

1 Généralités

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

1.1 Dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

1.2 EDO du premier ordre

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \rightarrow y = Ce^{kt}}$$

1.3 EDP du premier ordre

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))$$

$$= F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

1.3.1 Résolution

$$\boxed{a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}}$$

$au_x + bu_y$ est la dérivée directionnelle dans le sens du vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Tout ce qui suit à vérifier (ok pour les coefficients constants mais peut-être quelques modifications pour les coefficients variables)

Coefficients constants Droite caractéristique : $bx - ay = c$ (solution constante sur ces droites)

$$u(x, y) = f(bt - ax)$$

Puis appliquer les conditions données.

Coefficients variables Trouver les **courbes caractéristiques** (solution constante sur les courbes) en résolvant l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ avec, par exemple :

$$\underbrace{\int \frac{dy}{dx} dx}_y = \underbrace{\int \frac{b(x, y)}{a(x, y)} dx}_{\dots + c} \rightarrow u(x, t) = f("c")$$

OU

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = y \rightarrow y = Ce^x$$

$$u(x, t) = f("C") = f(ye^{-x})$$

Autres cas : par exemple $3u_y + u_{xy}$ on effectue une substitution $v = u_y$ pour simplifier le problème. Combinaison linéaire de plusieurs solutions est aussi une solution

1.4 EDP du deuxième ordre

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Parabolique : $B^2 - 4AC = 0$

Hyperbolique : $B^2 - 4AC > 0$

Elliptique : $B^2 - 4AC < 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

1.5 Opérateurs

Linéarité

$$\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

linéaire

non linéaire

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0 \quad u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$u_x + u_y = 0 \quad u_x + yu_y = 0 \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x + uu_y = 0 \quad u_{tt} + u_{xxx} = 0 \quad u_t - ju_{xx} = 0$$

1.5.1 Homogénéité (seulement si linéaire)

Équation linéaire homogène $\mathcal{L}u = 0$

Équation linéaire non-homogène $\mathcal{L}u = g$

$$u_x + u_y + 1 = 0 \rightarrow \text{inhomogène}$$

solution homogène + solution inhomogène = solution inhomogène

1.6 Conditions initiales

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

OU

$$u(x, t_0) = \phi(x) \quad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

1.7 Conditions aux bords

Dirichlet : u est spécifié

Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}$ est spécifié

Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ est spécifié

1.8 Problèmes bien posés

Les problèmes bien posés (au sens d'Hadamard) sont constitués d'une EDP dans un domaine et avec les propriétés suivantes :

Existence : il existe au moins une solution $u(x, t)$ qui satisfait toutes les conditions

Unicité : il existe au plus une solution

Stabilité : La solution unique $u(x, t)$ dépende de manière stable des données (peu de changement \rightarrow peu de variation)

1.9 Exemples

1.

$$au_x + bu_y = 0 \quad u(x, y) = f(bx - ay)$$

Avec $bx - ay = c$ les droites caractéristiques

2.

$$u_t + cu_x = 0$$

Au temps $t + h$, déplacement de $c \cdot h$

3.

$$u_{xx} = 0 \xrightarrow{f dx} u_x = f(y) \xrightarrow{f dx} u = g(y) + xf(y)$$

$$u(x, y) = f(y)x + g(y)$$

4.

$$u_{xx} + u = 0 \rightarrow u(x, y) = f(y) \cos(x) + g(y) \sin(x)$$

5.

$$u_{xy} = 0 \rightarrow u(x, y) = f(y) + g(x)$$

A noter que $f(y)$ et $g(x)$ sont les intégrales de fonctions intermédiaires.

6.

$$u_x + yu_y = 0 \rightarrow u(x, y) = f(e^{-x}y)$$

1.10 Séparation de variables

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad \text{ou} \quad u(x, t) = X(x)T(t)$$

2 Équation d'onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

c est la vitesse de l'onde. Pour une corde on a

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Avec T la tension et ρ la densité

2.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k(u(x+h, t) - u(x, t)) - k(u(x, t) - u(x-h, t))$$

$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec $N \rightarrow \infty$ et donc $h \rightarrow 0$ ($L = Nh$)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

avec f et g des fonctions quelconques à une seule variable

2.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct = \text{constante}$. Somme de deux fonctions : $g(x - ct)$ qui va à droite et $f(x + ct)$ qui va à gauche. La vitesse est c .

