Exercice4_SDZ

January 15, 2022

1 Série 3 - Exercice 4 (SDZ)

4. Faire de même pour $\phi(x) = 1$ pour $x > 0$ et $\phi(x) = 3$ pour $x < 0$.

On commence par poser l'équation de base

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

On applique la fonction $\phi(y)$ et on trouve deux intégrales

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \left(3 \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \right)$$

Important ! : on va effectuer deux changements de variables différents pour simplifier les calculs par la suite (voir le résumé)

$$p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}} \qquad q = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \left(-3\sqrt{4kt} \int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp + \sqrt{4kt} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp \right)$$

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi k t}} \left(3 \underbrace{\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\int_0^\infty - \int_0^x} + \underbrace{\int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\int_0^\infty + \int_0^x} \right)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(4 \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} - 2 \int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp \right)$$

$$\boxed{u(x,t) = 2 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)}$$