1 Différences finies

1.1 Différences finies progressives (downwind)

1.1.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	1					
2	$-3/2$	2	$-1/2$				
3	$-11/6$	3	$-3/2$	$1/3$			
4	$-25/12$	4	-3	$4/3$	$1/4$		
5	$-137/60$	5	-5	$10/3$	$-5/4$	$1/5$	
6	$-49/20$	6	$-15/2$	$20/3$	$-15/4$	$6/5$	$-1/6$

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}f(x) + 2f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+2h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

1.1.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	1	-2	1				
2	2	-5	4	-1			
3	$35/12$	$-26/3$	$19/2$	$-14/3$	$11/12$		
4	$15/4$	$-77/6$	$107/6$	-13	$61/12$	$-5/6$	
5	$203/45$	$-87/5$	$117/4$	$-254/9$	$33/2$	$-27/5$	$137/180$

$n = 3$

$$f''(x) = \frac{\frac{35}{12} f(x) - \frac{26}{3} f(x+h) + \frac{19}{2} f(x+2h) - \frac{14}{3} f(x+3h) + \frac{11}{12} f(x+4h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

1.1.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	3	-3	1			
2	$-5/2$	9	-12	7	$-3/2$		
3	$-17/4$	$71/4$	$-59/2$	$49/2$	$-41/4$	$7/4$	
4	$-49/8$	29	$-461/8$	62	$-307/8$	13	$-15/8$

$n = 1$

$$f'''(x) = \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^1)$$

1.2 Différences finies rétrogrades (upwind)

1. Remplacer $x + kh$ par $x - kh$
2. Si dérivée paire : Pas de changement de coefficient
3. Si dérivée impaire : Changement du signe

1.3 Différences finies centrées

1.3.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				$-1/2$	0	$1/2$			
4			$1/12$	$-2/3$	0	$2/3$	$-1/12$		
6		$-1/60$	$3/20$	$-3/4$	0	$3/4$	$-3/20$	$1/60$	
8	$1/280$	$-4/105$	$1/5$	$-4/5$	0	$4/5$	$-1/5$	$4/105$	$-1/280$

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h)}{h^1} + \mathcal{O}(h^2)$$

1.3.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				1	-2	1			
4			$-1/12$	$4/3$	$-5/2$	$4/3$	$-1/12$		
6		$1/90$	$-3/20$	$3/2$	$-49/18$	$3/2$	$-3/20$	$1/90$	
8	$-1/560$	$8/315$	$-1/5$	$8/5$	$-205/72$	$8/5$	$-1/5$	$8/315$	$-1/560$

$n = 2$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

1.3.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2			$-1/2$	1	0	-1	$1/2$		
4		$1/8$	-1	$13/8$	0	$-13/8$	1	$-1/8$	
6	$-7/240$	$3/10$	$-169/120$	$61/30$	0	$-61/30$	$169/120$	$-3/10$	$7/240$

$n = 2$

$$f'''(x) = \frac{\begin{array}{c}-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) \\ -f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)\end{array}}{h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

1.4 Différences finies pour EDP elliptiques + Dirichlet

$$-u''(x) = f(x) \qquad u(0) = \alpha \quad u(L) = \beta$$

,

$$u''(x_j) \approx \frac{u(x_j - h) - 2u(x_j) + u(x_j + h)}{h^2}$$

Ce qui donne un système d'équations linéaires

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$A_h \vec{x} = \vec{f}$$

les valeurs sont inversées car $-u''(x)$.

1.4.1 2D

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i - h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h, y_j)}{h^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{y(x_i, y_j - h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + h)}{h^2}$$

1.5 Différences finies pour EDP paraboliques

1. Discrétiser l'espace (sous-intervalles de largeur h)
2. Application des conditions aux bords puis recherche des valeurs aux nœuds en fonction du temps

$$x_i \to u_i(t)$$

$$u_i(t) \approx u(x_i, t)$$

3. On applique les conditions initiales

$$u_i(0) = u_0(x_i)$$

4. Résoudre le problème de Cauchy ($\frac{du}{dt} = g(x, t)$ en matrices)

1.6 Méthode d'Euler explicite

$$\frac{du}{dt} = F(t_0, u_0)$$

Vu d'un autre angle, on veut approcher

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) \approx \frac{u(t_i+\tau) - u(t_i)}{\tau}$$

1.7 Relation entre le pas de temps et le pas temporel

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\mu}$$

Avec μ la constante de l'équation $u_t - \mu u_{xx} = f(x,t)$

1.8 Équation de transport

$$v \leq \frac{h}{\tau} \longleftrightarrow \frac{v\tau}{h} = r \leq 1$$

C'est la condition CFL : avec downwind c'est impossible de résoudre le problème. Avec les upwind on peut y arriver parce qu'on utilise les valeurs précédentes (la condition sur v reste valable).
L'analyse de Von Neumann montre que le schéma centré n'est pas stable (même si la condition CFL est vérifiée).

1.9 Exemple Différences finies

$$-u''(x) = f(x) = (3x + x^2)e^x \textbf{Avec CB (D) = 0}$$
$$h = 1/5 \to 0\frac{1}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{4}{5}1$$

1.10 méthode d'Euler

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \tau\left(-A\vec{u}_k + \vec{b}(t_k)\right)$$

1.11 Méthode d'Euler implicite

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \tau\left(-A\vec{u}_{k+1} + \vec{b}(t_{k+1})\right)$$

Vérifier les formules... c'est illisible sur le polycop