Projekt 1

Autorzy: Sebastian Pergała, Michał Matuszyk

Zadanko 1

Klatka Jordana 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Początkowe potęgi klatki Jordana 4×4:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2 \\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5 \end{pmatrix}$$

Wywnioskowany wzór na potęgę p klatki Jordana 4×4:

Przy założeniach: $\binom{n}{k} = 0$, gdy $n < k$.

$$A^p = \begin{pmatrix} \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \binom{p}{2}\lambda^{p-2} & \binom{p}{3}\lambda^{p-3} \\ 0 & \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \binom{p}{2}\lambda^{p-2} \\ 0 & 0 & \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{p}{0}\lambda^p \end{pmatrix}$$

Uogólniony wzór na potęgę p klatki Jordana m × m:

$$A^p = \begin{pmatrix} \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \binom{p}{2}\lambda^{p-2} & \binom{p}{3}\lambda^{p-3} & \cdots & \binom{p}{m-1}\lambda^{p-m+1} \\ 0 & \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \binom{p}{2}\lambda^{p-2} & \cdots & \binom{p}{m-2}\lambda^{p-m+2} \\ 0 & 0 & \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \cdots & \binom{p}{m-3}\lambda^{p-m+3} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{p}{0}\lambda^p & \cdots & \binom{p}{m-4}\lambda^{p-m+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{p}{0}\lambda^p \end{pmatrix}$$

Dowód uogólnionego wzoru na potęgę p klatki Jordana $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \ \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{X} + \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\forall_{\mathrm{i} \geq \mathrm{m}} \ \mathrm{Y}^i = 0 \ (*)$$

$$X^i = \begin{pmatrix} \lambda^i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^i \end{pmatrix} = \lambda^i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \lambda^i * I$$

$$\forall_{Z \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}(\mathbb{K})} \ ZI = IZ \ \rightarrow \ \forall_{a \in \mathbb{K}} \forall_{Z \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}(\mathbb{K})} \ aZI = aIZ, gdzie\ I\ to\ macierz\ jednostkowa$$

Zatem mnożenie macierzy X^{i_1} i Y^{i_2} jest przemienne.

$$A^p=(X+Y)^p=X^p+X^{p-1}Y+X^{p-2}YX+X^{p-3}YX^2+X^{p-4}YX^3+X^{p-5}YX^4+X^{p-6}YX^5+\cdots$$
$$+XYX^{p-2}+YX^{p-1}+X^{p-2}Y^2+X^{p-3}Y^2X+X^{p-3}YXY+\cdots+XY^{p-1}+Y^p$$
$$=X^p+\binom{p}{1}X^{p-1}Y+\binom{p}{2}X^{p-2}Y^2+\binom{p}{3}X^{p-3}Y^3+\cdots+\binom{p}{p-1}XY^{p-1}+Y^p$$
$$=\lambda^pI+\binom{p}{1}\lambda^{p-1}Y+\binom{p}{2}\lambda^{p-2}Y^2+\binom{p}{3}\lambda^{p-3}Y^3+\cdots+\binom{p}{p-1}\lambda Y^{p-1}+Y^p$$
$$=\lambda^pI+\binom{p}{1}\lambda^{p-1}Y+\binom{p}{2}\lambda^{p-2}Y^2+\binom{p}{3}\lambda^{p-3}Y^3+\cdots+\binom{p}{m-2}\lambda Y^{p-m+2}$$
$$+\binom{p}{m-1}\lambda Y^{p-m+1}+\cdots+\binom{p}{p-1}\lambda 0+0\ (*)$$
$$=\lambda^pI+\binom{p}{1}\lambda^{p-1}Y+\binom{p}{2}\lambda^{p-2}Y^2+\binom{p}{3}\lambda^{p-3}Y^3+\cdots+\binom{p}{m-2}\lambda Y^{p-m+2}$$
$$+\binom{p}{m-1}\lambda Y^{p-m+1}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^p&0&0&0&\cdots&0\\0&\lambda^p&0&0&\cdots&0\\0&0&\lambda^p&0&\cdots&0\\0&0&0&\lambda^p&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&\lambda^p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\binom{p}{1}\lambda^{p-1}&0&0&\cdots&0\\0&0&\binom{p}{1}\lambda^{p-1}&0&\cdots&0\\0&0&0&\binom{p}{1}\lambda^{p-1}&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}0&0&\binom{p}{2}\lambda^{p-2}&0&\cdots&0\\0&0&0&\binom{p}{2}\lambda^{p-2}&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots&\binom{p}{m-1}\lambda Y^{p-m+1}\\0&0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\binom{p}{0}\lambda^p&\binom{p}{1}\lambda^{p-1}&\binom{p}{2}\lambda^{p-2}&\binom{p}{3}\lambda^{p-3}&\cdots&\binom{p}{m-1}\lambda^{p-m+1}\\0&\binom{p}{0}\lambda^p&\binom{p}{1}\lambda^{p-1}&\binom{p}{2}\lambda^{p-2}&\cdots&\binom{p}{m-2}\lambda^{p-m+2}\\0&0&\binom{p}{0}\lambda^p&\binom{p}{1}\lambda^{p-1}&\cdots&\binom{p}{m-3}\lambda^{p-m+3}\\0&0&0&\binom{p}{0}\lambda^p&\cdots&\binom{p}{m-4}\lambda^{p-m+4}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&\binom{p}{0}\lambda^p\end{pmatrix}\blacksquare$$

