

# Exercice3\_SDZ

November 25, 2021

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

## 0.1 Exercice 3

**Problème 3.** Discretisez l'équation

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{sur } (0, 1)$$

où  $f(x) = (3x + x^2)e^x$ . Imposez des conditions au bord de type Dirichlet homogènes  $u(0) = u(1) = 0$ . Utilisez les différences finies (stencil à 3 points), avec la taille de maille constante  $h = 1/5$ .

*Solution: la solution analytique est  $u(x) = x(1-x)e^x$  et la solution par des différences finies est  $\vec{u} = (0.1908, 0.3503, 0.4287, 0.3497)^T \approx (u(h), u(2h), u(3h), u(4h))^T$ .*

On commence par poser nos équations

$$-u'' = f(x) \quad f(x) = (3x + x^2)e^x \quad u(0) = u(1) = 0 \quad h = \frac{1}{5}$$

On aura donc une fonction sur les points

$$0 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad 1$$

Avec 0 et 1 qui sont fixes à 0 L'approximation de la dérivée est donnée par

$$u''(x) \approx \frac{-u(x-h) + 2u(x) - u(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

On aura donc une équation de la forme

$$Au = \vec{f}$$

Avec  $u$  la valeurs aux différents points  $(u_0, \dots, u_n \quad n = 5)$  et  $\vec{f}$  les valeurs de  $f(x)$  aux différents points  $x$  Pour trouver  $u$  on fera

$$\tilde{u} = A^{-1}\vec{f}$$

Si on construit  $A$  on obtient (seulement pour les points de  $x_1$  à  $x_{n-1}$ )

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$\tilde{u} = A^{-1} \vec{f}$$

Il ne reste plus qu'à concatener pour obtenir le vecteur  $u$  complet (avec  $u(0)$  et  $u(1)$ )

$$u = [u(0), \tilde{u}, u(1)]$$

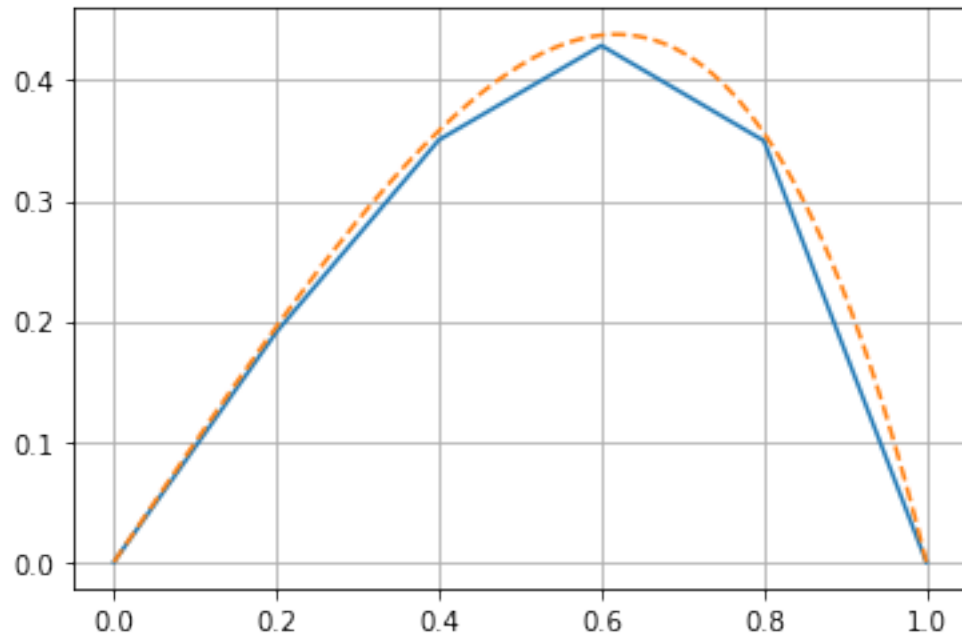
```
[5]: N = 6
x = np.linspace(0, 1, N)
xos = np.linspace(0,1,1000)
analytic = xos * (1-xos)*np.exp(xos)
h = 1/(N-1)

A = np.zeros([x.size-2, x.size-2])
A += -np.diagflat(np.ones(N-3), 1)
A += -np.diagflat(np.ones(N-3), -1)
A += 2*np.diag(np.ones(N-2), 0)
A = np.matrix(A / h**2)

def f(x):
    return (3*x+x**2)*np.exp(x)

f0 = f(x[1:-1])
u = np.zeros(N)
u[0] = 0
u[-1] = 0
u[1:-1] = A.I @ f0

plt.xticks(x)
plt.grid()
plt.plot(x,u.T)
plt.plot(xos, analytic, '--')
plt.show()
print("Valeurs calculées :")
for i, v in enumerate(u):
    print(f"x={i}/5 : {v:.4f}")
```



Valeurs calculées :

x=0/5 : 0.0000

x=1/5 : 0.1908

x=2/5 : 0.3503

x=3/5 : 0.4287

x=4/5 : 0.3497

x=5/5 : 0.0000

[ ]: