

Politechnika Warszawska

WYDZIAŁ MECHANICZNY  
ENERGETYKI I LOTNICTWA



Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej

# Praca przejściowa magisterska

na kierunku Lotnictwo i Kosmonautyka  
w specjalności Statki Powietrzne

Algorytmizacja równań metody Ciągu, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu  
zmiennej prędkości i masy na osiągi samolotów poddźwiękowych

inż. Sebastian Czajkowski

Numer albumu 313662

promotor  
dr inż. Maciej Lasek

Warszawa, 2024/2025



# Algorytmizacja równań metody Ciągu, ze szczególnym uwzględnieniem wpływu zmiennej prędkości i masy na osiągi samolotów poddźwiękowych

Prezentowana praca przedstawia implementację, w programie MATLAB, równań metody ciągu, rozszerzonych o zmienną masę samolotu, wynikającą ze zmiennej masy paliwa. Równania te uwzględniają także ściśliwość powietrza dla samolotów poddźwiękowych. Program jest w stanie, na podstawie charakterystyk zespołu napędowego i podstawowych danych o samolocie, wyznaczyć oraz zaprezentować na trójwymiarowych wykresach (zależnych od prędkości, masy paliwa i wysokości lotu) kąty toru lotu oraz prędkości wznoszenia dla trzech typów samolotów: śmigłowych samolotów o śmigle stałym, śmigłowych samolotów o śmigle przestawialnym oraz dla samolotów odrzutowych.

Słowa kluczowe:

osiągi samolotu, metoda ciągu, masa paliwa, mechanika lotu, ściśliwość powietrza, samoloty śmigłowe, samoloty odrzutowe, samoloty poddźwiękowe, kąt toru lotu, kąt natarcia, ciężar samolotu, prędkość wznoszenia.

Algorithmization of the equations of the thrust method, with particular emphasis on the effect of variable speed and mass on the performance of subsonic aircraft.

Presented academic work presents an implementation, in MATLAB, of the equations of the thrust method, extended to include the variable weight of the aircraft, resulting from the variable weight of the fuel. The equations also consider air compressibility for subsonic aircraft. The program is able, based on propulsion unit characteristics and basic aircraft data, to determine and present on three-dimensional graphs (dependent on speed, fuel mass and flight altitude) the flight path angles and climb rates for three types of aircraft: fixed propeller aircraft, staggered propeller aircraft and jet aircraft.

Descriptors:

aircraft performance, thrust method, aircraft flight mechanics, fuel mass, air compressibility, propeller aircraft, jet aircraft, subsonic aircraft, flight path angle, angle of attack, aircraft weight, climb speed.

# Spis treści

1. Cel pracy .....	6
2. Wstęp teoretyczny .....	7
3. Model matematyczny .....	10
4. Model fizyczny .....	10
5. Wyprowadzenie równań .....	11
6. Opis kodu programu .....	12
7. Parametry wejściowe przykładowych samolotów .....	13
7.1. Samolot o małej mocy i śmigle stałym .....	13
7.2. Samolot o dużej mocy i śmigle przestawialnym .....	14
7.3. Samolot odrzutowy .....	15
8. Porównanie otrzymanych wyników ze standardową metodą ciągu .....	16
8.1. Porównanie wyników otrzymanych dla samolotu PWS-51 .....	17
8.2. Porównanie wyników otrzymanych dla samolotu Piper PA – 31 Navajo .....	18
8.3. Porównanie wyników otrzymanych dla samolotu PZL TS – 11 Iskra .....	19
9. Wnioski .....	20
10. Bibliografia .....	21
11. Wykaz symboli i skrótów .....	22
12. Spis rysunków .....	23
13. Spis wykresów .....	23
14. Spis tabel .....	23

## 1. Cel pracy

Celem pracy jest implementacja równań metody ciągu, rozszerzonych o zmienną masę samolotu oraz uwzględniających ściśliwość powietrza dla samolotów poddźwiękowych, w programie MATLAB. Otrzymany program będzie w stanie wyznaczyć osiągi samolotu (kąt toru lotu oraz prędkość wznoszenia) dla zmiennej prędkości lotu, wysokości lotu oraz masy paliwa samolotu, co w porównaniu do standardowych metod służących wyznaczeniu osiągow samolotu, da w rezultacie wyniki bliższe rzeczywistym.

W celu dokładnego zobrazowania wpływu wszystkich czynników na wyznaczane osiągi samolotu, program prezentuje wyniki na wykresie przestrzennym. Dokonano także obliczenia wymienionych osiągow dla różnych samolotów, za pomocą napisanego programu. Do obliczeń użyto trzech typów samolotów: samolotu o małej mocy i śmigłem stałym (PWS-51), samolotu o dużej mocy ze śmigłem przestawialnym (Piper PA-31 Navajo) oraz samolotu odrzutowego (PZL TS-11 Iskra).

## 2. Wstęp teoretyczny

### a) Kąt toru lotu, prędkość wznoszenia

Kąt toru lotu oraz prędkość wznoszenia samolotu są parametrami niezbędnymi do wyznaczenia osiągow samolotu. W celu wyznaczenia tych parametrów, należy skorzystać z charakterystyk zespołu napędowego ([2] wykresów określających zależność między mocą rozporządzalną, a prędkością lotu dla różnych wysokości lotu lub zależność między ciągiem rozporządzalnym, a liczbą Macha, dla różnych wysokości lotu).

Do wyznaczenia kątów toru lotu oraz prędkości wznoszenia, zakłada się, że samolot wykonuje lot ustalony, (wielkości takie jak: prędkość lotu, wysokość lotu, kąt toru lotu, kąt natarcia, nie ulegają zmianie). Dla stałej wysokości, należy korzystać z warunków atmosfery wzorcowej [3]:

- na poziomie morza ( $h = 0m$ ):

- Temperatura:  $T_0 = 288,15 K$
- Gęstość powietrza:  $\rho_0 = 1,2255 kg/m^3$
- Prędkość dźwięku:  $a_0 = 340,3 m/s$

- na wysokościach  $0 < h \leq 11km$ , przyjmuje się wzory ( $h[m]$ ):

- Temperatura:  $T_h = T_0 - 6,5 \cdot \frac{h}{1000}$
- Gęstość powietrza:  $\rho_h = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{h}{44300}\right)^{4.256}$
- Prędkość dźwięku:  $a_h = a_0 \cdot \sqrt{\frac{T_h}{T_0}}$

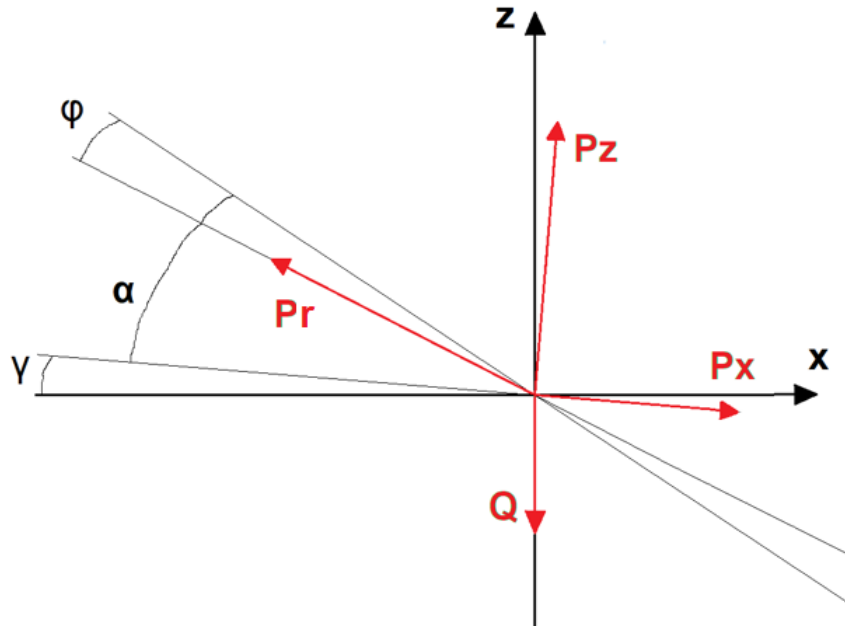
- na wysokościach  $h > 11km$ , przyjmuje się wzory ( $h[m]$ ):

- Temperatura:  $T_h = 288,15 - 6,5 \cdot \frac{11000}{1000} = 216,65 K$
- Gęstość powietrza:  $\rho_h = \rho_0 \cdot e^{\frac{h-11000}{6337}} = 1,2255 \cdot \left(1 - \frac{11000}{44300}\right)^{4.256} \cdot e^{\frac{h-11000}{6337}} = 0,3637 \cdot e^{\frac{h-11000}{6337}}$
- Prędkość dźwięku:  $a_h = a_0 \cdot \sqrt{\frac{T_{11}}{T_0}} = 340,3 \cdot \sqrt{\frac{216,65}{288,15}} = 295,07 m/s$

### b) Metoda Ciągu ze zmienną masą samolotu i ściśliwością powietrza [1]

Założenia upraszczające, zgodne z [1], stosowane przy metodzie ciągu:

- zachowana jest równowaga podłużna samolotu, bądź dzięki działaniu pilota, bądź też na skutek pracy układu automatycznego sterowania,
- samolot jest bryłą sztywną,
- nieodkształcalny model samolotu,
- zmienna masa samolotu w trakcie lotu,
- niezmienny środek ciężkości samolotu



Rysunek 1. Schemat sił działających na samolot, dla metody ciągu

Równania ruchu (w aerodynamicznym układzie odniesienia) można zapisać następująco:

$$\begin{cases} P_z + P_r \sin(\alpha - \varphi) - Q \cos(\gamma) = 0 \\ -P_x + P_r \cos(\alpha - \varphi) + P_z \sin(\gamma) - Q \cos(\gamma) = 0 \end{cases}$$

Podstawiając odpowiednie zależności, pod siły działające na samolot, otrzymuje się równoważny układ równań ruchu samolotu:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho_h S a_\infty (\alpha - \alpha_0) V^2 + P_r \sin(\alpha - \varphi) - g \left( m_0 - t \cdot n \cdot \frac{dm_p}{dt} \right) \cos(\gamma) = 0 \\ -\frac{1}{2} \rho_h S \left( Cx_{min} + \frac{1}{\pi \Lambda_e} a_\infty^2 (\alpha - \alpha_0)^2 \right) V^2 + P_r \cos(\alpha - \varphi) - g \left( m_0 - t \cdot n \cdot \frac{dm_p}{dt} \right) \sin(\gamma) = 0 \end{cases}$$

Powyższe równanie, ze względu na występujące nieliniowości, jest niemożliwe do rozwiązania metodami analitycznymi. Korzystając z rozwiązań numerycznych, należy rozwiązać powyższy układ równań, względem kąta natarcia  $\alpha$  oraz kąta toru lotu  $\gamma$ . Prędkość wznoszenia samolotu można wyznaczyć korzystając z zależności [3]:  $w = V \cdot \sin \gamma$

Kąty toru lotu oraz prędkości wznoszenia szukane są jedynie w przedziale istotnym dla późniejszego wyznaczenia osiągow samolotu, zakładając szereg wysokości lotu, od poziomu morza, do wysokości o kilka procent większej od pułapu teoretycznego samolotu (z danych samolotu) oraz zakładając szereg prędkości lotu, od prędkości przeciągnięcia na danej wysokości do prędkości maksymalnej lotu poziomego (takiej, dla której maksymalny kąt toru lotu będzie zerowy, przy ujemnym przyroście kąta toru lotu). Prędkość przeciągnięcia na danej wysokości i w danym czasie można obliczyć, korzystając z poniższego wzoru:

$$(V_{min})_{h,t} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left( m_0 - t \cdot n \cdot \frac{dm_p}{dt} \right) \cdot g}{\rho_h \cdot S \cdot C_{z_{max}}}}$$



### **c) Dobór Samolotów**

#### **PWS – 51**

[4] Jednosilnikowy, dwumiejscowy samolot sportowy. Zaprojektowany w 1929 roku w Podlaskiej Wytwórni Samolotów. Celem samolotu był udział w zawodach Challenge 1930. Wyposażony w napęd śmigłowy, ze śmigłem stałym. Posiadał pięciocylindrowy, gwiazdowy silnik Armstrong-Siddeley Genet, o mocy nominalnej 59kW. Do wyznaczenia charakterystyk aerodynamicznych samolotu założony został profil płata NACA 4412.

#### **Piper PA – 31 Navajo**

[5] Dwusilnikowy, lekki, samolot pasażerski i transportowy. Produkowany od 1964 do 1972 roku, łącznie w 2044 egzemplarzach. Wyposażony w dwa silniki tłokowe, sześciocylindrowe, chłodzone powietrzem, Lycoming TIO-540-A, o mocy 230kW każdy. Silniki napędzały śmigła przestawialne o 3 łopatach. Profile płata: NACA 63<sub>4</sub>-415 przy kadłubie, NACA 63<sub>1</sub>-212 przy końcówce płata.

#### **PZL TS – 11 Iskra**

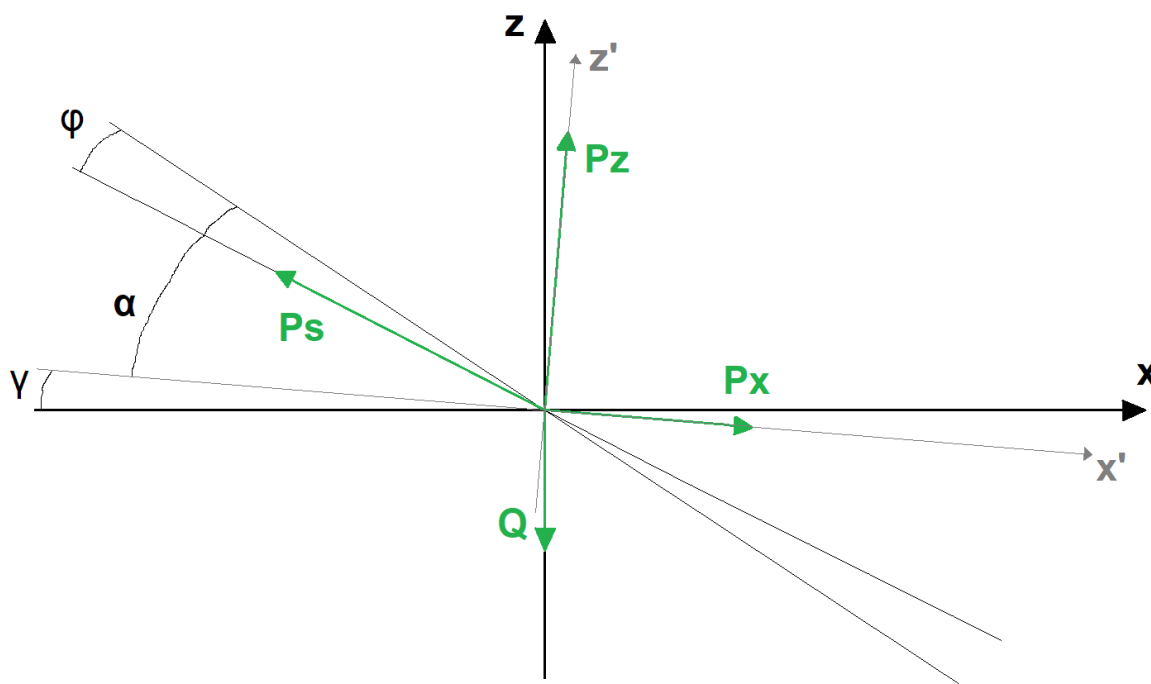
[6] Jednosilnikowy samolot szkolno treningowy produkowany od 1963 do 1987 roku w 424 egzemplarzach, przez WSK „PZL Mielec”. Jest to pierwszy samolot odrzutowy wyprodukowany w Polsce. Wyposażony w silnik WSK SO-3 o ciągu 10,8kN. Profile płata: NACA 63-209 przy kadłubie i NACA 63-009 przy końcówce płata.

### 3. Model matematyczny

Układ odniesienia, który przyjęto do obliczeń jest układem aerodynamicznym  $x'z'$  (związany z przepływem).

Zgodnie z [3], w globalnym układzie odniesienia, przyspieszenie ziemskie  $g$  jest skierowane pionowo w dół, a kąt toru lotu  $\gamma$  jest odniesiony do płaszczyzny horyzontu. Kierunek ciągu  $P_s$  może być konstrukcyjnie pochylony w stosunku do osi konstrukcyjnej samolotu o kąt  $\varphi$ .

W aerodynamicznym układzie odniesienia, wektor prędkości samolotu względem powietrza leży na osi  $x'$ , a wektor siły nośnej leży na osi  $z'$ . Również dla tego układu odniesienia wektor siły ciągu  $P_s$  może być konstrukcyjnie pochylony w stosunku do osi konstrukcyjnej samolotu o kąt  $\varphi$ .



Rysunek 2. Model matematyczny – układ odniesienia samolotu

### 4. Model fizyczny

Rozważany jest ustalony prostoliniowy lot symetryczny samolotu pod kątem toru lotu  $\gamma$ , kątem natarcia  $\alpha$  i kątem pochylecia wektora siły ciągu  $\varphi$

#### Założenia wstępne (upraszczające) zgodnie z [2]:

- zachowana jest równowaga podłużna samolotu, bądź dzięki działaniu pilota, bądź też na skutek pracy układu automatycznego sterowania,
- samolot jest bryłą sztywną,
- nieodkształcalny model samolotu,
- zmienna masa samolotu w trakcie lotu,
- niezmienny środek ciężkości samolotu

## 5. Wyprowadzenie równań

Układ równań metody ciągu ze zmienną masą samolotu:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho_h S a_\infty (\alpha - \alpha_0) V^2 + P_r \sin(\alpha - \varphi) - g \left( m_0 - t \cdot n \cdot \frac{dm_p}{dt} \right) \cos(\gamma) = 0 \\ -\frac{1}{2} \rho_h S \left( Cx_{min} + \frac{1}{\pi \Lambda_e} a_\infty^2 (\alpha - \alpha_0)^2 \right) V^2 + P_r \cos(\alpha - \varphi) - g \left( m_0 - t \cdot n \cdot \frac{dm_p}{dt} \right) \sin(\gamma) = 0 \end{cases}$$

### Napęd śmigłowy ze śmigłem stałym

Dla napędu śmigłowego, należy skorzystać z zależności  $P_r = \frac{N_r}{V}$  oraz  $\frac{dm_p}{dt} = q_e \left[ \frac{kg}{kWh} \right] \cdot N_r$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho_h S a_\infty (\alpha - \alpha_0) V^2 + \frac{N_r}{V} \sin(\alpha - \varphi) - g(m_0 - t \cdot n \cdot q_e \cdot N_r) \cos(\gamma) = 0 \\ -\frac{1}{2} \rho_h S \left( Cx_{min} + \frac{1}{\pi \Lambda_e} a_\infty^2 (\alpha - \alpha_0)^2 \right) V^2 + \frac{N_r}{V} \cos(\alpha - \varphi) - g(m_0 - t \cdot n \cdot q_e \cdot N_r) \sin(\gamma) = 0 \end{cases}$$

### Napęd śmigłowy ze śmigłem przestawialnym

Dla napędu śmigłowego, należy skorzystać z zależności  $P_r = \frac{N_r}{V}$  oraz  $\frac{dm_p}{dt} = q_e \left[ \frac{kg}{kWh} \right] \cdot N_r$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho_h S a_\infty (\alpha - \alpha_0) V^2 + \frac{N_r}{V} \sin(\alpha - \varphi) - g(m_0 - t \cdot n \cdot q_e \cdot N_r) \cos(\gamma) = 0 \\ -\frac{1}{2} \rho_h S \left( Cx_{min} + \frac{1}{\pi \Lambda_e} a_\infty^2 (\alpha - \alpha_0)^2 \right) V^2 + \frac{N_r}{V} \cos(\alpha - \varphi) - g(m_0 - t \cdot n \cdot q_e \cdot N_r) \sin(\gamma) = 0 \end{cases}$$

### Napęd odrzutowy, uwzględnienie ściśliwości powietrza

Zgodnie z [2], dla poddźwiękowych samolotów turboodrzutowych, w celu uzyskania poprawnych wyników obliczeń osiągow samolotu, należy skorygować biegunową samolotu o wpływ ściśliwości powietrza na współczynnik oporu  $Cx$ :  $\widetilde{Cx} = \frac{Cx}{\sqrt{1-(Ma)^2}}$

Korzystając z szeregu wysokości lotu, dla którego wyznaczono charakterystyki zespołu napędowego  $Pr(Ma, h)$ , należy zastosować poniższą korektę:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho_h S a_\infty (\alpha - \alpha_0) (Ma \cdot a_h)^2 + P_s \sin(\alpha - \varphi) - g(m_0 - t \cdot n \cdot q_e \cdot P_r) \cos(\gamma) = 0 \\ -\frac{1}{2} \rho_h S \left( \frac{Cx_{min} + \frac{(a_\infty (\alpha - \alpha_0))^2}{\pi \Lambda_e}}{\sqrt{1-(Ma)^2}} \right) (Ma \cdot a_h)^2 + P_s \cos(\alpha - \varphi) - g(m_0 - t \cdot n \cdot q_e \cdot P_r) \sin(\gamma) = 0 \end{cases}$$

Dziedziną otrzymanych układów równań jest masa paliwa, która jest obustronnie ograniczona:

$$m_0 - m_p \leq m \leq m_0$$

Co równoznaczne określić można przy pomocy czasu:

$$0 \leq t \leq t_k = \frac{m_p}{n \cdot \frac{dm_p}{dt}}$$

## 6. Opis kodu programu

### a) Kod źródłowy

Implementacja wyprowadzonych wzorów została wykonana w oprogramowaniu MATLAB 2024. Program zapisany jest w pliku main.m, który składa się z następujących modułów:

- Wczytywanie podstawowych danych technicznych o samolocie, z pliku dane.txt.
- Wybór napędu samolotu (śmigłowy albo odrzutowy) oraz wprowadzenie wartości kroku czasowego, między kolejnymi obliczeniami (im mniejsza wartość kroku czasowego, tym więcej przedziałów mas paliwa, co zwiększa dokładność obliczeń, ale również koszt obliczeniowy, **sugerowana wartość dt w przedziale 1000 – 3000 [s] dla obliczeń zgrubnych**), a następnie:
  - wczytanie charakterystyk silnika odrzutowego  $Pr(Ma, h)$  oraz wartości jednostkowego zużycia paliwa  $[kg/kNs]$ .
  - wczytanie charakterystyk silnika śmigłowego  $Nr(V, h)$  oraz wartości jednostkowego zużycia paliwa  $[kg/kWh]$ .
- Numeryczne rozwiązanie równań metody ciągu, dla różnych wysokości lotu, mas paliwa i prędkości lotu (i odpowiadającym im charakterystykom zespołu napędowego) oraz zapisanie wartości prędkości wznoszenia i kątów toru lotu.
  - Dla silnika odrzutowego, przeliczenie liczba Macha na prędkości lotu.
- Graficzna reprezentacja otrzymanych wyników, w postaci wykresów dwuwymiarowych (wykresy  $w(V, m_p)$  oraz  $\gamma(V, m_p)$  dla różnych wysokości lotu).
- Graficzna reprezentacja otrzymanych wyników, w postaci powierzchniowych wykresów trójwymiarowych (wykresy  $w(V, h, m_p)$  oraz  $\gamma(V, h, m_p)$ ).

Aby program działał poprawnie, należy pamiętać o poprawnym zapisie plików wejściowych. Dane wejściowe analizowanego (i tylko tego) samolotu muszą znajdować się w tym samym folderze co plik main.m.

### b) Dane wejściowe w pliku „dane.txt”

Aby poprawnie zapisać dane w pliku *dane.txt*, muszą być one zapisane w poniższej konwencji

$$\left[ \phi [^\circ] \quad a_\infty \left[ \frac{1}{rad} \right] \quad S [m^2] \quad \Lambda_e \quad \alpha_0 [^\circ] \quad Cx_{min} \quad n \quad m_p [kg] \quad m_0 [kg] \quad Cz_{max} \quad q_e \left[ \frac{kg}{kWh} \text{ lub } \frac{kg}{kNs} \right] \right]^T$$

Wartości bez nawiasów kwadratowych, są bezwymiarowe. Wpisywane wartości powinny być oddzielone jedynie „enterem”, bez dodatkowych separatorów, przecinek powinien być zastąpiony kropką (wymagania MATLAB)

### c) Charakterystyki zespołu napędowego w plikach i.txt

Charakterystyki zespołu napędowego (pojedynczego, parametr n uwzględnia liczbę silników) dla różnych wysokości powinny być zapisane w różnych plikach tekstowych (liczba analizowanych wysokości = liczba plików). Sugerowane jest, aby numeracja plików tekstowych rosła, wraz z coraz wyższymi wysokościami lotu. Pierwsza linijka pliku powinna zawierać wartość wysokości lotu (w metrach), a *kolejne linijki* (oddzielane „enterem”) powinny zawierać parametry zgodne z konwencją:

$$\left[ V_l \left[ \frac{m}{s} \right] \quad ; \quad (N_r)_l [W] \right] \text{ (silnik śmigłowy)} \qquad \left[ Ma_l [-] \quad ; \quad (P_r)_l [N] \right] \text{ (silnik odrzutowy)}$$

## 7. Parametry wejściowe przykładowych samolotów

Na podstawie danych technicznych samolotów oraz ich charakterystyk zespołów napędowych, zostały wykonane obliczenia kątów toru lotu oraz prędkości wznoszenia. Dane, które przyjęto jako niezmiennie dla wszystkich samolotów to:

$$\begin{aligned}T_0 &= 288,15 \text{ K} \\ \rho_0 &= 1,2255 \text{ kg/m}^3 \\ a_0 &= 340,3 \text{ m/s} \\ g &= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

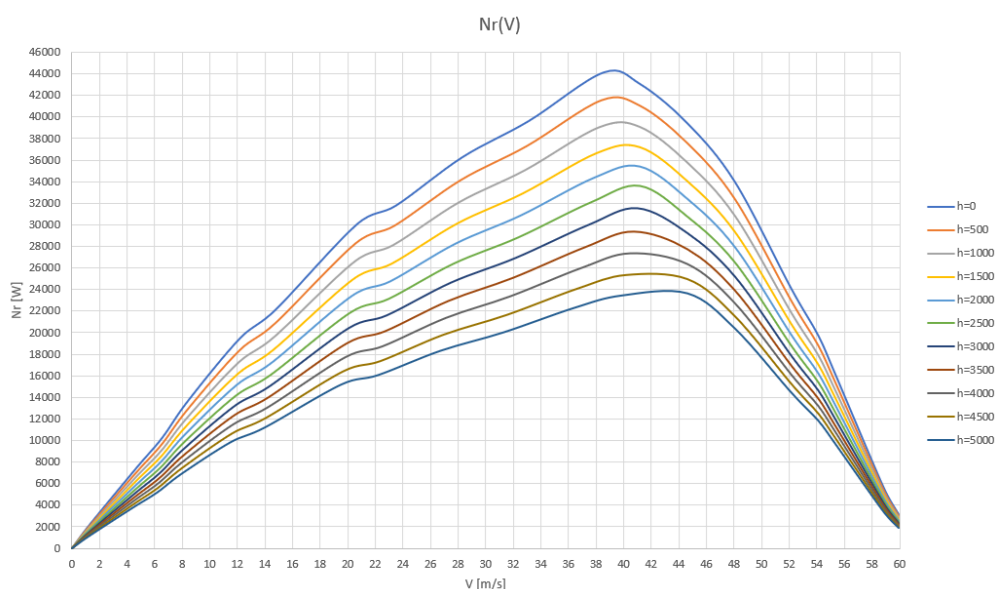
Na poniższych stronach znajdują się tabele oraz wykresy z danymi początkowymi samolotów.