Zadanko 2.

Do obliczeń będziemy używać następujących macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & 1 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & -4 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Sprawdzamy wielomiany charakterystyczne macierzy A-G:

Wielomian charakterystyczny macierzy A: $1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5 = (x-1)^5$
Wielomian charakterystyczny macierzy B: $1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5 = (x-1)^5$
Wielomian charakterystyczny macierzy C: $1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5 = (x-1)^5$
Wielomian charakterystyczny macierzy D: $1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5 = (x-1)^5$
Wielomian charakterystyczny macierzy E: $1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5 = (x-1)^5$
Wielomian charakterystyczny macierzy F: $1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5 = (x-1)^5$
Wielomian charakterystyczny macierzy G: $1 - 5x - 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - x^5 = (x-1)^5$

Zatem zweryfikowaliśmy, że każda z macierzy ma ten sam wielomian charakterystyczny (którego pierwiastkiem jest ta sama liczba).

(b) Sprawdzimy do jakich macierzy blokowych podobne są macierze A-G. Następnie sprawdzimy ile klatek Jordana ma każda z macierzy blokowych.

Przez C_X będę oznaczał macierz która jest podobna do macierzy X.

$$C_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, jak widać, jest tutaj jedna klatka Jordana, zatem zapiszemy $k_A = 1$

$$C_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, k_B = 2 \qquad C_C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, k_C = 2$$

$$C_D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, k_D = 3 \qquad C_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, k_E = 3$$

$$C_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, k_F = 4 \qquad C_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} k_G = 5$$

(c)

Dla każdej macierzy A-G obliczę wymiar jądra przekształcenia $X - \lambda I$.

Z podpunktu (a), wiemy, że $\lambda = -1$, zatem $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \mathrm{I}\lambda = \mathrm{X} - \mathrm{I}(-1) = \mathrm{X} + \mathrm{I}$

Dla macierzy A obliczenia będą wyglądały następująco:

$$A - I\lambda = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & 1 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & -4 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & -3 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$rank(A - I\lambda) = 4.$

$Z\ twierdzenia\ o\ wymiarze: dimKer(A - I\lambda) = 5 - 4 = 1$

Dla kolejnych macierzy będzie:

$$dimKer(B - I\lambda) = 5 - 3 = 2$$
$$dimKer(C - I\lambda) = 5 - 3 = 2$$
$$dimKer(D - I\lambda) = 5 - 2 = 3$$
$$dimKer(E - I\lambda) = 5 - 2 = 3$$
$$dimKer(F - I\lambda) = 5 - 1 = 4$$
$$dimKer(G - I\lambda) = 5 - 0 = 5$$

(d)

Na podstawie poprzedniego punktu, hipoteza wygląda następująco:

$Niech\ k_X\ oznacza\ liczbę\ klatek\ Jordana\ macierzy\ X. Macierz\ X\ ma\ tylko\ jedną\ wartość\ własną.$

$$Wtedy, k_X = dimker(X - I\lambda).$$

(e)

<u>Lemat</u>

Jeśli macierze A i B są podobne, to A— $I\lambda$ oraz B— $I\lambda$ są również podobne.

