

Kelvin Helmholtz instability

Bryan Martinez¹ and Sebastian Rodriguez¹

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Abstract

Keywords:

1 Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RRMHD)

RR-MHD extiende la Magnetohidrodinámica clásica (MHD) a regímenes donde los efectos relativistas y la resistividad finita son cruciales.

1.1 Marco Teórico y Físico

El RR-MHD se fundamenta en la teoría de fluidos combinada con la **Relatividad Especial (SR)** o, en casos más complejos, la Relatividad General (GR).

1.1.1 Relación con la Relatividad Especial

La etiqueta “relativista” se aplica cuando el sistema presenta al menos una de estas características:

1. **Velocidad Relativista del Fluido:** El movimiento macroscópico del fluido tiene un factor de Lorentz significativamente mayor que uno.
2. **Temperatura Relativista:** La energía interna es mucho mayor que la energía de masa en reposo, o las velocidades de las partículas constituyentes dentro de un elemento de fluido están cerca de la velocidad de la luz.
3. **Velocidad de Alfvén Relativista:** La energía magnética es mucho mayor que la energía de masa en reposo.

El marco matemático de RR-MHD se basa en un sistema de ecuaciones de conservación **cuasi-lineal hiperbólico**, que en la formulación de la Relatividad Especial (SR) se describe mediante tres conjuntos de leyes:

- **Ecuaciones de Maxwell:** Describen la evolución de los campos electromagnéticos.
- **Ecuaciones Hidrodinámicas:** Expresan la conservación del número de bariones

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0 \quad (1)$$

y del tensor de energía-momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2)$$

- **Ley de Ohm Relativista:** Define el acoplamiento entre los campos electromagnéticos y las variables del fluido a través de la corriente de cuatro vectores I^α .

El **tensor de energía-momento** total ($T^{\mu\nu}$) es la superposición del tensor de energía-momento del fluido perfecto ($T_{\text{fluido}}^{\mu\nu}$) y del tensor electromagnético ($T_{\text{em}}^{\mu\nu}$). Para cerrar el sistema, se requiere una **Ecuación de Estado (EoS)**.

1.1.2 Relación con la Teoría de Fluidos

RR-MHD es un modelo de **una sola especie** que describe la dinámica de un plasma (un fluido conductor) en presencia de campos magnéticos. Esta descripción es adecuada para plasmas esencialmente eléctricamente neutros donde la frecuencia de colisiones es mucho mayor que el inverso de la escala de tiempo típica del sistema.

En este enfoque, el **fluido perfecto** se define como aquel en el que los efectos viscosos y los flujos de calor son nulos, y el tensor de presión es diagonal. RR-MHD extiende la aproximación de fluido perfecto para incluir los campos magnéticos y, crucialmente, la resistividad.

1.2 El Papel de la Resistividad Finita en la Dinámica del Plasma Relativista

La resistividad finita (η) o conductividad eléctrica finita ($\sigma = 1/\eta$) es la característica distintiva que diferencia RR-MHD de su contraparte ideal (RMHD, donde $\eta \rightarrow 0$ y $\sigma \rightarrow \infty$).

1.2.1 El Límite Ideal frente al Resistivo

En el **límite ideal (RMHD)**, la conductividad es infinita, y la Ley de Ohm simplificada implica que el campo eléctrico se anula en el marco de reposo del fluido:

$$E' \equiv E + v \times B \approx 0. \quad (3)$$

En este límite, se conserva el flujo magnético.

La resistividad finita es esencial porque:

1. **Introduce Difusión y Disipación:** Permite la difusión del campo magnético y la disipación de energía por calentamiento óhmico (Joule).
2. **Modela Fenómenos No-Ideales:** Hay procesos astrofísicos altamente dinámicos, como las fusiones de objetos compactos (estrellas de neutrones o agujeros negros con estrellas de neutrones) o el motor central de los estallidos de rayos gamma (GRBs), donde la conductividad puede ser pequeña o variar significativamente.

1.2.2 Mecanismos de la Dinámica No-Ideal

La resistividad finita permite la manifestación de efectos cruciales que están estrictamente prohibidos en el límite ideal debido a la conservación del flujo magnético:

- **Reconexión Magnética:** Convierte la energía magnética en energía cinética y térmica del fluido. Es invocada para explicar eventos como erupciones y aniquilación magnética en plasmas relativistas.
- **Hojas de Corriente (Current Sheets):** Incluso con una resistividad muy pequeña, su contribución a la conservación de energía y momento puede ser considerable si los campos magnéticos varían muy rápidamente en el espacio.
- **Inestabilidades:** La resistividad y la viscosidad finitas limitan el crecimiento del campo magnético en inestabilidades como la Inestabilidad Magnetorrotacional (MRI) o la Inestabilidad de Modo Tearing (TM).

