1 Équation d'onde

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

1.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k\left(u(x+h),t) - u(x,t)\right) - k\left(u(x,t) - u(x-h,t)\right)$$

$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec $N \to \infty$ et donc $h \to 0$ ($L = Nh$)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$\boxed{u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$

avec f et g des fonctions quelconques à une seule variable

1.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct =$ constante. Somme de deux fonctions : $g(x-ct)$ qui va à droite et $f(x+ct)$ qui va à gauche. La vitesse est c.

1.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

1.2 Avec conditions aux bords

$$u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

La solution est de la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\begin{cases} X(x) &= C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \\ T(t) &= A\cos(\beta ct) + B\sin(\beta ct) \end{cases}$$

λ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \qquad \beta > 0$