1 Généralités

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

1.1 Dérivée

$$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

1.2 EDO du premier ordre

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \longrightarrow y = Ce^{kt}}$$

1.3 EDP du premier ordre

$$F\Big(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)\Big) = F\Big(x, y, u, u_x, u_y\Big) = 0$$

1.3.1 Résolution

$$\boxed{a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}}$$

$au_x + bu_y$ est la dérivée directionnelle dans le sens du vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Tout ce qui suit à vérifier (ok pour les coefficients constants mais peut-être quelques modificiations pour les coefficients variables)

Coefficients constants Droite caractéristique : $bx - ay = c$ (solution constante sur ces droites)

$$u(x,y) = f(bt - ax)$$

Puis appliquer les conditions données.

Coefficients variables Trouver les **courbes caractéristiques** (solution constante sur les courbes) en résolvant l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ avec, par exemple :

$$\underbrace{\int \frac{dy}{dx} dx}_{y} = \underbrace{\int \frac{b(x,y)}{a(x,y)} dx}_{\cdots + c} \longrightarrow u(x,t) = f(\text{"}c\text{"})$$

OU

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = y \longrightarrow y = Ce^x$$

$$u(x,t) = f(\text{"}C\text{"}) = f(ye^{-x})$$

Autres cas : par exemple $3u_y + u_{xy}$ on effectue une substitution $v = u_y$ pour simplifier le problème. Combinaison linéaire de plusieurs solutions est aussi une solution

1.4 EDP du deuxième ordre

$$F\Big(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\Big) = 0$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Parabolique : $B^2 - 4AC = 0$

Hyperbolique : $B^2 - 4AC > 0$

Elliptique : $B^2 - 4AC < 0$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

1.5 Opérateurs

Linéarité

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

linéaire   non linéaire

$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

$u_x + u_y = 0$ $u_x + yu_y = 0$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x + uu_y = 0$ $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ $u_t - ju_{xx} = 0$

1.5.1 Homogénéité (seulement si linéaire)

Équation linéaire homogène $\mathcal{L}u = 0$

Équation linéaire non-homogène $\mathcal{L}u = g$

$$u_x + u_y + 1 = 0 \longrightarrow \text{inhomogène}$$

solution homogène + solution inhomogène = solution inhomogène

1.6 Conditions initiales

$$u(x, t_0) = \phi(x)$$

OU

$$u(x, t_0) = \phi(x) \qquad u_t(x, t_0) = \psi(x)$$

1.7 Conditions aux bords

Dirichlet : u est spécifié

Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}$ est spécifié

Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + au$ est spécifié

1.8 Problèmes bien posés

Les problèmes bien posés (au sens d'Hadamard) sont constitués d'une EDP dans un domaine et avec les propriétés suivantes :

Existence : il existe au moins une solution $u(x,t)$ qui satisfait toutes les conditions

Unicité : il existe au plus une solution

Stabilité : La solution unique $u(x,t)$ dépende de manière stable des données (peu de changement $\rightarrow$ peu de variation)

1.9 Exemples

1.
$$au_x + bu_y = 0 \qquad u(x,y) = f(bx - ay)$$
Avec $bx - ay = c$ les droites caractéristiques

2.
$$u_t + cu_x = 0$$
Au temps $t+h$, déplacement de $c \cdot h$

3.
$$u_{xx} = 0 \xrightarrow{\int dx} u_x = f(y) \xrightarrow{\int dx} u = g(y) + xf(y)$$
$$u(x,y) = f(y)x + g(y)$$

4.
$$u_{xx} + u = 0 \to u(x,y) = f(y)\cos(x) + g(y)\sin(x)$$

5.
$$u_{xy} = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(y) + g(x)$$
A noter que $f(y)$ et $g(x)$ sont les intégrales de fonctions intermédiaires.

