1 Codage de canal

$$\overbrace{010110}^{k} \longrightarrow \overbrace{11010010}^{n}$$

k	Nombre de bits à transmettre (information)
n	Nombre de bits transmis $n \geq k$

Information (bits à transmettre)

$$x = \begin{pmatrix} x_{k-1} & x_{k-2} & \cdots & x_1 & x_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times k}$$

Matrice systématique (identité à gauche).

$$G_S = \begin{pmatrix} I_k & P \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x & \cdots & x \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x & \cdots & x \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

$$H_s = \begin{pmatrix} P^T & I_{n-k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-k\times n}$$

1.1 Propriétés

$$G_S H_S^T = 0$$

1.2 Codes linéaires

La somme de deux codes valides donne un nouveau code valide

1.3 Codes cycliques

Un décalage vers la gauche ou vers la droite donne un autre code valide.
Un décalage d'un mot-code de longueur n dans $\mathbb{R}_n[X]$ est similaire à une multiplication par X

1.3.1 Générateur

Un générateur permet, par des décalages cycliques et des sommes d'obtenir tous les mots-code.
Pour trouver un générateur

1.3.2 Encodage

Encodage systématique :

$$x \xrightarrow{\text{encodage}} xX^{n-k} + \text{reste}\left(\frac{xX^{n-k}}{g(x)}\right) = y$$

Encodage "standard" :

$$x \xrightarrow{\text{encodage}} xg(x)$$

1.3.3 Vérification

On va simplement chercher à savoir si le message est correct ou non.
Vérification systématique (on vérifie simplement que le message soit égal au reste, comme pour l'encodage)

$$y[0:k] == \text{reste}\left(\frac{y[0:k]X^{n-k}}{g(x)}\right)$$

Vérificaiton "standard"

$$s(x) = e(x) = \frac{y}{g(x)} \qquad s(x) = 0 \longrightarrow \text{ ok}$$

1.3.4 Correction d'erreurs

On va utiliser une matrice de contrôle (typiquement pour les codes BCH) qui va indiquer la position de(s) erreur(s)

1.3.5 Décodage

Dans le cas où le message est correct, on va effectuer le décodage.
Décodage systématique (on récupère simplement les bits dans le message tels-quels):

$$\hat{x} = y[0:k]$$

Décodage "standard" :

$$\hat{x} = \frac{y}{g(x)}$$

1.4 Générateur ↔ matrice

On peut créer la matrice en effectuant des décalages cycliques du générateur $g(x)$

$$\underset{k\times n}{\begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-k} \end{pmatrix}}$$

Avec le nombre de lignes correspondant à la longueur du message. Cette matrice n'est pas systématique. Il faut la manipuler si on veut obtenir la version systématique. On effectue ensuite des combinaisons linéaires sur les lignes pour obtenir la matrice systématique.