

Feuille de TD 1

Règles de calcul

Exercice 1. Écrire sous forme de fraction et sans exposants les nombres suivants :

1. $a = 4^{-3}$, $b = 5^{-2}$, $c = 8^{-5}$, $d = (2^{-3})^{-2}$, $e = 5^{-3} \cdot 5^{-1}$;
2. $a = \frac{1}{2^{-3}}$, $b = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, $c = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(-\frac{2}{3}\right)^{-6}$.

Exercice 2. Écrire sous forme de fraction et sans exposants les nombres suivants :

1. $a = 16^{\frac{1}{2}}$, $b = 81^{3/4}$, $c = 27^{4/3}$, $d = 64^{1/3}$, $e = \left(\frac{25}{4}\right)^{3/2}$;
2. $a = (2^{-1/3})^{-21}$, $b = (0,064)^{-5/3}$, $c = 5^{-4} \cdot 5^2$, $d = (5^{-1} + 5^0)^{-1}$, $e = 7^{-1/2} \cdot 7^{5/2}$.

Exercice 3. Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{a^3b^2}{a^2b} \cdot \frac{ab^3}{a^3b^2}; \quad B = \frac{\frac{3a^2}{5b}}{\frac{2a^3}{6b^3}}; \quad C = \frac{\frac{a+b}{c}}{\frac{(a+b)^2}{c^4}}; \quad D = \frac{a - \frac{1}{b}}{1 - \frac{a}{b}}$$

Exercice 4. Écrire comme quotients de polynômes les quantités suivantes :

1. $A(x) = (5x)^{-3}$;
2. $B(x, y) = \left(\frac{8x^6}{y^3}\right)^{2/3}$;
3. $C(x) = \left(\frac{81x^4}{(x^2+2x+1)^2}\right)^{-1/2}$;

Exercice 5. Écrire sous forme d'un quotient (factorisé et simplifié) les expressions suivantes :

1. $A(x) = \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}$;
2. $B(x) = x - 3 - \frac{x-3}{x+1}$;
3. $C(x) = \frac{x-2(x-2)}{(x+3)(x-2)}$;
4. $D(x) = \frac{x+1}{x+3} - \frac{x}{x-2}$.

Exercice 6. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a &= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}, \\ b &= 3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32} + 5\sqrt{18}, \\ c &= 5\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{8} \end{aligned}$$

Exercice 7. Simplifier les fractions suivantes en utilisant des identités remarquables :

$$A = \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2}{a^2 + 2a + 1}; \quad B = \frac{\frac{a^2 - b^2}{3a+3b}}{\frac{2ab}{9a-9b} \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2b^2}}; \quad C = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab}.$$

Exercice 8. Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $A(x) = (x - 1)(-x + 2) + (2x + 1)^2,$
2. $B(x) = (x - 3)^2 - 4x(x + 1),$
3. $C(x) = (2x + 5)^2 - (5x + 2)(5x - 2) - (1 - x)(3 + x)$
4. $D(x, y) = (x - y + 1)(x + y - 1)$

Exercice 9. En utilisant les identités remarquables, lorsque c'est possible, factoriser les expressions suivantes :

1. $A(x) = 49 - 25x^2 ;$
2. $B(x) = 2x^2 - 12x + 18$
3. $C(x) = 16 + 49x^2 + 56x ;$
4. $D(x) = 4x^2 + 36 ;$
5. $E(x) = x^2 + 20x + 25 ;$
6. $F(x) = 3(x + 1)^2 - 6x - 15 ;$
7. $G(x) = 8x - (x + 2)^2.$

Exercice 10. Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur :

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}, \quad b = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, \quad c = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}, \quad d = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \quad e = \frac{2}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Exercice 11. (*) Écrire les nombres suivants sans radical :

$$a = \sqrt[3]{\frac{27}{64}}; \quad b = \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{25}; \quad c = \sqrt[4]{16}; \quad d = \frac{\sqrt[5]{4} \sqrt[4]{8} (\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$$

