Özdeğer ve Özvektörler

ÜNİTE

9

Yazar

Öğr.Grv.Dr.Nevin ORHUN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- bir lineer dönüşümün ve bir matrisin özdeğer ve özvektör kavramlarını anlayacak,
- bir dönüşüm matrisinin karakteristik polinom, özdeğer ve özvektörlerinin nasıl bulunduğunu öğrenecek,
- bir dönüşüm matrisinin ne zaman köşegen matris biçiminde yazılabileceğini öğrenecek,
- simetrik matrisin daima bir köşegen matris biçiminde yazılabileceğini öğreneceksiniz.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışmaya başlamadan önce 7. ve 8. Üniteleri tekrar gözden geçiriniz.

1. Giriş

Ünite 8 de sonlu boyutlu V ve W vektör uzayları için bir $T: V \to W$ lineer dönüşümünün V ve W nin verilen tabanlarına göre matris temsilini gördük. Tabanlar değiştiğinde dönüşüm matrisinin de değiştiğini biliyoruz. Dönüşüm matrisi lineer dönüşümlerde yapılan ispatları, işlemleri kolaylaştırmak için kullanılabileceğinden, matrisin basit olması, yani matriste sıfır öğelerinin çok sayıda olması, özellikle bir köşegen matris olması önemlidir. Bu bölümde, V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere $T: V \to V$ şeklindeki bir lineer dönüşümün matrisinin, köşegen matris olması için gerekli koşulları inceleyeceğiz.

$$T: V \to V$$

lineer dönüşümünün, V nin $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tabanına göre dönüşüm matrisi köşegen matris olsun.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bu matrisin nasıl bulunduğunu biliyoruz: Matrisin sütunları $T(x_1)$, $T(x_2)$, ... , $T(x_n)$ vektörlerinin $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tabanına göre koordinatları olduğundan

$$T(x_1) = \lambda_1 x_1 + 0 \,.\, x_2 + \ldots + 0 \,.\, x_n$$

$$T(x_2) = 0 \,.\, x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + 0 \,.\, x_n$$

$$\vdots$$

$$T(x_n) = 0 \,.\, x_1 + 0 \,.\, x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

veya

$$T(x_1) = \lambda_1 x_1$$

$$T(x_2) = \lambda_2 x_2$$

$$\vdots$$

$$T(x_n) = \lambda_n x_n$$

olduğu görülür. Buna göre, dönüşüm matrisi bir köşegen matris ise taban vektörlerinin görüntüleri, kendilerinin bir katıdır. Tersine olarak bir lineer dönüşümde, taban vektörlerinin görüntüleri kendilerinin bir katı oluyorsa dönüşüm matrisi köşegen matris olur. O halde bir lineer dönüşümün matrisinin köşegen matris olması için öğelerinin herbirini kendi katlarına gönderen bir taban bulmalıyız.

1.1. Tanım

$T: V \to V$ lineer dönüşümü verilsin.

$x \in V$, olan sıfırdan farklı bir x vektörü için $T(x) = \lambda x$ eşitliğini sağlayan bir λ sayısı varsa, λ sayısına T dönüşümünün **özdeğeri,** x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen **özvektörü** denir.

Bu tanımın ardından aşağıdaki önemli teoremi ifade edelim:

1.2. Teorem

V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $T: V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. T nin dönüşüm matrisinin bir köşegen matris olması için gerekli ve yeterli koşul T nin özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerin V için bir taban oluşturmasıdır.

Kanıt

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tabanına göre T nin matrisinin nasıl bulunduğunu anımsayarak teoremin kanıtını yapınız.