6.
$$u_x + yu_y = 0 \longrightarrow u(x,y) = f(e^{-x}y)$$

1.10 Séparation de variables

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \quad \text{ou} \quad u(x,t) = X(x)T(t)$$

2 Équation d'onde

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

c est la vitesse de l'onde. Pour une corde on a
$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$
Avec T la tension et ρ la densité

2.1 1D

Modèle ressorts-masses
$$F_{\text{newton}} = ma(t) = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)$$
et
$$F_{\text{hooke}} = k\left(u(x+h),t) - u(x,t)\right) - k\left(u(x,t) - u(x-h,t)\right)$$
$$F_{\text{newton}} = F_{\text{hooke}}$$
Avec $N \to \infty$ et donc $h \to 0$ ($L = Nh$)
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$
Solution générale :
$$\boxed{u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$
avec f et g des fonctions quelconques à une seule variable

2.1.1 Propriétés

Deux familles de droites caractéristiques $x \pm ct =$ constante. Somme de deux fonctions : $g(x-ct)$ qui va à droite et $f(x+ct)$ qui va à gauche. La vitesse est c.

2.1.2 Conditions initiales, pas de conditions aux bords

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty$$
$$u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

2.2 Conditions aux bords

La solution est de la forme (séparation de variable)
$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda$$
$$\begin{cases} X(x) &= C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \\ T(t) &= A\cos(\beta ct) + B\sin(\beta ct) \end{cases} \tag{1}$$
λ est une constante tel que $\lambda = \beta^2 \qquad \beta > 0$

2.3 Conditions aux bords de Dirichlet

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\beta x) = \phi(x)$$
$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta c \sin(\beta x) = \psi(x)$$
Les fréquences sont $\frac{n\pi c}{l}$ avec la fondemantale en $n = 1$

2.3.1 Conditions aux bords $= 0$

$$\boxed{u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi c}{l}x\right)}$$

2.4 Conditions aux bords de Neumann

Solution générale pour un problème avec conditions aux bords de Neumann $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ (à utiliser dans l'examen) :
$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \right. \\ \left. B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}}$$
Avec les conditions initiales
$$\phi(x) = u(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$
$$\psi(x) = u_t(x,0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

2.5 Conditions aux bords mixtes

Appliquer les conditions à l'équation 1
$u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ par exemple.

$$\lambda_n = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{l^2}$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\right)$$

3 Équation de diffusion

$$\boxed{u_t = u_{xx}}$$

Plus difficile à résoudre que l'équation d'ondes

3.1 Principe du maximum

Valeur maximale de $u(x,t)$ atteinte à $t = 0$ ou sur les côtés ($x = 0$ ou $x = l$). Pareil pour la valeur minimale

3.2 Résolution

1. Résoudre l'équation pour une solution $\phi(x)$ particulière
2. Construire la solution générale

3.3 Propriétés

1. Une **translation** de la solution est aussi une solution
$$u(x-n,t) \equiv u(x,t)$$
2. **Dérivée** d'une solution est aussi une solution
$$u_t \equiv u_x \equiv u_{xx} \equiv u$$
3. Une **combinaison linéaire** de solutions est une solution
4. Une **intégrale** est aussi une solution
$$\int S(x-n,t)g(y)dy \equiv u(x,t)$$
5. Une solution **dilatée** est aussi une solution
$$u(\sqrt{a}x, at) \equiv u(x,t)$$

3.4 Résolution sans conditions aux bords

On résout le problème simplifié avec

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$Q(x,t) = g(p) \qquad p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$$

Solution générale :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y)dy$$

1. Remplacer la condition initiale $\phi(x)$
2. Développer l'intégrale et effectuer un changement de variable si nécessaire (voir 9)
3. Exprimer en fonction de erf(...) si c'est nécessaire

Si nécessaire, on utilise la fonction d'erreur

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$\text{erf}(x) = -\text{erf}(-x) \qquad \text{(impaire)}$$

Si $\phi(y) = e^{\cdots}$ alors on peut utiliser la fonction suivante (à adapter) pour mettre tous les y dans le $()^2$

$$(y + 2kt - x)^2 = y^2 + 4k^2t^2 + x^2 + 4kty - 2xy - 4ktx$$

3.4.1 Notes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi}$$

Si on a deux intégrales (chacune avec un $\phi(y)$ différent, par exemple un ϕ par morceaux), alors on fait deux changements de variables différents : une fois $p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$ et une fois $p = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$

