

Compte rendu TP CS1

Nirina Rabeson

14 Décembre 2017

Introduction

Nous nous intéressons à l'équation de chimiotaxie ici présente

$$\begin{aligned}u_t &= \partial_x(D \partial_x u) - \partial_x(u \chi \partial_x v) + ru(1 - u) \text{ sur }]0, T[\times [0, 1] \\v_t &= \partial_{xx} v + u - v \text{ sur }]0, T[\times [0, 1]\end{aligned}$$

Avec conditions au bord de type Neumann homogènes :

$$\begin{aligned}\partial_x u(t, 0) &= \partial_x u(t, 1) = 0 \text{ sur }]0, T[\\ \partial_x v(t, 0) &= \partial_x v(t, 1) = 0 \text{ sur }]0, T[\end{aligned}$$

Et conditions initiales :

$$\begin{aligned}u(0, x) &= u_0(x) \text{ sur } [0, 1] \\v(0, x) &= v_0(x) \text{ sur } [0, 1]\end{aligned}$$

Explication physique

La chimiotaxie est la modélisation du comportement des bactéries en fonction de la présence ou non d'attractants. En effet, les bactéries ont besoin de maximiser leur consommation de ressources (glucose par exemple). Pour atteindre les concentrations maximales, une stratégie utilisée est de se diriger vers les emplacements de plus forte concentration en attractant en "remontant" les gradients de concentration pour atteindre les maxima locaux.

Schéma volumes finis utilisé

Nous utiliserons dans la suite les notations proposées dans l'énoncé.
Soit $G(V^n) = (g_{i,j}(V^n))_{i,j \in [0, N-1]^2} \in \mathcal{M}_{N,N}$ définie ainsi :

$$\begin{aligned} g_{i,i}(v_{\mathcal{T}}^n) &= \frac{1}{d_{i+\frac{1}{2}}}(v_{i+1}^n - v_i^n)^+ + \frac{1}{d_{i-\frac{1}{2}}}(v_i^n - v_{i-1}^n)^-, \quad \forall i = 1..N-2 \\ g_{i,i+1}(v_{\mathcal{T}}^n) &= -\frac{1}{d_{i+\frac{1}{2}}}(v_{i+1}^n - v_i^n)^+, \quad \forall i = 1..N-2 \\ g_{i,i-1}(v_{\mathcal{T}}^n) &= \frac{1}{d_{i-\frac{1}{2}}}(v_i^n - v_{i-1}^n)^-, \quad \forall i = 1..N-2 \\ g_{i,j}(v_{\mathcal{T}}^n) &= 0, \text{ sinon} \end{aligned}$$

Soient A, I_{DM} , la matrice de diffusion et la matrice des mesures de chaque maille définies durant les précédents TD pour $v = 1, \eta = 0, q = 0$, et soient $U^n = (u_i^n)_{i=0..N-1}^T$, $V^n = (v_i^n)_{i=0..N-1}^T$, on a alors la relation :

$$(\chi G(v_{\mathcal{T}}^n) U^{n+1})_i = G_{i+\frac{1}{2}}(u_{\mathcal{T}}^{n+1}, v_{\mathcal{T}}^n)$$

Et donc les équations (3) et (4) s'écrivent matriciellement

$$\begin{aligned} I_{DM} U^{n+1} &= I_{DM} U^n - dt D A U^{n+1} - dt \chi G(V^n) U^{n+1} + r dt I_{DM} U^n \times (\mathbb{1} - U^n) \\ I_{DM} V^{n+1} &= I_{DM} V^n - dt A V^{n+1} + dt I_{DM} U^n - dt I_{DM} V^n \end{aligned}$$

Où l'opérateur bilinéaire \times est le produit terme par terme de deux vecteurs et $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On a alors après réécriture le système matriciel :

$$\begin{aligned} (I_{DM} + dt A + dt \chi G(V^n)) U^{n+1} &= I_{DM} U^n + r dt I_{DM} U^n (\mathbb{1} - U^n) \\ (I_{DM} + dt A) V^{n+1} &= I_{DM} V^n - dt I_{DM} V^n + dt I_{DM} U^n \end{aligned}$$

Ces deux systèmes linéaires peuvent être résolus alternativement. En effet, U^{n+1} ne dépend que des valeurs de U^n et V^n pour être résolu, et de même pour V^{n+1} .