1.3 Desafíos Numéricos y Conceptuales en la Modelación Computacional

La modelación computacional de RR-MHD es significativamente más desafiante que la de RMHD ideal.

1.3.1 El Problema de la Rigididad (Stiffness)

El principal desafío numérico surge del hecho de que, en el límite de alta conductividad ($\sigma \rightarrow \infty$), el sistema de ecuaciones se vuelve **rígido (stiff)**.

- **Naturaleza de las Ecuaciones:** En Relatividad Especial, las ecuaciones de RR-MHD se convierten en un sistema hiperbólico con **términos de relajación rígidos**.
- **Restricción del Paso de Tiempo:** Cuando la escala de tiempo de relajación (ϵ) es mucho más corta que la escala de tiempo dinámica (τ_h), los esquemas de integración explícitos requieren un paso de tiempo ($\Delta t \leq \epsilon$) extremadamente pequeño para mantener la estabilidad.

1.3.2 Técnicas de Solución Numérica para la Rígidez

Para abordar la rigidez sin comprometer la estabilidad o la eficiencia, se han desarrollado métodos especializados:

- **Esquemas Implícito-Explícito (IMEX) de Runge-Kutta:** La parte no rígida (hiperbólica/advectiva) se evoluciona explícitamente, mientras que los términos rígidos (relajación/resistivos) se tratan implícitamente.
- **Técnica de Desdoblamiento de Strang (Strang-Splitting):** Intenta resolver las partes hiperbólicas y rígidas por separado, aunque puede ser inestable en flujos discontinuos.

1.3.3 Desafíos Adicionales

1. **Cumplimiento de $\nabla \cdot B = 0$:** La condición analítica puede violarse numéricamente, requiriendo esquemas de corrección o *Divergence Cleaning*, como el método **Generalized Lagrange Multiplier (GLM)**, que introduce campos escalares (ψ y ϕ) para transportar y disipar los errores.
2. **Conversión de Variables Conservadas a Primitivas:** Los códigos evolucionan variables conservadas (densidad de masa en reposo D , densidad de momento S , energía total τ , campos E y B), pero los flujos dependen de variables primitivas (ρ , p , v). Esta relación es altamente no lineal, requiriendo métodos iterativos como Newton-Raphson.

Estos desafíos han llevado al desarrollo de sofisticados esquemas numéricos, basados en métodos de **captura de choque de alta resolución (HRSC)**, utilizando solucionadores de Riemann (como HLLC) para manejar discontinuidades generadas por la dinámica del fluido relativista.

2 Deducción y Análisis de las Ecuaciones Fundamentales de la Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RR-MHD)

La Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RR-MHD) es el marco teórico utilizado para modelar la dinámica de plasmas altamente conductores y magnetizados en regímenes donde las velocidades se aproximan a la velocidad de la luz (Relatividad Especial, SR) y se requiere la inclusión de efectos disipativos, como la resistividad finita.

Adoptamos unidades donde la velocidad de la luz $c = 1$ y utilizamos la convención de suma de Einstein para índices repetidos.

2.1 Fundamentos Tensoriales y Leyes de Conservación

El sistema RR-MHD se construye sobre la base de tres pilares fundamentales en el formalismo relativista: la conservación de la materia (hidrodinámica), la conservación del campo electromagnético (Ecuaciones de Maxwell) y la ley constitutiva que acopla la materia con los campos (Ley de Ohm relativista).

2.1.1 Postulados y Tensores Fundamentales

Aproximaciones y Supuestos

Las ecuaciones de RR-MHD se derivan bajo los siguientes supuestos clave:

1. **Fluido Perfecto (Perfect Fluid):** Se ignora la viscosidad y la conducción de calor (flujos disipativos distintos a la resistencia eléctrica), simplificando el tensor de esfuerzo-energía del fluido.
2. **Neutralidad del Plasma:** Se utiliza la aproximación de un solo fluido (one-fluid) para describir el plasma, lo que es válido si la frecuencia de colisiones es mucho mayor que la frecuencia de oscilación del plasma (esencialmente eléctricamente neutro).
3. **Métrica Plana (SR):** Se emplea la métrica de Minkowski, $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, aunque el formalismo es fácilmente extensible a la Relatividad General (GR).