3.5 Résolution avec conditions aux bords

Par séparation de variables on a

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} T(t) = Ae^{-\lambda kt} \\ X(x) = B\cos(\beta x) + C\sin(\beta x) \end{cases} \qquad \lambda = \beta^2$$

Résoudre en appliquant les conditions aux bords à l'équation ci-dessus.
Si il est possible d'exprimer $u_{n=0}(x,t)$ avec une constante, on la nomme $\frac{A_0}{2}$

4 Séries de Fourier

4.1 Séries de Fourier en sinus

$$\boxed{\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx}$$

4.2 Séries de Fourier en cosinus

$$\boxed{\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx}$$

Le 1/2 dans la série pour A_0 vient de la
Important : Si la fonction $\phi(x)$ est paire, on peut se concentrer sur la moitié uniquement (la valeur de l est ce nouvel intervalle). Ceci permet de beaucoup simplifier le problème.

4.3 Séries de Fourier

Sur $]-l.l[$

$$\boxed{\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)}$$

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

5 Fonctions harmoniques

Laplacien

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

En coordonnées polaires on a

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r$$

5.1 Principe du maximum / minimum

Le maximum et le minimum de la fonction sont atteints sur les bords du domaine

5.2 Procédure

1. Séparation des variables

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \longrightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} X'' + \lambda X &= 0 \\ Y'' - \lambda Y &= 0 \end{cases}}$$

2. Insertion des conditions aux bords

3. Somme de la série

4. Ajout du terme inhomogène ou conditions aux bords

5.3 Autres

Polynôme quadratique en x et y :

$$\boxed{u(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F}$$

6 Transformée de Laplace

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

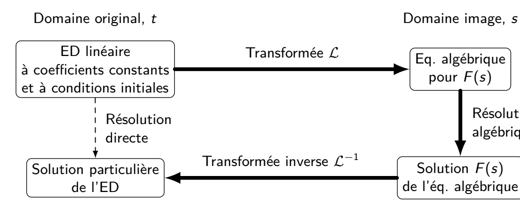
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} s^{-3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi} s^{-1/2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$H(t-b)$	$\frac{1}{s} e^{-bs}$
$\delta(t-b)$	e^{-bs}
$a(4\pi t^3)^{-1/2} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
$(\pi t)^{-1/2} e^{-a^2/4t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$
$1 - \mathcal{E}\mathrm{rf}\left(\frac{a}{\sqrt{4t}}\right)$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$

6.1 Propriétés

	Fonction	Transformée
(i)	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
(ii)	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
(iii)	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
(iv)	$e^{bt}f(t)$	$F(s-b)$
(v)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s')ds'$
(vi)	$tf(t)$	$-\frac{dF}{ds}$
(vii)	$H(t-b)f(t-b)$	$e^{-bs}F(s)$
(viii)	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
(ix)	$\int_0^t g(t-t')f(t')dt'$	$F(s)G(s)$

6.2 Méthode



7 Différences finies

7.1 Différences finies progressives (downwind)

7.1.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	1					
2	$-3/2$	2	$-1/2$				
3	$-11/6$	3	$-3/2$	$1/3$			
4	$-25/12$	4	-3	$4/3$	$1/4$		
5	$-137/60$	5	-5	$10/3$	$-5/4$	$1/5$	
6	$-49/20$	6	$-15/2$	$20/3$	$-15/4$	$6/5$	$-1/6$

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}f(x) + 2f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+2h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

7.1.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	1	−2	1				
2	2	−5	4	−1			
3	35/12	−26/3	19/2	−14/3	11/12		
4	15/4	−77/6	107/6	−13	61/12	−5/6	
5	203/45	−87/5	117/4	−254/9	33/2	−27/5	137/180

