Exercice3_SDZ

January 15, 2022

1 Série 3 - Exercice 3 (SDZ)

3. Résoudre l'équation de diffusion avec la condition initiale $\phi(x) = e^{3x}$.

On commence par poser l'équation de base

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

On remplace par l'expression de $\phi(y)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{3y} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}+3y} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2-12kty}{4kt}} dy$$

On doit enlever le terme $12kty$ qui empêche de faire la simplification avec erf. On s'intéresse à la puissance de e et on utilise $(y+2kt-x)^2$ (dans le résumé)

$$-\frac{(x-y)^2-12kty}{4kt} = -\frac{x^2-2xy+y^2-12kty}{4kt}$$

$$(y+2kt-x)^2 = y^2+4k^2t^2+x^2+4kty-4ktx-2xy$$

ça ressemble un peu mais on aimerait $-12kty$ au lieu de $4kty$, on inverse x et y et on multiplie le terme central par 3

$$(x+6kt-y)^2 = y^2+36k^2t^2+x^2+12ktx-12kty-2xy$$

C'est parfait, on a plus qu'à adapter l'équation de base pour utiliser ce terme

$$-\frac{(x+6kt-y)^2-36k^2t^2-12ktx}{4kt} = -\frac{x^2-2xy+y^2-12kty}{4kt}$$

Maintenant qu'on a le bon terme, il suffit de séparer pour garder les y d'un seul côté

$$-\frac{(x+6kt-y)^2}{4kt} + \frac{36k^2t^2+12ktx}{4kt} = -\frac{(x+6kt-y)^2}{4kt} + 9kt + 3x$$

On a plus qu'à remettre tout ça dans l'équation de base et résoudre

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+6kt-y)^2}{4kt}+9kt+3x} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x+6kt-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2} e^{9kt+3x} dy$$

Comme le dernier terme ne dépend pas de y, on le sort

$$e^{9kt+3x}\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x+6kt-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2} dy$$

On effectue le changement de variable

$$p(y) = \frac{x+6kt-y}{\sqrt{4kt}} \longrightarrow \begin{cases} \infty \to -\infty \\ -\infty \to \infty \\ dy \to -\sqrt{4kt}dp \end{cases}$$

$$e^{9kt+3x}\frac{-\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-p^2} dy = e^{9kt+3x}\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-p^2} dy$$

On inverse les bornes (et le signe au début)

$$u(x,t) = e^{9kt+3x}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dy}_{\sqrt{\pi}}$$

On a donc finalement

$$\boxed{u(x,t) = e^{9kt+3x}}$$