Bir kare matris bir lineer dönüşüm olarak düşünüldüğünde, bu lineer dönüşümün özdeğer ve özvektörlerine o matrisin özdeğerleri ve özvektörleri denir. Daha açık olarak, $A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisinin $\mathbf{R}^n$ in standart tabanına göre belirlediği T lineer dönüşümünü göz önüne alırsak, T nin özdeğer ve özvektörlerine A nın özdeğer ve özvektörleri denir. Bir λ sayısının A matrisinin özdeğeri olması

$$Ax = \lambda x$$

koşulunu sağlayan $x \neq 0$ olacak şekilde bir x vektörünün var olmasıdır. Bu x vektörüne A matrisinin λ özdeğerine karşı gelen özvektörü denir.

λ, $T: V \to V$ lineer dönüşümünün bir özdeğeri ise, her $c \in \mathbf{R}$ için

$$T(cx) = cT(x) = c(\lambda x) = \lambda(cx)$$

yazabiliriz. Buna göre, x vektörünün her c skaleriyle çarpımı λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. Bu vektörlerin kümesi V nin bir alt uzayını oluştururlar. Bu alt uzaya λ özdeğerine karşı gelen T nin **özuzayı** denir.

1.3. Örnek

$I : V \to V$ birim dönüşüm olsun. Her $x \in V$ için

$$I(x) = x = 1 \,.\, x$$

Böylece $\lambda = 1$, I nın bir özdeğeri ve V içindeki her vektörde 1 özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

1.4. Örnek

V türevlenebilen fonksiyonların vektör uzayı ve D türev dönüşümü olsun.

$$D : V \to V$$
$$D(e^{3t}) = 3\, e^{3t}$$

yazılabilir.

Burada $\lambda = 3$ özdeğer, $x = e^{3t}$, bu özdeğere karşılık gelen özvektördür.

Özdeğer ve özvektör yerine karakteristik değer ve karakteristik vektör deyimleri de kullanılır.

2. Karakteristik Polinom

2.1. Tanım

$$T : V \to V$$

lineer dönüşümünün, V nin $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tabanına göre matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

olsun. I_n, birim matris ve λ bilinmeyen bir sayı olmak üzere, $A - \lambda I_n$ matrisine **karakteristik matrisi** denir. Bu matrisin determinantı

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

λ nın bir polinomu olup, bu polinoma T nin **karakteristik polinomu** denir.

$$T(\lambda) = | A - \lambda I_n | = 0$$

denklemine de **karakteristik denklem** denir.

Şimdi karakteristik polinomun, T nin matris gösteriminin bulunmasında seçilen tabana bağlı olmadığını gösterelim:

$T : V \rightarrow V$ lineer dönüşümü verilsin.

V nin $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tabanına göre T nin matrisi A, V nin $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ tabanına göre T nin matrisi B ise A ve B matrislerinin karakteristik polinomları aynıdır:

A ve B aynı bir lineer dönüşümü temsil ettiklerine göre bu iki matris arasında

$$A = P B P^{-1}$$

ilişkisi vardır (Ünite 8, 2.3 Teorem). Buradan,

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= |P B P^{-1} - \lambda I| \\
&= |P B P^{-1} - \lambda P I P^{-1}| \\
&= |P (B - \lambda I) P^{-1}| \\
&= |P| \, |B - \lambda I| \, |P^{-1}| \\
&= |B - \lambda I| \, |P| \, |P^{-1}| \\
|A - \lambda I| &= |B - \lambda I|
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre bir lineer dönüşümün karakteristik polinomu dönüşüm matrisinin hesaplandığı tabana bağlı değildir. Bir başka ifadeyle, benzer matrislerin karakteristik polinomları aynıdır.

2.2. Teorem

$A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisinin özdeğerleri karakteristik polinomun gerçel kökleridir.

Kanıt

λ , A nın bir özdeğeri ve bu özdeğere karşı gelen bir vektörde x olsun.

$$\begin{aligned}
A x &= \lambda x \\
A x &= (\lambda I_n) x \\
(A - \lambda I_n) x &= 0
\end{aligned}$$

Bu sistem n bilinmeyenli n denklemden oluşan homojen lineer denklem sistemidir. Sistemin sıfır çözümden başka çözümlerinin olması için gerekli ve yeterli koşul

$$| A - \lambda I_n | = 0$$

olmasıdır. Böylece A nın özdeğerleri

$$T(\lambda) = | A - \lambda I_n |$$

karakteristik polinomunun kökleridir.

