Exercice2_SDZ

January 15, 2022

1 Série 3 - Exercice 2 (SDZ)

2. Résoudre l'équation de diffusion avec la condition initiale

$$\phi(x) = 1, \qquad \text{pour } |x| \leq \ell \qquad \text{et} \qquad \phi(x) = 0, \qquad \text{pour } |x| > \ell.$$

Ecrire la réponse en utilisant la fonction $\mathcal{E}\mathrm{rf}(x)$.

On utilise la fonction de base

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

On applique la fonction $\phi(x)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$$

Puis on effectue un changement de variable $p(y) = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$

$$dy = -\sqrt{4kt}dp \qquad l \to \frac{x-l}{\sqrt{4kt}} \qquad -l \to \frac{x+l}{\sqrt{4kt}}$$

$$u(x,t) = \frac{-\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp$$

On inverse les bornes (et le signe devant l'intégrale)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp$$

On utilise la fonction erf

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{x+l}{\sqrt{4kt}} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{x-l}{\sqrt{4kt}} \right) \right)$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{erf}\left(\frac{x+l}{\sqrt{4kt}} \right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x-l}{\sqrt{4kt}} \right) \right)}$$

(même chose que le corrigé)