# 1 Équation de diffusion

$$\boxed{u_t = u_{xx}}$$

Plus difficile à résoudre que l'équation d'ondes

## 1.1 Principe du maximum

Valeur maximale de $u(x,t)$ atteinte à $t=0$ ou sur les côtés ($x=0$ ou $x=l$). Pareil pour la valeur minimale

## 1.2 Résolution

1. Résoudre l'équation pour une solution $\phi(x)$ particulière
2. Construire la solution générale

## 1.3 Propriétés

1. Une **translation** de la solution est aussi une solution
$$u(x-n,t) \equiv u(x,t)$$
2. **Dérivée** d'une solution est aussi une solution
$$u_t \equiv u_x \equiv u_{xx} \equiv u$$
3. Une **combinaison linéaire** de solutions est une solution
4. Une **intégrale** est aussi une solution
$$\int S(x-n,t)g(y)dy \equiv u(x,t)$$
5. Une solution **dilatée** est aussi une solution
$$u(\sqrt{a}x, at) \equiv u(x,t)$$

## 1.4 Résolution sans conditions aux bords

On résout le problème simplifié avec

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$Q(x,t) = g(p) \qquad p = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$$

Solution générale :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

Si nécessaire, on utilise la fonction d'erreur

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$\mathrm{erf}(x) = -\mathrm{erf}(-x) \qquad \text{(impaire)}$$