Tensor de Corriente de Masa en Reposo (J^μ)

Define la densidad de masa en reposo, ρ , en el marco de reposo del fluido (propio), y su transporte a través de la cuadrvelocidad del fluido, u^μ ($u^\mu u_\mu = -1$):

$$J^\mu := \rho u^\mu \quad (4)$$

Tensor de Energía-Momento Total ($T^{\mu\nu}$)

La conservación de energía y momento se rige por la divergencia nula del tensor de energía-momento total, $T^{\mu\nu}$, que es la suma de las contribuciones del fluido ($T_{\text{fluido}}^{\mu\nu}$) y del campo electromagnético ($T_{\text{EM}}^{\mu\nu}$):

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{fluido}}^{\mu\nu} + T_{\text{EM}}^{\mu\nu} \quad (5)$$

- **Componente del Fluido Perfecto:**

$$T_{\text{fluido}}^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

Donde p es la presión, $g^{\mu\nu}$ es la métrica, y $h \equiv 1 + \varepsilon + p/\rho$ es la entalpía específica, siendo ε la energía interna específica.

- **Componente Electromagnética:**

$$T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) g^{\mu\nu}$$

$F^{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday (o Maxwell), que describe el campo electromagnético.

Ecuaciones de Conservación

- **Conservación del Número Bariónico (Masa en Reposo):**

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \quad (6)$$

- Conservación de Energía y Momento:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

2.1.2 Ecuaciones de Maxwell Covariantes

La dinámica del campo electromagnético está regida por las ecuaciones de Maxwell, donde I^ν es la cuadricorriente eléctrica:

- No Homogéneas (Ley de Ampère y Gauss):

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -I^\nu \quad (8)$$

- Homogéneas (Ley de Faraday y Monopolos Magnéticos):

$$\nabla_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0 \quad (9)$$

2.2 Introducción de la Resistividad Finita: Ley de Ohm Relativista

La característica que define la RR-MHD es la inclusión de la resistividad finita, $\eta = 1/\sigma$ (σ es la conductividad eléctrica).

Ley de Ohm Relativista

La cuadricorriente I^α se relaciona con el campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ y la cuadrvie-locidad u^μ mediante la Ley de Ohm relativista, asumiendo un plasma isótropo:

$$I^\alpha + (I^\beta u_\beta) u^\alpha = \sigma F^{\alpha\beta} u_\beta \quad (7)$$

El término $F^{\alpha\beta} u_\beta$ es el campo eléctrico medido en el marco de reposo del fluido, E'^α . El término $I^\beta u_\beta = -q_0$ es la densidad de carga eléctrica q_0 en el marco de reposo del fluido.

Efecto de la Resistividad y el Límite Ideal

La resistividad finita ($\eta > 0$) permite la existencia de una corriente de conducción, J_{cond}^α , proporcional al campo eléctrico E' en el marco de reposo del fluido:

$$J_{\text{cond}}^\alpha = \sigma E'^\alpha$$

- **RMHD (MHD Ideal, $\sigma \rightarrow \infty$):** En el límite de conductividad infinita, para que la corriente I^α permanezca finita, se requiere que el campo eléctrico en el marco de reposo del fluido sea nulo ($E'^\alpha = 0$). Esto impone la condición de **flujo congelado** ($E + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \approx 0$ en el marco de laboratorio).
- **RR-MHD (Resistivo, $\sigma < \infty$):** La resistividad finita relaja la condición de flujo congelado, permitiendo:

- **Difusión Magnética:** Permite que las líneas de campo magnético se difundan a través del plasma, en lugar de estar perfectamente ”congeladas” en el flujo. Esto es crucial para la **reconexión magnética**.
- **Disipación Óhmica:** Permite el calentamiento Joule, donde la energía electromagnética se disipa en energía interna del fluido, $\sim \eta|\mathbf{J}|^2$. Esto ocurre significativamente en regiones de alta concentración de corriente (hojas de corriente), incluso si η es pequeño.

2.3 Representaciones de las Ecuaciones de RR-MHD

Las ecuaciones fundamentales de RR-MHD son el sistema cerrado por (3), (4), (5), (6) y (7), junto con la Ecuación de Estado (EoS). Este sistema se puede expresar en varias formas, cada una optimizada para diferentes propósitos.