O halde bir lineer dönüşüm verildiğinde özdeğerlerini bulmak için, herhangi bir tabana göre yazılan dönüşüm matrisinin karakteristik polinomunun kökleri bulunur.

2.3. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini ve bunlara karşı gelen özvektörleri bulunuz.

Çözüm

A nın karakteristik polinomu,

$$| A - \lambda I_3 | = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$$

olup $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$ denkleminin kökleri özdeğerlerdir. Bu denklemin kökleri 12 nin çarpanlarını denklemde deneyerek $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\lambda = -2$ bulunur. Şimdi bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulalım:

λ özdeğerine karşı gelen x özvektörü

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

ise

$$(A - \lambda I_3)\, x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

olur.

$\lambda = 2$ için

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Burada 1. denklem, 2. denklemin -1 katıdır, bu durumda

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

üç bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemin çözümü için x_1 bilinmeyenini bilinen kabul edersek, sistemin çözümü

$x_3 = -x_1$ ve $x_2 = 0$

bulunur.

$x_1 = k$ için $x_3 = -k$, $x_2 = 0$

$$x = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece, $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $k \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$ biçimindedir. Buna göre $\lambda = 2$ özdeğerinin özuzayı $\left\{ \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \,\middle|\, k \neq 0 \ , \ k \in \mathbf{R} \right\} =$

$= \left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, k \neq 0 \ , \ k \in \mathbf{R} \right\}$ kümesidir. Böylece $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen özuzay 1 boyutludur. Bu özuzay için $\{ v = (1 , 0 , -1) \}$ kümesi bir taban oluşturur.

Şimdi de $\lambda_2 = 3$ özdeğerine karşılık gelen x özvektörlerini bulalım:

(1) denkleminde $\lambda = 3$ yazılarak işlem yapılırsa;

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi bulunur. Sistemin katsayılar matrisinin rankı 2 olduğundan x_1 bilinmeyenini bilinen kabul edersek, sistemin çözümü

$x_2 = -x_1$ ve $x_3 = -x_1$

bulunur.

$x_1 = k$, $x_2 = -k$, $x_3 = -k$ olur.

Böylece $\lambda = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler, $k \neq 0$ olmak üzere

$$x = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -k \end{pmatrix},$$

biçimindedir. Buna göre $\lambda = 3$ özdeğerinin özuzayı $\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in R \right\}$ kümesidir.

$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörleri bulalım:

Benzer şekilde (1) denkleminde $\lambda = -2$ yazılarak işlem yapılırsa;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemin çözümünden $x_2 = -x_1$, $x_3 = 4x_1$ bulunur.

$x_1 = k$ için $x_2 = -k$, $x_3 = 4k$ olur.

$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $x = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 4k \end{pmatrix}$ biçimindedir.

Böylece $\lambda = 2 ; 3 ; -2$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 4k \end{pmatrix} \quad k \neq 0 \text{ , } k \in \mathbf{R} \text{ dir. (Neden } k \neq 0 \text{)}$$

$k = 1$ için bu vektörler $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ olur. Bu vektörlerin oluşturduğu

matrisi yazarak basamak biçime indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Bu üç vektör basamak matrisin sıfır olmayan satırları olup lineer bağımsızdırlar. Şimdi bununla ilgili teoremi ifade edelim:

2.4. Teorem

$T : V_n \rightarrow V_n$ lineer dönüşümünün farklı $\lambda_1 , \lambda_2 , ... , \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $v_1 , v_2 , ... , v_n$ özvektörleri lineer bağımsızdır.

Kanıt

n üzerinde tüme varımla yapalım:

$n = 1$ için $v_1 \neq 0$ olduğundan v_1 lineer bağımsızdır.
$n = 2$ için v_1 , v_2 özvektörleri lineer bağımsız mı?

