1 Signaux et systèmes en temps discret

$$x(n) = x_{\text{continu}}(nT_s)$$

Avec T_s la période d'échantillonnage

Impulsion unité

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Saut unité

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Durée finie : échantillons égaux à 0 en dehors d'un intervalle donné

Durée infinie : saut unité, oscillation, etc...

Séquence à droite : 0 pour $n < n_0$

Séquence à gauche : 0 pour $n > n_0$

Représentation exponentielle d'un signal périodique

$$e^{\sigma n + jn\omega_0} = e^{\sigma n} \left(\cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)\right)$$

Pas d'amortissement si $\sigma = 0$

1.1 Propriétés des systèmes

Lorsqu'on passe un signal x dans un système T on obtient une sortie y

$$y(n) = T\left[x(n)\right]$$

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)}$$

$$\begin{cases} \text{IIR} & a(k) \neq 0 \quad \forall k \in 1, ..., p \\ \text{FIR} & a(k) = 0 \quad \forall k \in 1, ..., p \end{cases}$$

$$p > q \longrightarrow \text{ causal}$$

p est l'ordre du système

Linéarité

$$T\left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] = aT\left[x_1(n)\right] + bT\left[x_2(n)\right]$$

Invariance temporelle (ou shift)

$$y(n - n_0) = T\left[x(n - n_0)\right]$$

Causalité $y(n)$ dépend uniquement de $y(n-k)$ et $x(n)$

Stabilité BIBO : borné en entrée et borné en sortie. Vérifié si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Inversibilité Si on peut déterminer $x(n)$ à partir de $y(n)$

$$x_1(n) \neq x_2(n) \longrightarrow y_1(n) \neq y_2(n)$$

1.2 Convolution

1.2.1 Propriétés

Linéarité

$$x(n) * (\alpha y(n) + \beta w(n)) = \alpha x(n) * y(n) + \beta x(n) * w(n)$$

Invariance temporelle

$$w(n) = x(n) * y(n) \Longleftrightarrow x(n) * y(n-k) = w(n-k)$$

Commutativité

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

Associativité

$$\Big(x(n) * h(n)\Big) * w(n) = x(n) * \Big(h(n) * w(n)\Big)$$

Multiplication par une impulsion unité

$$h(n) * d(n) = h(n)$$

1.3 DTFT

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)e^{-jn\omega}}$$

Cas spéciaux :

$$x(n)=e^{jn\omega_0}\longrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=2\pi u(\omega-\omega_0)\quad |\omega|<\pi$$

$$x(n)=u(n)\longrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi u(\omega)\quad |\omega|<\pi$$

Impulsion unité :

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$

H décrit la réponse fréquentielle du système

1.3.1 Propriétés

Périodicité $X(e^{j\omega})$ est périodique en 2π

Signal réel si $x(n)$ réel alors

$$x(e^{j\omega})=X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

Décomposition amplitude-phase

$$X(e^{j\omega})=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\Phi_x(\omega)}$$