Équations, inéquations

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes :

1. $2 + \frac{1}{x+2} = \frac{7}{x+2}$

2. $\frac{5}{x-5} + 6 = \frac{x}{x-5}$

3. $1 + \frac{4}{3x+4} = \frac{-3x}{3x+4}$

4. $x + 2 = \frac{x^2 - x - 6}{x+1}$

5. $(x+3)(x-6) = (x+1)(x+7)$

6. $(x+2)(x+3) = x^2 - x - 6.$

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes, où x est l'inconnue et a, b sont des paramètres. On discutera selon la valeur des paramètres.

1. $\frac{3x}{2} - a = x + 3a$

2. $a(x-3) = 2x + b$

3. $\frac{a+x-2}{a-x} = 1$

4. $\frac{a+3}{a-2} = \frac{x}{a^2-4}.$

Exercice 14. Résoudre les inéquations suivantes (on pourra s'aider d'un tableau de signe), et représenter l'ensemble des solutions sur la droite réelle :

1. $3x - 2 < 7$

5. $\frac{x+2}{x+1} > 2$

2. $-3x \geq -12$

6. $\frac{x^2}{x-2} \leq x + 3,$

3. $(x+2)(7x-1) \leq 0,$

7. $\frac{x+1}{x+2} > \frac{x-2}{x-1}$

4. $(x-5)(-2x-4) > 0$

8. $(-2x+1)(4+2x)(3x-2) \geq 0$

Exercice 15. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 1 = 0,$

6. $x^3 + 3x^2 + 2x = 0,$

2. $x^2 + 3x + 2 = 0,$

7. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0,$

3. $x^2 + 3x + 3 = 0,$

8. $x + \frac{1}{x} + 2 = 0,$

4. $x^2 + 3x = 0,$

9. $x^2 + 3 = 0.$

Exercice 16. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 1 < 0,$

6. $x^3 + 3x^2 + 2x > 0,$

2. $x^2 + 3x + 2 \leq 0,$

7. $3x^2 - 2x^4 \geq -2,$

3. $x^2 + 3x + 3 < 0,$

8. $x + \frac{1}{x} < 3,$

4. $x^2 + 3x > 0,$

9. $1 - x^2 < 1 - x.$

Exercice 17. Résoudre les équations suivantes :

1. $|x + 2| = 3$
2. $|-2x + 3| = 0$
3. $|x + 1| = |x|$
4. $|x - 4| = x$
5. $x^2 - 1 = |(x - 1)x|$
6. $|x + 2| = |3x - 1|$
7. $|-2x + 3| = -x^2$
8. $|x + 1| = |x^2 - 1|$
9. $|x - 4| = x^2 - 8x + 16,$
10. $x^2 - 1 = |x|.$

Exercice 18. Résoudre les inéquations suivantes :

- (a) $|x - 2| \leq 4,$
- (b) $|x - 2| \geq 1,$
- (c) $|3x + 5| > 2,$
- (d) $|2x - 1| < 3,$
- (e) $|x - 1| \leq |x - 3|,$
- (f) $|x - 2| > |x + 4|,$
- (g) $|x + 3| \leq 2x,$
- (h) $\frac{x+2}{|x-1|} \geq 0,$
- (i) $\left| \frac{x-3}{x-2} \right| < 1,$
- (j) $|(x-1)(x+2)| \leq x^2 + 2.$

Exercice 19. (*)

1. Résoudre dans \mathbb{R} : $x + 1 > \sqrt{2x + 1};$
2. Résoudre dans \mathbb{R} : $(x + 1) < 2\sqrt{x} + 1.$

Exercice 20. (*)

1. Résoudre dans \mathbb{R} : $1 < \sqrt{x + 1};$
2. Résoudre dans \mathbb{R} : $\sqrt{x^2 + 1} < x - 2;$
3. Résoudre dans \mathbb{R} : $\sqrt{x^2 + 4} < x + 1-$