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$$

olsun. $T (c_1 v_1 + c_2 v_2) = T (0)$ veya $c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) = 0$

$T (v_1) = \lambda_1 v_1$, $T (v_2) = \lambda_2 v_2$ olduğundan

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

olur. Şimdi $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ denklemini λ_2 ile çarpıp bu denklemden çıkartalım, ikinci terimler aynı olacağından

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $v_1 \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olur. c_1 ın bu değeri $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ denkleminde yazılınca, $v_2 \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ elde edilir.

Şimdi iddianın $n-1$ vektör için doğruluğunu kabul edip n vektör için kanıtlayalım. $v_1, v_2, \dots, v_n$ özvektörlerinden ilk $(n-1)$ tanesinin lineer bağımsız ve

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n v_n = 0 \qquad (1)$$

olsun.

$$c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_{n-1} T(v_{n-1}) + c_n T(v_n) = 0 \qquad (2)$$

ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $T(v_i) = \lambda_i v_i$ olduğundan

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{n-1} \lambda_{n-1} v_{n-1} + c_n \lambda_n v_n = 0$$

olur. Şimdi (1) denklemini λ_n ile çarpıp (2) denkleminden çıkartalım, son terimler aynı olacağından,

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_n) v_2 + \dots + c_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} = 0$$

elde edilir. $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfır, yani

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_n) = c_2(\lambda_2 - \lambda_n) = \dots = c_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0$$

olur. Diğer taraftan λ_i $(i = 1 \dots n)$ ler farklı olduklarından

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$$

çıkar. c_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ ler (1) de yerine yazılınca

$$c_n v_n = 0$$

elde edilir. $v_n \neq 0$ olduğundan $c_n = 0$ bulunur ve tüme varım tamamlanır. Sonuç olarak, farklı $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $v_1, v_2, \dots, v_n$ özvektörleri lineer bağımsız olurlar.

3. Bir Matrisin Köşegenleştirilmesi

3.1. Tanım

V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $T: V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. V nin öyle bir tabanı olsun ki, T nin bu tabana göre A matrisi köşegen matris olsun. Bu durumda T ye köşegenleştirilebilir denir.

T nin köşegenleştirilebilmesi demek, özvektörlerden oluşan V nin bir tabanını bulmak ve bu tabana göre dönüşüm matrisini oluşturmaktır. Bu köşegen matris,

$$B = P^{-1} A P$$

ile verilir. Buradaki P matrisi, standart tabandan özvektörlerin oluşturduğu tabana geçiş matrisidir. Bu durumda P matrisi kısaca, sütunları lineer bağımsız özvektörler olan matristir. P nin sütunları lineer bağımsız olduğu için P matrisi bir regüler matristir. Böylece V n-boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere

$$T : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümünün (A matrisinin) köşegenleştirilebilmesi için aşağıda işlemler uygulanır:

(i) T lineer dönüşümün matris gösterimi A nın karakteristik polinomu yazılır.

$$T(\lambda) = | A - \lambda I_n |$$

(ii) $T(\lambda) = | A - \lambda I_n | = 0$

karakteristik polinomun kökleri bulunur. Bu kökler A nın özdeğerleridir. Bulunan özdeğerler gerçel değilse, A matrisi köşegenleştirilemez.

(iii) A nın her bir λ özdeğerine karşı gelen özvektörleri bulunur.

$$(A - \lambda I_n) x = 0$$

(iv) Bu özvektörler n-boyutlu bir vektör uzayı için taban oluşturuyorsa A matrisi köşegenleştirilebilir.

(v) Köşegen matris aşağıdaki şekillerden biri ile bulunur.

a) Lineer dönüşüm A matrisi ile verilmişse, standart tabana göre dönüşüm matrisi A olan lineer dönüşüm yazılır. Bu dönüşümün, özvektörlerin oluşturduğu tabana göre matrisi aranan köşegen matristir.

b) Sütunları özvektörler olan matris P olmak üzere

$$B = P^{-1} A P$$

matrisi köşegen matristir. B nin köşegen elemanlarına özdeğerler karşılık gelir.