### 7.1. Samolot o małej mocy i śmigle stałym

Poniżej zebrano niezbędne dane techniczne dla przykładowego samolotu: PWS – 51.

Dane samolotu PWS - 51	Symbol	Wartość	Jednostka
Kąt pochylenia osi silnika	$\varphi$	1	$^\circ$
Współczynnik kierunkowy prostej $C_z(\alpha)$	$a_\infty$	5,832	1/rad
Powierzchnia nośna samolotu	$S$	18	$\text{m}^2$
Wysłużenie Oswalda	$\Lambda_e$	4,587	-
Kąt zerowej siły nośnej	$\alpha_0$	-3,816	$^\circ$
Minimalny współczynnik siły oporu	$(C_x)_{\min}$	0,0448	-
Liczba silników	$n$	1	-
Masa paliwa samolotu	$m_p$	90	kg
Masa startowa samolotu	$m_{\max}$	710	kg
Maksymalny współczynnik siły nośnej samolotu	$(C_z)_{\max}$	1,507	-
Jednostkowe zużycie paliwa (silnik śmigłowy)	$q_e$	0,3132	kg/kWh

*Tabela 1. Niezbędne dane do wyznaczenia osiągow samolotu PWS-51*



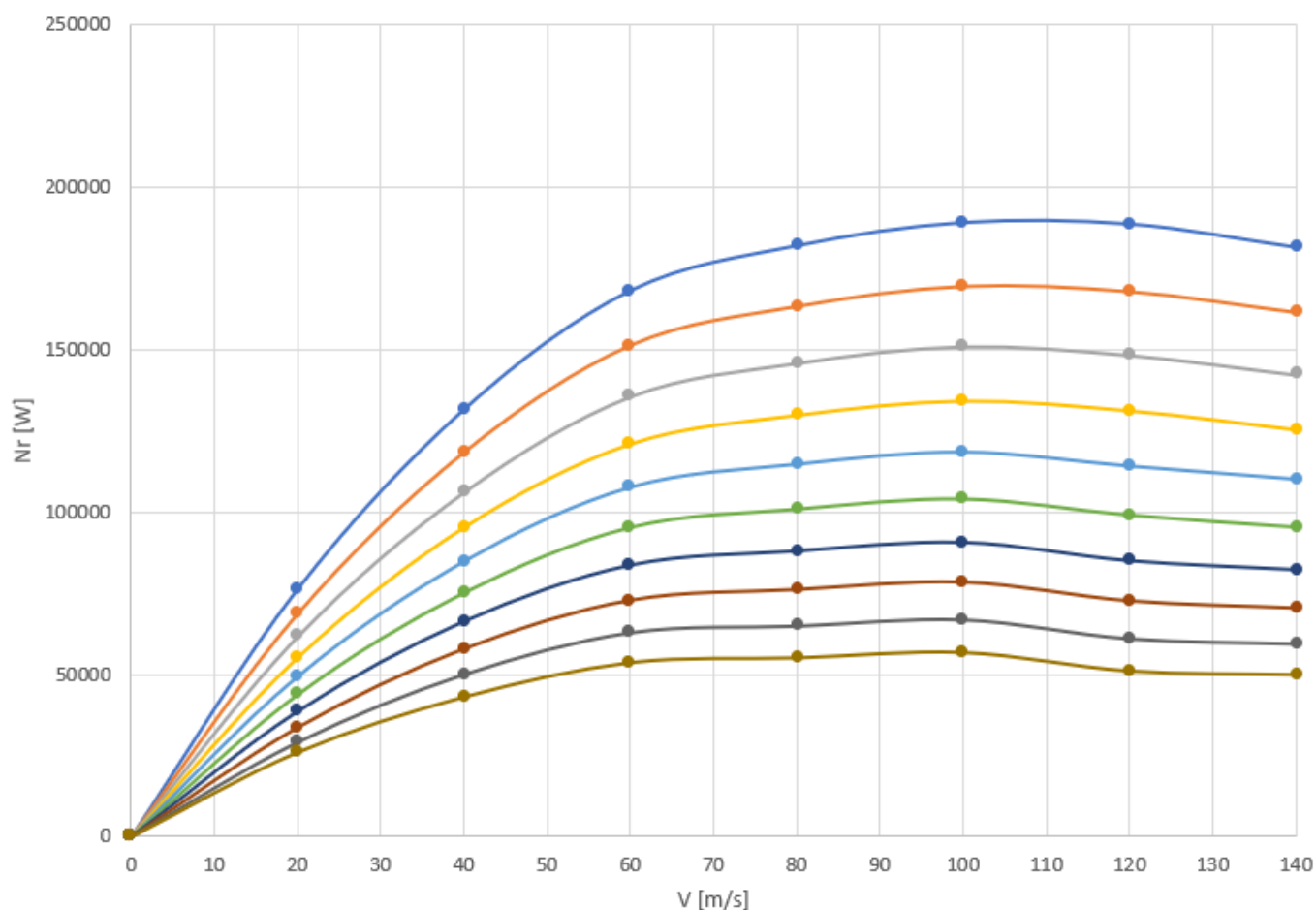
**Wykres 1.** Charakterystyki silnika śmigłowego (stałe śmigło)  $Nr(V, h)$  samolotu PWS - 51

## 7.2. Samolot o dużej mocy i śmigle przestawialnym

Poniżej zebrano niezbędne dane techniczne dla przykładowego samolotu: Piper PA-31 Navajo.

Dane samolotu PA – 31 Navajo	Symbol	Wartość	Jednostka
Kąt pochylenia osi silnika	$\varphi$	1	$^{\circ}$
Współczynnik kierunkowy prostej $C_z(\alpha)$	$a_{\infty}$	6,134	1/rad
Powierzchnia nośna samolotu	$S$	21,3	$m^2$
Wysłużenie Oswalda	$\Lambda_e$	5,884	-
Kąt zerowej siły nośnej	$\alpha_0$	-2,97	$^{\circ}$
Minimalny współczynnik siły oporu	$(C_x)_{min}$	0,0221	-
Liczba silników	$n$	2	-
Masa paliwa samolotu	$m_p$	550	kg
Masa startowa samolotu	$m_{max}$	2950,5	kg
Maksymalny współczynnik siły nośnej	$(C_z)_{max}$	1,63	-
Jednostkowe zużycie paliwa (silnik śmigłowy)	$q_e$	0,31	kg/kWh

Tabela 2. Niezbędne dane do wyznaczenia osiągow samolotu Piper PA-31 Navajo



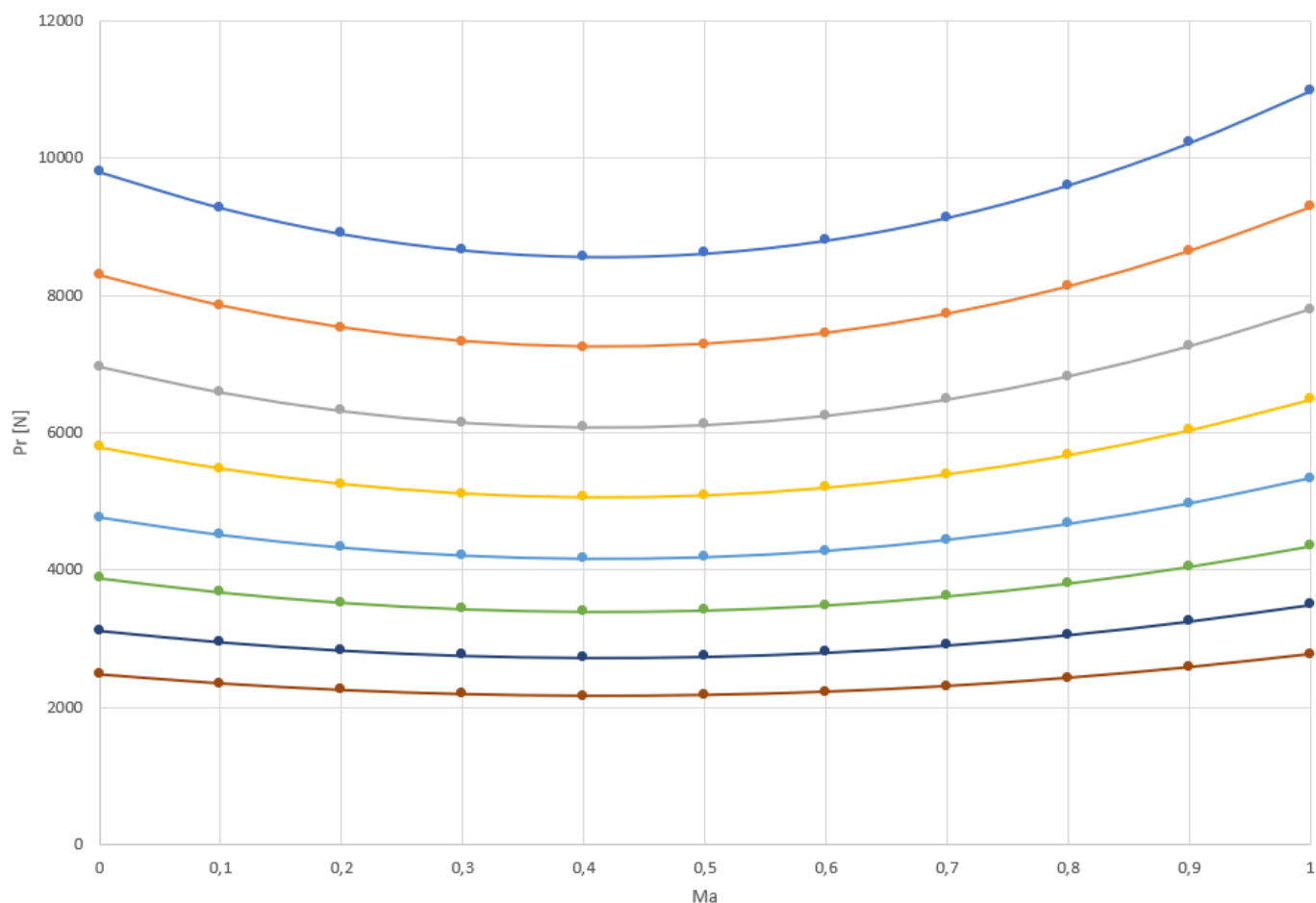
Wykres 2. Charakterystyki pojedynczego silnika śmigłowego (przestawialne śmigło)  $N_r(V, h)$  samolotu Piper PA - 31 Navajo