2.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

2.2 Conditions aux bords

La solution est de la forme (séparation de variable)

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X(x) &= C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \\ T(t) &= A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \end{cases} \quad (1)$$

λ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \quad \beta > 0$

2.3 Conditions aux bords de Dirichlet

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\beta x) = \phi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta c \sin(\beta x) = \psi(x)$$

Les fréquences sont $\frac{n\pi c}{l}$ avec la fondamentale en $n = 1$

2.3.1 Conditions aux bords = 0

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi c}{l}x\right)$$

2.4 Conditions aux bords de Neumann

Solution générale pour un problème avec conditions aux bords de Neumann $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ (à utiliser dans l'examen) :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Avec les conditions initiales

$$\phi(x) = u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

2.5 Conditions aux bords mixtes

Appliquer les conditions à l'équation 1

$u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ par exemple.

$$\lambda_n = \frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2}$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{l}x\right)$$

3 Équation de diffusion

$$u_t = u_{xx}$$

Plus difficile à résoudre que l'équation d'ondes

3.1 Principe du maximum

Valeur maximale de $u(x, t)$ atteinte à $t = 0$ ou sur les côtés ($x = 0$ ou $x = l$). Pareil pour la valeur minimale

3.2 Résolution

1. Résoudre l'équation pour une solution $\phi(x)$ particulière
2. Construire la solution générale

3.3 Propriétés

1. Une **translation** de la solution est aussi une solution

$$u(x - n, t) \equiv u(x, t)$$

2. **Dérivée** d'une solution est aussi une solution

$$u_t \equiv u_x \equiv u_{xx} \equiv u$$

3. Une **combinaison linéaire** de solutions est une solution

4. Une **intégrale** est aussi une solution

$$\int S(x - n, t) g(y) dy \equiv u(x, t)$$

5. Une solution **dilatée** est aussi une solution

$$u(\sqrt{ax}, at) \equiv u(x, t)$$

3.4 Résolution sans conditions aux bords

On résout le problème simplifié avec

$$Q(x, 0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$Q(x, t) = g(p) \quad p = \frac{x - y}{\sqrt{4kt}}$$

Solution générale :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

1. Remplacer la condition initiale $\phi(x)$
2. Développer l'intégrale et effectuer un changement de variable si nécessaire (voir 10)
3. Exprimer en fonction de $\text{erf}(\dots)$ si c'est nécessaire

Si nécessaire, on utilise la fonction d'erreur

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$\text{erf}(x) = -\text{erf}(-x) \quad (\text{impaire})$$

Si $\phi(y) = e^{\dots}$ alors on peut utiliser la fonction suivante (à adapter) pour mettre tous les y dans le $()^2$

$$(y + 2kt - x)^2 = y^2 + 4k^2t^2 + x^2 + 4kty - 2xy - 4ktx$$

3.4.1 Notes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi}$$

Si on a deux intégrales (chacune avec un $\phi(y)$ différent, par exemple un ϕ par morceaux), alors on fait deux changements de variables différents : une fois $p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$ et une fois $p = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$

3.5 Résolution avec conditions aux bords

Par séparation de variables on a

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} T(t) = Ae^{-\lambda kt} \\ X(x) = B \cos(\beta x) + C \sin(\beta x) \end{cases} \quad \lambda = \beta^2$$

Résoudre en appliquant les conditions aux bords à l'équation ci-dessus.

Si il est possible d'exprimer $u_{n=0}(x, t)$ avec une constante, on la nomme $\frac{A_0}{2}$

4 Fonctions harmoniques

Laplacien

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

En coordonnées polaires on a

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r$$

4.1 Principe du maximum / minimum

Le maximum et le minimum de la fonction sont atteints sur les bords du domaine

4.2 Procédure

1. Séparation des variables

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \longrightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$$

2. Insertion des conditions aux bords
3. Somme de la série
4. Ajout du terme inhomogène ou conditions aux bords

4.3 Autres

Polynôme quadratique en x et y :

$$u(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

5 Transformée de Laplace

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

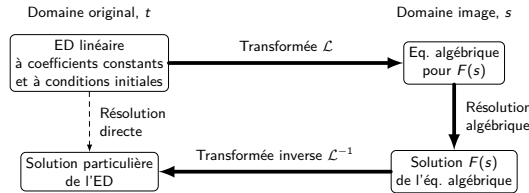
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
\sqrt{t}	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}s^{-1/2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$H(t-b)$	$\frac{1}{s}e^{-bs}$
$\delta(t-b)$	e^{-bs}
$a(4\pi t^3)^{-1/2}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
$(\pi t)^{-1/2}e^{-a^2/4t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-a\sqrt{s}}$
$1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{\sqrt{4t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$

5.1 Propriétés

Fonction	Transformée
(i) $af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
(ii) $\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
(iii) $\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
(iv) $e^{bt}f(t)$	$F(s-b)$
(v) $\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s')ds'$
(vi) $tf(t)$	$-\frac{dF}{ds}$
(vii) $H(t-b)f(t-b)$	$e^{-bs}F(s)$
(viii) $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
(ix) $\int_0^t g(t-t')f(t')dt'$	$F(s)G(s)$

5.2 Méthode



6 Séries de Fourier

6.1 Séries de Fourier en sinus

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

6.2 Séries de Fourier en cosinus

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Le $1/2$ dans la série pour A_0 vient de la

Important : Si la fonction $\phi(x)$ est paire, on peut se concentrer sur la moitié uniquement (la valeur de l est ce nouvel intervalle). Ceci permet de beaucoup simplifier le problème.

