1 Généralités

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

1.1 Dérivée

$$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

1.2 EDO du premier ordre

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \longrightarrow y = Ce^{kt}}$$

1.3 EDP du premier ordre

$$F\Big(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)\Big) = F\Big(x, y, u, u_x, u_y\Big) = 0$$

1.3.1 Résolution

$$\boxed{a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}}$$

$au_x + bu_y$ est la dérivée directionnelle dans le sens du vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Tout ce qui suit à vérifier (ok pour les coefficients constants mais peut-être quelques modificiations pour les coefficients variables)

Coefficients constants Droite caractéristique : $bx - ay = c$ (solution constante sur ces droites)

$$u(x,y) = f(bt - ax)$$

Puis appliquer les conditions données.

Coefficients variables Trouver les **courbes caractéristiques** (solution constante sur les courbes) en résolvant l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ avec, par exemple :

$$\underbrace{\int \frac{dy}{dx} dx}_{y} = \underbrace{\int \frac{b(x,y)}{a(x,y)} dx}_{\cdots + c} \quad \longrightarrow \quad u(x,t) = f(\text{"}c\text{"})$$

OU

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = y \longrightarrow y = Ce^x$$
$$u(x,t) = f(\text{"}C\text{"}) = f(ye^{-x})$$

Autres cas : par exemple $3u_y + u_{xy}$ on effectue une substitution $v = u_y$ pour simplifier le problème.
Combinaison linéaire de plusieurs solutions est aussi une solution

1.4 EDP du deuxième ordre

$$F\Big(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\Big) = 0$$
$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Parabolique : $B^2 - 4AC = 0$

Hyperbolique : $B^2 - 4AC > 0$

Elliptique : $B^2 - 4AC < 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

1.5 Opérateurs

Linéarité

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

linéaire non linéaire

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0 \qquad u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$u_x + u_y = 0 \qquad u_x + yu_y = 0 \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x + uu_y = 0 \qquad u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \qquad u_t - ju_{xx} = 0$$

1.5.1 Homogénéité (seulement si linéaire)

Équation linéaire homogène $\mathcal{L}u = 0$

Équation linéaire non-homogène $\mathcal{L}u = g$

$$u_x + u_y + 1 = 0 \longrightarrow \text{ inhomogène}$$

solution homogène + solution inhomogène = solution inhomogène

1.6 Conditions initiales

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

OU

$$u(x, t_0) = \phi(x) \qquad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

1.7 Conditions aux bords

Dirichlet : u est spécifié

Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}$ est spécifié

Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ est spécifié

1.8 Problèmes bien posés

Les problèmes bien posés (au sens d'Hadamard) sont constitués d'une EDP dans un domaine et avec les propriétés suivantes :

Existence : il existe au moins une solution $u(x, t)$ qui satisfait toutes les conditions

Unicité : il existe au plus une solution

Stabilité : La solution unique $u(x, t)$ dépende de manière stable des données (peu de changement $\rightarrow$ peu de variation)

1.9 Exemples

1. $$au_x + bu_y = 0 \qquad u(x, y) = f(bx - ay)$$

   Avec $bx - ay = c$ les droites caractéristiques

2. $$u_t + cu_x = 0$$

   Au temps $t + h$, déplacement de $c \cdot h$

3. $$u_{xx} = 0 \xrightarrow{\int dx} u_x = f(y) \xrightarrow{\int dx} u = g(y) + xf(y)$$
   $$u(x, y) = f(y)x + g(y)$$

4. $$u_{xx} + u = 0 \to u(x,y) = f(y)\cos(x) + g(y)\sin(x)$$

5. $$u_{xy} = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(y) + g(x)$$

   A noter que $f(y)$ et $g(x)$ sont les intégrales de fonctions intermédiaires.

6. $$u_x + yu_y = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(e^{-x}y)$$

1.10 Séparation de variables

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \quad \text{ou} \quad u(x,t) = X(x)T(t)$$