1 Généralités

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

1.1 Dérivée

$$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

1.2 EDO du premier ordre

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \longrightarrow y = Ce^{kt}}$$

1.3 EDP du premier ordre

$$F\Big(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)\Big)$$
$$= F\Big(x, y, u, u_x, u_y\Big) = 0$$

1.3.1 Résolution

$$\boxed{a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}}$$

$au_x + bu_y$ est la dérivée directionnelle dans le sens du vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Tout ce qui suit à vérifier (ok pour les coefficients constants mais peut-être quelques modificiations pour les coefficients variables)

Coefficients constants Droite caractéristique : $bx - ay = c$ (solution constante sur ces droites)

$$u(x,y) = f(bt - ax)$$

Puis appliquer les conditions données.

Coefficients variables Trouver les **courbes caractéristiques** (solution constante sur les courbes) en résolvant l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ avec, par exemple :

$$\underbrace{\int \frac{dy}{dx} dx}_{y} = \underbrace{\int \frac{b(x,y)}{a(x,y)} dx}_{\cdots + c} \longrightarrow u(x,t) = f(\text{"}c\text{"})$$

OU

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = y \longrightarrow y = Ce^{x}$$
$$u(x,t) = f(\text{"}C\text{"}) = f(ye^{-x})$$

Autres cas : par exemple $3u_y + u_{xy}$ on effectue une substitution $v = u_y$ pour simplifier le problème. Combinaison linéaire de plusieurs solutions est aussi une solution

1.4 EDP du deuxième ordre

$$F\Big(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\Big) = 0$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Parabolique : $B^2 - 4AC = 0$

Hyperbolique : $B^2 - 4AC > 0$

Elliptique : $B^2 - 4AC < 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

1.5 Opérateurs

Linéarité

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

linéaire non linéaire

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0 \qquad u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$u_x + u_y = 0 \qquad u_x + yu_y = 0 \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x + uu_y = 0 \qquad u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \qquad u_t - ju_{xx} = 0$$

1.5.1 Homogénéité (seulement si linéaire)

Équation linéaire homogène $\mathcal{L}u = 0$

Équation linéaire non-homogène $\mathcal{L}u = g$

$$u_x + u_y + 1 = 0 \longrightarrow \text{inhomogène}$$

solution homogène + solution inhomogène = solution inhomogène

1.6 Conditions initiales

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

OU

$$u(x, t_0) = \phi(x) \qquad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

1.7 Conditions aux bords

Dirichlet : u est spécifié

Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}$ est spécifié

Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ est spécifié

1.8 Problèmes bien posés

Les problèmes bien posés (au sens d'Hadamard) sont constitués d'une EDP dans un domaine et avec les propriétés suivantes :

Existence : il existe au moins une solution $u(x,t)$ qui satisfait toutes les conditions

Unicité : il existe au plus une solution

Stabilité : La solution unique $u(x,t)$ dépende de manière stable des données (peu de changement → peu de variation)

1.9 Exemples

1. $$au_x + bu_y = 0 \qquad u(x,y) = f(bx-ay)$$

   Avec $bx - ay = c$ les droites caractéristiques

2. $$u_t + cu_x = 0$$

   Au temps $t+h$, déplacement de $c \cdot h$

3. $$u_{xx} = 0 \xrightarrow{\int dx} u_x = f(y) \xrightarrow{\int dx} u = g(y) + xf(y)$$

   $$u(x,y) = f(y)x + g(y)$$

4. $$u_{xx} + u = 0 \to u(x,y) = f(y)\cos(x) + g(y)\sin(x)$$

5. $$u_{xy} = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(y) + g(x)$$

   A noter que $f(y)$ et $g(x)$ sont les intégrales de fonctions intermédiaires.

6. $$u_x + yu_y = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(e^{-x}y)$$

1.10 Séparation de variables

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \quad \text{ou} \quad u(x,t) = X(x)T(t)$$

2 Équation d'onde

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

c est la vitesse de l'onde. Pour une corde on a

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Avec T la tension et ρ la densité

2.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k\left(u(x+h),t) - u(x,t)\right) - k\left(u(x,t) - u(x-h,t)\right)$$

$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec $N \to \infty$ et donc $h \to 0$ ($L = Nh$)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$\boxed{u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$

avec f et g des fonctions quelconques à une seule variable

2.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct =$ constante. Somme de deux fonctions : $g(x-ct)$ qui va à droite et $f(x+ct)$ qui va à gauche. La vitesse est c.

2.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$
$$u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

2.2 Conditions aux bords de Dirichlet

La solution est de la forme (séparation de variable)

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\begin{cases} X(x) &= C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \\ T(t) &= A\cos(\beta ct) + B\sin(\beta ct) \end{cases}$$

λ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \qquad \beta > 0$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\beta x) = \phi(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta c \sin(\beta x) = \psi(x)$$

Les fréquences sont $\frac{n\pi c}{l}$ avec la fondemantale en $n = 1$

2.2.1 Conditions aux bords $= 0$

$$\boxed{u_n(x,t) = \left(A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi c}{l}x\right)}$$

2.3 Conditions aux bords de Neumann

$$u(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}B_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

2.4 Conditions aux bords mixtes

$u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ par exemple.

