

1 Équation d'onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

c est la vitesse de l'onde. Pour une corde on a

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Avec T la tension et ρ la densité

1.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k(u(x+h), t) - u(x, t) - k(u(x, t) - u(x-h, t))$$

$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec $N \rightarrow \infty$ et donc $h \rightarrow 0$ ($L = Nh$)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

avec f et g des fonctions quelconques à une seule variable

1.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct = \text{constante}$. Somme de deux fonctions : $g(x - ct)$ qui va à droite et $f(x + ct)$ qui va à gauche. La vitesse est c .

1.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) &= \phi(x) & u_t(x, 0) &= \psi(x) \\ u(x, t) &= \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \end{aligned}$$

1.2 Conditions aux bords

La solution est de la forme (séparation de variable)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= X(x)T(t) \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \\ \begin{cases} X(x) &= C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \\ T(t) &= A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

λ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \quad \beta > 0$

1.3 Conditions aux bords de Dirichlet

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\beta x) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta c \sin(\beta x) = \psi(x) \end{aligned}$$

Les fréquences sont $\frac{n\pi c}{l}$ avec la fondamentale en $n = 1$

1.3.1 Conditions aux bords = 0

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi c}{l}x\right)$$

1.4 Conditions aux bords de Neumann

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ u_t(x, 0) &= \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

1.5 Conditions aux bords mixtes

Appliquer les conditions à l'équation 1

$u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ par exemple.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{l^2} \\ X_n(x) &= \sin\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{l} x\right) \end{aligned}$$