.2 Résolution

1. Résoudre l'équation pour une solution $\phi(x)$ particulière
2. Construire la solution générale

3.3 Propriétés

1. Une **translation** de la solution est aussi une solution

$$u(x - n, t) \equiv u(x, t)$$

2. **Dérivée** d'une solution est aussi une solution

$$u_t \equiv u_x \equiv u_{xx} \equiv u$$

3. Une **combinaison linéaire** de solutions est une solution

4. Une **intégrale** est aussi une solution

$$\int S(x - n, t) g(y) dy \equiv u(x, t)$$

5. Une solution **dilatée** est aussi une solution

$$u(\sqrt{a}x, at) \equiv u(x, t)$$

3.4 Résolution sans conditions aux bords

Recherche de

4 Problèmes bornés

5 Séries de Fourier

6 Fonctions harmoniques

7 Transformée de Laplace

8 Différences finies

9 Éléments finis

10 Intégration

10.1 Intégration par partie

$$\int_a^b u'v = uv \Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

11 Différences finies

11.1 Différences finies progressives

11.1.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	1					
2	-3/2	2	-1/2				
3	-11/6	3	-3/2	1/3			
4	-25/12	4	-3	4/3	1/4		
5	-137/60	5	-5	10/3	-5/4	1/5	
6	-49/20	6	-15/2	20/3	-15/4	6/5	-1/6

$$n = 2$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}f(x) + 2f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+2h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

11.1.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	1	-2	1				
2	2	-5	4	-1			
3	35/12	-26/3	19/2	-14/3	11/12		
4	15/4	-77/6	107/6	-13	61/12	-5/6	
5	203/45	-87/5	117/4	-254/9	33/2	-27/5	137/180

$n = 3$

$$f''(x) = \frac{\frac{35}{12}f(x) - \frac{26}{3}f(x+h) + \frac{19}{2}f(x+2h) - \frac{14}{3}f(x+3h) + \frac{11}{12}f(x+4h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

11.1.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	3	-3	1			
2	-5/2	9	-12	7	-3/2		
3	-17/4	71/4	-59/2	49/2	-41/4	7/4	
4	-49/8	29	-461/8	62	-307/8	13	-15/8

$n = 1$

$$f'''(x) = \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^1)$$

11.2 Différences finies rétrogrades

1. Remplacer $x + kh$ par $x - kh$
2. Si dérivée paire : Pas de changement de coefficient
3. Si dérivée impaire : Changement du signe

11.3 Différences finies centrées

11.3.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				-1/2	0	1/2			
4			1/12	-2/3	0	2/3	-1/12		
6		-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60	
8	1/280	-4/105	1/5	-4/5	0	4/5	-1/5	4/105	-1/280

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h)}{h^1} + \mathcal{O}(h^2)$$

11.3.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				1	-2	1			
4			-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12		
6		1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90	
8	-1/560	8/315	-1/5	8/5	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560

$n = 2$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

11.3.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				-1/2	1	0	-1	1/2	
4		1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8	
6	-7/240	3/10	-169/120	61/30	0	-61/30	169/120	-3/10	7/240

$n = 2$

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$