

1 Signaux et systèmes en temps discret

$$x(n) = x_{\text{continu}}(nT_s)$$

Avec T_s la période d'échantillonnage

Impulsion unité

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Saut unité

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Représentation exponentielle d'un signal périodique

$$e^{\sigma n + jn\omega_0} = e^{\sigma n} (\cos(n\omega_0) + j \sin(n\omega_0))$$

Pas d'amortissement si $\sigma = 0$

1.1 Propriétés des systèmes

Lorsqu'on passe un signal x dans un système T on obtient une sortie y

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^q \textcolor{violet}{b}(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^p \textcolor{violet}{a}(k)y(n-k)$$

$$\begin{cases} \text{IIR} & a(k) \neq 0 \quad \forall k \in 1, \dots, p \\ \text{FIR} & a(k) = 0 \quad \forall k \in 1, \dots, p \end{cases}$$

Linéarité

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

Invariance temporelle (ou shift)

$$y(n - n_0) = T[x(n - n_0)]$$

Causalité $y(n)$ dépend uniquement de $y(n-k)$ et $x(n)$

Stabilité BIBO : borné en entrée et borné en sortie. Vérifié si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Inversibilité Si on peut déterminer $x(n)$ à partir de $y(n)$

$$x_1(n) \neq x_2(n) \longrightarrow y_1(n) \neq y_2(n)$$

1.2 Convolution

1.2.1 Propriétés

Linéarité

$$x(n) * (\alpha y(n) + \beta w(n)) = \alpha x(n) * y(n) + \beta x(n) * w(n)$$

Invariance temporelle

$$w(n) = x(n) * y(n) \Longleftrightarrow x(n) * y(n - k) = w(n - k)$$

Commutativité

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

Associativité

$$(x(n) * h(n)) * w(n) = x(n) * (h(n) * w(n))$$

Multiplication par une impulsion unité

$$h(n) * d(n) = h(n)$$

1.3 DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

Cas spéciaux :

$$x(n) = e^{jn\omega_0} \longrightarrow X(e^{j\omega}) = 2\pi u(\omega - \omega_0) \quad |\omega| < \pi$$

$$x(n) = u(n) \longrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi u(\omega) \quad |\omega| < \pi$$