### 7.3. Samolot odrzutowy

Poniżej zebrano niezbędne dane techniczne dla przykładowego samolotu: PZL TS-11 Iskra.

Dane samolotu PZL TS – 11 Iskra	Symbol	Wartość	Jednostka
Kąt pochylenia osi silnika	$\varphi$	1	$^{\circ}$
Współczynnik kierunkowy prostej $C_z(\alpha)$	$a_{\infty}$	6,231	1/rad
Powierzchnia nośna samolotu	$S$	17,5	$m^2$
Wysłużenie Oswalda	$\Lambda_e$	5,134	-
Kąt zerowej siły nośnej	$\alpha_0$	-1,42	$^{\circ}$
Minimalny współczynnik siły oporu	$(C_x)_{min}$	0,0153	-
Liczba silników	$n$	1	-
Masa paliwa samolotu	$m_p$	996	kg
Masa startowa samolotu	$m_{max}$	3840	kg
Maksymalny współczynnik siły nośnej	$(C_z)_{max}$	1,405	-
Jednostkowe zużycie paliwa (silnik odrzutowy)	$q_e$	106,56	kg/kNs

*Tabela 3. Niezbędne dane do wyznaczenia osiągow samolotu PZL TS-11 Iskra*



**Wykres 3.** Charakterystyki silnika odrzutowego  $Pr(Ma, h)$  samolotu PZL TS - 11 Iskra

## 8. Porównanie otrzymanych wyników ze standardową metodą ciągu

Na poniższych stronach znajdują się wykresy przedstawiające prędkości wznoszenia oraz kąty toru lotu dla danych prędkości, wysokości i masy paliwa samolotów. Dla każdego typu samolotu zostało to obliczone za pomocą wyprowadzonych wzorów metody ciągu ze zmienną masą samolotu. Dodatkowo, dla samolotu odrzutowego zastosowano korektę Prandtla, uwzględniającą wpływ ściśliwości powietrza dla samolotów poddźwiękowych.

Wyniki otrzymane przy wykorzystaniu wyprowadzonej metody zostały porównane z wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu klasycznej metody ciągu (czyli, przy założeniu stałej, maksymalnej masy startowej). W porównaniu z wyprowadzoną metodą obliczeniową, należy spodziewać się, że wyniki będą się pokrywać w jednym miejscu – dla maksymalnej masy paliwa. Wyprowadzone równania są znacznie bardziej rozbudowane, aczkolwiek muszą się one zgadzać z wynikami standardowej metody ciągu. W przeciwnym razie, oznaczać to będzie istnienie błędu w wyprowadzonych równaniach.

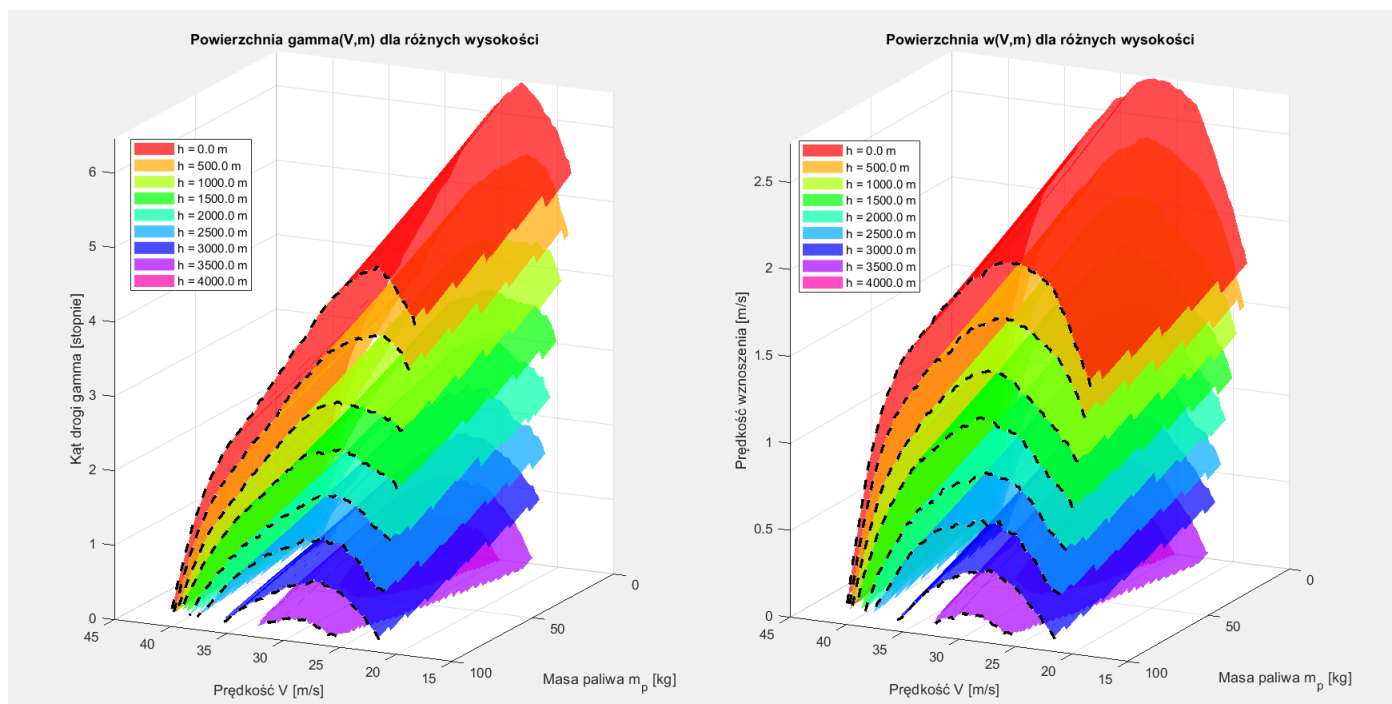
**Na poniższych wykresach różnymi kolorami oznaczono różne wysokości, natomiast czarną linią przerywaną oznaczono wyniki uzyskane metodą ciągu dla maksymalnej masy samolotu.**

Dla każdego samolotu założono krok czasowy, odpowiadający bardzo dużej dokładności:

