

Exercice2_SDZ

November 25, 2021

0.1 Exercice 2

Problème 2. En utilisant le développement de Taylor, analysez l'erreur de troncature du schéma centré $y''(x_0)$, qui donne une valeur approchée de $f''(x_0)$ d'une fonction $f(x)$ suffisamment régulière (différentiable).

$$y''(x_0) = \frac{2}{h_W(h_W + h_E)} f(x_0 - h_W) - \frac{2}{h_W h_E} f(x_0) + \frac{2}{h_E(h_W + h_E)} f(x_0 + h_E)$$

Montrez que

$$|y''(x_0) - f''(x_0)| \approx \mathcal{O}(h^2)$$

pour $h_W = h_E = h$ et

$$|y''(x_0) - f''(x_0)| \approx \mathcal{O}(h)$$

pour $h_W \neq h_E$.

Taylor :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Ce qui donne au point x_0

$$P_n(x)_{x_0} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots = f(x)$$