Exercice5_SDZ

January 26, 2022

1 Série 6 - Exercice 5

5. Résoudre

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad \text{pour} \quad 0 < x < \pi$$

avec les conditions aux bords

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad u_t(x,0) = \cos^2(x).$$

Utiliser le fait que $\cos^2(x) = 1/2 + \cos(2x)/2$.

On utilise la solution générale de l'équation d'onde pour un problème avec conditions aux bords de Neumann ($u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Avec les conditions initiales

$$\phi(x) = u(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

On applique les conditions initiales

$$u(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_n = 0 \end{cases}}$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\frac{1}{2}B_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{B_0 = 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

On a $n = 2$ et $l = \pi$

$$\frac{2\pi c}{\pi} B_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\pi}x\right) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$2cB_2 \cos(2x) = \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$2cB_2 = \frac{1}{2}$$
$$4cB_2 = 1$$
$$\boxed{B_2 = \frac{1}{4c}}$$

On écrit donc la solution finale

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4c}\sin(2ct)\cos(2x)}$$