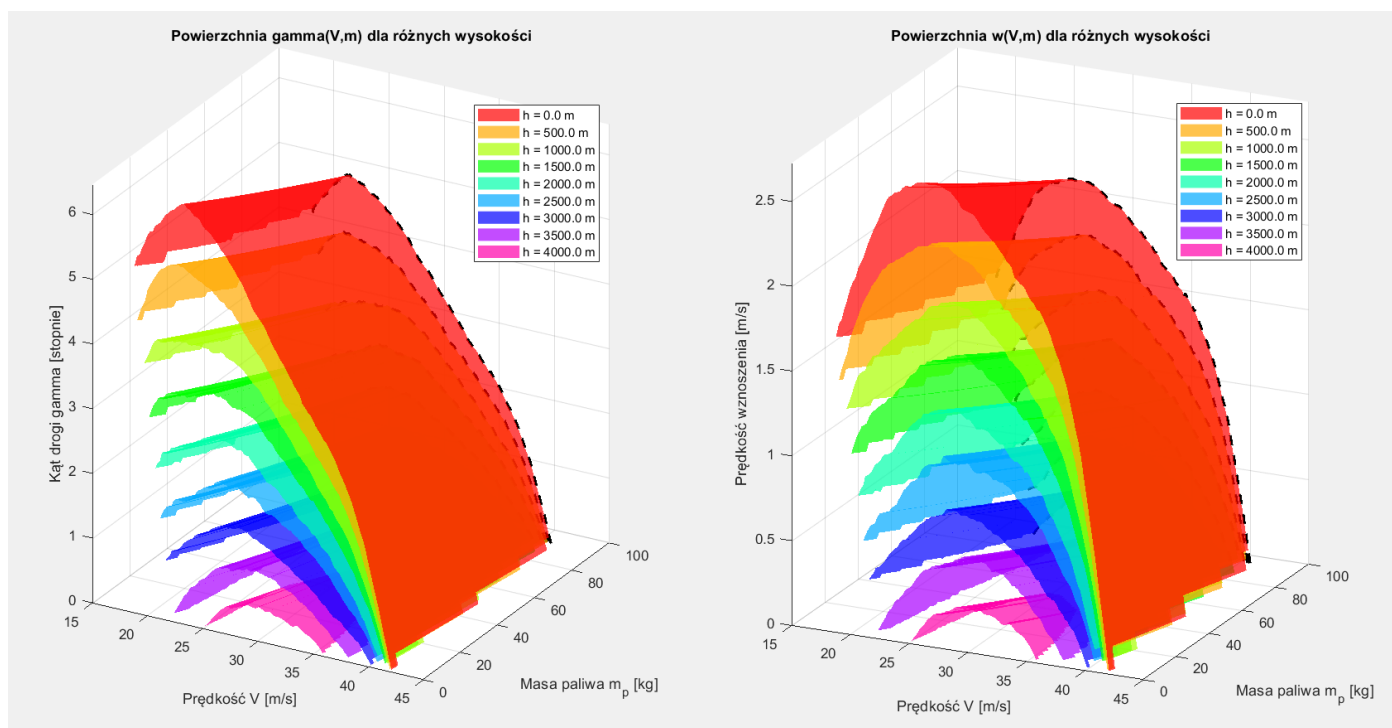
$$dt = 150 \text{ s}$$



## 8.1. Porównanie wyników otrzymanych dla samolotu PWS-51

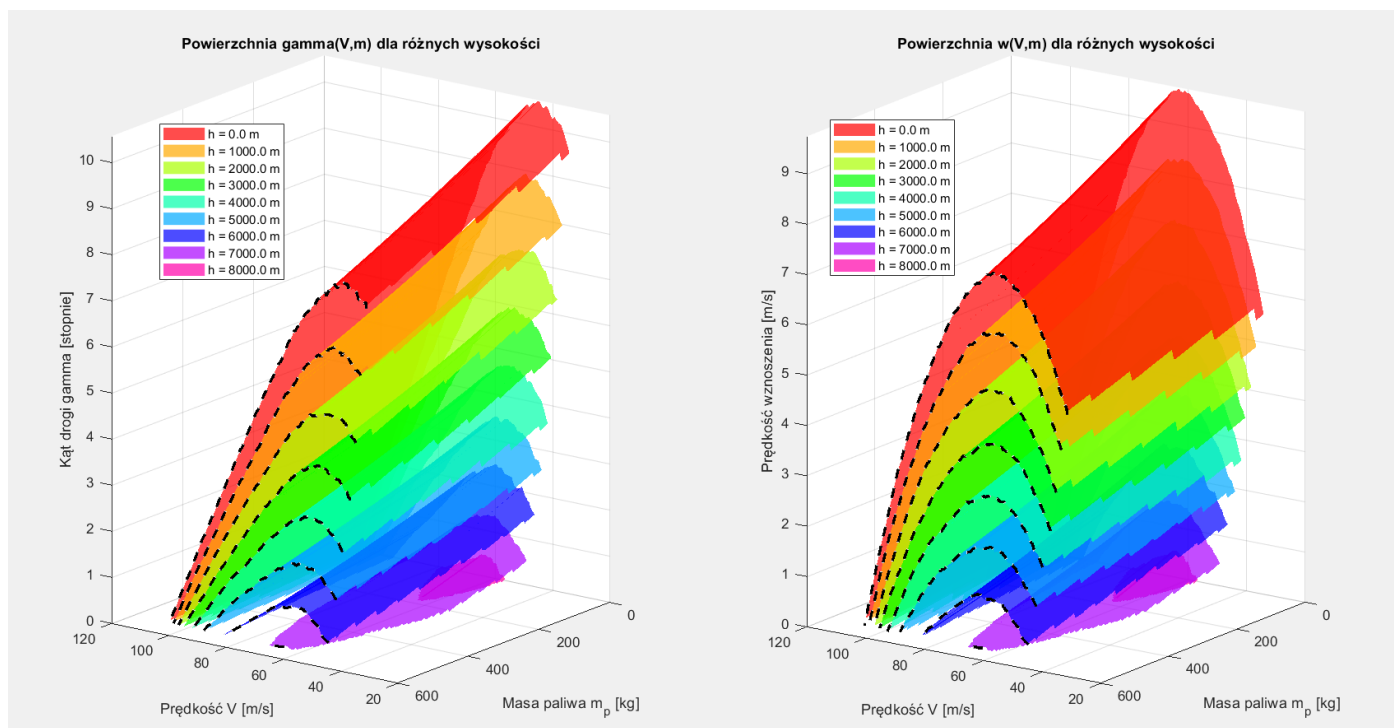


**Wykres 4.** Porównanie otrzymanych wykresów powierzchniowych  $w(V, m_p, h)$  oraz  $\gamma(V, m_p, h)$  dla wyprowadzonej metody oraz dla klasycznej metody ciągu (przerywana linia czarna), dla samolotu PWS-51

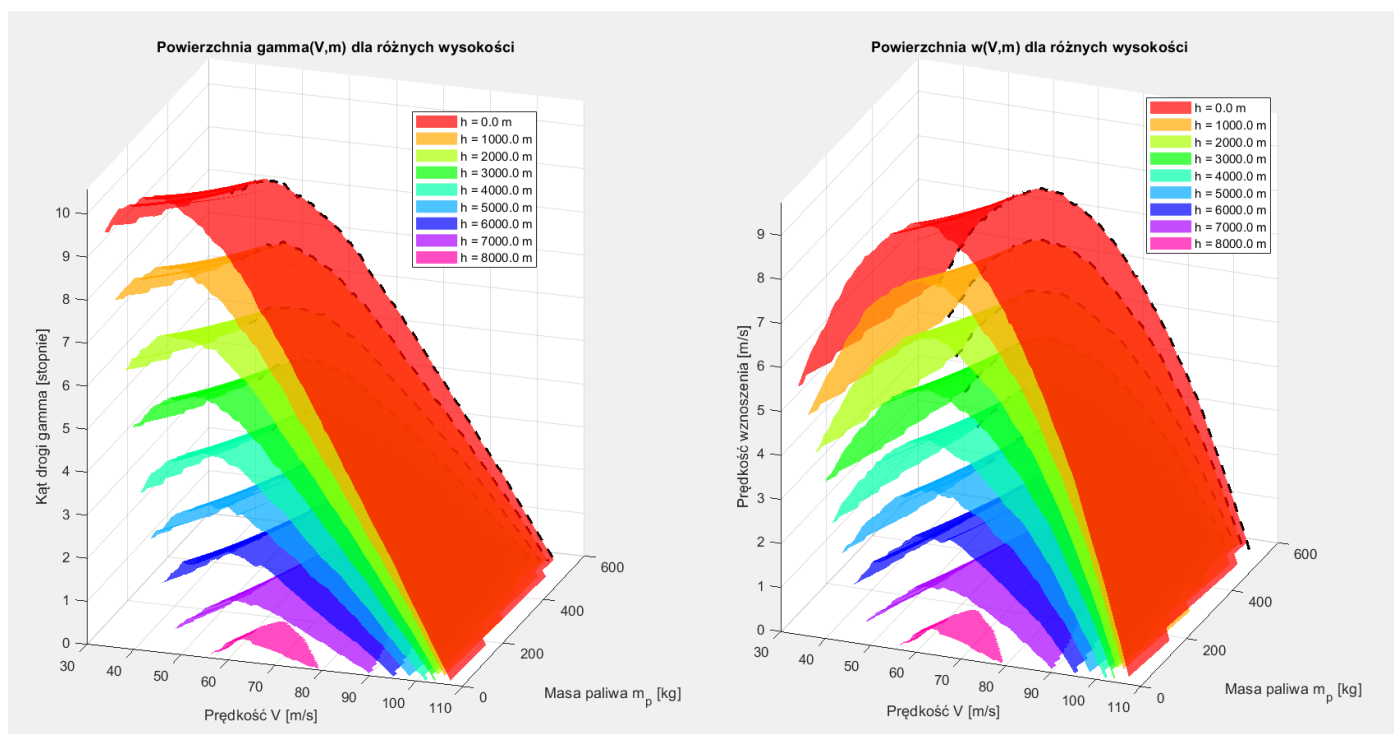


**Wykres 5.** Wykresy powierzchniowe  $w(V, m_p, h)$  oraz  $\gamma(V, m_p, h)$  dla wyprowadzonej metody dla samolotu PWS-51

