Exercice1_SDZ

November 25, 2021

1 PartDiff - Série 8

1.1 Exercice 1

Problème 1. Soit $f(x)$ une fonction lisse (4 fois continûment dérivable, par ex $f(x) = \sin(x)$, ou $f(x) = e^x$). On approche la valeur de $f'(x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$ du domaine de définition de $f(x)$ et un $h > 0$ petit par les formules aux différences finies

$$y_0' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{et} \qquad y_1' = \frac{f(x+2\,h) - f(x)}{2\,h}$$

qui sont d'ordre 1 de précision en h.

On prend ensuite une combinaison convexe de y_0' et y_1': pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose

$$y_\alpha' = (1-\alpha)\, y_0' + \alpha\, y_1'.$$

a) Les formules y_0' resp. y_1' sont-ils des schémas aux différences finies centrées, ou décentrés?

b) Trouvez tous les $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels y_α' est aussi une valeur approchée de $f'(x)$ (qui converge vers la valeur de $f'(x)$ quand $h \to 0+$)

c) En combinant dans y_α' les deux schémas y_0' resp. y_1' d'ordre 1, pour quel $\alpha \in \mathbb{R}$ obtient-on un y_α' qui approche nettement mieux la vraie valeur $f'(x)$, avec l'ordre de précision 2 en h?

d) Prenez la fonction $f(x) = \frac{3\,x-2}{2\,x-1}$, pour laquelle $f'(x) = \frac{1}{(2\,x-1)^2}$. Pour $x = 1$ et $h = 0.01$ comparez l'erreur des schémas y_0', y_1' et y_α' pour le(s) α de c).

Justifiez votre réponse en b) et c) par le développement de Taylor.

1.1.1 (a)

Ce sont des différences finies décentrées

1.1.2 (b)

Avec $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ (c'est à dire annuler une des deux fonctions) ### (c) On commence par exprimer y_α' en fonction des f et de α

$$y_\alpha' = \frac{(1-\alpha)(f(x+h) - f(x)) + \alpha\left(\frac{1}{2}f(x+2h) - \frac{1}{2}f(x)\right)}{h}$$

$$y'_\alpha = \frac{\left(-1+\frac{1}{2}\alpha\right) f(x) + (1-\alpha) f(x+h) + \frac{1}{2}\alpha f(x+2h)}{h}$$

La seule possibilité est de copier le pattern pour $f'(x)$ en différences finies progressives d'ordre 2 : $-\frac{3}{2}$, 2, $-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} -1+\frac{1}{2}\alpha & = -\frac{3}{2} \\ 1-\alpha & = 2 \\ \frac{1}{2}\alpha & = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Avec $\alpha = -1$, on respecte ces égalités. Donc

$$\boxed{\alpha = -1}$$

1.1.3 (d)

$$f'(1) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1$$

$$y'_0(1) = 0.980$$

$$y'_1(1) = 0.962$$

On remarque que la première est bien plus précise (c'est comme si h était 2x plus grand dans le deuxième exemple). Donc l'erreur devrait être deux fois plus grande En effet, on remarque un facteur de 1.96 entre les deux erreurs

$$y'_\alpha(1) = 0.999$$

La précision de y'_α est encore meilleure