

6 grudnia 2023 r.

Sebastian Pergała
Grupa 3
nr indeksu: 327301

Projekt 1: Metoda Romberga

Temat nr 5

1 Opis metody

Metoda Romberga to sposób całkowania numerycznego używany do przybliżania wartości całki oznaczonej. Została nazwana na cześć niemieckiego matematyka Wernera Romberga.

Podstawowym pomysłem metody Romberga jest iteracyjne ulepszanie przybliżenia całki, wykorzystując wyniki złożonej kwadratury. Proces ten obejmuje konstrukcję tabeli, zwanej tabelą Romberga, w której kolejne przybliżenia są obliczane z uwzględnieniem wcześniejszych wyników. Procedura ta ma na celu zwiększenie szybkości zbieżności i uzyskanie bardziej dokładnych wyników przy tej samej liczbie ewaluacji funkcji.

Metoda Romberga opiera się na ekstrapolacji Richardsona, stosowanej w kontekście numerycznego całkowania, gdzie analizuje się zbieżność szeregów uzyskanych z kwadratury. Głównym celem ekstrapolacji Richardsona jest poprawa jakości przybliżeń poprzez ekstrapolację do penego momentu, tj. iteracyjne uzyskiwanie coraz dokładniejszej estymaty funkcji w punktach, gdzie wartość rzeczywista jest obecnie nieznana.

Niech

$$I(f) = \int_a^b f(x) \, dx \tag{1}$$

gdzie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną

Niech T_N oznacza przybliżoną wartość całki obliczoną za pomocą złożonej kwadratury trapezów z podziałem przedziału całkowania na N podprzedziałów, a E_{T_N} niech oznacza błąd tego przybliżenia. Błąd ten można wyrazić jako:

$$E_{T_N}(f) = I(f) - T_N(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k!} H^{2k} (f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)), \quad (2)$$

gdzie B_{2k} są stałymi.

Zdefiniujemy

$$T_{i,0}(f) = T_{2^i}(f), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

Na podstawie (1) możemy wyrazić błąd przybliżenia w następujący sposób:

$$E_{T_{i,0}}(f) = I(f) - T_{i,0}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} H^{2k} = c_2 H^2 + c_4 H^4 + \dots, \quad (4)$$

gdzie $H = 2^{-i}(b-a)$ to długość podprzedziału, a c_2, c_4, \dots są pewnymi stałymi. Jeśli $i > 0$, to

$$E_{T_{i-1,0}}(f) = I(f) - T_{i-1,0}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} (2H)^{2k} = 4c_2 H^2 + 16c_4 H^4 + \dots, \quad (5)$$

Zdefiniujemy

$$T_{i,1}(f) = \frac{4T_{i,0}(f) - T_{i-1,0}(f)}{3} \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Z zależności (4), (5) i (6) otrzymujemy

$$E_{T_{i,1}}(f) = I(f) - T_{i,1}(f) = d_4 H^4 + d_6 H^6 + \dots \quad (7)$$

gdzie d_4, d_6, \dots są stałymi. Ogólnie, jeśli przyjmiemy

$$T_{i,k}(f) = \frac{4^k T_{i,k-1}(f) - T_{i-1,k-1}(f)}{4^k - 1} \quad k > 0, \quad i = k, k+1, \dots \quad (8)$$

i założymy, że funkcja f posiada w $[a, b]$ pochodne dostatecznie wysokiego rzędu, otrzymamy tablicę (zwaną *tablicą Romberga*) zawierającą przybliżone wartości całki (1):

$$\begin{array}{cccccc} T_{0,0} & T_{1,0} & \dots & T_{n-1,0} & T_{n,0} & \\ T_{0,1} & T_{1,1} & \dots & T_{n,1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ T_{n,n} & & & & & \end{array} \quad (9)$$

2 Opis programu obliczeniowego

Program implementuje metodę Romberga i używa jej do przybliżania wartości całki oznaczonej $I = \int_a^b f(x) dx$ dla wybranych funkcji.

