Exercice5_SDZ

January 26, 2022

5. Résoudre le problème

$$-u'' = x^2, \qquad u(0) = 0, \qquad u(1) = 0$$

en utilisant la méthode de Ritz, la méthode des trapèzes avec $n = 2$ (pour le calcul des intégrales) et les fonctions de bases

$$N_1(x) = x(1-x), \qquad N_2(x) = x^2(1-x)$$

[5]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N1 = np.array([0, -1, 1, 0])
N2 = np.array([-1, 1, 0, 0])

def f(x):
    return -x**2
```

$$u'' = f(x) = -x^2 \qquad u(0) = u(1) = 0$$

On effectue une intégrale par partie pour diminuer l'ordre de l'équation

$$\int_0^L u''(x)v(x)dx = \left[u'(x)v(x)\right]_0^L - \int_0^L u'(x)v'(x)dx = -\int_0^L u'(x)v'(x)dx = \int_0^L f(x)v(x)dx$$

$$a_{11} = \int_0^L N_1'(x)N_1'(x)dx$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^L N_1'(x)N_2'(x)dx$$

$$a_{22} = \int_0^L N_2'(x)N_2'(x)dx$$

$$a_{11} \approx \frac{h}{2}\left(0 + 2f(h) + 0\right) = h(N_1'(h))^2$$

$$a_{12} \approx \frac{h}{2}\left(0 + 2f(h) + 0\right) = hN_1'(h)N_2'(h)$$

$$a_{22} \approx \frac{h}{2}\left(0 + 2f(h) + 0\right) = h(N_2'(h))^2$$

$$b_1 \approx hf(h)N_1(h)$$
$$b_2 \approx hf(h)N_2(h)$$

[26]:
```python
L = 1

h = L/2

#integral = np.polyint(np.polymul(np.polyder(N1), np.polyder(N1)))
#a11 = h*(np.polyval(integral, L) - np.polyval(integral, 0))
a11 = h/2*(np.polyval(np.polymul(np.polyder(N1), np.polyder(N1)), 0) + 2*np.
 ↪polyval(np.polymul(np.polyder(N1), np.polyder(N1)), h) + np.polyval(np.
 ↪polymul(np.polyder(N1), np.polyder(N1)), L))
print(a11)
a12 = a21 = h*np.polyval(np.polyder(N1), h)*np.polyval(np.polyder(N2), h)
a22 = h*np.polyval(np.polyder(N2), h)**2

b1 = h * f(h) * np.polyval(N1, h)
b2 = h * f(h) * np.polyval(N2, h)
```

```
0.5
```

[25]:
```python
A = np.matrix([[a11, a12], [a21, a22]])
b = np.matrix([[b1],[b2]])
print(A)
print(2/15)
c = A.I @ b
print(c)
```

```
[[0.03125 0.     ]
 [0.      0.03125]]
0.13333333333333333
[[-1. ]
 [-0.5]]
```

[ ]:
```python
# La correction est fausse, elle suppose qu'on a calculé les intégrales␣
 ↪littéralement (et pas avec la méthode des trapèzes)
```