$n = 3$

$$f''(x) = \frac{\frac{35}{12}f(x) - \frac{26}{3}f(x+h) + \frac{19}{2}f(x+2h) - \frac{14}{3}f(x+3h) + \frac{11}{12}f(x+4h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

7.1.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	−1	3	−3	1			
2	−5/2	9	−12	7	−3/2		
3	−17/4	71/4	−59/2	49/2	−41/4	7/4	
4	−49/8	29	−461/8	62	−307/8	13	−15/8

$n = 1$

$$f'''(x) = \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^1)$$

7.2 Différences finies rétrogrades (upwind)

1. Remplacer $x + kh$ par $x - kh$
2. Si dérivée paire : Pas de changement de coefficient
3. Si dérivée impaire : Changement du signe

7.3 Différences finies centrées

7.3.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				−1/2	0	1/2			
4			1/12	−2/3	0	2/3	−1/12		
6		−1/60	3/20	−3/4	0	3/4	−3/20	1/60	
8	1/280	−4/105	1/5	−4/5	0	4/5	−1/5	4/105	−1/280

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h)}{h^1} + \mathcal{O}(h^2)$$

7.3.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				1	−2	1			
4			−1/12	4/3	−5/2	4/3	−1/12		
6		1/90	−3/20	3/2	−49/18	3/2	−3/20	1/90	
8	−1/560	8/315	−1/5	8/5	−205/72	8/5	−1/5	8/315	−1/560

$n = 2$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

7.3.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2			−1/2	1	0	−1	1/2		
4		1/8	−1	13/8	0	−13/8	1	−1/8	
6	−7/240	3/10	−169/120	61/30	0	−61/30	169/120	−3/10	7/240

$n = 2$

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

7.4 Différences finies pour EDP elliptiques + Dirichlet

$$-u''(x) = f(x) \qquad u(0) = \alpha \quad u(L) = \beta$$

,

$$u''(x_j) \approx \frac{u(x_j - h) - 2u(x_j) + u(x_j + h)}{h^2}$$

Ce qui donne un système d'équations linéaires

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$A_h \vec{x} = \vec{f}$$

les valeurs sont inversées car $-u''(x)$.

7.4.1 2D

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i - h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h, y_j)}{h^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{y(x_i, y_j - h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + h)}{h^2}$$

7.5 Différences finies pour EDP paraboliques

1. Discrétiser l'espace (sous-intervalles de largeur h)
2. Application des conditions aux bords puis recherche des valeurs aux nœuds en fonction du temps
$$x_i \to u_i(t)$$
$$u_i(t) \approx u(x_i, t)$$
3. On applique les conditions initiales
$$u_i(0) = u_0(x_i)$$
4. Résoudre le problème de Cauchy ($\frac{du}{dt} = g(x,t)$ en matrices)

7.6 Méthode d'Euler explicite

$$\frac{du}{dt} = F(t_0, u_0)$$

Vu d'un autre angle, on veut approcher

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) \approx \frac{u(t_i + \tau) - u(t_i)}{\tau}$$

7.7 Relation entre le pas de temps et le pas temporel

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\mu}$$

Avec μ la constante de l'équation $u_t - \mu u_{xx} = f(x,t)$

7.8 Équation de transport

$$v \leq \frac{h}{\tau} \longleftrightarrow \frac{v\tau}{h} = r \leq 1$$

C'est la condition CFL : avec downwind c'est impossible de résoudre le problème. Avec les upwind on peut y arriver parce qu'on utilise les valeurs précédentes (la condition sur v reste valable).
L'analyse de Von Neumann montre que le schéma centré n'est pas stable (même si la condition CFL est vérifiée).

