# 1 Généralités

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

## 1.1 Dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

## 1.2 EDO du premier ordre

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \longrightarrow y = Ce^{kt}}$$

## 1.3 EDP du premier ordre

$$F\Big(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)\Big)$$
$$= F\Big(x, y, u, u_x, u_y\Big) = 0$$

## 1.4 EDP du deuxième ordre

$$F\Big(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\Big) = 0$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

**Parabolique** : $B^2 - 4AC = 0$

**Hyperbolique** : $B^2 - 4AC > 0$

**Elliptique** : $B^2 - 4AC < 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

## 1.5 Opérateurs

**Linéarité**

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

linéaire non linéaire

$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

$u_x + u_y = 0$ $u_x + yu_y = 0$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x + uu_y = 0$ $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ $u_t - ju_{xx} = 0$

**Équation linéaire homogène** $\mathcal{L}u = 0$

**Équation linéaire non-homogène** $\mathcal{L}u = g$

$$u_x + u_y + 1 = 0 \longrightarrow \text{ inhomogène}$$

solution homogène + solution inhomogène = solution inhomogène

$$\boxed{a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}}$$

Puis faire

$$\underbrace{\int \frac{dy}{dx} dx}_{y} = \underbrace{\int \frac{b(x,y)}{a(x,y)} dx}_{\cdots + c}$$

Combinaison linéaire de plusieurs solutions est aussi une solution

## 1.6 Conditions initiales

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

OU

$$u(x, t_0) = \phi(x) \qquad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

## 1.7 Conditions aux bords

**Dirichlet** : $u$ est spécifié

**Neumann** : $\frac{\partial u}{\partial n}$ est spécifié

**Robin** : $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ est spécifié

## 1.8 Problèmes bien posés

Les problèmes bien posés (au sens d'Hadamard) sont constitués d'une EDP dans un domaine et avec les propriétés suivantes :

**Existence** : il existe au moins une solution $u(x,t)$ qui satisfait toutes les conditions

**Unicité** : il existe au plus une solution

**Stabilité** : La solution unique $u(x,t)$ dépende de manière stable des données (peu de changement $\rightarrow$ peu de variation)

## 1.9 Exemples

1. $$au_x + bu_y = 0 \qquad u(x,y) = f(bx - ay)$$

   Avec $bx - ay = c$ les droites caractéristiques

2. $$u_t + cu_x = 0$$

   Au temps $t + h$, déplacement de $c \cdot h$

3. $$u_{xx} = 0 \xrightarrow{\int dx} u_x = f(y) \xrightarrow{\int dx} u = g(y) + xf(y)$$

   $$u(x,y) = f(y)x + g(y)$$

4. $$u_{xx} + u = 0 \rightarrow u(x,y) = f(y)\cos(x) + g(y)\sin(x)$$

5. $$u_{xy} = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(y) + g(x)$$

   A noter que $f(y)$ et $g(x)$ sont les intégrales de fonctions intermédiaires.

6. $$u_x + yu_y = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(e^{-x}y)$$

### 1.10 Séparation de variables

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \quad \text{ou} \quad u(x,t) = X(x)T(t)$$

# 2 Équation d'onde

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

## 2.1 1D

Modèle ressorts-masses

$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)$$

et

$$F_{\text{hooke}} = k\left(u(x+h),t) - u(x,t)\right) - k\left(u(x,t) - u(x-h,t)\right)$$

$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$

Avec $N \to \infty$ et donc $h \to 0$ ($L = Nh$)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Solution générale :

$$\boxed{u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$

avec $f$ et $g$ des fonctions quelconques à une seule variable

### 2.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct =$ constante. Somme de deux fonctions : $g(x-ct)$ qui va à droite et $f(x+ct)$ qui va à gauche. La vitesse est $c$.