2.3.1 Forma Conservativa (Leyes de Balance)

Esta forma se basa en la escritura de las ecuaciones como leyes de conservación o de balance, lo cual es esencial para métodos numéricos de alta resolución y captura de choques (HRSC):

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (8)$$

Vector de Variables Conservadas (\mathbf{U})

El vector \mathbf{U} consiste típicamente en las densidades de las cantidades conservadas:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} D \\ \mathbf{S}^j \\ E \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \\ q \end{pmatrix}$$

Donde las principales variables hidrodinámicas conservadas son:

- $D = \rho W$: Densidad de masa en reposo conservada (ρ es la densidad propia, W es el factor de Lorentz).
- $E = E_{\text{em}} + E_{\text{hyd}}$: Densidad de energía total. $E_{\text{hyd}} = \rho h W^2 - p$, $E_{\text{em}} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$, donde E y B son los campos eléctrico y magnético de laboratorio.
- $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{em}} + \mathbf{S}_{\text{hyd}}$: Densidad de momento total. $\mathbf{S}_{\text{hyd}} = \rho h W^2 \mathbf{v}$, $\mathbf{S}_{\text{em}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ (flujo de Poynting).

El sistema de RR-MHD es inherentemente hiperbólico, lo cual es ventajoso para su solución numérica.

Ventajas y Limitaciones

- **Ventajas:** Garantiza que si el esquema numérico converge, converge a la solución débil correcta (condiciones de Rankine–Hugoniot) en presencia de discontinuidades (choques). Esta es la base de los métodos HRSC.
- **Limitaciones:**
 - **Recuperación de Primitivas:** Convertir \mathbf{U} de vuelta a las variables primarias (ρ, p, \mathbf{v} , etc.) es un proceso altamente no lineal y computacionalmente costoso, que a menudo requiere métodos iterativos como Newton-Raphson, especialmente en la formulación RR-MHD debido al acoplamiento de \mathbf{E} y \mathbf{v} .
 - **Rigidez (Stiffness):** En el límite de alta conductividad ($\sigma \rightarrow \infty$), el término resistivo en el vector fuente $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ se vuelve rígido. Esto impone una restricción de paso de tiempo $\Delta t \leq \epsilon \sim 1/\sigma$ mucho más estricta que la condición CFL estándar, haciendo inviable la integración explícita. Esto se soluciona típicamente con esquemas **Implícito-Explícitos (IMEX)** de **Runge–Kutta**.

2.3.2 Formulación 3+1 Aumentada (GLM-RR-MHD)

La RR-MHD requiere métodos para mantener numéricamente las restricciones $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{E} = q$ (donde q es la densidad de carga). El enfoque más utilizado es la limpieza de divergencia por Multiplicador de Lagrange Generalizado (GLM), que convierte estas restricciones elípticas en ecuaciones de evolución hiperbólicas (tipo telégrafo):

Variables Aumentadas (ψ, ϕ)

Se introducen dos pseudo-potenciales escalares, ψ y ϕ , que satisfacen las siguientes ecuaciones de evolución:

$$\partial_t \psi = -\nabla \cdot \mathbf{E} + q - \kappa \psi \quad (9)$$

$$\partial_t \phi = -\nabla \cdot \mathbf{B} - \kappa \phi \quad (10)$$

Donde $\kappa > 0$ es un parámetro de amortiguamiento.

Modificación de las Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de evolución para \mathbf{E} y \mathbf{B} se modifican para incluir los gradientes de estos potenciales, asegurando que los errores de divergencia se propaguen y se disipen:

$$\partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \psi - \mathbf{J} \quad (11)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} - \nabla \phi \quad (12)$$

El sistema \mathbf{U} se aumenta para incluir ψ y ϕ .

Interpretación Física y Ventajas

- **Interpretación:** El sistema aumentado (GLM-RR-MHD) es un sistema hiperbólico con términos de relajación. ψ y ϕ representan las desviaciones de las divergencias de los campos EM respecto a las leyes de Maxwell.

- **Ventajas:** Este método es **robusto** para mantener $\nabla \cdot \mathbf{B} \approx 0$ a nivel numérico, evitando la inestabilidad causada por monopolos magnéticos espurios. La formulación hiperbólica del sistema completo facilita la implementación de solucionadores de Riemann (como HLLC) y esquemas HRSC.
- **Diferencias:** Convierte un problema con restricciones elípticas (que requeriría resolver ecuaciones de Poisson o métodos costosos de proyección) en un sistema de evolución puro.