## 8.2. Porównanie wyników otrzymanych dla samolotu Piper PA – 31 Navajo

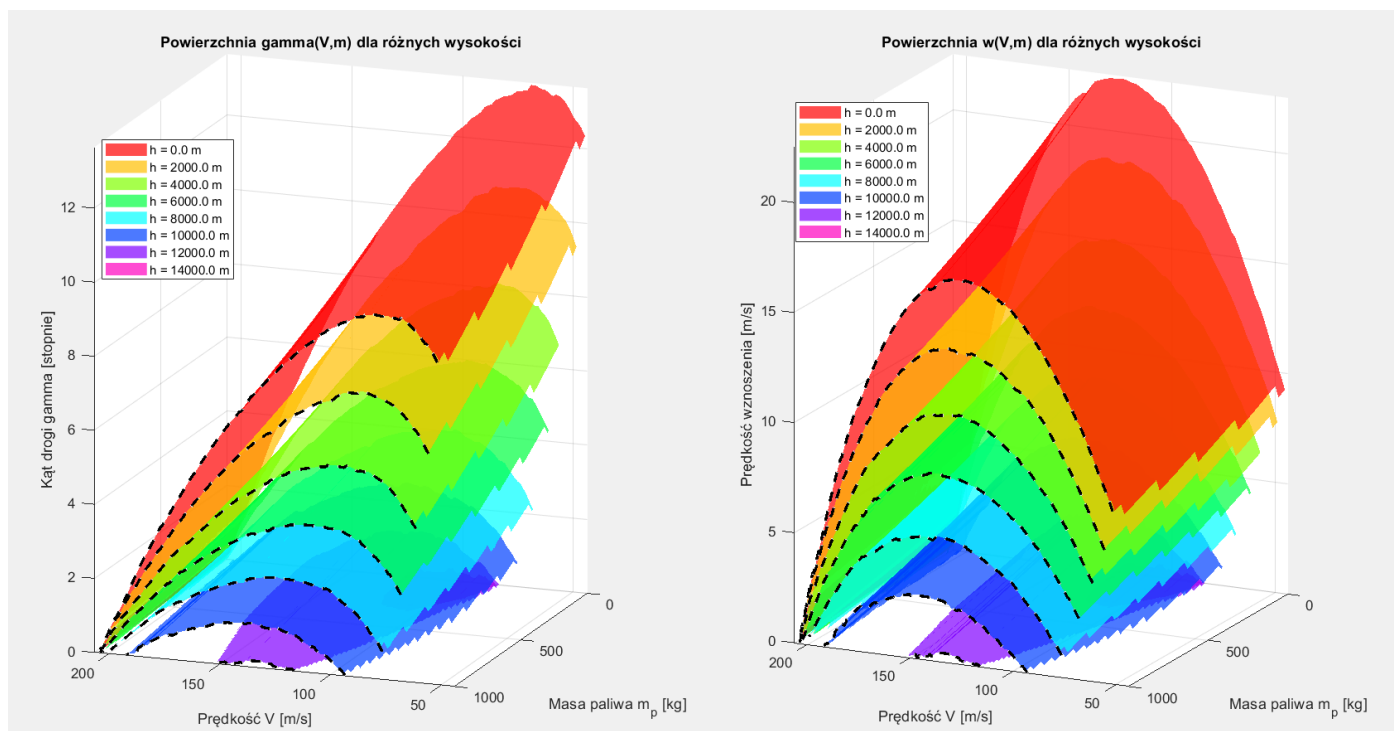


**Wykres 6.** Porównanie otrzymanych wykresów powierzchniowych  $w(V, m_p, h)$  oraz  $\gamma(V, m_p, h)$  dla wyprowadzonej metody oraz dla klasycznej metody ciągu (przerywana linia czarna), dla samolotu Piper PA – 31 Navajo

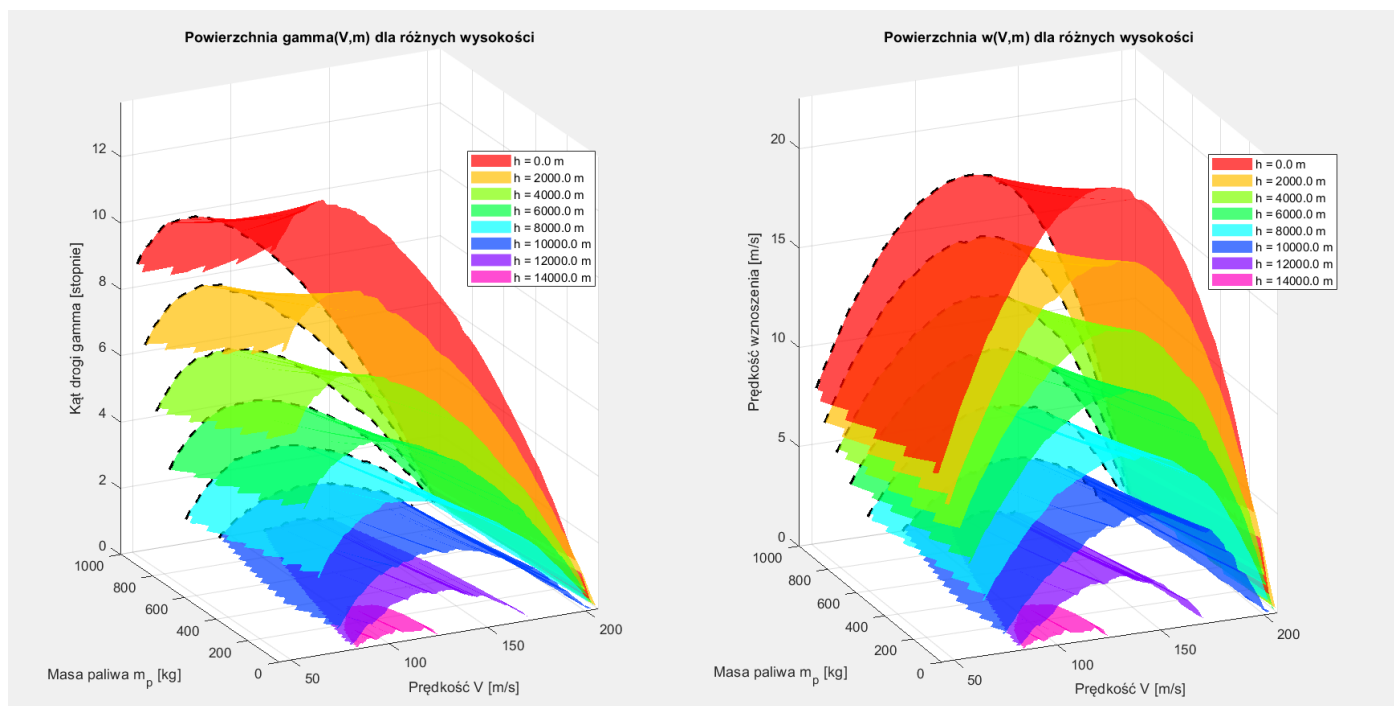


**Wykres 7.** Wykresy powierzchniowe  $w(V, m_p, h)$  oraz  $\gamma(V, m_p, h)$  dla wyprowadzonej metody dla samolotu Piper PA – 31 Navajo

### 8.3. Porównanie wyników otrzymanych dla samolotu PZL TS – 11 Iskra



**Wykres 8.** Porównanie otrzymanych wykresów powierzchniowych  $w(V, m_p, h)$  oraz  $\gamma(V, m_p, h)$  dla wyprowadzonej metody oraz dla klasycznej metody ciągu (przerywana linia czarna), dla samolotu PZL TS – 11 Iskra



**Wykres 9.** Wykresy powierzchniowe  $w(V, m_p, h)$  oraz  $\gamma(V, m_p, h)$  dla wyprowadzonej metody dla samolotu PZL TS – 11 Iskra

## 9. Wnioski

Na podstawie powyższych wykresów można stwierdzić, że wartości kątów toru lotu oraz prędkości wznoszenia dla masy startowej samolotu są takie same dla obu metod. Świadczy to o poprawności wyprowadzonej metody. Wraz z coraz mniejszą masą paliwa, kąty toru lotu i prędkości wznoszenia rosną, dzięki czemu, przy mniejszej masie paliwa, samolot jest w stanie polecieć na wyższych wysokościach. Widoczne niedokładności przy krańcowych krawędziach prędkości dla każdej z wysokości mogą wynikać z błędów towarzyszących interpolacji krzywych i niedokładności odczytu punktów pomiarowych, a także wielkości kroku czasowego. Im mniejszy krok czasowy, tym więcej punktów pomiarowych, co niesie za sobą większą dokładność. Niestety, wiąże się to także z narastającym liniowo kosztem obliczeniowym. Dla przyjętego kroku czasowego (150s) czas obliczeń przekraczał pięć minut.

Wyprowadzone wzory w dokładniejszy sposób określają osiągi samolotów na różnych wysokościach (i przede wszystkim, dla różnych mas paliwa). Należy pamiętać, że otrzymane wyniki nie będą jednak przedstawiać rzeczywistych rezultatów, ponieważ w wyprowadzeniach dalej występują pewne uproszczenia względem modelu rzeczywistego.