<u>Dowód</u>

Wprost z definicji podobieństwa możemy zapisać:

$$A = NBN^{-1}$$

$$A - I\lambda = NBN^{-1} - I\lambda$$

$$A - I\lambda = N(B - I\lambda)N^{-1} \quad c.k.d.$$

<u>Teza:</u>

$$k_X = dimker(X - I\lambda).$$

<u>Dowód</u>

Niech $x \in M_r^n(\mathbb{C})$ i niech X ma dokładnie jedną wartość własną λ. Wykażemy, że teza zachodzi.

Z podobieństwa macierzy X do pewnej macierzy Jordana wiemy, że:

$$X = NYN^{-1}$$

oraz z lematu możemy zapisać:

$$X - I\lambda = N(Y - I\lambda)N^{-1}$$

Skoro macierze $X - I\lambda$ oraz $\mathrm{Y} - I\lambda$ są podobne, muszą być macierzami tego samego endomorfizmu. Zatem możemy zapisać: *dimKer($X - I\lambda$)=dimKer($Y - I\lambda$)=n*

Niech d_i oznacza stopień i-tej klatki Jordana macierzy X. Niech k równa się liczbie klatek Jordana Macierzy X.

Możemy zatem zapisać: $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = n$

Z faktu, że rząd macierzy jest równy liczbie liniowo niezależnych kolumn wynika, że:

Rząd($Y - I\lambda$)= $(d_1 - 1) + (d_2 - 1) + \cdots + (d_k - 1) = n - (1 \cdot k) = n - k$

Zatem możemy zapisać, że $dimker(X - I\lambda) = liczbie\ klatek\ Jordana\ macierzy\ X.$ ■

(f)

<u>Teza</u>

Niech $x \in M_n^n(\mathbb{C})$ i niech λ_i będzie i-tą wartością własną macierzy X. Wtedy

k_i = dimker(X - λ_iI).

<u>Dowód</u>

Z podobieństwa wiemy, że macierz X jest podobna do pewnej macierzy J, która jest macierzą Jordana, czyli możemy zapisać:

$$X = NJN^{-1}$$

Z lematu udowodnionego w poprzednim punkcie, wiemy, że macierze $X - I\lambda$ oraz $\mathrm{J} - I\lambda$ są podobne, zatem są macierzami tego samego endomorfizmu. Zatem możemy zapsać, że dimKer$(X - I\lambda) = \mathrm{dimKer}(\,\mathrm{J} - I\lambda)$.

Z wykładów z 1 semestru wiemy, że n=dimKer$(X - I\lambda)$+dim$(X - I\lambda)$.

Niech k_i *oznacza krotność* $i - $ *tej wartości własnej*.Zatem Możemy zapisać, że $rząd(J - \lambda_i) = n - k_i$, czyli suma krotności pozostałych klatek jordana jest równa $n - k_i$.

Wiemy, że suma wszystkich krotności własności własnych, poza $k_i - itą$ musi wynosić m, (gdzie m to suma stopni wartości własnych poza i-tą) czyli możemy zapisać: $\sum_1^z k_i = m$, gdzie z to liczba pozostałych wartości własnych macierzy X.Zatem liczba liniowo niezależnych kolumn dla każdej wartości własnej wynosi $\sum_1^z k_i - 1 = m - 1 \cdot z = m - z$

Oznacza to, że dim(X- λ_iI)=m-z, czyli k_i

■

g) Kolejne wymiary jąder przekształceń $X - \lambda\mathrm{I}, (X - \lambda\mathrm{I})^2, (X - \lambda\mathrm{I})^3, \cdots$