Propositions de schémas

On pourrait choisir une approximation implicite du schéma

$$\begin{aligned} I_{DM} U^{n+1} &= I_{DM} U^n - dt D A U^{n+1} - dt \chi G(V^{n+1}) U^{n+1} + r dt I_{DM} U^{n+1} \times (\mathbb{1} - U^{n+1}) \\ I_{DM} V^{n+1} &= I_{DM} V^n - dt A V^{n+1} + dt I_{DM} U^{n+1} - dt I_{DM} V^{n+1} \end{aligned}$$

Ou bien une approximation explicite :

$$\begin{aligned} I_{DM} U^{n+1} &= I_{DM} U^n - dt D A U^n - dt \chi G(V^n) U^n + r dt I_{DM} U^n \times (\mathbb{1} - U^n) \\ I_{DM} V^{n+1} &= I_{DM} V^n - dt A V^n + dt I_{DM} U^n - dt I_{DM} V^n \end{aligned}$$

Le schéma implicite ne peut être résolu de façon matricielle. En effet, le système qui a pour inconnues V^{n+1}, U^{n+1} n'est plus linéaire et nécessite d'autres méthodes de résolution (méthodes de descentes de scipy par exemple).

Le schéma explicite n'est pas stable. En effet, il ne respecte pas la condition de positivité.

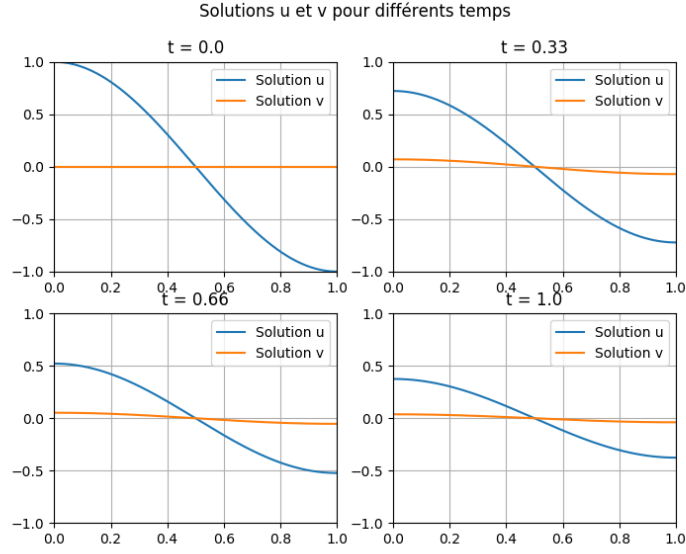


FIGURE 1 – Solution approchée de u et v pour $N = 300$, $Nt = 200$

Discrétisation du terme de chimiotaxie

On remarque que les coefficients $G_{i+\frac{1}{2}}(u_{\mathcal{T}}^{n+1}, v_{\mathcal{T}}^n)$ correspondent à une discrétisation de type *upwind* de $\partial_x(u\chi\partial_x v)$.

Résultats

On pose $D = 0.1$ pour la suite de ce compte rendu

Cas 1 : propriétés de l'équation parabolique de chaleur

On pose $\chi = 0$, $r = 0$, $u_0(x) = \cos(\pi x)$, $v_0(x) = 0$. La solution de l'équation (1) est donc :

$$u(t, x) = e^{-\pi^2 D t} \cos(\pi x)$$

Solution obtenue en posant $u(t, x) = h(t)k(x)$ et en déterminant les constantes avec les conditions au bord.