Obliczenia dla zmiennej masy samolotu są znacznie bardziej skomplikowane i czasochłonne, niż dla klasycznej wersji metody ciągu lub mocy. Otrzymanie tak dokładnych wyników, jakie uzyskano przedstawioną metodą, byłoby niemożliwe dla metod analitycznych. Dodatkowo, możliwość graficznej reprezentacji wyników na trójwymiarowych powierzchniowych wykresach w bardzo dobry sposób obrazuje rozwiązywany problem oraz wpływ każdego z analizowanych parametrów na otrzymane wyniki.

Skorzystanie z bardziej zaawansowanych programów obliczeniowych niż Microsoft Excel usprawniło proces rozwiązywania układów równań nieliniowych dla każdej z założonych wysokości, prędkości i mas. Znacznie zmniejszyło to czasochłonność obliczeń, a poza tym, umożliwiło analizę zarówno dwuwymiarową, jak i trójwymiarową.

Wraz z rozwojem oprogramowań, pozwalających na numeryczne rozwiązywanie równań nieliniowych, obliczenie zagadnień, które niegdyś zajęłyby bardzo dużo czasu lub byłyby nierozwiązywalne analitycznie, nie są już problemem, dzięki czemu można w dokładniejszy sposób oszacowywać wszystkie parametry lotu samolotu.

Nawet najbardziej uproszczona wersja obliczeń osiągow, nie musi być najmniej wiarygodną, ze względu na prostotę obliczeń, przy jednoczesnym małym błędzie względem wyników rzeczywistych.

### **W dalszej kolejności, w celu rozwoju pracy, można podjąć kroki polegające na:**

- Wczytywaniu danych wejściowych związanych z charakterystykami zespołu napędowego, korzystając ze wzorów analitycznych (projekt 5 Mechanika Lotu), co wyeliminowałoby błąd odczytu, który pojawia się przy ręcznym zapisywaniu punktów pomiarowych, z dokładnością do kilku pikseli – wygładzi to otrzymane charakterystyki poprzez usunięcie „szumów”
- Stworzenie trójwymiarowego wykresu ofertowego (trzeci wymiar jako masa paliwa), który zobrazowałby wpływ parametrów nie tylko na kąt toru lotu i prędkość wznoszenia, ale także na osiągi samolotu.
- Precyzyjniejsze określenie modelu zmiany masy paliwa w czasie niż przyjęcie zależności liniowej  $m(t)$ .

Dzięki powyższym krokom możliwe byłoby uzyskanie jeszcze dokładniejszych wyników, pozwalających jeszcze precyzyjniej wyznaczyć osiągi samolotów.

## 10. Bibliografia

- [1] Sebastian Czajkowski (promotor: dr inż. Maciej Lasek) – „Projekt pakietu algorytmów, uwzględniających zmienną masę paliwa przy prędkościach poddźwiękowych, pozwalających wyznaczyć osiągi samolotów śmigłowych i odrzutowych” – praca dyplomowa inżynierska, na wydziale Meil PW, Warszawa, 2024
- [2] Fiszdon Władysław – „Mechanika Lotu. Część 1.” – PWN, 1961
- [3] Grzegorz Kowaleczko – „Mechanika Lotu: Osiągi Samolotów” – LAW, 2021
- [4] Andrzej Glass – „Polskie konstrukcje lotnicze 1893-1939” – Wkił, 1976
- [5] *Riccardo Niccoli* – „*Samoloty: najważniejsze typy, najciekawsze konstrukcje.*” – Aldershot: Bellona, 2001
- [6] Andrzej Glass – „Konstrukcje lotnicze Polski Ludowej” , Wkił, Warszawa 1965.

## 11. Wykaz symboli i skrótów

$a_{\infty}$  [1/rad] – pochodna  $dC_z/d\alpha$   
 $a_0$  [m/s] – prędkość dźwięku na poziomie morza,  
 $a_h$  [m/s] – prędkość dźwięku na wysokości  $h$ ,  
 $\alpha$  [rad] – kąt natarcia,  
 $\alpha_0$  [rad] – kąt zaklinowania płata, często przyjmowany jako kąt zerowej siły nośnej danego profilu,  
 $C_x$  [-] – współczynnik oporu aerodynamicznego,  
 $C_{x\min}$  [-] – minimalny współczynnik oporu aerodynamicznego dla danego samolotu,  
 $\widetilde{C}_x$  [-] – korekta Prandtla, uwzględniająca ściśliwość powietrza,  
 $C_{z\max}$  [-] – maksymalny współczynnik siły nośnej samolotu,  
 $\Phi$  [rad] – kąt pochylenia silnika (wektora ciągu) względem osi podłużnej samolotu,  
 $g$  [m/s<sup>2</sup>] – przyspieszenie ziemskie,  
 $h$  [m] – wysokość lotu,  
 $\Lambda_e$  [-] – wydłużenie efektywne,  
 $m$  [kg] – masa samolotu,  
 $m_0$  [kg] – masa startowa samolotu,  
 $m_p$  [kg] – startowa masa paliwa w samolocie,  
 $Ma$  [-] – liczba Macha,  
 $N_r$  [W] – moc rozporządzalna przy danej wysokości i prędkości lotu,  
 $n$  [-] - liczba silników w samolocie,  
 $n_s$  [1/s] – prędkość obrotowa silnika,  
 $\gamma$  [rad] – kąt toru lotu,  
 $P_r$  [N] – ciąg rozporządzalny na danej wysokości i prędkości lotu,  
 $P_x$  [N] – siła oporu działająca na samolotu,  
 $P_z$  [N] – siła nośna działająca na samolot,  
 $\rho_0$  [kg/m<sup>3</sup>] – gęstość powietrza na poziomie morza,  
 $\rho_h$  [kg/m<sup>3</sup>] – gęstość powietrza na danej wysokości,  
 $q_e$  [kg/kWs lub kg/kNs] – jednostkowe zużycie paliwa (dla silnika śmigłowego lub odrzutowego),  
 $Q$  [N] – ciężar samolotu,  
 $S$  [m<sup>2</sup>] – powierzchnia płata nośnego,  
 $T_0$  [K] - temperatura powietrza na poziomie morza,  
 $T_h$  [K] - temperatura powietrza na danej wysokości,  
 $t$  [s] – czas lotu,  
 $t_k$  [s] – całkowity czas lotu, czas, po którym skończy się całe paliwo,  
 $V$  [m/s] – prędkość lotu, z szeregu prędkości (od przeciągnięcia do maksymalnej lotu poziomego),  
 $(V_{\min})_{h,t}$  [m/s] - prędkość minimalna samolotu na wysokości  $h$  i w czasie  $t$ ,  
 $w$  [m/s] – prędkość wznoszenia,

## 12. Spis rysunków

<b>Rysunek 1.</b> Schemat sił działających na samolot, dla metody ciągu .....	8
<b>Rysunek 2.</b> Model matematyczny – układ odniesienia samolotu .....	10

## 13. Spis wykresów

<b>Wykres 1.</b> Charakterystyki silnika śmigłowego (stałe śmigło) $N_r(V, h)$ samolotu PWS - 51 .....	13
<b>Wykres 2.</b> Charakterystyki pojedynczego silnika śmigłowego (przestawialne śmigło) $N_r(V, h)$ samolotu Piper PA - 31 Navajo .....	14
<b>Wykres 3.</b> Charakterystyki silnika odrzutowego $Pr(Ma, h)$ samolotu PZL TS - 11 Iskra .....	15
<b>Wykres 4.</b> Porównanie otrzymanych wykresów powierzchniowych $w(V, m_p, h)$ oraz $\gamma(V, m_p, h)$ dla wyprowadzonej metody oraz dla klasycznej metody ciągu (przerywana linia czarna), dla samolotu PWS-51 .....	17
<b>Wykres 5.</b> Wykresy powierzchniowe $w(V, m_p, h)$ oraz $\gamma(V, m_p, h)$ dla wyprowadzonej metody dla samolotu PWS-51 ..	17
<b>Wykres 6.</b> Porównanie otrzymanych wykresów powierzchniowych $w(V, m_p, h)$ oraz $\gamma(V, m_p, h)$ dla wyprowadzonej metody oraz dla klasycznej metody ciągu (przerywana linia czarna), dla samolotu Piper PA – 31 Navajo .....	18
<b>Wykres 7.</b> Wykresy powierzchniowe $w(V, m_p, h)$ oraz $\gamma(V, m_p, h)$ dla wyprowadzonej metody dla samolotu Piper PA – 31 Navajo .....	18
<b>Wykres 8.</b> Porównanie otrzymanych wykresów powierzchniowych $w(V, m_p, h)$ oraz $\gamma(V, m_p, h)$ dla wyprowadzonej metody oraz dla klasycznej metody ciągu (przerywana linia czarna), dla samolotu PZL TS – 11 Iskra.....	19
<b>Wykres 9.</b> Wykresy powierzchniowe $w(V, m_p, h)$ oraz $\gamma(V, m_p, h)$ dla wyprowadzonej metody dla samolotu PZL TS – 11 Iskra .....	19

## 14. Spis tabel

<b>Tabela 1.</b> Niezbędne dane do wyznaczenia osiąarów samolotu PWS-51.....	13
<b>Tabela 2.</b> Niezbędne dane do wyznaczenia osiąarów samolotu Piper PA-31 Navajo .....	14
<b>Tabela 3.</b> Niezbędne dane do wyznaczenia osiąarów samolotu PZL TS-11 Iskra .....	15