Şimdi 2.3 Örneğe tekrar dönelim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin bir köşegen matrise benzer olup olmadığını veya köşegenleştirilip köşegenleştirilemeyeceğini araştıralım.

Bu matrisin köşegenleştirilebilmesi için e_1 , e_2 , e_3 standart tabanına göre temsil ettiği T lineer dönüşümünün özvektörlerinden oluşan bir tabanının bulunmasıdır. 2.3 Örnekte bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$ bulunmuştu. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler de $k \neq 0$ için $x_1 = (k, 0, -k)$, $x_2 = (k, -k, -k)$, $x_3 = (k, -k, 4k)$ biçimindeydi.

Burada $k = 1$ için,

$\lambda = 2$ özdeğerine karşılık $x_1 = (1, 0, -1)$ özvektörü
$\lambda = 3$ özdeğerine karşılık $x_2 = (1, -1, -1)$ özvektörü
$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık $x_3 = (1, -1, 4)$ özvektörü

bulunur. $E = \{ x_1 = (1, 0, -1) , x_2 = (1, -1, -1) , x_3 = (1, -1, 4) \}$ kümesi $\mathbf{R}^3$ için bir taban teşkil eder. Kontrol ediniz!... Şimdi, standart tabana göre matris gösterimi A olan T lineer dönüşümünün $E = \{ (1, 0, -1), (1, -1, -1), (1, -1, 4) \}$ tabanına göre matrisini bulalım:

$$T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$T (x , y , z) = (x - y - z , x + 3y + z , - 3x + y - z)$$

olur (Bu dönüşümün nasıl elde edildiğini hatırlayınız).

$$T (1, 0, -1) = (1 - 0 + 1 , 1 + 3.0 + (-1) , -3.1 + 0 - (-1)) = (2, 0, -2)$$

$$(2, 0, -2) = a (1, 0, -1) + b (1, -1, -1) + c (1, -1, 4)$$
$$(2, 0, -2) = (a + b + c , - b - c , - a - b + 4c)$$

$$a = 2 , b = 0 , c = 0$$

Bu değerler aranan matrisin 1. sütunudur.

Benzer şekilde;

$$T\,(1, -1, -1) = (3, -3, -3) = a\,(1, 0, -1) + b(1, -1, -1) + c(1, -1, 4)$$

$$(3, -3, -3) = (a + b + c\;,\; - b - c\;,\; - a - b + 4)$$

$$a = 0\,,\, b = 3\,,\, c = 0$$

bulunur. Bu değerler matrisin 2. sütunudur. Benzer şekilde;

$$T\,(1, -1, 4) = (1 + 1 - 4\;,\; 1 - 3 + 4\;,\; - 3 - 1 - 4) = (-2, 2, -8)$$

$$(-2, 2, -8) = a\,(1, 0, -1) + b(1, -1, -1) + c(1, -1, 4)$$

$$a = 0\,,\, b = 0\,,\, c = -2$$

bulunur. Bu değerler de matrisin 3. sütunudur. Bulunan değerlerle matrisi oluştu-rursak,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

köşegen matrisi elde edilir. Sonuç olarak, verilen A matrisi köşegenleştirilebilir bir matristir.

Köşegenleştirilebilmenin diğer bir yolu da, özvektörleri sütun vektörü olarak alan matris P olmak üzere,

$$B = P^{-1}\,A\,P$$

matrislerinin çarpımıdır.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

olur. P^{-1} ters matrisi ise

$$P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Kontrol ediniz.

$$B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 0 \\ 3 & 15 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

köşegen matris elde edilir; yani $B = P^{-1} A P$ dir.

Sonuç olarak, T nin dönüşüm matrisinin köşegenleştirilebilmesi için özdeğerlere karşılık bulunan özvektörlerin bir taban oluşturmasıdır. Buradan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

3.2. Teorem

Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisinin karakteristik polinomunun n tane kökü farklı ve gerçel ise A matrisi köşegenleştirilebilir.