Vitesse de convergence du schéma

Comme on peut l'observer d'après les graphiques 3 on peut supposer que le schéma est en $o(dt + h)$. En effet la pente des deux graphiques est de -1

Cas 2 : Ajout de l'additif

En observant la variation de u et v pour différentes valeurs de χ et r on remarque que la solution u se dirige aux emplacement là où il y a la plus grande concentration en v . Cet effet

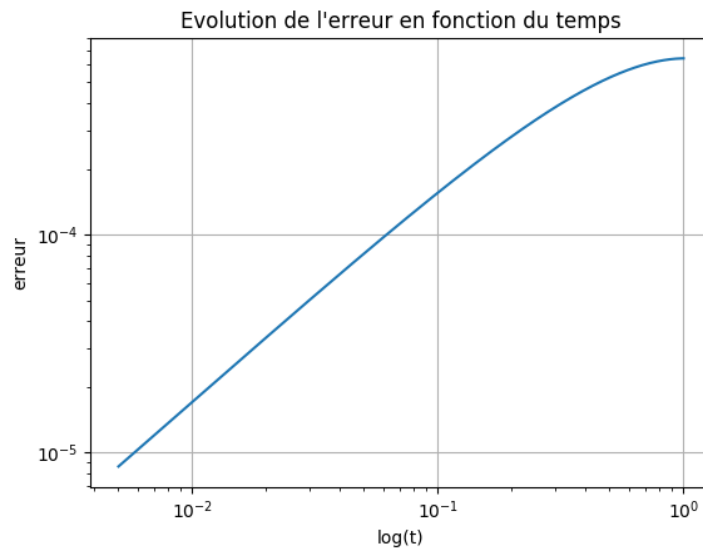


FIGURE 2 – Erreur L^2 et $N = 300$, $Nt = 200$

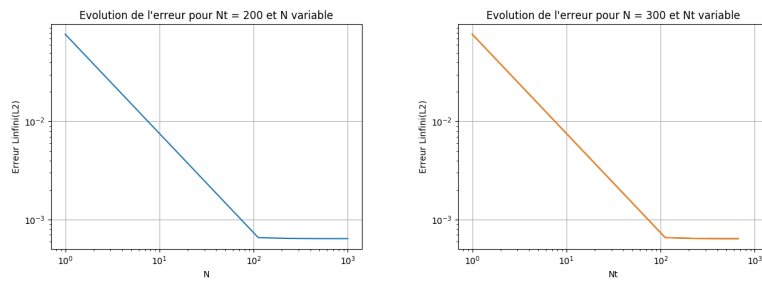


FIGURE 3 – Vitesse de convergence des erreurs à paramètres fixés

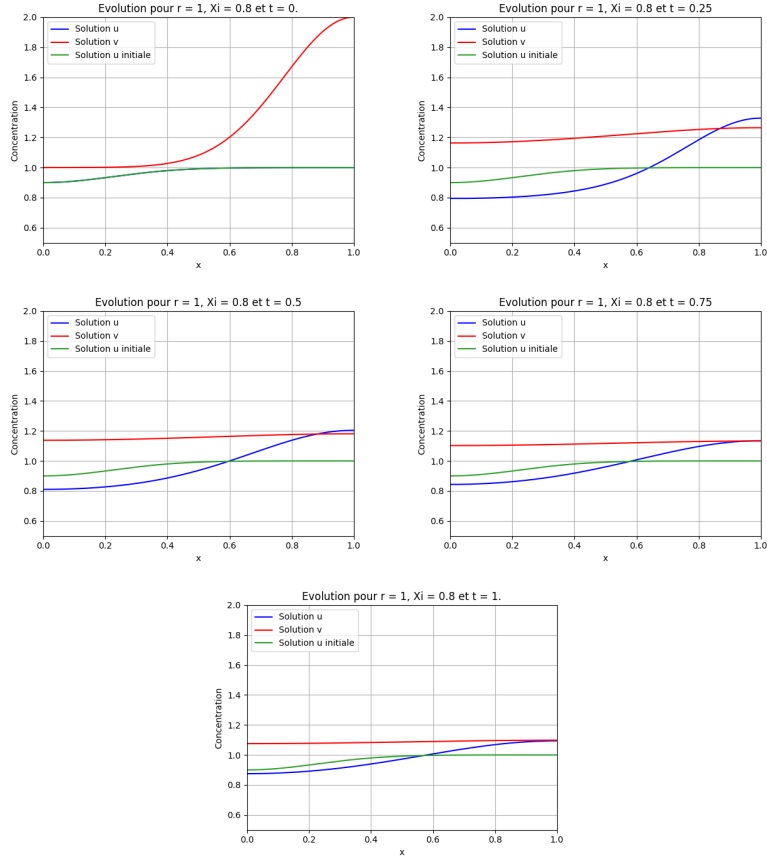


FIGURE 4 – Solution approchée de u pour $N = 300$, $Nt = 200$

est d'autant plus amplifié que le coefficient χ est grand. (voir figure 5 page 6)