2.3.3 Formulación de Variables Primitivas

Las variables primitivas (\mathbf{W}) son las cantidades físicas directamente medibles, como la densidad propia ρ , la presión p , la trivelocidad \mathbf{v} , y los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Ventajas y Limitaciones

- **Ventajas:**
 - **Análisis de Estructura Característica:** Permite el cálculo directo de la estructura de ondas del sistema (eigenvalores y eigenvectores), crucial para el diseño de solucionadores de Riemann y la comprensión de las velocidades de propagación (como las ondas magnetoacústicas).
 - **Acoplamiento EoS:** La EoS se expresa naturalmente en términos de variables primitivas (ρ, ε) .
- **Limitaciones:**
 - **No Conservativa:** La formulación de variables primitivas no es adecuada para la captura de choques (discontinuidades) sin la adición de viscosidad artificial, ya que no garantiza la solución débil correcta.
- **Diferencias:** Contrastá con la forma conservativa, que evoluciona densidades de flujos (masa, momento, energía) en el marco de laboratorio.

2.4 Descomposición y Significado Físico de las Ecuaciones Clave

La complejidad del sistema RR-MHD se aprecia mejor al examinar la forma de evolución de las ecuaciones en el marco de laboratorio (descomposición 3+1).

2.4.1 Ecuación de Inducción Magnética (Evolución de \mathbf{B})

La evolución del campo magnético se rige por la Ley de Faraday (12), que, al sustituir la Ley de Ohm relativista (7), conduce a la ecuación de inducción generalizada. En el límite no relativista y al despreciar la corriente de desplazamiento, se obtiene la forma clásica de la ecuación de inducción resistiva:

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \mathbf{J}) \quad (16)$$

- $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (**Término Convectivo/Ideal**): Representa el arrastre de las líneas de campo por el movimiento del plasma. Si la resistividad $\eta = 0$, este es el único término, y el flujo magnético se conserva (RMHD).
- $-\nabla \times (\eta \mathbf{J})$ (**Término Resistivo/Difusivo**): Es el término clave de la RR-MHD. Permite la difusión del campo magnético a través del plasma, disipando

la estructura del campo. La presencia de este término es lo que permite la **reconexión magnética** en las hojas de corriente.

2.4.2 Ecuación de Energía (Balance Energético)

La conservación de la energía total (4) se ve modificada por la resistividad, que actúa como un término fuente de energía térmica (calor). Al proyectar (4) y utilizar la EoS, la conservación de la energía interna específica, ε , incluye el calentamiento Joule:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \eta |\mathbf{J}|^2 \quad (\text{Forma simplificada}) \quad (14)$$

- $\eta |\mathbf{J}|^2$ (**Disipación Óhmica o Calentamiento Joule**): Es la fuente de energía interna del fluido debida a la resistencia. Esta es una manifestación directa de la resistividad en la disipación irreversible de energía electromagnética en calor.

2.4.3 Ecuación de Momento Lineal (Fuerza)

La conservación del momento (4) se descompone en la forma 3+1 para mostrar el balance de fuerzas. En el límite no relativista (Ecuación de Momento MHD resistiva):

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{Forma simplificada}) \quad (15)$$

- $-\nabla p$ (**Fuerza del Gradiente de Presión**): Fuerza hidrodinámica.
- $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ (**Fuerza de Lorentz**): Acopla el movimiento del fluido con el campo magnético. La resistividad (η) afecta indirectamente la dinámica del momento al determinar la densidad de corriente \mathbf{J} a través de la Ley de Ohm, modulando así la fuerza de Lorentz.

3 Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz en Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RR-MHD)

3.1 Introducción a las Inestabilidades Hidrodinámicas y Magnetohidrodinámicas

La estabilidad de un fluido o plasma se define por su capacidad de mantener un estado de equilibrio (estático o con flujo constante) frente a pequeñas perturbaciones. Una inestabilidad se manifiesta cuando estas perturbaciones crecen exponencialmente con el tiempo.