Przez s_X będę oznaczał potęgę n przekształcenia $(A - I\lambda)^n$, dla którego $dimKer((X - I\lambda)^n) = dimKer((X - I\lambda)^{n+1})$ i $dimKer((X - I\lambda)^n) \neq dimKer((X - I\lambda)^{n-1})$, a przez $w_{X_i},\ i \in [k_X]$ będę oznaczał wielkość (ilość kolumn/wierszy) i-tej klatki.
A: $k_A = 1$, $w_{A_1} = 5,\ s_A = 5$

$$dimKer(A - I\lambda) = 1$$

$$dimKer((A - I\lambda)^2) = 2$$

$$dimKer((A - I\lambda)^3) = 3$$

$$dimKer((A - I\lambda)^4) = 4$$

$$dimKer((A - I\lambda)^5) = 5$$

$$dimKer((A - I\lambda)^6) = 5$$

B: $k_B = 2, w_{B_1} = 1,\ w_{B_2} = 4,\ s_B = 4$

$$dimKer(B - I\lambda) = 2$$

$$dimKer((B - I\lambda)^2) = 3$$

$$dimKer((B - I\lambda)^3) = 4$$

$$dimKer((B - I\lambda)^4) = 5$$

$$dimKer((B - I\lambda)^5) = 5$$

C: $k_C = 2,\ w_{C_1} = 3,\ w_{C_2} = 2,\ s_C = 3$

$$dimKer(C - I\lambda) = 2$$

$$dimKer((C - I\lambda)^2) = 4$$

$$dimKer((C - I\lambda)^3) = 5$$

$$dimKer((C - I\lambda)^4) = 5$$

D: $k_D = 3,\ w_{D_1} = 1,\ w_{D_2} = 1,\ w_{D_3} = 3,\ s_D = 3$

$$dimKer(D - I\lambda) = 3$$

$$dimKer((D - I\lambda)^2) = 4$$

$$dimKer((D - I\lambda)^3) = 5$$

$$dimKer((D - I\lambda)^4) = 5$$

E: $k_E = 3,\ w_{E_1} = 1,\ w_{E_2} = 2,\ w_{E_3} = 2,\ s_E = 2$

$$dimKer(E - I\lambda) = 3$$

$$dimKer((E - I\lambda)^2) = 5$$

$$dimKer((E - I\lambda)^3) = 5$$

F: $k_F = 4,\ w_{F_1} = 1,\ w_{F_2} = 1,\ w_{F_3} = 1,\ w_{F_4} = 2,\ s_F = 2$

$$dimKer(F - I\lambda) = 4$$

$$dimKer((F - I\lambda)^2) = 5$$

$$dimKer((F - I\lambda)^3) = 5$$

G: $k_G = 5,\ w_{G_1} = 1,\ w_{G_2} = 1,\ w_{G_3} = 1,\ w_{G_4} = 1,\ w_{G_5} = 1,\ s_G = 1$

$$dimKer(G - I\lambda) = 5$$

$$dimKer((G - I\lambda)^2) = 5$$

Obserwacja zależności wielkości klatek Jordana macierzy X od odpowiednich wymiarów potęg macierzy $X - I\lambda$:

$s_X = \max(w_{X_i})$, gdzie $i \in 1, 2, \dots, k_X$, oraz $\sum_i^{k_X} w_{X_i} = [wielkość\ macierzy\ X]$

A więc w_{X_i} (wielkość i-tej klatki Jordana macierzy X) nie przekracza s_X (potęgi stabilizacji wymiaru jądra przekształcenia $(X - I\lambda)^n$).

