

Exercice6_SDZ

January 15, 2022

1 Série 4 - Exercice 6 (SDZ)

6. Considérons la diffusion à l'intérieur d'un tube circulaire fermé. On considère que sa longueur (circonférence) est de 2ℓ . Soit x le paramètre de longueur d'arc pour lequel $-\ell \leq x \leq \ell$. Dans ce cas, la concentration de la substance diffusante satisfait à

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} \quad \text{pour} \quad -\ell \leq x \leq \ell \\ u(-\ell, t) &= u(\ell, t) \quad \text{et} \quad u_x(-\ell, t) = u_x(\ell, t). \end{aligned}$$

On appelle ces conditions des **conditions aux bords périodiques**.

- (a) Montrer que les valeurs propres sont données par $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$
- (b) Montrer que la concentration est donnée par

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right) e^{-n^2\pi^2 kt/\ell^2}.$$