Teoremin kanıtı verilmeyecek bir örnekle açıklanacaktır.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin köşegenleştirilemeyeceğini gösterelim:

A matrisinin karakteristik polinomu,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 5 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olup, $(1 - \lambda)^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ özdeğeri bulunur. Bu özdeğere karşılık gelen özvektörü bulalım:

$$(A - \lambda I_2)\, x = 0$$

buradan,

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$5\,x_2 = 0 \ , \ x_2 = 0$$

$\lambda = 1$ özdeğerine karşı gelen özvektör $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$ olmak üzere $(x_1 , 0)$ şeklindedir. Buna göre, $\mathbf{R}^2$ nin özvektörlerden oluşan bir tabanı bulunamaz. O halde verilen A matrisi köşegenleştirilemez.

3.3. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz mümkünse köşegenleştiriniz.

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 0\right] + 2\left(0 - 3(1-\lambda)\right) = 0$$

Parantezler açılıp işlem yapılırsa

$$(1 - \lambda)\ (\lambda + 1)\ (\lambda - 4) = 0$$

bulunur. Buradan;

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = -1 \ , \lambda_3 = 4$$

özdeğerleri bulunur. Bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulalım:

$\lambda_1 = 1$ için $\quad (A - \lambda I_3)(x) = 0$

$$(A - \lambda I_3)(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemini x_1 e göre çözersek; $x_2 = -6x_1$, $x_3 = 4x_1$ bulunur. Buna göre $x = (x_1 , -6\,x_1 , 4\,x_1)$; $x_1 = 1$ için $x = (1, -6, 4)$ olur. $\lambda = -1$ için özdeğerine karşı gelen özvektör:

$$\left(A - \lambda I_3\right) x = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

sisteminin x_1'e göre çözümü, $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{2}{3} x_1$ olur.

$x_1 = 3$ için $x = (3, 0, -2)$ bulunur.

$\lambda = 4$ özdeğerine karşı gelen özvektör;

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

sisteminin x_3 'e göre çözümü $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$ olur.

$x_1 = 1$ için $x = (1, 0, 1)$ bulunur. Böylece özvektörler

$(1, -6, 4)$, $(3, 0, -2)$, $(1, 0, 1)$

olarak bulunur. Bu vektörler lineer bağımsızdır ve $\mathbf{R}^3$ için bir taban teşkil ederler. 1.2. teorem gereğince A matrisi köşegenleştirilebilir. A matrisinin standart tabana göre temsil ettiği lineer dönüşüm

$T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$
$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z , y , 2x + y + 2z)$

dir.

T nin $\{(1,-6,4), (3,0,-2), (1,0,1)\}$ tabanına göre dönüşüm matrisini bulalım: Bunun için tabandaki her vektörün T altındaki görüntüsünün yine tabana göre koordinatlarını bulmalıyız.

$T(1, -6, 4) = (1 + 2 . (-6) + 3 . 4 , -6 , 2 . 1 -6 + 2 . 4) = (1, -6, 4)$
$(1, -6, 4) = a (1, -6, 4) + b (3, 0, -2) + c (1, 0, 1)$

buradan açık olarak $a=1$, $b=0$, $c=0$ bulunur. Bu değerler matrisin 1. sütunudur.

$$\begin{aligned} T(3, 0, -2) &= (3 + 2 \,.\, 0 + 3\,(-2)\;,\; 0\;,\; 2 \,.\, 3 + 0 + 2 \,.\, (-2)\,) = (-3, 0, 2) \\ (-3, 0, 2) &= a\,(1, -6, 4) + b\,(3, 0, -2) + c\,(1, 0, 1) \end{aligned}$$

burada $a=0$, $b=-1$, $c=0$ olduğu hemen görülür. Bu değerler matrisin 2. sütunudur.

