

1 Différences finies

1.1 Différences finies progressives

1.1.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	1					
2	-3/2	2	-1/2				
3	-11/6	3	-3/2	1/3			
4	-25/12	4	-3	4/3	1/4		
5	-137/60	5	-5	10/3	-5/4	1/5	
6	-49/20	6	-15/2	20/3	-15/4	6/5	-1/6

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}f(x) + 2f(x+h) - \frac{1}{2}f(x+2h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

1.1.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	1	-2	1				
2	2	-5	4	-1			
3	35/12	-26/3	19/2	-14/3	11/12		
4	15/4	-77/6	107/6	-13	61/12	-5/6	
5	203/45	-87/5	117/4	-254/9	33/2	-27/5	137/180

$n = 3$

$$f''(x) = \frac{\frac{35}{12}f(x) - \frac{26}{3}f(x+h) + \frac{19}{2}f(x+2h) - \frac{14}{3}f(x+3h) + \frac{11}{12}f(x+4h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

1.1.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	$f(x+6h)$
1	-1	3	-3	1			
2	-5/2	9	-12	7	-3/2		
3	-17/4	71/4	-59/2	49/2	-41/4	7/4	
4	-49/8	29	-461/8	62	-307/8	13	-15/8

$n = 1$

$$f'''(x) = \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^1)$$

1.2 Différences finies rétrogrades

1. Remplacer $x + kh$ par $x - kh$
2. Si dérivée paire : Pas de changement de coefficient
3. Si dérivée impaire : Changement du signe

1.3 Différences finies centrées

1.3.1 $f'(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				$-1/2$	0	$1/2$			
4			$1/12$	$-2/3$	0	$2/3$	$-1/12$		
6		$-1/60$	$3/20$	$-3/4$	0	$3/4$	$-3/20$	$1/60$	
8	$1/280$	$-4/105$	$1/5$	$-4/5$	0	$4/5$	$-1/5$	$4/105$	$-1/280$

$n = 2$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h)}{h^1} + \mathcal{O}(h^2)$$

1.3.2 $f''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2				1	-2	1			
4			$-1/12$	$4/3$	$-5/2$	$4/3$	$-1/12$		
6		$1/90$	$-3/20$	$3/2$	$-49/18$	$3/2$	$-3/20$	$1/90$	
8	$-1/560$	$8/315$	$-1/5$	$8/5$	$-205/72$	$8/5$	$-1/5$	$8/315$	$-1/560$

$n = 2$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

1.3.3 $f'''(x)$

Ordre	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
2			$-1/2$	1	0	-1	$1/2$		
4		$1/8$	-1	$13/8$	0	$-13/8$	1	$-1/8$	
6	$-7/240$	$3/10$	$-169/120$	$61/30$	0	$-61/30$	$169/120$	$-3/10$	$7/240$

$n = 2$

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{2}f(x-2h) + f(x-h) - f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)}{h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

1.4 Différences finies pour EDP elliptiques + Dirichlet

$$-u''(x) = f(x) \quad u(0) = \alpha \quad u(L) = \beta$$

,

$$u''(x_j) \approx \frac{u(x_j - h) - 2u(x_j) + u(x_j + h)}{h^2}$$

Ce qui donne un système d'équations linéaires

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$
$$A_h \vec{x} = \vec{f}$$

les valeurs sont inversées car $-u''(x)$.

1.4.1 2D

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i - h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h, y_j)}{h^2}$$
$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_j - h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + h)}{h^2}$$

1.5 Différences finies pour EDP paraboliques

1. Discrétiser l'espace (sous-intervalles de largeur h)
2. Application des conditions aux bords puis recherche des valeurs aux nœuds en fonction du temps

$$x_i \rightarrow u_i(t)$$

$$u_i(t) \approx u(x_i, t)$$