Conceptos Físicos y Criterios de Estabilidad

El análisis de estabilidad se aborda mediante dos enfoques principales en la dinámica de fluidos y la MHD ideal:

- Principio de la Energía:** Analiza el signo del cambio en la energía potencial de las perturbaciones (δW). Un sistema es estable si la energía potencial es positiva ($\delta W > 0$), lo que resulta en soluciones oscilatorias ($\omega^2 > 0$). La inestabilidad ocurre si $\delta W < 0$, lo que conduce a una frecuencia imaginaria pura ($\omega^2 < 0$) y un crecimiento exponencial ($\exp(\pm \nu t)$).
- Operador de Fuerza:** Analiza si la fuerza (\mathbf{F}) resultante de un desplazamiento de la partícula ($\boldsymbol{\xi}$) es restauradora ($\mathbf{F} \sim -\boldsymbol{\xi}$) o desestabilizadora ($\mathbf{F} \sim \boldsymbol{\xi}$).

En el marco de la **MHD ideal** (no disipativa), la fuerza restauradora es proporcionada principalmente por el gradiente de presión (ondas de sonido), la tensión magnética (rigidez de las líneas de campo) y la presión magnética. Si ω es la frecuencia de la perturbación, en la MHD ideal solo existen soluciones oscilatorias ($\text{Im}(\omega) = 0$) o inestabilidades puramente exponenciales ($\text{Re}(\omega) = 0$).

En la **MHD disipativa** (como RR-MHD), el sistema pierde la propiedad de autoadjunción (self-adjointness), lo que permite que la frecuencia ω sea compleja. Esto da lugar a modos amortiguados (si $\text{Im}(\omega) < 0$) o modos oscilatorios que crecen (modos sobre-estables o 'overstable modes', si $\text{Im}(\omega) > 0$ y $\text{Re}(\omega) \neq 0$).

3.2 La Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en el Marco RR-MHD

La KHI es una inestabilidad clave que surge en la interfaz (o capa de cizallamiento) entre dos fluidos o plasmas que se mueven con una velocidad relativa significativa. En contextos astrofísicos, esta inestabilidad es crucial para el transporte de momento, la mezcla de fluidos y la conversión de energía cinética en energía magnética (amplificación).

Efectos Relativistas (RMHD)

En el régimen relativista, el comportamiento de la KHI se modifica notablemente:

- **Criterio Cinemático:** A diferencia del caso clásico, las inestabilidades KHI en plasmas relativistas se ven fuertemente influenciadas por el factor de Lorentz. A muy altas velocidades relativas ($\beta > 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$), los efectos cinemáticos pueden suprimir la inestabilidad, independientemente de la intensidad del campo magnético. Esto se debe a que la inercia de las partículas del fluido aumenta dinámicamente, obstaculizando la respuesta del fluido a la perturbación.
- **Modos Magnéticos:** La inestabilidad en RMHD típicamente está asociada a la desestabilización de los modos **magnetosónicos lentos y rápidos**.

3.2.1 Incorporación de la Resistividad Finita (η)

El marco de la RR-MHD incluye la resistividad eléctrica finita ($\eta = 1/\sigma$), que introduce disipación y diferencia el sistema del límite ideal (RMHD).

- **Hiperbólico con Relajación:** El sistema de ecuaciones de RR-MHD se clasifica como un **sistema hiperbólico de leyes de conservación con términos de relajación**.

- **Ecuación de Equilibrio:** El sistema de MHD ideal (RMHD) se convierte en el **sistema de equilibrio** del sistema RR-MHD, y la resistividad (η) actúa como un **parámetro de relajación** ($\tau_R \sim 1/\sigma$).
- **Disipación Física:** La resistividad finita permite la difusión del campo magnético, lo cual es esencial para procesos como la reconexión magnética y, en el contexto de la KHI, permite la disipación de energía por calentamiento Joule ($\sim \eta|\mathbf{J}|^2$). Este calentamiento limita la amplificación del campo magnético y la turbulencia generada por el vórtice KH.

3.3 Ecuación de Onda Perturbativa y Condiciones de Estabilidad en RR-MHD

La deducción de las condiciones de estabilidad para un fluido relativista resistivo se realiza mediante la linealización de las ecuaciones fundamentales de RR-MHD.

Sistema de Ecuaciones de Evolución Linealizado

El sistema de RR-MHD (conservación de masa D , momento S , energía E , y evolución de campos \mathbf{B} y \mathbf{E}) se linealiza alrededor de un estado de equilibrio con cizallamiento (discontinuidad de velocidad, $\Delta V \neq 0$).

