1 Algèbre linéaire

1.1 Matrices

$$x = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$y(n) = h^T x(n) = x^T h \qquad \text{(un élément à la fois)}$$

1.1.1 Transposée hermitienne

$$\left(A^H\right)^H = A$$
$$(A+B)^H = A^H + B^H$$
$$(AB)^H = B^H A^H$$

1.1.2 Rang

Le rang d'une matrice A donne le nombre de colonnes linéairement indépendantes qu'elle contient. Si le rang est **plein** alors

$$\text{rank}(A) = \rho(A) = n$$

1.1.3 Inverse

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$
$$(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$$

Inversible si $\det(A) \neq 0$

1.1.4 Déterminant

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$
$$\det\left(A^T\right) = \det(A)$$
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$
$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

1.1.5 Pseudo-inverse

Forme "norme minimale" (sous-déterminé)

$$A \in \mathbb{R}_{n\times m} \qquad n < m$$

$$\boxed{A^+_{nm} = A^H(AA^H)^{-1}}$$

Permet de calculer la solution minimale

$$x = A^+ b$$

Forme "moindres carrés" (sur-déterminé)

$$\boxed{A^+_{mc} = (A^H A)^{-1} A^H}$$

1.1.6 Norme

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}$$

Permet aussi de calculer la distance : $||x-y||_2$

$$||x||_\infty = \max |x_i|$$

1.1.7 Produit scalaire

$$\langle a, b\rangle = a \cdot b = ||a||||b|| \cos\theta$$

1.1.8 Espace vectoriel

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Si la base est orthogonale et si on utilise autant de coefficients qu'il y a de points dans le signal, alors la reconstruction est parfaite.

1.1.9 Projection

$$\hat{b} = A^+_{mc} x_0 = P_A b$$

Par exemple

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Solution des moindres carrés donnée par

$$x_0 = (A^H)^{-1} A^H b = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e = b - Ax_0 = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.1.10 Valeurs propres

$$Av = \lambda v$$

Pour trouver les valeurs propres, on cherche les racines de

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$

$$AV = V\Lambda$$

Vecteurs propres On va chercher les vecteurs v tels que

$$Av = \lambda v \longleftrightarrow (A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}$$

Reconstruction à partir des valeurs et vecteurs propres

$$M = V\Lambda V^{-1}$$

1.2 Approximation

Autant de lignes que de points et autant de colonnes que de fonctions de base

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \sin(2\pi x_{11}) & \cos(2\pi x_{11}) \\ 1 & x_{12} & \sin(2\pi x_{12}) & \cos(2\pi x_{12}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \sin(2\pi x_{1n}) & \cos(2\pi x_{1n}) \end{bmatrix}$$

Vecteur au sens des moindres carrés :

$$\Theta = (A^T A)^{-1} A^T b = A^+ b$$

Pour une ellipse avec l'équation

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + exy = 1$$

on a

$$A = [x_i^2, y_i^2, x_i, y_i, x_i y_i] \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$