$$\begin{aligned} T(1, 0, 1) &= (1 + 2 \,.\, 0 + 3 \,.\, 1\;,\; 0\;,\; 2 \,.\, 1 + 0 + 2 \,.\, 1) = (4, 0, 4) \\ (4, 0, 4) &= a\,(1, -6, 4) + b\,(3, 0, 2) + c\,(1, 0, 1) \end{aligned}$$

burada $a=0$, $b=0$, $c=4$ olduğu açıktır. Bu değerlerde matrisin 3. sütunudur. Buna göre,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu köşegen matrisin köşegen üzerindeki öğelerinin özdeğerler olduğuna dikkat edelim.

Şimdi ikinci bir yol olarak,

T nin özvektörlerinden oluşan $\{(1, -6, 4), (-3, 0, 2), (1, 0, 1)\}$ tabanına göre köşegen matrisini daha kısa yoldan bulalım:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Özvektörler sütunları oluşturuyor)

olmak üzere

$$B = P^{-1}\; A\; P$$

köşegen matristir. P^{-1} ters matrisi bulunarak çarpma işlemi yapılırsa

$$B = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \\ 12 & 14 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

3.4. Örnek

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z\,,\ -y + 2z\,,\ 2z)$

lineer dönüşümünün özdeğer ve özvektörlerini bulunuz. Mümkünse dönüşüm matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm

$$T(x, y, z) = \lambda\,(x, y, z)$$
$$(x + 2y + 3z\,,\ -y + 2z\,,\ 2z) = (\lambda x\,,\ \lambda y\,,\ \lambda z)$$
$$[\,(1 - \lambda)\,x + 2y + 3z\,,\ (-1 - \lambda)\,y + 2z\,,\ (2 - \lambda)\,z] = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)\,x + 2y + 3z &= 0 \\ (-1 - \lambda)\,y + 2z &= 0 \\ (2 - \lambda)\,z &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

T nin karakteristik polinomu,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 - 7 \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\,(-1 - \lambda)\,(2 - \lambda) = 0$$

olup, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ özdeğerleri bulunur.

Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım:

$\lambda = 1$ için (1) den,

$$\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

buradan,

$z = 0$, $y = 0$, $x \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$ olur. Buna göre $x = 1$ için $(1, 0, 0)$ özvektörü elde edilir.

$\lambda = -1$ için (1) den,

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ 2z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

buradan,

$z = 0$, $x , y \in \mathbf{R}$ olmak üzere, $x = y = 1$ için (1, 1, 0) özvektörü elde edilir.

$\lambda = 2$ için (1) den,

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ \quad -3y + 2z = 0 \\ \qquad 0 \, . \, z = 0 \end{cases}$$

sistemin z ye göre çözümü $x = \frac{13}{3} z$, $y = \frac{2}{3} z$ olur $z = 3$ için çözümlerinden biri (13, 2, 3) özvektörüdür.

Buradan, (1, 0, 0) (1, 1, 0) (13, 2, 3) özvektörleri lineer bağımsız olduğu için $\mathbf{R}^3$ için bir taban teşkil eder. Bu nedenle dönüşüm matrisi köşegenleştirilebilir. Bu köşegen matris

$$B = P^{-1} \; A \; P$$

dir.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere P^{-1} i bularak

$$B = P^{-1} \; A \; P$$

çarpımından

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olduğunu görünüz.

3.5. Örnek

$$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$T (x, y) = (x, -2x + y)$$

lineer dönüşüm matrisini mümkünse köşegenleştiriniz.

Çözüm

$T(x, y) = \lambda (x, y)$
$(x, -2x + y) = (\lambda x, \lambda y)$
$[(1 - \lambda) x, -2x + (1 - \lambda) y] = (0, 0)$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) x &= 0 \\ -2x + (1 - \lambda) y &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Karakteristik polinom,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 = 0 ,$$

$(1 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$

$\lambda = 1$ değerine karşılık gelen özvektör (1) den

$$\begin{cases} 0 \,.\, x = 0 \\ -2x + 0 \,.\, y = 0 \end{cases}$$

sistemin çözümünden $x = 0$ bulunur. Özvektörler $(0, y)$, $y \neq 0$ şeklindedir. Buradan, $\mathbf{R}^2$ nin bir tabanı oluşturulamaz. Dolayısıyla dönüşüm matrisi köşegenleştirilemez.