$$\lambda_n = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\right)$$

3 Équation de diffusion

$$\boxed{u_t = u_{xx}}$$

Plus difficile à résoudre que l'équation d'ondes

3.1 Principe du maximum

Valeur maximale de $u(x,t)$ atteinte à $t = 0$ ou sur les côtés ($x = 0$ ou $x = l$). Pareil pour la valeur minimale

3.2 Résolution

1. Résoudre l'équation pour une solution $\phi(x)$ particulière
2. Construire la solution générale

3.3 Propriétés

1. Une **translation** de la solution est aussi une solution
$$u(x-n,t) \equiv u(x,t)$$
2. **Dérivée** d'une solution est aussi une solution
$$u_t \equiv u_x \equiv u_{xx} \equiv u$$
3. Une **combinaison linéaire** de solutions est une solution
4. Une **intégrale** est aussi une solution
$$\int S(x-n,t)g(y)dy \equiv u(x,t)$$
5. Une solution **dilatée** est aussi une solution
$$u(\sqrt{a}x, at) \equiv u(x,t)$$

3.4 Résolution sans conditions aux bords

On résout le problème simplifié avec

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$Q(x,t) = g(p) \qquad p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$$

Solution générale :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

1. Remplacer la condition initiale $\phi(x)$
2. Développer l'intégrale et effectuer un changement de variable si nécessaire (voir 11)
3. Exprimer en fonction de erf(...) si c'est nécessaire

Si nécessaire, on utilise la fonction d'erreur

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$\mathrm{erf}(x) = -\mathrm{erf}(-x) \qquad \text{(impaire)}$$

Si $\phi(y) = e^{\cdots}$ alors on peut utiliser la fonction suivante (à adapter) pour mettre tous les y dans le $()^2$

$$(y + 2kt - x)^2 = y^2 + 4k^2t^2 + x^2 + 4kty - 2xy - 4ktx$$

3.4.1 Notes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi}$$

Si on a deux intégrales (chacune avec un $\phi(y)$ différent, par exemple un ϕ par morceaux), alors on fait deux changements de variables différents : une fois $p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$ et une fois $p = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$

3.5 Résolution avec conditions aux bords

Par séparation de variables on a

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

4 Problèmes bornés

5 Fonctions harmoniques

6 Transformée de Laplace

7 Séries de Fourier

8 Différences finies

9 Différences finies

9.1 Différences finies progressives

9.1.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	1					
2	$-3/2$	2	$-1/2$				
3	$-11/6$	3	$-3/2$	$1/3$			
4	$-25/12$	4	-3	$4/3$	$1/4$		
5	$-137/60$	5	-5	$10/3$	$-5/4$	$1/5$	
6	$-49/20$	6	$-15/2$	$20/3$	$-15/4$	$6/5$	$-1/6$

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}f(x) + 2f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+2h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

9.1.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	1	-2	1				
2	2	-5	4	-1			
3	$35/12$	$-26/3$	$19/2$	$-14/3$	$11/12$		
4	$15/4$	$-77/6$	$107/6$	-13	$61/12$	$-5/6$	
5	$203/45$	$-87/5$	$117/4$	$-254/9$	$33/2$	$-27/5$	$137/180$

$n = 3$

$$f''(x) = \frac{\frac{35}{12}f(x) - \frac{26}{3}f(x+h) + \frac{19}{2}f(x+2h) - \frac{14}{3}f(x+3h) + \frac{11}{12}f(x+4h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

9.1.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	−1	3	−3	1			
2	−5/2	9	−12	7	−3/2		
3	−17/4	71/4	−59/2	49/2	−41/4	7/4	
4	−49/8	29	−461/8	62	−307/8	13	−15/8

$n = 1$

$$f'''(x) = \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^1)$$

9.2 Différences finies rétrogrades

1. Remplacer $x + kh$ par $x - kh$
2. Si dérivée paire : Pas de changement de coefficient
3. Si dérivée impaire : Changement du signe

9.3 Différences finies centrées

9.3.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				−1/2	0	1/2			
4			1/12	−2/3	0	2/3	−1/12		
6		−1/60	3/20	−3/4	0	3/4	−3/20	1/60	
8	1/280	−4/105	1/5	−4/5	0	4/5	−1/5	4/105	−1/280

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h)}{h^1} + \mathcal{O}(h^2)$$

9.3.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				1	−2	1			
4			−1/12	4/3	−5/2	4/3	−1/12		
6		1/90	−3/20	3/2	−49/18	3/2	−3/20	1/90	
8	−1/560	8/315	−1/5	8/5	−205/72	8/5	−1/5	8/315	−1/560

$n = 2$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

9.3.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2			−1/2	1	0	−1	1/2		
4		1/8	−1	13/8	0	−13/8	1	−1/8	
6	−7/240	3/10	−169/120	61/30	0	−61/30	169/120	−3/10	7/240

$n = 2$

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

10 Éléments finis

11 Autres

11.1 Intégration par partie

$$\int_a^b u'v = uv\Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

11.2 Changement de variable

11.2.1 Méthode 1

Lorsque la dérivée $\varphi'(t)$ est présente

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

11.2.2 Méthode 2

Si $\varphi'(t) = \varphi' =$ constante

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \frac{1}{\varphi'} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

11.3 Solutions générales

$$\begin{aligned}
X'' &= -\beta^2 X && \longrightarrow X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \\
X'' &= \beta^2 X && \longrightarrow X(x) = A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x) \\
X'' &= 0 && \longrightarrow X(x) = Ax + B
\end{aligned}$$