7.9 Exemple Différences finies

$$-u''(x) = f(x) = (3x + x^2)e^x \textbf{Avec CB (D) = 0}$$
$$h = 1/5 \rightarrow 0\frac{1}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{4}{5}1$$

7.10 méthode d'Euler

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \tau\left(-A\vec{u}_k + \vec{b}(t_k)\right)$$

7.11 Méthode d'Euler implicite

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + \tau\left(-A\vec{u}_{k+1} + \vec{b}(t_{k+1})\right)$$

Vérifier les formules... c'est illisible sur le polycop

8 Éléments finis

8.1 Forme forte

$$-u''(x) = f(x)$$

8.2 Forme faible / variationnelle (Ritz-Galerkin)

$$-u''(x)v(x) = f(x)v(x)$$

On multiplie des deux côtés par une fonction $v(x)$ qui respecte

$$v(0) = v(l) = 0$$

$$\int_0^l -u''(x)v(x)dx = \int_0^l f(x)v(x)$$

8.2.1 Exemple

Avec $-u''(x) = x^2$. On aura un problème de la forme

$$\boxed{A_h c = b_h}$$

Avec les c qui correspondent au poids de chaque fonction de base.

Calcul de A (matrice de rigidité)

$$\boxed{a_{ij} = \int_0^L N_i'(x)N_j'(x)dx}$$

Calcul de b $\vec{b}$ est le reste de l'équation (partie droite)

$$\int_0^L -u''(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x)$$

La plupart du temps on aura

$$\boxed{b_i = \int_0^l f(x)N_i(x)}$$

8.3 Maillage

Il ne doit pas y avoir de chevauchement d'éléments ou de points qui ne sont pas connectés ensembles.

9 Autres

9.1 Intégration par partie

$$\int_a^b u'v = uv\Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

9.1.1 exemple

$$\int_0^1 x^2 \cdot \sin(n\pi x)dx = \int_0^1 fdg = fg\Big|_0^1 - \int_0^1 gdf$$
$$f = x^2, dg = \sin(n\pi x)dx$$
$$df = 2x \cdot dx, g = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}$$
$$= -\frac{x^2 \cdot \cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x \cdot \cos(n\pi x)}{n\pi}$$

9.2 Changement de variable

9.2.1 Méthode 1

Lorsque la dérivée $\varphi'(t)$ est présente

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

9.2.2 Méthode 2

Si $\varphi'(t) = \varphi' =$ constante

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \frac{1}{\varphi'}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

9.3 Solutions générales

$$\begin{aligned}
X'' &= -\beta^2 X && \longrightarrow X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\\
X'' &= \beta^2 X && \longrightarrow X(x) = A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x)\\
X' &= aX && \longrightarrow X(x) = ce^{ax}\\
X'' &= 0 && \longrightarrow X(x) = Ax + B
\end{aligned}$$

9.4 Équation d'euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

9.5 Séparation en éléments simples

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x-0.25)(x-0.5)}$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x-0.25)(x-0.5)}$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = \frac{R_1}{(x-1)} + \frac{R_2}{(x-0.25)} + \frac{R_3}{(x-0.5)}$$

Attention ! Pas de $()^n$ dans le dénominateur. Sinon résolution à la main

$$R_1 = \frac{1(1+1)}{(1-0.25)(1-0.5)}$$

$$R_2 = \frac{0.25(0.25+1)}{(0.25-1)(0.25-0.5)}$$

$$R_3 = \frac{0.5(0.5+1)}{(0.5-1)(0.5-0.25)}$$

9.6 Matrices

9.6.1 Inverses

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Même principe si on renverse

$$\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ad} & \frac{1}{d} & 0 \\ \frac{be-cd}{adf} & -\frac{e}{fd} & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Pour une matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

9.7 A faire attention

- Dès qu'on utilise n on doit directement écrire la série de Fourier
- Ne pas oublier des termes (duh), genre devant des parenthèses
- Écrire les sin et cos lorsqu'on demande "les x premiers termes"
- Les $+c$

10 Exercices

10.1 Série 2 - Exercice 1

1. Résoudre $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x,0) = e^x$, $u_t(x,0) = \sin(x)$.

On utilise la fonction générale

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin(s)ds =$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{x+ct} + e^{x-ct}\right) + \frac{1}{2c}\left(-\cos(x+ct) + \cos(x-ct)\right)$$