6.3 Séries de Fourier

Sur $] -l, l[$

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

7 Différences finies

8 Différences finies

8.1 Différences finies progressives

8.1.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	1					
2	-3/2	2	-1/2				
3	-11/6	3	-3/2	1/3			
4	-25/12	4	-3	4/3	1/4		
5	-137/60	5	-5	10/3	-5/4	1/5	
6	-49/20	6	-15/2	20/3	-15/4	6/5	-1/6

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}f(x) + 2f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+2h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

8.1.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	1	-2	1				
2	2	-5	4	-1			
3	35/12	-26/3	19/2	-14/3	11/12		
4	15/4	-77/6	107/6	-13	61/12	-5/6	
5	203/45	-87/5	117/4	-254/9	33/2	-27/5	137/180

$n = 3$

$$f'''(x) = \frac{\frac{35}{12}f(x) - \frac{26}{3}f(x+h) + \frac{19}{2}f(x+2h) - \frac{14}{3}f(x+3h) + \frac{11}{12}f(x+4h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

8.1.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	3	-3	1			
2	-5/2	9	-12	7	-3/2		
3	-17/4	71/4	-59/2	49/2	-41/4	7/4	
4	-49/8	29	-461/8	62	-307/8	13	-15/8

$n = 1$

$$f'''(x) = \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^1)$$

8.2 Différences finies rétrogrades

1. Remplacer $x + kh$ par $x - kh$
2. Si dérivée paire : Pas de changement de coefficient
3. Si dérivée impaire : Changement du signe

8.3 Différences finies centrées

8.3.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				-1/2	0	1/2			
4			1/12	-2/3	0	2/3	-1/12		
6		-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60	
8	1/280	-4/105	1/5	-4/5	0	4/5	-1/5	4/105	-1/280

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h)}{h^1} + \mathcal{O}(h^2)$$

8.3.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				1	-2	1			
4			-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12		
6		1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90	
8	-1/560	8/315	-1/5	8/5	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560

$n = 2$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

8.3.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2			-1/2	1	0	-1	1/2		
4		1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8	
6	-7/240	3/10	-169/120	61/30	0	-61/30	169/120	-3/10	7/240

$n = 2$

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

9 Éléments finis

10 Autres

10.1 Intégration par partie

$$\int_a^b u'v = uv \Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

10.1.1 exemple

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \cdot \sin(n\pi x) dx &= \int_0^1 f dg = fg \Big|_0^1 - \int_0^1 g df \\ f &= x^2, dg = \sin(n\pi x) dx \\ df &= 2x \cdot dx, g = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \\ &= -\frac{x^2 \cdot \cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x \cdot \cos(n\pi x)}{n\pi} \end{aligned}$$

10.2 Changement de variable

10.2.1 Méthode 1

Lorsque la dérivée $\varphi'(t)$ est présente

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

10.2.2 Méthode 2

Si $\varphi'(t) = \varphi' = \text{constante}$

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \frac{1}{\varphi'} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

10.3 Solutions générales

$$\begin{aligned} X'' &= -\beta^2 X &\longrightarrow X(x) &= A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \\ X'' &= \beta^2 X &\longrightarrow X(x) &= A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) \\ X'' &= 0 &\longrightarrow X(x) &= Ax + B \end{aligned}$$

10.4 Équation d'euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

10.5 Séparation en éléments simples

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x+1)}{(x-1)(x-0.25)(x-0.5)} \\ &\downarrow \\ f(x) &= \frac{x(x+1)}{(x-1)(x-0.25)(x-0.5)} \\ &\downarrow \\ f(x) &= \frac{R_1}{(x-1)} + \frac{R_2}{(x-0.25)} + \frac{R_3}{(x-0.5)} \end{aligned}$$

Attention ! Pas de $()^n$ dans le dénominateur.
 Sinon résolution à la main

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1(1+1)}{(1-0.25)(1-0.5)} \\ R_2 &= \frac{0.25(0.25+1)}{(0.25-1)(0.25-0.5)} \\ R_3 &= \frac{0.5(0.5+1)}{(0.5-1)(0.5-0.25)} \end{aligned}$$