Concernant l'influence de r , les résultats ne sont pas forts concluants. Il semblerait que r ait une influence sur la vitesse de convergence vers le régime permanent. Plus r est grand et plus u converge vite vers sa moyenne. Cela peut en partie se justifier ainsi : en posant $\chi = 0$ et $D = 0$ on observe alors que u suit une équation logistique, dont la solution générale est (pour $u_0(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]$) :

$$u(t, x) = \frac{1}{1 + a(x)e^{-rt}}, \quad a(x) = \frac{1}{u_0(x)} - 1$$

Et alors la solution converge d'autant plus vite vers son régime permanent que le paramètre r est grand.

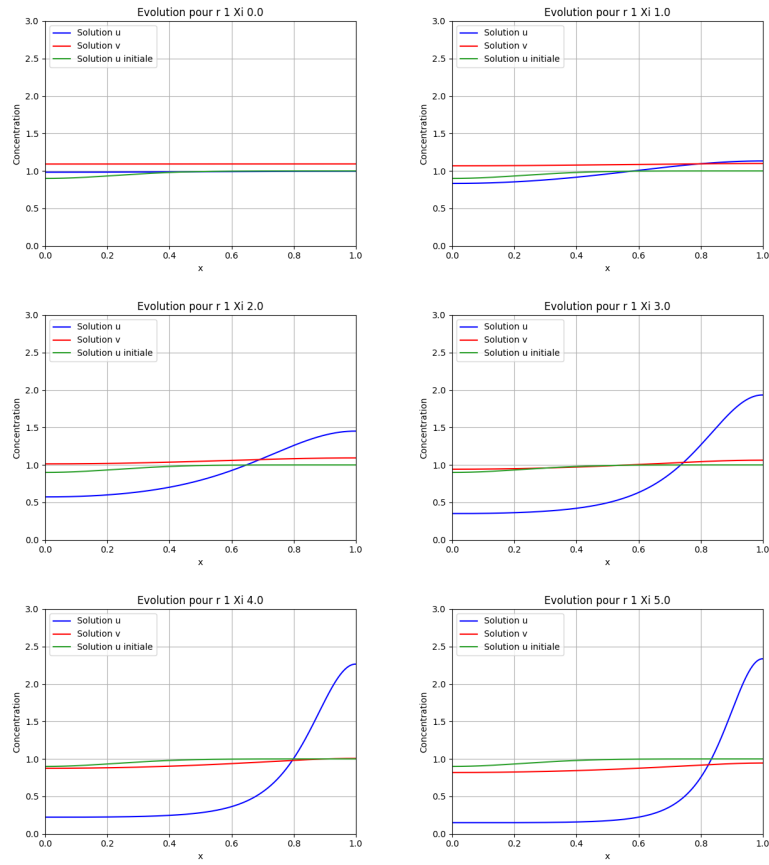


FIGURE 5 – Évolution de la solution u pour différentes valeurs de χ et $N = 300$, $Nt = 200$