Simetrik matrislerin ($A = A^T$) köşegenleştirilmede özelliği vardır. Bununla ilgili teoremi kanıtsız vererek uygulamasını yapalım.

3.6. Teorem

$A = (a_{ij})_{nxn}$ bir simetrik matris ise köşegenleştirilebilir.

Teoremin kanıtını vermeyeceğiz. Lineer Cebir kitaplarında bulabilirsiniz. Aşağıdaki ifadeler bu teoremin sonuçlarıdır.

- Simetrik bir matrisin karakteristik polinomunun bütün kökleri gerçeldir.
- Simetrik matrisin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri ortogonaldir (diktir).
- Bir P matrisi vardır ki

  $P^{-1} \; A \; P$

  matrisi köşegen matristir. A matrisinin özdeğerleri köşegen matrisin esas köşegeninin öğeleridir.

3.7. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm

A nın karakteristik polinomu,

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(6-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ özdeğerleri bulunur.

Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri belirleyelim;

$$(A - \lambda I)\,(x) = 0$$

$\lambda = 0$ için;

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 6y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}$$

buradan,

$y = 0$, $x = -z$ bulunur. Buna göre $z = -1$ için $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $(1, 0, -1)$ olur.

$\lambda_2 = 6$ için

$$(A - \lambda I_3)\,(x) = 0$$

$$\begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}$$

buradan $x = z$ bulunur. Buna göre, $z = 1$ ve $z = 3$ için sırasıyla $(1, 0, 1)$ ve $(3, 1, 3)$ vektörleri $\lambda = 6$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler olarak alınabilir.

Uyarı

$\lambda = 6$ özdeğeri karakteristik polinomun iki katlı köküdür. Bu nedenle iki tane lineer bağımsız özvektör elde edilir. Genel olarak λ, k katlı kök ise k tane lineer bağımsız özvektör bulunur. Şimdi

$$P^{-1}\ A\ P$$

köşegen matrisini bulalım.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$P^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A\ P = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Özdeğer ve özvektörlerin birçok önemli özellikleri kanıtsız olarak verilebilir:

- A bir üst üçgen (alt üçgen) matris ise A nın özdeğerleri esas köşegen üzerindeki elemanlardır.
- A ve A^T matrisleri aynı özdeğerlere sahiptir.
- Bir A kare matris için $A^q = 0$ olacak şekilde bir q tamsayısı bulunabiliyorsa A ya nilpotent matris denir. A nilpotent matris ise bu durumda bir tek özdeğeri vardır bu da 0 dır.
- A nın determinantının değeri, karakteristik polinonunun bütün köklerinin çarpımına eşittir.

- A matrisinin regüler olmaması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda = 0$ ın A nın bir özdeğeri olmasıdır.
- A bir köşegenleştirilebilen matris ise A^T ve A^n matrisleri de köşegenleştirilebilir ($n \in N$).

Değerlendirme Soruları

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$
B. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
C. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$
D. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$
E. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$

2. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

matrisinin özvektörleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. (2, 3) (3, 2)
B. (0, 1) (1, 1)
C. (1, 1) (3, 2)
D. (5, 1) (0, 0)
E. (1, 1) (5, 5)

3. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

matrisinin köşegenleştirilmiş matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 3$

B. $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 3$

C. $\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = 3$
$\lambda_3 = 1$

D. $\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 2$

E. $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = 2$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 3$

B. $\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = -2$
$\lambda_3 = 1$

C. $\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 3$

D. $\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 3$

E. $\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 5$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. A 2. C 3. E 4. B 5. D