La resistividad finita η aparece explícitamente en la **Ley de Ohm** y, por lo tanto, en la evolución del campo eléctrico \mathbf{E} (Ecuaciones de Maxwell) y en los términos fuente de disipación de energía (\mathbf{S}_E) y momento (\mathbf{S}_S).

El sistema linealizado se representa en la forma $\partial_t \mathbf{U}' + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{U}' = \mathbf{S}'(\mathbf{U}')$, donde \mathbf{U}' son las perturbaciones y \mathbf{S}' contiene los términos de relajación resistiva y disipativa.

Condiciones de Estabilidad/Inestabilidad (Dispersión)

Para un plasma resistivo con una interfaz de velocidad, la estabilidad se determina resolviendo la **relación de dispersión** $\omega(\mathbf{k})$, la cual se obtiene al aplicar las condiciones de contorno (matching conditions) en la interfaz perturbada:

$$\frac{l_+}{l_-} = \frac{\rho_0 h_0 \Gamma_0^2 (\omega - kV_0)^2 + (\omega^2 - k^2)(1 - \chi_m) B_{x0}^2}{\rho_0 h_0 \Gamma_0^2 (\omega + kV_0)^2 + (\omega^2 - k^2)(1 - \chi_m) B_{x0}^2} \quad (19)$$

Donde l_{\pm} se deriva de la relación de dispersión cuadrática del modo magnetoacústico (obtenida de la condición de hiperbolidad $\mathbf{N}_4 = 0$) en el fluido $y > 0$ (+) y $y < 0$ (-), y χ_m es la susceptibilidad magnética (si es $\chi_m = 0$, se recupera el caso MHD estándar).

- El crecimiento de la inestabilidad ν se encuentra si la solución de ω a partir de la relación de dispersión (19) tiene una parte imaginaria positiva: $\nu = \text{Im}(\omega) > 0$.
- La inestabilidad KH está dominada por los **modos magnetoacústicos**, ya que los modos entrópicos y de Alfvén son real-valuados y estables en el marco de reposo (no contribuyen a la inestabilidad).

El criterio exacto de estabilidad requiere resolver este sistema complejo, lo que generalmente se aborda numéricamente debido a la naturaleza rígida (stiff) de la ecuación en el límite $\sigma \rightarrow \infty$.

3.3.1 Modificación del Crecimiento por la Resistividad

La resistividad η (o conductividad σ) modula la evolución de la KHI de la siguiente manera:

1. **Supresión del Crecimiento Lineal:** En plasmas con resistividad finita, el campo magnético pierde parte de su capacidad para deformarse y amplificar las perturbaciones iniciales. Esto resulta en una **tasa de crecimiento (ν) reducida** en la fase lineal en comparación con el caso ideal. El crecimiento se vuelve lento y menos efectivo.
2. **Amortiguamiento de la Amplificación Magnética:** La energía disipada por la resistividad ($\eta|\mathbf{J}|^2$) actúa como un sumidero (sink) de energía electromagnética. Esto hace que la amplificación máxima del campo magnético (generada por el estiramiento vertical) sea **más débil** y que la saturación ocurra antes en casos de baja conductividad.
3. **Dominio de los Términos Rígidos:** La alta conductividad ($\sigma \gg 1$) hace que el término resistivo en las ecuaciones se vuelva rígido. Para resolver esto numéricamente y estudiar el crecimiento con precisión, se necesitan métodos avanzados como los esquemas **Runge-Kutta Implícito-Explícitos (IMEX-RK)**, ya que los esquemas explícitos estándar se vuelven inestables. Solo en el límite de conductividad muy alta ($\sigma \sim 10^5$), la solución de RR-MHD converge asintóticamente a la solución ideal.

4 Presencia y Consecuencias Astrofísicas de la Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz Resistivo-Relativista (RR-MHD)

La Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KHI) es un mecanismo ubicuo en la astrofísica de alta energía, originándose en capas de cizallamiento (shear layers) donde dos fluidos o plasmas adyacentes se mueven con una velocidad relativa considerable. En el marco de la Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RR-MHD), el análisis de la KHI es crucial no solo para comprender la mezcla y la turbulencia, sino también para modelar la disipación física del campo magnético.

4.1 Contextos Astronómicos y Evidencia de KHI

La KHI desempeña un papel dinámicamente importante en numerosos escenarios astrofísicos relativistas, donde los flujos se caracterizan por el movimiento del plasma a velocidades cercanas a la de la luz o por un gas relativísticamente caliente.