On peut simplifier un peu les expressions

$$\frac{1}{2}\left(e^{x+ct} + e^{x-ct}\right) + \underbrace{\frac{1}{2c}\left(-\cos(x+ct) + \cos(x-ct)\right)}_{\frac{1}{2}(\sin(x)\sin(ct))} =$$

$$e^x \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{ct} + e^{-ct}\right)}_{\cosh(ct)} + \frac{1}{2}\sin(x)\sin(ct)$$

10.2 Série 3 - Exercice 2

2. Résoudre l'équation de diffusion avec la condition initiale

$$\phi(x) = 1, \qquad \text{pour } |x| \leq \ell \qquad \text{et} \qquad \phi(x) = 0, \qquad \text{pour } |x| > \ell.$$

Ecrire la réponse en utilisant la fonction $\mathcal{E}\mathrm{rf}(x)$.

On utilise la fonction de base

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

On applique la fonction $\phi(x)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$$

Puis on effectue un changement de variable $p(y) = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$

$$dy = -\sqrt{4kt}dp \qquad l \to \frac{x-l}{\sqrt{4kt}} \qquad -l \to \frac{x+l}{\sqrt{4kt}}$$

$$u(x,t) = \frac{-\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp$$

On inverse les bornes (et le signe devant l'intégrale)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp$$

On utilise la fonction erf

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}\right) \right)$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{x+l}{\sqrt{4kt}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x-l}{\sqrt{4kt}}\right) \right)}$$

(même chose que le corrigé)

10.3 Série 3 - Exercice 3

3. Résoudre l'équation de diffusion avec la condition initiale $\phi(x) = e^{3x}$.

On commence par poser l'équation de base

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

On remplace par l'expression de $\phi(y)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{3y} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}+3y} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2-12kty}{4kt}} dy$$

On doit enlever le terme $12kty$ qui empêche de faire la simplification avec erf. On s'intéresse à la puissance de e et on utilise $(y+2kt-x)^2$ (dans le résumé)

$$-\frac{(x-y)^2-12kty}{4kt} = -\frac{x^2-2xy+y^2-12kty}{4kt}$$

$$(y+2kt-x)^2 = y^2+4k^2t^2+x^2+4kty-4ktx-2xy$$

ça ressemble un peu mais on aimerait $-12kty$ au lieu de $4kty$, on inverse x et y et on multiplie le terme central par 3

$$(x+6kt-y)^2 = y^2+36k^2t^2+x^2+12ktx-12kty-2xy$$

C'est parfait, on a plus qu'à adapter l'équation de base pour utiliser ce terme

$$-\frac{(x+6kt-y)^2-36k^2t^2-12ktx}{4kt} = -\frac{x^2-2xy+y^2-12kty}{4kt}$$

Maintenant qu'on a le bon terme, il suffit de séparer pour garder les y d'un seul côté

$$-\frac{(x+6kt-y)^2}{4kt} + \frac{36k^2t^2+12ktx}{4kt} = -\frac{(x+6kt-y)^2}{4kt} + 9kt + 3x$$

On a plus qu'à remettre tout ça dans l'équation de base et résoudre

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+6kt-y)^2}{4kt}+9kt+3x} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x+6kt-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2} e^{9kt+3x} dy$$

Comme le dernier terme ne dépend pas de y, on le sort

$$e^{9kt+3x} \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x+6kt-y}{\sqrt{4kt}}\right)^2} dy$$

On effectue le changement de variable

$$p(y) = \frac{x+6kt-y}{\sqrt{4kt}} \longrightarrow \begin{cases} \infty \to -\infty \\ -\infty \to \infty \\ dy \to -\sqrt{4kt}dp \end{cases}$$

$$e^{9kt+3x} \frac{-\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-p^2} dy = e^{9kt+3x} \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-p^2} dy$$

On inverse les bornes (et le signe au début)

$$u(x,t) = e^{9kt+3x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dy}_{\sqrt{\pi}}$$