Pour un signal réel $\left|X(e^{j\omega}\right|$ est paire et Φ impaire

1.3.2 Opérations

Convolution

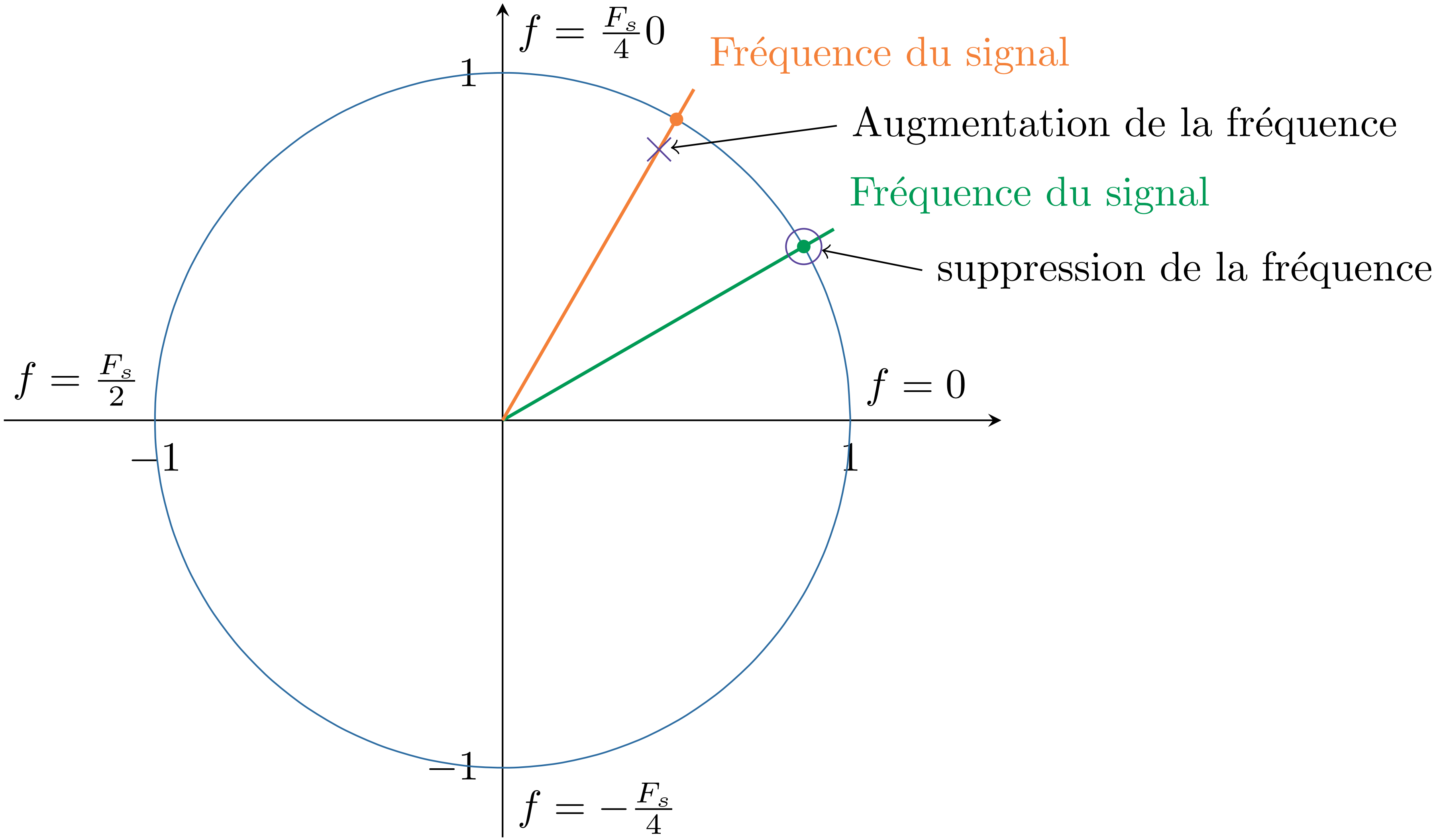
$$y(n)=x(n)*h(n)\Longleftrightarrow Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$$

Modulation

$$y(n)=x(n)\cdot h(n)\Longleftrightarrow Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})*H(e^{j\omega})$$

1.4 Transformée en z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^n \qquad z = re^{j\omega}$$



Si une fréquence tombe pile sur un zéro (sur le cercle unité) alors elle sera complètement annulée. Un pôle proche du cercle unité va augmenter les fréquences proches de ce pôle.

1.5 Exemple

$f[k]$	$F(z) = Z(f[k])$
$\Delta[k]$	1
$\epsilon[k]$	$\frac{z}{z-1}$
kh	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2}(kh)^2$	$\frac{h^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^{kh}	$\frac{z}{z-a^h}$
$e^{-akh}\epsilon[k]$	$\frac{z}{z-e^{-at}}$
$a^{\|k\|}$	$\frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$

1.5.1 Propriétés

Linéarité

$$Z\{\alpha x(n) + \beta y(n)\} = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

Décalage temporel

$$Z\{x(n-N)\} = z^{-N}X(z)$$

	$x(n)$	$X(z)$
Délai	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$
Multiplication par α^n	$a^n x(n)$	$X(z/\alpha)$
Conjugué	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$
Inversion de temps	$x(-n)$	$X(z^{-1})$
Convolution	$x(n) * w(n)$	$X(z)W(z)$
Multiplication par n	$nx(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$

Table 1: Opérations

$$Z\{\delta(n)\} = 1$$

1.6 Équation aux différences

$$\underset{\text{degré relatif}}{d} = \underset{\text{deg(denominateur)}}{n} - \underset{\text{deg(numérateur)}}{m}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$G(z) = \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \cdots + b_m z^{-d-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

$a \longrightarrow$ poles, $b \longrightarrow$ zéros

$$|a_i| < 1 \longrightarrow \text{ stable } \quad \forall i \in [1, n]$$