Impulsion unité :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$

H décrit la réponse fréquentielle du système

1.3.1 Propriétés

Périodicité $X(e^{j\omega})$ est périodique en 2π

Signal réel si $x(n)$ réel alors

$$x(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

Décomposition amplitude-phase

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\Phi_x(\omega)}$$

Pour un signal réel $|X(e^{j\omega})|$ est paire et Φ impaire

1.3.2 Opérations

Convolution

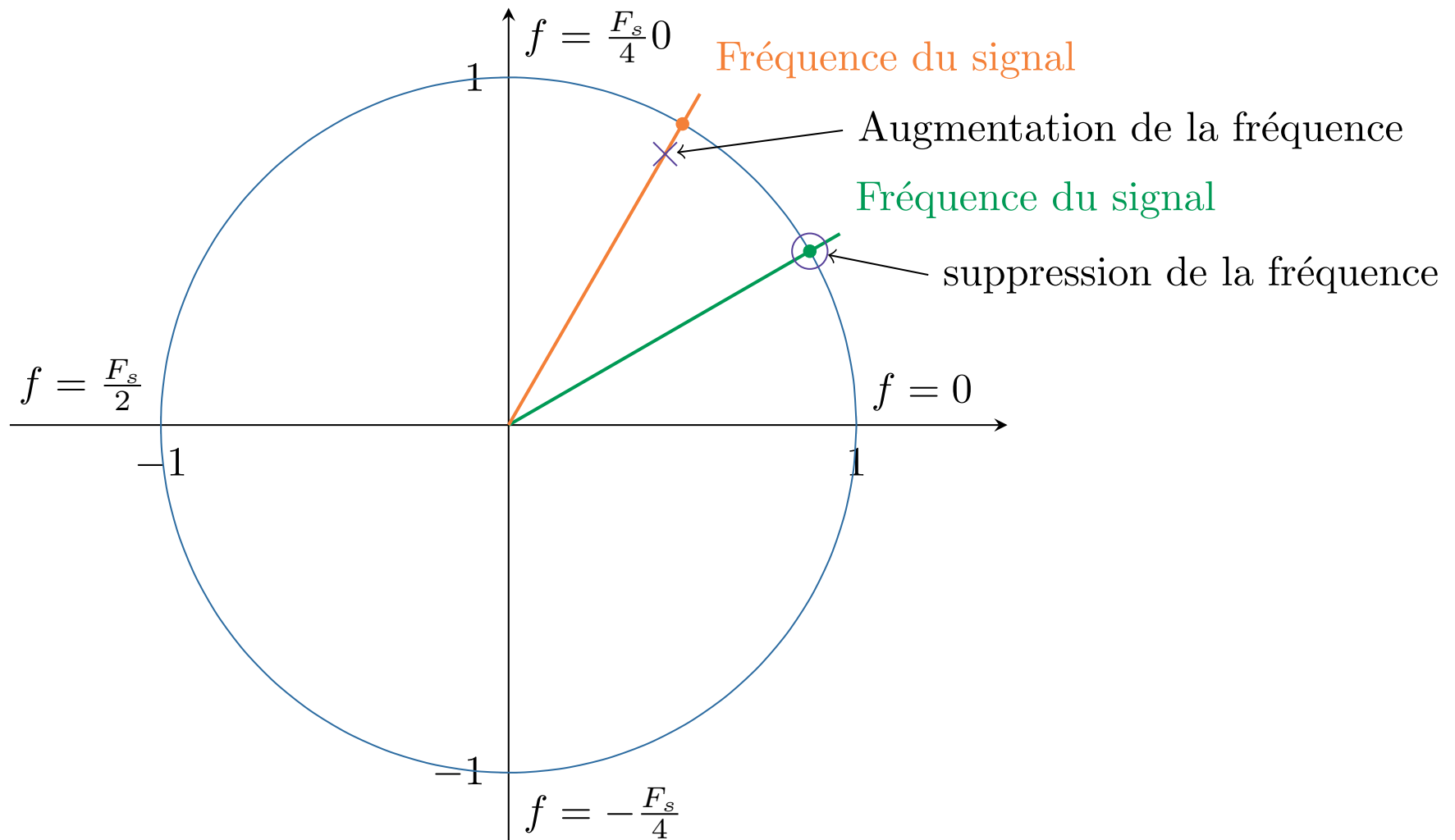
$$y(n) = x(n) * h(n) \iff Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

Modulation

$$y(n) = x(n) \cdot h(n) \iff Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$$

1.4 Transformée en z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^n \quad z = re^{j\omega}$$



1.4.1 Propriétés

Linéarité

$$Z\{\alpha x(n) + \beta y(n)\} = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

Décalage temporel

$$Z\{x(n - N)\} = z^{-N} X(z)$$

	$x(n)$	$X(z)$
Délai	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} X(z)$
Multiplication par α^n	$\alpha^n x(n)$	$X(z/\alpha)$
Conjugué	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$
Inversion de temps	$x(-n)$	$X(z^{-1})$
Convolution	$x(n) * w(n)$	$X(z)W(z)$
Multiplication par n	$nx(n)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$

Table 1: Opérations

$$Z\{\delta(n)\} = 1$$

1.5 Équation aux différences

$$\text{degré relatif} = \deg(\text{numérateur}) - \deg(\text{dénominateur})$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$G(z) = \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + b_2 z^{-d-2} + \dots + b_m z^{-d-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$a \longrightarrow$ poles, $b \longrightarrow$ zéros

$$|a_i| < 1 \longrightarrow \text{stable} \quad \forall i \in [1, n]$$