### 2.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

## 2.2 Avec conditions aux bords

La solution est de la forme (séparation de variable)

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\begin{cases} X(x) &= C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \\ T(t) &= A\cos(\beta ct) + B\sin(\beta ct) \end{cases}$$

$\lambda$ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \qquad \beta > 0$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\beta x) = \phi(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta c \sin(\beta x) = \psi(x)$$

Les fréquences sont $\frac{n\pi c}{l}$ avec la fondemantale en $n = 1$

# 3 Équation de diffusion

$$\boxed{u_t = u_{xx}}$$

Plus difficile à résoudre que l'équation d'ondes

## 3.1 Principe du maximum

Valeur maximale de $u(x,t)$ atteinte à $t = 0$ ou sur les côtés ($x = 0$ ou $x = l$). Pareil pour la valeur minimale

## 3.2 Résolution

1. Résoudre l'équation pour une solution $\phi(x)$ particulière
2. Construire la solution générale

## 3.3 Propriétés

1. Une **translation** de la solution est aussi une solution
$$u(x-n,t) \equiv u(x,t)$$
2. **Dérivée** d'une solution est aussi une solution
$$u_t \equiv u_x \equiv u_{xx} \equiv u$$
3. Une **combinaison linéaire** de solutions est une solution
4. Une **intégrale** est aussi une solution
$$\int S(x-n,t)g(y)dy \equiv u(x,t)$$
5. Une solution **dilatée** est aussi une solution
$$u(\sqrt{a}x, at) \equiv u(x,t)$$

## 3.4 Résolution sans conditions aux bords

On résout le problème simplifié avec

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$Q(x,t) = g(p) \qquad p = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$$

Solution générale :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\phi(y)dy$$

1. Remplacer la condition initiale $\phi(x)$
2. Développer l'intégrale et effectuer un changement de variable si nécessaire (voir 11)
3. Exprimer en fonction de erf(...)

Si nécessaire, on utilise la fonction d'erreur

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-p^2}dp$$

$$\text{erf}(x) = -\text{erf}(-x) \qquad \text{(impaire)}$$

# 4 Problèmes bornés

# 5 Séries de Fourier

# 6 Fonctions harmoniques

# 7 Transformée de Laplace

# 8 Différences finies

# 9 Différences finies

## 9.1 Différences finies progressives

### 9.1.1 $f'(x)$

| Ordre | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ | $f(x+3h)$ | $f(x+4h)$ | $f(x+5h)$ | $f(x+6h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | | | | | |
| 2 | $-3/2$ | 2 | $-1/2$ | | | | |
| 3 | $-11/6$ | 3 | $-3/2$ | $1/3$ | | | |
| 4 | $-25/12$ | 4 | $-3$ | $4/3$ | $1/4$ | | |
| 5 | $-137/60$ | 5 | $-5$ | $10/3$ | $-5/4$ | $1/5$ | |
| 6 | $-49/20$ | 6 | $-15/2$ | $20/3$ | $-15/4$ | $6/5$ | $-1/6$ |

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}f(x) + 2f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+2h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

### 9.1.2 $f''(x)$

| Ordre | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ | $f(x+3h)$ | $f(x+4h)$ | $f(x+5h)$ | $f(x+6h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-2$ | 1 | | | | |
| 2 | 2 | $-5$ | 4 | $-1$ | | | |
| 3 | $35/12$ | $-26/3$ | $19/2$ | $-14/3$ | $11/12$ | | |
| 4 | $15/4$ | $-77/6$ | $107/6$ | $-13$ | $61/12$ | $-5/6$ | |
| 5 | $203/45$ | $-87/5$ | $117/4$ | $-254/9$ | $33/2$ | $-27/5$ | $137/180$ |

$n = 3$

$$f''(x) = \frac{\begin{array}{l}\frac{35}{12}f(x) \\ \quad -\frac{26}{3}f(x+h) + \frac{19}{2}f(x+2h) \\ \quad -\frac{14}{3}f(x+3h) + \frac{11}{12}f(x+4h)\end{array}}{h^3} + \mathcal{O}(h^3)$$

