Exercice2_SDZ

January 26, 2022

1 Série 6 - Exercice 2

2. Soit

$$\phi(x) \equiv x^2 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq x \leq 1 = \ell.$$

(a) Calculer sa série de Fourier en sinus (impaire).

(b) Calculer sa série de Fourier en cosinus (paire).

1.1 (a)

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

On utilise l'intégration par parties pour supprimer le x^2

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^1 \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{u'} dx = \frac{2}{l} \left(\left(-x^2 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right)_0^1 + \int_0^1 2x \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right)$$

On refait une intégration par parties

$$A_n = \frac{2}{l} \left(\frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi) + \underbrace{\left(2x \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) \right)_0^1}_{0} - \int_0^1 2 \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) dx \right)$$

on effectue l'intégrale

$$A_n = \frac{2}{l} \left(\frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2} \left(\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right)_0^1 \right) = \frac{-2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{4}{n^3\pi^3} (\cos(n\pi) - 1)$$

$$A_n = \frac{(4 - 2n^2\pi^2)(-1)^n - 4}{n^3\pi^3}$$

On obtient donc l'équation finale

$$\boxed{\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2\pi^2 n^2)(-1)^n - 4}{\pi^3 n^3} \sin(n\pi x)}$$

1.2 (b)

Comme avant on pose les équations de base

$$\phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)$$

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\cos(n\pi x)dx$$

On commence par déterminer A_0 qui est facile

$$A_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{2}{3}$$

On fait une intégration par parties

$$A_n = 2\int_0^1 \underbrace{x^2}_{v}\underbrace{\cos(n\pi x)}_{u'}dx = 2\left(\underbrace{\left(x^2\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right)_0^1}_{0} - \int_0^1 2x\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)dx\right)$$

On peut simplifier puis on refait une intégration par parties

$$A_n = \frac{-4}{n\pi}\int_0^1 \underbrace{x}_{v}\underbrace{\sin(n\pi x)}_{u'}dx = \frac{-4}{n\pi}\left(\left(-x\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right)_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)dx\right)$$

$$A_n = \frac{-4}{n^2\pi^2}\left(\underbrace{(-x\cos(n\pi x))_0^1}_{-\cos(n\pi} + \underbrace{\left(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right)_0^1}_{0}\right)$$

On a donc finalement

$$A_n = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Et l'équation finale

$$\boxed{\phi(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)}$$