

Exercice4_SDZ

January 16, 2022

4. Résoudre le problème de diffusion $u_t = ku_{xx}$ sur $0 < x < \ell$, avec les conditions aux bords mixtes $u(0, t) = u_x(\ell, t) = 0$.

On pose l'équation séparée

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$T(t) = Ae^{-\lambda kt}$$

$$X(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$$

$$X(0) = A + 0 = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$X'(l) = B\beta \cos(\beta l) = 0 \longrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta l = n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On va choisir la dernière option pour éviter que le problème soit trop facile

$$\beta = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l} = \frac{\pi(n + \frac{1}{2})}{l}$$

$$X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right)$$

$$u(x, t) = T(t)X(x) = Ce^{-\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right) \quad C = AB$$