On a donc finalement

$$\boxed{u(x,t) = e^{9kt+3x}}$$

10.4 Série 3 - Exercice 4

4. Faire de même pour $\phi(x) = 1$ pour $x > 0$ et $\phi(x) = 3$ pour $x < 0$.

On commence par poser l'équation de base

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

On applique la fonction $\phi(y)$ et on trouve deux intégrales

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \left(3\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \right)$$

Important ! : on va effectuer deux changements de variables différents pour simplifier les calculs par la suite (voir le résumé)

$$p = \frac{x-y}{\sqrt{4kt}} \qquad q = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \left(-3\sqrt{4kt} \int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp + \sqrt{4kt} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp \right)$$

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{4kt}}{2\sqrt{\pi kt}} \left(3 \underbrace{\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\int_0^\infty - \int_0^x} + \underbrace{\int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\int_0^\infty + \int_0^x} \right)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(4 \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-p^2} dp}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} - 2\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp \right)$$

$$\boxed{u(x,t) = 2 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)}$$

10.5 Série 4 - Exercice 4

4. Résoudre le problème de diffusion $u_t = ku_{xx}$ sur $0 < x < \ell$, avec les conditions aux bords mixtes $u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$.

On pose l'équation séparée

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$T(t) = Ae^{-\lambda kt}$$
$$X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$$

$$X(0) = A + 0 = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$X'(l) = B\beta\cos(\beta l)) = 0 \longrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta l = n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On va choisir la dernière option pour éviter que le problème soit trop facile

$$\beta = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l} = \frac{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}{l}$$

$$X(x) = B\sin\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right)$$

$$u(x,t) = T(t)X(x) = Ce^{-\left(\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}}{l}\right)^2 kt}\sin\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right) \qquad C = AB$$

10.6 Série 4 - Exercice 5

5. Considérons l'équation $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ pour $0 < x < \ell$, avec les conditions aux bords $u_x(0,t) = 0$, $u(\ell,t) = 0$ (Neumann à gauche, Dirichlet à droite).
   (a) Montrer que les fonctions propres sont
   $$\cos\left(\frac{(n+1/2)\pi}{\ell}x\right).$$
   (b) Donner le développement en série de la solution.

10.6.1 (a)

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda$$

$$\lambda = \beta^2$$

$$\begin{cases} T(t) = A\cos(\beta ct) + B\sin(\beta ct) \\ X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) \end{cases}$$

$$X'(0) = D\beta = 0 \longrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On va supposer que $D = 0$, sinon le problème n'est pas intéressant

$$X(l) = C\cos(\beta l) = 0 \longrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \beta l = n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On va supposer que c'est la deuxième option, sinon le problème n'est pas intéressant

$$\beta = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}$$

On a donc

$$X(x) = C\cos\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right)$$

10.6.2 (b)

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A\cos\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}ct\right) + B\sin\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}ct\right)\right)C\cos\left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}x\right)$$

10.7 Série 5 - Exercice 1

1. Résoudre $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ avec les conditions aux bords:
   $$u_x = -a \text{ sur } x = 0 \qquad u_x = 0 \text{ sur } x = a$$
   $$u_y = b \text{ sur } y = 0 \qquad u_y = 0 \text{ sur } y = b$$
   Aide: Un raccourci consiste à supposer que la solution est un polynôme quadratique en x et y.

On sais que la solution sera de la forme

$$u(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

On applique les conditions aux bords de manière successive. D'abord sur x :

$$u_x(0,y) = -a \qquad u_x(a,y) = 0$$

$$u_x(0,y) = C_y + D = -a \longrightarrow \boxed{C=0} \quad \boxed{D=-a}$$

$$u_x(a,y) = 2Aa - a = 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

Ensuite sur y

$$u_y(x,0) = b \qquad u_y(x,b) = 0$$

$$u_y(x,0) = C_x + E = b \longrightarrow \boxed{E = b}$$

$$u_y(x,b) = 2Bb + b \longrightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

On a directement la solution finale

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - ax + by + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}}$$

10.8 Série 6 - Exercice 2

2. Soit
$$\phi(x) \equiv x^2 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq x \leq 1 = \ell.$$
(a) Calculer sa série de Fourier en sinus (impaire).
(b) Calculer sa série de Fourier en cosinus (paire).

