

Compte rendu TP CS2

Nirina Rabeson

15 Mars 2018

Introduction

Nous nous intéressons à l'équation de chimiotaxie ici présente sur le domaine $\Omega =]0, 1[^2$

$$\begin{aligned}\rho_t &= \operatorname{div}(D \nabla \rho) - \operatorname{div}(\rho \chi \nabla c) \text{ sur }]0, T[\times \Omega \\ \rho &= -\Delta c + c \text{ sur }]0, T[\times \Omega\end{aligned}$$

Avec conditions au bord de type Neumann homogènes :

$$\begin{aligned}\nabla \rho(t, x) \cdot n &= 0 \text{ sur }]0, T[, x \in \partial \Omega \\ \nabla c(t, x) \cdot n &= 0 \text{ sur }]0, T[, x \in \partial \Omega\end{aligned}$$

Et conditions initiales :

$$\begin{aligned}\rho(0, x) &= \rho_0(x) \text{ sur } \Omega \\ c(0, x) &= c_0(x) \text{ sur } \Omega\end{aligned}$$

Explication physique

La chimiotaxie est la modélisation du comportement des bactéries en fonction de la présence ou non d'attractants. En effet, les bactéries ont besoin de maximiser leur consommation de ressources (glucose par exemple). Pour atteindre les concentrations maximales, une stratégie utilisée est de se diriger vers les emplacements de plus forte concentration en attractant en "remontant" les gradients de concentration pour atteindre les maxima locaux.

Schéma volumes finis utilisé

Nous utiliserons dans la suite les notations proposées dans l'énoncé.
Soit $B(c_{\mathcal{T}}^n) = (b_{K,L}(c_{\mathcal{T}}^n))_{K,L \in \mathcal{T}^2} \in \mathcal{M}_{N,N}$ définie ainsi :

$$\begin{aligned} b_{K,K}(c_{\mathcal{T}}^n) &= \frac{|\sigma|}{d_{KL}}(c_L^n - c_K^n)^+ + \frac{|\sigma|}{d_{KL}}(c_L^n - c_K^n)^-, \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \\ b_{K,L}(c_{\mathcal{T}}^n) &= -\frac{|\sigma|}{d_{KL}}(c_L^n - c_K^n)^+, \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \\ b_{L,K}(c_{\mathcal{T}}^n) &= -\frac{|\sigma|}{d_{KL}}(c_L^n - c_K^n)^-, \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} \\ b_{\sigma}(c_{\mathcal{T}}^n) &= 0, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \end{aligned}$$

Soient A, M , la matrice de diffusion et la matrice des mesures de chaque maille définies durant les précédents TD pour $\nu = 1, \eta = 0, q = 0$, et soient $P^n = (\rho_{x_K}^n)_{K \in \mathcal{T}}^T, C^n = (c_K^n)_{K \in \mathcal{T}}^T$, on a alors la relation :

$$(\chi B(C^n)P^{n+1})_K = G_{K\sigma}(\rho_{\mathcal{T}}^{n+1}, c_{\mathcal{T}}^n)$$

Et donc les équations (3) et (4) s'écrivent matriciellement

$$\begin{aligned} MP^{n+1} &= MP^n - dtDA P^{n+1} - dt\chi B(C^n)P^{n+1} \\ AC^{n+1} + MC^{n+1} &= MP^{n+1} \end{aligned}$$

On a alors après réécriture le système matriciel :

$$\begin{aligned} (M + dtDA + dt\chi B(C^n))P^{n+1} &= MP^n \\ (A + M)C^{n+1} &= MP^{n+1} \end{aligned}$$

Ces deux systèmes linéaires peuvent être résolus alternativement. En effet, P^{n+1} ne dépend que des valeurs de P^n et C^n pour être résolu, et de même pour C^{n+1}

Propositions de schémas

On pourrait choisir une approximation implicite du schéma

$$\begin{aligned} MP^{n+1} &= MP^n - dtDA P^{n+1} - dt\chi B(C^{n+1})P^{n+1} \\ AC^{n+1} + MC^{n+1} &= MP^{n+1} \end{aligned}$$

Ou bien une approximation explicite :

$$\begin{aligned} MP^{n+1} &= MP^n - dtDA P^n - dt\chi B(C^n)P^n \\ AC^{n+1} + MC^{n+1} &= MP^{n+1} \end{aligned}$$

Le schéma implicite ne peut être résolu de façon matricielle. En effet, le système qui a pour inconnues C^{n+1}, P^{n+1} n'est plus linéaire et nécessite d'autres méthodes de résolution (méthodes de descentes de scipy par exemple).

