Exercice3_SDZ

January 26, 2022

1 Série 7 - Exercice 3 (SDZ)

3. Trouver la solution de l'équation différentielle satisfaisant les conditions initiales en faisant appel à la transformée de Laplace.

   (a) $2u_t + u = 0, \qquad u(0) = 1$

   (b) $u_t - 3u = t + 4, \qquad u(0) = 2$

   (c) $u_{tt} - 9u = 0, \qquad u(0) = 1, \qquad u_t(0) = 1$

   (d) $u_{tt} - 3u_t - 4u = t^2, \qquad u(0) = 1, \qquad u_t(0) = 1$

1.1 (a)

$$2(U(s)s - u(0)) + U(s) = 0$$

$$U(s) = \frac{2u(0)}{2s+1} = \frac{2}{2s+1} = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$$

1.2 (b)

$$U(s) - s - u(0) - 3U(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s}$$

$$U(s)(s-3) = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s} + u(0)$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2(s-3)} + \frac{4}{s(s-3)} + \frac{u(0)}{s-3}$$

On sépare les termes simples (voir résumé)

$$U(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s^2} + \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{3} + u(0)\right)\frac{1}{s-3}$$

$$U(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s^2} - \frac{13}{9}\frac{1}{s} + \frac{31}{9}\frac{1}{s-3}$$

$$u(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{13}{9} + \frac{31}{9}e^{3t}$$

1.3 (c)

$$s^2U(s) - su(0) - u_t(0) - 9U(s) = 0$$
$$U(s)(s^2 - 9) = su(0) + u_t(0)$$
$$U(s) = \frac{su(0)}{s^2-9} + \frac{u_t(0)}{s^2-9}$$
$$U(s) = \frac{s}{s^2-9} + \frac{1}{3}\frac{3}{s^2-9}$$
$$u(t) = \cosh(3t) + \frac{1}{3}\sinh(3t)$$

1.4 (d)

$$s^2U(s) - su(0) - u_t(0) - 3(sU(s) - u(0)) - 4U(s) = \frac{2}{s^3}$$
$$U(s)(s^2 - 3s - 4) = \frac{2}{s^3} + su(0) + u_t(0) - 3u(0)$$
$$U(s) = \frac{2 + s^4 - 2s^3}{s^3(s-4)(s+1)}$$

long à finir…

$$U(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{13}{32}\frac{1}{s-4} - \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{3}{8}\frac{1}{s^2} - \frac{13}{32}\frac{1}{s}$$

$$u(t) = e^{-t} + \frac{13}{32}e^{4t} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{13}{32}$$