10.8.1 (a)

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

On utilise l'intégration par parties pour supprimer le x^2

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^1 \underbrace{x^2}_{v}\underbrace{\sin(n\pi x)}_{u'} dx = \frac{2}{l}\left(\left(-x^2\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right)_0^1 + \int_0^1 2x\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)dx\right)$$

On refait une intégration par parties

$$A_n = \frac{2}{l}\left(\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi) + \underbrace{\left(2x\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\right)_0^1}_{0} - \int_0^1 2\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)dx\right)$$

on effectue l'intégrale

$$A_n = \frac{2}{l}\left(\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right)_0^1\right) = \frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{4}{n^3\pi^3}(\cos(n\pi) - 1)$$

$$A_n = \frac{(4 - 2n^2\pi^2)(-1)^n - 4}{n^3\pi^3}$$

On obtient donc l'équation finale

$$\boxed{\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 - 2\pi^2 n^2)(-1)^n - 4}{\pi^3 n^3} \sin(n\pi x)}$$

10.8.2 (b)

Comme avant on pose les équations de base

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)$$

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\cos(n\pi x)dx$$

On commence par déterminer A_0 qui est facile

$$A_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{2}{3}$$

On fait une intégration par parties

$$A_n = 2\int_0^1 \underbrace{x^2}_{v}\underbrace{\cos(n\pi x)}_{u'} dx = 2\left(\underbrace{\left(x^2\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right)_0^1}_{0} - \int_0^1 2x\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)dx\right)$$

On peut simplifier puis on refait une intégration par parties

$$A_n = \frac{-4}{n\pi}\int_0^1 \underbrace{x}_{v}\underbrace{\sin(n\pi x)}_{u'} dx = \frac{-4}{n\pi}\left(\left(-x\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right)_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)dx\right)$$

$$A_n = \frac{-4}{n^2\pi^2}\left(\underbrace{(-x\cos(n\pi x))_0^1}_{-\cos(n\pi} + \underbrace{\left(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right)_0^1}_{0}\right)$$

On a donc finalement

$$A_n = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Et l'équation finale

$$\boxed{\phi(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)}$$

10.9 Série 6 - Exercice 5

5. Résoudre

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad \text{pour} \quad 0 < x < \pi$$

avec les conditions aux bords

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad u_t(x,0) = \cos^2(x).$$

Utiliser le fait que $\cos^2(x) = 1/2 + \cos(2x)/2$.

On utilise la solution générale de l'équation d'onde pour un problème avec conditions aux bords de Neumann ($u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Avec les conditions initiales

$$\phi(x) = u(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

On applique les conditions initiales

$$u(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_n = 0 \end{cases}}$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\frac{1}{2}B_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{B_0 = 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

On a $n = 2$ et $l = \pi$

$$\frac{2\pi c}{\pi} B_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\pi}x\right) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$2cB_2 \cos(2x) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$2cB_2 = \frac{1}{2}$$

$$4cB_2 = 1$$

$$\boxed{B_2 = \frac{1}{4c}}$$

On écrit donc la solution finale

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4c}\sin(2ct)\cos(2x)}$$

10.10 Série 7 - Exercice 4

4. Faire appel à la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle $y'' - k^2 y = 0$ satisfaisant les conditions initiales $y(0) = A$ et $y'(0) = B$, où k, A et B sont des constantes.

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - k^2 Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 - k^2) = sy(0) + y'(0)$$

$$Y(s) = \frac{sy(0)}{s^2 - k^2} + \frac{y'(0)}{s^2 - k^2} = A\frac{s}{s^2 - k^2} + \frac{B}{k}\frac{k}{s^2 - k^2}$$

$$\boxed{y(t) = A\cosh(kt) + \frac{B}{k}\sinh(kt)}$$