Funkcja *romberg* oblicza wartość ostatniego elementu ostatniego wiersza tablicy Romberga (czyli najdokładniejszego przybliżenia poprawnego wyniku) według wzoru (8). Przyjmuje na argumenty:

- a* i *b*, definiujące przedział $[a, b]$ całkowania,
- f*, oznaczający funkcję pod całką *I*,
- n*, który określa podział przedziału $[a, b]$ na 2^{n-1} równych podprzedziałów długości,
- kwadratura*, oznaczający wybór kwadratury do obliczenia pierwszego wiersza tablicy Romberga,
- showSteps*, wartość prawda/fałsz, ustalająca, czy kolejne wiersze tablicy Romberga mają się wypisywać na konsoli (true) podczas działania funkcji, czy nie (false).

Argument *kwadratura*, który funkcja *romberg* przyjmuje to funkcja implementująca daną kwadraturę złożoną. Metoda Romberga działa nie tylko dla kwadratury trapezów. Program ma zaimplementowane następujące kwadratury:

- złożona kwadratura prostokątów (z punktem środkowym) - *zlozonaKwadraturaProstokatow*,
- złożona kwadratura trapezów - *zlozonaKwadraturaTrapezow*,
- złożona kwadratura Simpsona - *zlozonaKwadraturaSimpsona*,
- złożona kwadratura Netona 3/8 - *zlozonaKwadraturaNewtona_3_8*.

Każda z tych funkcji przyjmuje jako argumenty:

- a* i *b*, definiujące przedział $[a, b]$ całkowania,
- f*, oznaczający funkcję pod całką *I*,
- n*, który określa podział przedziału $[a, b]$ na 2^{n-1} równych podprzedziałów długości,
- showSteps*, wartość prawda/fałsz, ustalająca, czy obliczona wartość ma być wypisana na konsoli (true) podczas działania funkcji, czy nie (false).

Funkcje zwracają wektor rozmiaru *n* z wartościami przybliżeń całki *I* dla liczby równych podprzedziałów równej 1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1} . Wynik tych funkcji jest zarazem pierwszym wierszem tablicy Romberga dla danego *n*.

Funkcja *rombergZWarunkiemStopu* przyjmuje takie same argumenty jak *romberg*, czyli:

- a* i *b*, definiujące przedział $[a, b]$ całkowania,
- f*, oznaczający funkcję pod całką *I*,
- n*, który określa podział przedziału $[a, b]$ na 2^{n-1} równych podprzedziałów długości,
- kwadratura*, oznaczający wybór kwadratury do obliczenia pierwszego wiersza tablicy Romberga,
- showSteps*, wartość prawda/fałsz, ustalająca, czy kolejne wiersze tablicy Romberga mają się wypisywać na konsoli (true) podczas działania funkcji, czy nie (false).
- i dodatkowo przyjmuje argumenty:
 - tolerancja*,

krokiMin,
za pomocą których są określone warunki:

$$\frac{|T_{i,i} - T_{i-1,i-1}|}{\max\{1, T_{i,i}\}} \leq \textit{tolerancja} \quad (10)$$

$$\textit{krokiMin} \leq \textit{ilość wykonanych ekstrapolacji} \quad (11)$$

Kończy działanie, kiedy warunki (10) i (11) są spełnione lub kiedy obliczy ostatni wyraz tablicy Romberga. Funkcja dodatkowo zwraca dwie wartości:

szacowany błąd przybliżenia wartości całki I opisany wzorem (10)

ilość ekstrapolacji wykonanych, zanim funkcja zakończyła działanie.

Dzięki tak zaimplementowanej metodzie Romberga można łatwo dobrać przedział całkowania, funkcję pod całką, ilość ekstrapolacji i kwadraturę, na której metoda się opiera, jak i kontrolować, z jaką dokładnością wartość całki ma być wyznaczona.

W programie została również zaimplementowana funkcja *zlozonaKwadraturaNewtonaCotesa*, która jako wynik zwraca wartość przybliżenia I dla 2^{n-1} podprzedziałów dla pewnego ustalonego n , czyli ostatni element pierwszego wiersza tablicy Romberga opartej. Funkcja ta oblicza wartość za pomocą złożonej kwadratury Newtona-Cotesa sprecyzowanego przez użytkownika rzędu. Przyjmuje argumenty:

a i b , definiujące przedział $[a, b]$ całkowania,
 f , oznaczający funkcję pod całką I ,
 n , który określa podział przedziału $[a, b]$ na 2^{n-1} równych podprzedziałów długości,
 $rzad$, określa rząd kwadratury Newtona-Cotesa (obsługuje wartości od 1 do 6),
 $showSteps$, wartość prawda/fałsz, ustalająca, czy obliczona wartość ma być wypisana na konsoli (true) podczas działania funkcji, czy nie (false).

