Exercice8_SDZ

November 26, 2021

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Problème 8. Résolvons numériquement l'équation de Helmholtz

$$-\Delta u + u = 0$$

sur le domaine $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, avec la condition

$$u = 3\,x\,y$$

au bord $\partial\Omega$. Pour l'approximation par différences finies avec un stencil à 5 points utilisez un maillage isotrope avec la taille de maille constante, $h = 1/3$.
Solution: l'approximation $\vec{u} = (0.3647, 0.7092, 0.7092, 1.3933)^T$ *environ.*

$$-\Delta u + u = 0$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + u = 0$$

$$\frac{1}{h^2}\left(-u(x-h,y) - u(x+h,y) - u(x,y-h) - u(x,y+h) + 4u(x,y)\right)$$

On obtient alors le système

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{10} + u_{01} \\ u_{13} + u_{02} \\ u_{20} + u_{31} \\ u_{23} + u_{32} \end{pmatrix}$$

[34]:
```
def bord(x,y):
    return 3*x*y
N = 4
h = 1/3
A = np.matrix('[0 -1 -1 0;-1 0 0 -1;-1 0 0 -1;0 -1 -1 0]', dtype=float)
A += np.diagflat(np.ones(N)*(h**2+4))
A *= 1/(h**2)

x = np.linspace(0, 1, 4)
B = np.zeros([4,4])
```

```python
for i, xi in enumerate(x):
    for j, yi in enumerate(x):
        B[j, i] = bord(xi, yi)


#b = np.array([-B[1,0] - B[0,1], B[1,3]-B[0,2],-B[2,0]+B[3,1],B[2,3]+B[3,2]]).
↪reshape(-1,1) * 1/h**2
b = np.array([B[1,0] +B[0,1], B[1,3]+B[0,2],+B[2,0]+B[3,1],B[2,3]+B[3,2]]).
↪reshape(-1,1) * 1/h**2
u = A.I @ b

print(u)
print("La réponse n'est pas la même mais le raisonnement semble cohérent...")
```

```
[[0.30585801]
 [0.62870813]
 [0.62870813]
 [1.27883098]]
La réponse n'est pas la même mais le raisonnement semble cohérent…
```