h)

$$H = \begin{pmatrix} -17 & -26 & -3 & 6 & -3 & 25 \\ 4 & 9 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ -19 & -28 & -1 & 6 & -5 & 27 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -20 & -27 & -3 & 6 & -1 & 26 \\ -15 & -19 & -2 & 4 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -14 & -24 & -3 & 5 & -4 & 23 \\ 9 & 16 & 1 & -4 & 4 & -14 \\ -18 & -27 & -1 & 6 & -5 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -16 & -24 & -3 & 5 & -2 & 23 \\ -7 & -10 & -2 & 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Wartości własne H i K:

$$\lambda_H = 2,\ \lambda_K = 2 \text{ o krotności algebraicznej równej } 6$$

Kolejne wymiary jąder przekształceń $Y - \lambda I, (Y - \lambda I)^2, (Y - \lambda I)^3, \cdots$ i wymiary w_{Y_i} klatek macierzy Y:

H: $k_H = 2,\ w_{H_1} = 3,\ w_{H_2} = 3,\ s_H = 3$

$$dimKer(H - I\lambda_H) = 2$$

$$dimKer((H - I\lambda_H)^2) = 4$$

$$dimKer((H - I\lambda_H)^3) = 6$$

$$dimKer((H - I\lambda_H)^4) = 6$$

K: $k_H = 3,\ w_{K_1} = 1,\ w_{K_2} = 1,\ w_{K_3} = 4,\ s_B = 4$

$$dimKer(K - I\,\lambda_K) = 3$$

$$dimKer((K - I\,\lambda_K)^2) = 4$$

$$dimKer((K - I\,\lambda_K)^3) = 5$$

$$dimKer((K - I\,\lambda_K)^4) = 6$$

$$dimKer((K - I\,\lambda_K)^5) = 6$$

Sprawdzanie poprawności wniosków za pomocą funkcji *JordanDecomposition* w *Wolfram Mathematica*:

C_Y to macierz podobna do Y.

$$C_H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, k_{H=2}$$

$$C_K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, k_{K=3}$$

Weryfikacja poprawności wniosków pomyślna.

i)

$$M = \begin{pmatrix} -11 & -13 & -3 & 0 & 4 & 12 \\ -5 & 3 & 1 & -2 & 5 & -1 \\ -31 & -37 & -1 & 6 & -2 & 36 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ -17 & -14 & -3 & 0 & 9 & 13 \\ -21 & -15 & -2 & -2 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -21 & -29 & -5 & 4 & 0 & 28 \\ -40 & -53 & -6 & 12 & -9 & 55 \\ -26 & -29 & 0 & 4 & 0 & 28 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ -27 & -230 & -5 & 4 & 5 & 29 \\ -66 & -87 & -11 & 16 & -9 & 88 \end{pmatrix}$$

Wartości własne I i J:

$\lambda_{M_1} = 2$ o krotności algebraicznej równej 3, $\lambda_{M_2} = 5$ o krotności algebraicznej równej 3

$\lambda_{N_1} = 2$ o krotności algebraicznej równej 2, $\lambda_{N_2} = 5$ o krotności algebraicznej równej 4

M:

$\lambda_{M_1} = 2$, $k_{M_1} = 1$, $w_{M_{1_1}} = 3$, $s_{M_1} = 3$

$$dimKer\left(M - I\lambda_{M_1}\right) = 1$$

$$dimKer\left((M - I\lambda_{M_1})^2\right) = 2$$

$$dimKer\left((M - I\lambda_{M_1})^3\right) = 3$$

$$dimKer\left((M - I\lambda_{M_1})^4\right) = 3$$

$\lambda_{M_2} = 5$, $k_{M_2} = 2$, $w_{M_{1_1}} = 1$, $w_{M_{1_2}} = 2$, $s_{M_2} = 2$

$$dimKer\left(M - I\lambda_{M_2}\right) = 2$$

$$dimKer\left((M - I\lambda_{M_2})^2\right) = 3$$

$$dimKer\left((M - I\lambda_{M_2})^3\right) = 3$$

N:

$\lambda_{N_1} = 2,\ k_{N_1} = 1,\ w_{N_{2_1}} = 2,\ s_{N_1} = 2$

$$dimKer(N - I\lambda_{N_1}) = 1$$

$$dimKer((N - I\lambda_{N_1})^2) = 2$$

$$dimKer((N - I\lambda_{N_1})^3) = 2$$

$\lambda_{N_2} = 5,\ k_{N_2} = 3,\ w_{N_{2_1}} = 1,\ w_{N_{2_2}} = 1\ \ w_{N_{2_3}} = 2,\ s_{N_2} = 2$

$$dimKer(N - I\lambda_{N_2}) = 3$$

$$dimKer((N - I\lambda_{N_2})^2) = 4$$

$$dimKer((N - I\lambda_{N_2})^3) = 4$$

Postać Jordana macierzy M i J:

$$J(M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$J(N) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Weryfikacja poprawności postaci Jordana macierzy M i N za pomocą funkcji *JordanDecomposition* w *Wolfram Mathematica* jest pomyślna.

Zadanko 3

$$H = \begin{pmatrix} -17 & -26 & -3 & 6 & -3 & 25 \\ 4 & 9 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ -19 & -28 & -1 & 6 & -5 & 27 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -20 & -27 & -3 & 6 & -1 & 26 \\ -15 & -19 & -2 & 4 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

Macierz J(H) podobna do macierzy H:

$$J(H) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sprawdzanie poprawności poprzez wykonanie mnożenia macierzy:

$$H = P \cdot J(H) \cdot P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -15 & -19 & -2 & 4 & -1 & 18 \\ -7 & -10 & -1 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -15 & -19 & -2 & 4 & -1 & 18 \\ -7 & -10 & -1 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & -26 & -3 & 6 & -3 & 25 \\ 4 & 9 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ -19 & -28 & -1 & 6 & -5 & 27 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -20 & -27 & -3 & 6 & -1 & 26 \\ -15 & -19 & -2 & 4 & -1 & 20 \end{pmatrix} = \mathrm{H}$$

Zadanko 4

Udowodnimy dwa twierdzenia:

$$Dla\ każdej\ macierzy\ A \in M_n^n(\mathbb{C})$$

1. Ślad macierzy A jest równy sumie wszystkch wartości własnych macierzy A.
2. Wyznacznik macierzy A jest równy iloczynowi wszystkich wartości własnych macierzy A.

Dowód faktu nr 1

$Niech\ A, B \in M_n^n(\mathbb{C})$, niech λ_i $oznacza\ wartość\ własną$

Aby udowodnić, że ślad macierzy A jest równy sumie wszystkich wartości własnych macierzy A skorzystamy z następujących faktów:

$a)\ tr(AB) = tr(BA)$

$b)\ A = ZDZ^{-1}, gdzie\ D\ jest\ pewną\ macierzą\ Jordana$

Możemy zatem zapisać:

$$\mathrm{tr(A)} = \mathrm{tr}(\mathrm{Z} \cdot D \cdot Z^{-1}) = tr(ZD \cdot Z^{-1}) = tr(Z^{-1}Z \cdot D) = tr(Id \cdot D) = tr(D) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

∎

Dowód faktu nr 2

Niech $A \in M_n^n(\mathbb{C})$

$A = ZDZ^{-1}, gdzie\ D\ jest\ macierzą\ diagonalną\ z\ wart.wł. macierzy\ A\ na\ przekątnej.$

Zatem możemy zapisać: $\det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Następnie możemy zatem zapisać: $\det(A) = \det(ZDZ^{-1})$

Z wartości wyznaczników mamy:

$$\det(ZDZ^{-1}) = \det(Z) \cdot \det(D) \cdot \det(Z^{-1}) = \det(Z) \cdot \det(Z^{-1}) \cdot \det(D) = \det(Id) \cdot \det(D) = \det(D) =$$

$$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n, czyli\ iloczynowi\ wartości\ własnych\ macierzy\ A$$

∎

Zadanko 5.