Le schéma explicite n'est pas stable.

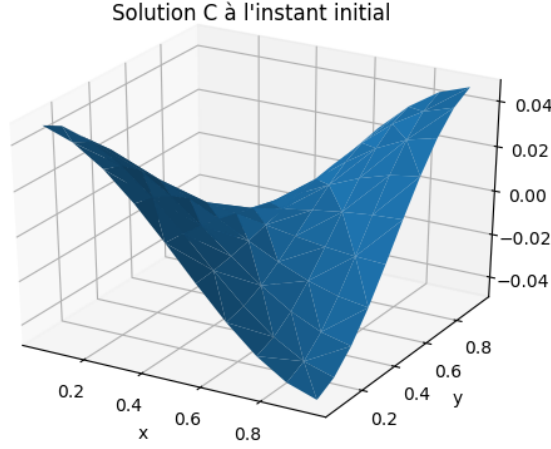


FIGURE 1 – Solution initiale c^0

Discrétisation du terme de chimiotaxie

On remarque que les coefficients $G_{K\sigma}(\rho_{\mathcal{T}}^{n+1}, c_{\mathcal{T}}^n)$ correspondent à une discrétisation de type *upwind* de $\text{div}(\rho\chi\nabla c)$.

Résultats

Test 1 : Construction de la concentration initiale en attractant et convergence en espace

En réutilisant les notations précédemment énoncées on peut exprimer la concentration c_0 initiale à partir de ρ_0 en résolvant une équation elliptique. On peut ainsi voir la convergence en espace de notre algorithme qui est en $O(\min|K|^{-1})$ pour $K \in \mathcal{T}$

Test 2 : Résolution de l'équation de diffusion, convergence en temps

On pose $\chi = 0$. On a alors pour la condition initiale $\rho_0(x_1, x_2) = \cos(x_1) * \cos(x_2)$ la solution exacte $\rho(t, x_1, x_2) = e^{-2D\pi^2 t} \rho_0(x_1, x_2)$, qui s'obtient par méthode de séparation des variables. On a alors la convergence en temps en $O(dt)$ au mieux car ensuite passé un certain seuil la convergence n'est plus aussi rapide (ici autour de $dt < 10^{-2}$)

Test 3 : Étude de la convection

On pose $D = 1$. L'équation (4) devient donc une équation de transport. Comme nous imposons toujours à nos solutions des conditions de flux nul aux bords, la solution ρ s'entasse sur le bord du domaine.