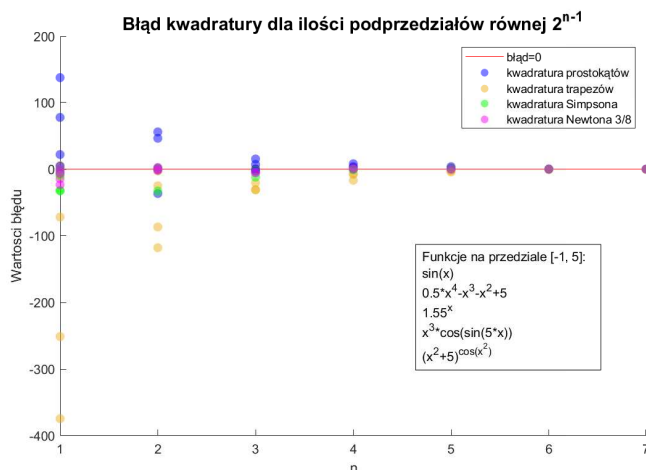
Z uwagi na to, że ta funkcja oblicza tylko wartość dla ustalonego n , a nie wektor wartości dla $i = 1, 2, \dots, n$, jej czas działania dla ustalonego n jest krótszy niż czas wykonania funkcji implementującej kwadraturę Newtona-Cotesa odpowiadającego rzędu opisanej w poprzednim paragrafie. Ta właściwość jest pomocna, jeśli interesuje nas tylko wynik kwadratury dla konkretnej liczby n (np. jeden z przykładów w sekcji następnej).

W programie zostały też zaimplementowane inne mniej znaczące funkcje ułatwiające generowanie przykładów (np. rysowanie wykresów).

3 Przykłady obliczeniowe

Przykład 1.

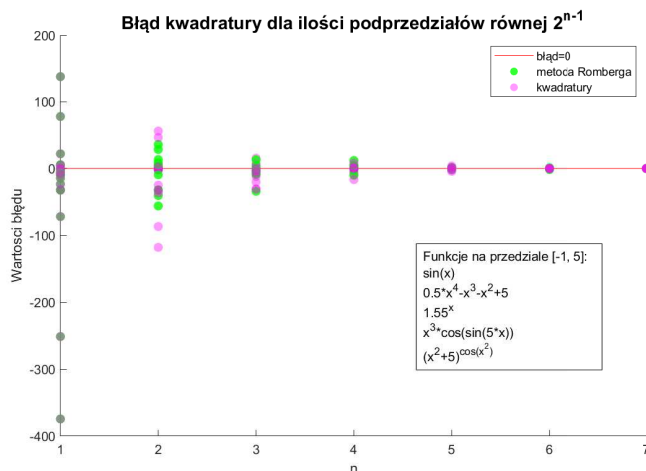
Wykres przedstawia błąd przybliżenia wartości całki za pomocą wybranych kwadratur, tj. złożona kwadratura prostokątów, trapezów, Simpsona i Newtona 3/8. Funkcje pod całkami są różne. Konkretnie kwadratury mają tendencję do zawyżania lub zaniżania wartości całek dla wszystkich funkcji. Poza tym różne kwadratury mają różne tempo zbieżności do dokładnego wyniku.



Rysunek 1: Błędy kwadratur dla różnych funkcji

Przykład 2.

Wykres przedstawia błąd przybliżenia wartości całki za pomocą wybranych kwadratur, tak samo jak w przykładzie 1. Te punkty zostały zaznaczone kolorem różowym. Dodatkowo na wykresie znajdują się punkty zielone, które oznaczają wartości błędów uzyskane za pomocą metody Romberga opartej na rozpatrywanych kwadraturach. Jak widać, błędy dla metody Romberga są ogólnie mniejsze, niż dla kwadratur dla konkretnych n .



Rysunek 2: Błędy kwadratur i metody Romberga opartej na tych kwadraturach dla różnych funkcji

Przykład 3.