$$C = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^{2021} = ?$$

Wzory:

$$X,\ P,\ J_X \in M_n^n(\mathbb{C})$$

$$X = P \cdot J_X \cdot P^{-1}$$

$$X^p = P \cdot {J_X}^p \cdot P^{-1}$$

$$ {J_X}^p = \begin{pmatrix} {J_{X_1}}^p(\lambda_1) & & & & \\ & {J_{X_2}}^p(\lambda_2) & & & \\ & & {J_{X_3}}^p(\lambda_3) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & {J_{X_4}}^p(\lambda_4) \end{pmatrix}$$

$${J_X}^p(\lambda) = \begin{pmatrix} \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \binom{p}{2}\lambda^{p-2} & \binom{p}{3}\lambda^{p-3} & \cdots & \binom{p}{n-1}\lambda^{p-n+1} \\ 0 & \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \binom{p}{2}\lambda^{p-2} & \cdots & \binom{p}{n-2}\lambda^{p-n+2} \\ 0 & 0 & \binom{p}{0}\lambda^p & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \cdots & \binom{p}{n-3}\lambda^{p-n+3} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{p}{0}\lambda^p & \cdots & \binom{p}{n-4}\lambda^{p-n+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{p}{0}\lambda^p \end{pmatrix}$$

Obliczanie C^{2021}:

$$C^{2021} = P \cdot {J_C}^{2021} \cdot P^{-1}$$

$$J_C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{C_1}(-1) & \\ & J_{C_2}(-1) \end{pmatrix}$$

$$J_{C_1}(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad J_{C_2}(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$${J_{C_1}}^{2021}(-1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \binom{2021}{0}(-1)^{2021} & \binom{2021}{1}(-1)^{2020} & \binom{2021}{2}(-1)^{2019} \\ 0 & \binom{2021}{0}(-1)^{2021} & \binom{2021}{1}(-1)^{2020} \\ 0 & 0 & \binom{2021}{0}(-1)^{2021} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2021 & -2041210 \\ 0 & -1 & 2021 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_{C_2}{}^{2021}(-1) = \begin{pmatrix} \binom{2021}{0}(-1)^{2021} & \binom{2021}{1}(-1)^{2020} \\ 0 & \binom{2021}{0}(-1)^{2021} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2021 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_C{}^{2021} = \begin{pmatrix} -1 & 2021 & -2041210 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^{2021} = P \cdot J_C{}^{2021} \cdot P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2021 & -2041210 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2025041 & 2021 & 4042 & -10105 & -2029084 \\ 4078378 & -1 & 0 & -4042 & -4078378 \\ -10105 & 2021 & 4041 & -8084 & 6063 \\ 2021 & 0 & 0 & -1 & -2021 \\ 2025042 & 2021 & 4042 & -10105 & -2029085 \end{pmatrix}$$

$$C^{2021} = \begin{pmatrix} 2025041 & 2021 & 4042 & -10105 & -2029084 \\ 4078378 & -1 & 0 & -4042 & -4078378 \\ -10105 & 2021 & 4041 & -8084 & 6063 \\ 2021 & 0 & 0 & -1 & -2021 \\ 2025042 & 2021 & 4042 & -10105 & -2029085 \end{pmatrix}$$

Zadanko 6

$Niech\ A \in M_n(\mathbb{C})\ będzie\ maceirzą\ nilpotentną.$

a) $A \in M_4^4(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dla\ k \geq 4\colon A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$DimKer(A^1) = 1, DimKer(A^2) = 2, DimKer(A^3) = 3,$
$Dla\ k \geq 4\colon DimKer\left(A^k\right) = 4$

b) $A \in M_4^4(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dla\ k \geq 3\colon A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$DimKer(A^1) = 2, DimKer(A^2) = 4,$
$Dla\ k \geq 3\colon DimKer\left(A^k\right) = 5$

c) Taka macierz nie istnieje. $Dla\ k \geq 5\ macierz\ ta\ ma\ dimKer\left(A^k\right) = 4,$
$zatem\ musi\ być\ macierzą\ 4x4. Macierz\ taka\ nie\ może\ istnieć\ -$
$może\ istnieć\ macierz\ taka\ jak\ w\ pp.\ a, ale\ nie\ taka, której\ dimKer\ maleje\ wolniej\ niż\ 1.$