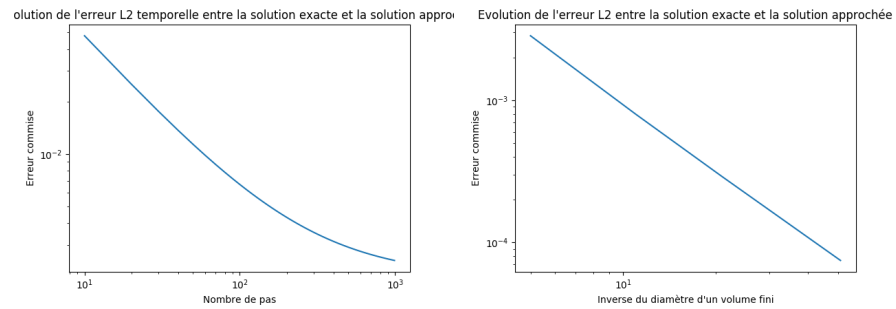


FIGURE 2 – Erreur temporelle et spatiale

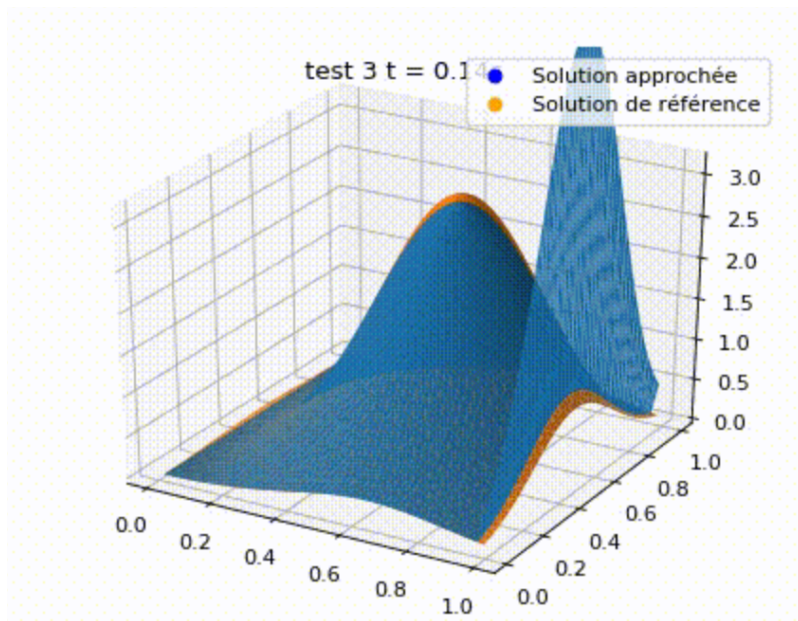


FIGURE 3 – Accumulation sur le bord pour le cas de test 3

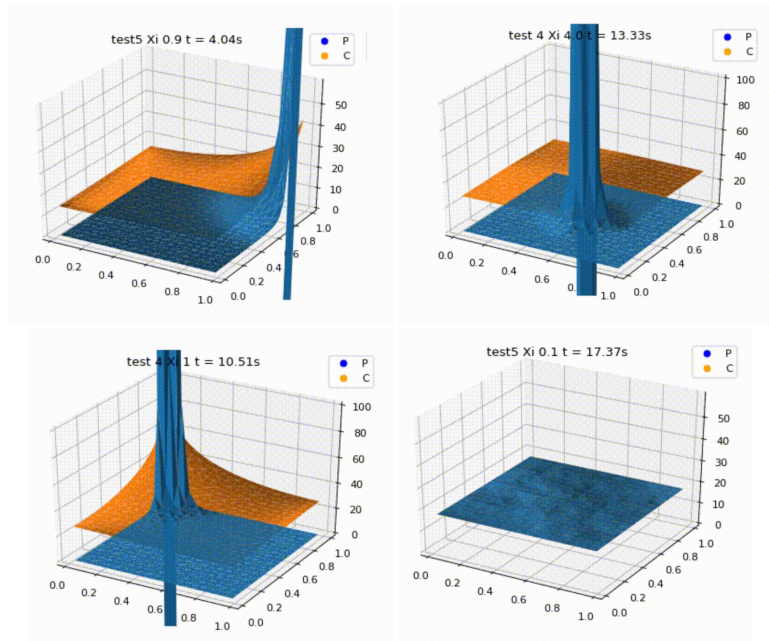


FIGURE 4 – Explosion pour des temps différents

Test 4 et 5 : Explosion en temps fini

On pose $D = 1$ et on fait varier le coefficient χ en lien avec la vitesse de transport. On remarque que dans les deux cas pour des valeurs de $\chi < 1$ on n'observe pas toujours une explosion en temps fini. Pour de petites valeurs de χ l'explosion n'a pas lieu pour un laps de temps inférieur à 20 secondes.

Cela peut s'expliquer physiquement : Si la diffusion, ou répulsion, entre bactéries est trop faible par rapport à la vitesse de déplacement des bactéries elles auront tendance à se concentrer en trop grand nombre.

Cependant, le choix de la division en temps a une forte influence sur l'apparition ou non d'une explosion en temps fini. On peut observer dans les animations que l'explosion a lieu d'autant plus vite que χ est grand, et d'autant plus vite que la valeur moyenne de ρ est grande. D'une manière générale, l'explosion est systématique pour $\chi > 1$. Pour le cas de test 4 l'explosion a alors lieu au centre du domaine. Dans le cas de test 5 elle a toujours lieu sur un coin de notre domaine.