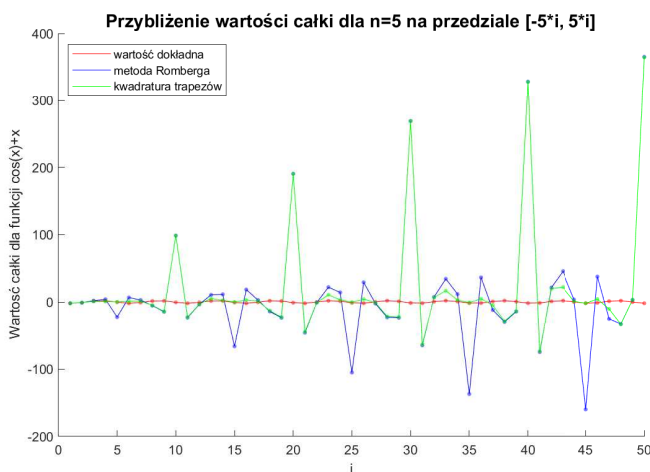
Szykość zbieżności metody Romberga zależy między innymi od kształtu funkcji; przybliżanie wartości całki funkcji bardziej stromych wiąże się z większym błędem obliczeniowym. Dla $n = 20$, na przedziale $[-1, 5]$ program przybliżał wartość całki za pomocą metody Romberga opartej na kwadraturze prostokątów trapezów, Simpsona i Newtona 3/8, aż komputer uzna szacowany błąd za równy 0. Poniżej jest tabelka przedstawiająca Ilość wykonanych ekstrapolacji do uzyskania dokładnego wyniku dla funkcji niezawierającej stromych fragmentów i dla funkcji zawierającej taki fragment.

Tabela 1: Ilość wykonanych ekstrapolacji do uzyskania dokładnego wyniku

| kwadratura | funkcja $(x^2 + 5)^{\cos(x^2)}$ | funkcja $ (75)^x \cdot \frac{1}{x-5.0001} $ |
|-------------|---------------------------------|---|
| prostokątów | 2 | 18 |
| trapezów | 2 | 18 |
| Simpsona | 2 | 17 |
| Newtona 3/8 | 1 | 16 |

Przykład 4.

Im przedział, na którym przybliża się wartość całki jest większy, tym błąd tego przybliżenia ma większą wartość. Rysunek 3 przedstawia dokładną wartość całki obliczoną dla funkcji $\cos(x) + x$ na przedziałach $[-5i, 5i]$ dla $n = 5$, wartość przybliżoną kwadraturą trapezów i wartość przybliżoną metodą Romberga opartą na kwadraturze trapezów, dla $i = 1, 2, \dots, 50$.



Rysunek 3: Wartość dokładna, przybliżona kwadraturą trapezów i przybliżona metodą ROMberga dla funkcji $\cos(x) + x$ na przedziałach $[-5i, 5i]$

Przykład 5.

Skonstruujmy pierwsze trzy wiersze tabeli Romberga dla $n = 5$, na przedziale $[1, 5]$, dla funkcji $\frac{1}{\sin(x)+2}$. Wyglądają one następująco:

Tabela 2: Trzy pierwsze wiersze tabeli Romberga dla $n = 5$, na przedziale $[1, 5]$, dla funkcji $\frac{1}{\sin(x)+2}$

| wiersz | kolumna 1 | kolumna 2 | kolumna 3 | kolumna 4 | kolumna 5 |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 8.2911 | 22.3179 | 14.9373 | 10.8685 | 7.6506 |
| 2 | 26.9935 | 12.4772 | 9.5122 | 6.5779 | |
| 3 | 11.5094 | 9.3146 | 6.3823 | | |
| 4 | 9.2797 | 6.3357 | | | |
| 5 | 6.3242 | | | | |

Te trzy wiersze są równe wynikom kwadratury trapezów, Sompsona i wzorowi Boole’a (czyli kwadratom Newtona-Cotesa rzędu 1, 2 i 3) kolejno dla $n = 5, 32$.

