Exercice 2SDZ

January 26, 2022

1 Série 5 - Exercice 2 (SDZ)

2. Résoudre $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dans le rectangle 0 < x < a, 0 < y < b avec les conditions aux bords:

$$u(0, y) = 0,$$
 $u(a, y) = 0$
 $u(x, 0) = 0,$ $u(x, b) = 1$

On commence par poser l'équation de base avec séparation de variables

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Donc

$$X'' + \lambda X = 0 \longrightarrow X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$$
$$Y'' - \lambda Y = 0 \longrightarrow Y(y) = C\cosh(\beta y) + D\sinh(\beta y)$$

On commence par appliquer les conditions aux bords sur x car c'est plus facile

$$X(0) = A = 0 \longrightarrow \boxed{A = 0}$$

$$X(a) = B\sin(\beta a) = 0 \longrightarrow \boxed{\beta = \frac{n\pi}{a}}$$

On fait ce choix au lieu de B=0 car sinon on a la solution u(x,y)=0 On applique ensuite les conditions aux bords sur y

$$Y(0) = C = 0 \longrightarrow \boxed{C = 0}$$

On ne va pas pouvoir faire une élimination simple vu que la dernière condition est 1. On a donc pour le moment :

$$u(x,y) = B \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) D \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

On peut remplacer BD = E et on sait que

$$u(x,b) = E \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = 1$$

On a une série de Fourier qu'il reste à déterminer

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = 1$$