### 9.1.3 $f'''(x)$

| Ordre | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ | $f(x+3h)$ | $f(x+4h)$ | $f(x+5h)$ | $f(x+6h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 3 | $-3$ | 1 | | | |
| 2 | $-5/2$ | 9 | $-12$ | 7 | $-3/2$ | | |
| 3 | $-17/4$ | $71/4$ | $-59/2$ | $49/2$ | $-41/4$ | $7/4$ | |
| 4 | $-49/8$ | 29 | $-461/8$ | 62 | $-307/8$ | 13 | $-15/8$ |

$n = 1$

$$f'''(x) = \frac{\begin{array}{l}-f(x) + 3f(x+h) \\ \quad -3f(x+2h) + f(x+3h)\end{array}}{h^3} + \mathcal{O}(h^1)$$

## 9.2 Différences finies rétrogrades

1. Remplacer $x + kh$ par $x - kh$
2. Si dérivée paire : Pas de changement de coefficient
3. Si dérivée impaire : Changement du signe

## 9.3 Différences finies centrées

### 9.3.1 $f'(x)$

| Ordre | $f(x-4h)$ | $f(x-3h)$ | $f(x-2h)$ | $f(x-h)$ | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ | $f(x+3h)$ | $f(x+4h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | $-1/2$ | 0 | $1/2$ | | | |
| 4 | | | $1/12$ | $-2/3$ | 0 | $2/3$ | $-1/12$ | | |
| 6 | | $-1/60$ | $3/20$ | $-3/4$ | 0 | $3/4$ | $-3/20$ | $1/60$ | |
| 8 | $1/280$ | $-4/105$ | $1/5$ | $-4/5$ | 0 | $4/5$ | $-1/5$ | $4/105$ | $-1/280$ |

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h)}{h^1} + \mathcal{O}(h^2)$$

### 9.3.2 $f''(x)$

| Ordre | $f(x-4h)$ | $f(x-3h)$ | $f(x-2h)$ | $f(x-h)$ | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ | $f(x+3h)$ | $f(x+4h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | 1 | $-2$ | 1 | | | |
| 4 | | | $-1/12$ | $4/3$ | $-5/2$ | $4/3$ | $-1/12$ | | |
| 6 | | $1/90$ | $-3/20$ | $3/2$ | $-49/18$ | $3/2$ | $-3/20$ | $1/90$ | |
| 8 | $-1/560$ | $8/315$ | $-1/5$ | $8/5$ | $-205/72$ | $8/5$ | $-1/5$ | $8/315$ | $-1/560$ |

$n = 2$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

### 9.3.3 $f'''(x)$

| Ordre | $f(x-4h)$ | $f(x-3h)$ | $f(x-2h)$ | $f(x-h)$ | $f(x)$ | $f(x+h)$ | $f(x+2h)$ | $f(x+3h)$ | $f(x+4h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | $-1/2$ | 1 | 0 | $-1$ | $1/2$ | | |
| 4 | | $1/8$ | $-1$ | $13/8$ | 0 | $-13/8$ | 1 | $-1/8$ | |
| 6 | $-7/240$ | $3/10$ | $-169/120$ | $61/30$ | 0 | $-61/30$ | $169/120$ | $-3/10$ | $7/240$ |

$n = 2$

$$f'''(x) = \frac{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) \\ \quad - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)\end{array}}{h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

# 10 Éléments finis

# 11 Autres

## 11.1 Intégration par partie

$$\int_a^b u'v = uv\Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

## 11.2 Changement de variable

### 11.2.1 Méthode 1

Lorsque la dérivée $\varphi'(t)$ est présente

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

### 11.2.2 Méthode 2

Si $\varphi'(t) = \varphi' =$ constante

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \frac{1}{\varphi'}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$