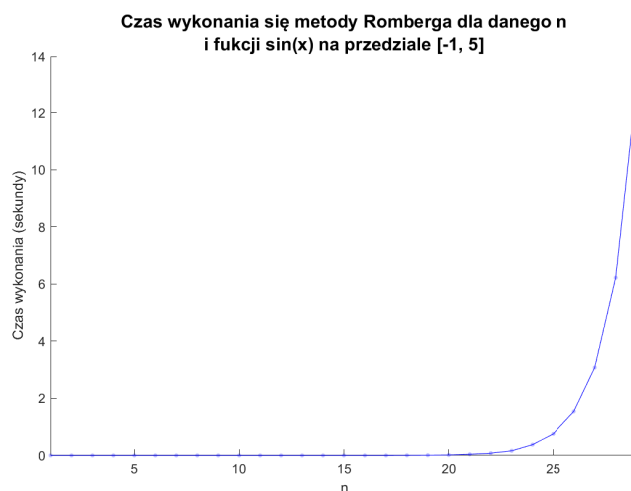
Tabela 3: Wyniki kwadratur Newtona-Cotesa rzędu 1, 2, 4 na przedziale $[1, 5]$, dla funkcji $\frac{1}{\sin(x)+2}$

| kwadratura | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| trapezów | 8.2911 | 22.3179 | 14.9373 | 10.8685 | 7.6506 |
| Simpsona | 26.9935 | 12.4772 | 9.5122 | 6.5779 | 17.9900 |
| wzór Boole’a | 11.5094 | 9.3146 | 6.3823 | 18.7508 | 9.1996 |

Ogólnie, dla pewnego n , pierwszy wiersz tablicy Romberga jest równoważny kwadraturze trapezów, drugi kwadraturze Simpsona dla $n - 1$, a trzeci wzorowi Boole’a dla $n - 2$, gdzie dla kwadratur przedział jest podzielony na 2^{i-1} podprzedziałów.

Przykład 6.

Złożoność czasowa jest rzędu wykładniczego, co wynika z faktu, że operacją dominującą algorytmu jest obliczanie szeregu liczbowego za pomocą danej kwadratury na $2^{(n-1)}$ przedziałach dla danego n .



Rysunek 4: Wykres czasu wykonania się funkcji "romberg" dla $n = 29$, przedziału $[-1, 5]$ i funkcji $\sin(x)$

Przykład 7.

Metoda Romberga czasem oblicza mniej dokładny wynik dla większych wartości n . Poniżej jest przedstawiona tabela pokazująca to zjawisko dla funkcji $\sin(x) - x$ na przedziale $[-0.5, 0.5]$.

Tabela 4: Błąd względny w metodzie Romberga dla funkcji $\sin(x) - x$ na przedziale $[-0.5, 0.5]$

| n | wartość dokładna | wartość przybliżona | błąd względny |
|----|------------------|---------------------|---------------|
| 1 | -1.0842e-19 | 0 | -1 |
| 2 | -1.0842e-19 | 0 | -1 |
| 3 | -1.0842e-19 | 0 | -1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 6 | -1.0842e-19 | 0 | -1 |
| 7 | -1.0842e-19 | -1.5745e-19 | -0.45224 |
| 8 | -1.0842e-19 | -2.6244e-19 | -1.4206 |
| 9 | -1.0842e-19 | -3.7092e-19 | -2.4211 |
| 10 | -1.0842e-19 | 3.8672e-19 | -4.5668 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 25 | -1.0842e-19 | 5.6554e-18 | -53.162 |
| 26 | -1.0842e-19 | -1.1799e-17 | -107.83 |
| 27 | -1.0842e-19 | 1.166e-17 | -108.54 |

4 Analiza wyników

Metoda Romberga pozwala na zwiększenie szybkości zbieżności wyniku algorytmu do rzeczywistej wartości całki i uzyskanie bardziej dokładnych wyników przy tej samej liczbie ewaluacji funkcji.

Ta technika całkowania numerycznego działa najlepiej dla funkcji, których wykresy nie mają stromych fragmentów.

Dla większej ilości podprzedziałów przedziału całkowania metoda zwraca bardziej dokładniejsze wyniki.

Pierwsze trzy wiersze tablicy Romberga są równoważne kolejno złożonej kwadraturze Newtona-Cotesa rzędu 1, 2 i 4 dla odpowiadających wartości n (gdzie przedział całkowania jest podzielony na $2^{(n-1)}$ równych podprzedziałów).

Złożoność czasowa algorytmu jest wykładnicza w zależności od parametru n , co wiąże się z ilością podziałów przedziału całkowania na $2^{(n-1)}$ równych podprzedziałów i zastosowanie na nich kwadratur do przybliżenia wartości całki i wyznaczenia pierwszego wiersza tablicy Romberga.

Metoda Romberga nie zawsze jest zwraca dokładniejszy wynik dla większych wartości n . Zjawisko to zostało pokazane w przykładzie nr 7.