4.1.1 Jets Relativistas y Núcleos Galácticos Activos (AGN)

Los jets que emanan de AGN, microcuásares y estallidos de rayos gamma (GRBs) son entornos primarios para la KHI.

- **Deceleración y Morfología:** La KHI actúa como un mecanismo crucial para la **deceleración y mezcla turbulenta** de los jets con el medio ambiente circundante. La turbulencia resultante explica la generación de morfologías observadas, como las estructuras de **oscilaciones y nudos** (*wiggles and knots*) en los chorros extragalácticos.
- **Generación de Radiación:** Se ha postulado que la KHI contribuye a la emisión sincrotrón observada en jets relativistas al acelerar electrones.

4.1.2 Nebulosas de Viento de Púlsares (PWNe)

En objetos como la Nebulosa del Cangrejo, el viento ultra-relativista del púlsar interactúa con la eyección de la supernova, creando canales de flujo de alta velocidad y un plasma relativísticamente caliente que es susceptible a la KHI.

- **Estructuras Filamentarias:** Los análisis numéricos sugieren que la KHI puede ser responsable de la **estructura filamentaria dependiente del tiempo** observada en el toro principal de la Nebulosa del Cangrejo.
- **Variabilidad Localizada:** La inestabilidad, modelada en geometría planar, no puede explicar la gran amplitud de fluctuaciones (cerca del 100%) de las regiones brillantes conocidas como "wisps", aunque sí podría explicar fluctuaciones de menor magnitud ($\leq 20\%$) asociadas a estructuras filamentarias en el toro principal.

4.1.3 Colisiones de Plasmas Relativistas y Fusiones de Binarias

En sistemas altamente dinámicos, como la coalescencia y fusión de estrellas de neutrones (NS) binarias, la KHI emerge inmediatamente después del contacto.

- **Capa de Vórtices:** Cuando las dos estrellas entran en contacto, se forma una **capa de vórtices** (*vortex sheet*) o interfaz de cizallamiento donde la componente tangencial de la velocidad presenta una discontinuidad. Esta condición es intrínsecamente inestable a la KHI.
- **Amplificación Magnética:** En estos entornos, la KHI puede amplificar el componente toroidal del campo magnético, torciendo y comprimiendo las líneas de campo poloidal en la capa de vórtice. Este mecanismo es relevante para la amplificación del campo magnético necesario para alimentar el motor central de los GRBs cortos.

4.1.4 Magnetosferas y Atmósferas Estelares

La KHI se manifiesta en el límite de la magnetosfera terrestre y en la baja corona solar. Ejemplos incluyen ondulaciones (*ripples*) en la superficie de prominencias y fluctuaciones itinerantes en los límites de estructuras magnéticas.

4.2 Implicaciones Físicas de la Resistividad Finita en RR-MHD

En la RR-MHD, la resistividad eléctrica finita ($\eta = 1/\sigma$) no solo es una necesidad numérica, sino que también introduce fenómenos físicos cruciales que están ausentes en el límite ideal (RMHD, $\sigma \rightarrow \infty$).

Efecto en el Desarrollo de la Inestabilidad

La resistividad modifica directamente la tasa de crecimiento (ν) de la inestabilidad KH.

- **Reducción del Crecimiento:** En entornos con η finita (conductividad σ pequeña), la capacidad del campo magnético para deformarse y amplificar las perturbaciones iniciales se reduce. Por lo tanto, el crecimiento de la inestabilidad es **lento y menos efectivo** en comparación con el caso ideal.
- **Disipación Dieléctrica:** La alta conductividad ($\sigma \gg 1$) hace que el sistema de ecuaciones se vuelva **rígido** (*stiff*), lo cual requiere métodos Implícito-Explícitos (IMEX) para una solución numérica estable. Sin embargo, la disipación física causada por la η permite que la turbulencia MHD se desarrolle y decaiga hacia **escalas pequeñas disipativas**.

Reconexión Magnética y Hojas de Corriente

La resistividad finita es esencial para que la KHI pueda interactuar con la topología del campo magnético.

- **Ruptura del Flujo Congelado:** La $\eta \neq 0$ permite que existan hojas de corriente (regiones con fuertes gradientes magnéticos) donde la **reconexión magnética** puede ocurrir. Este proceso, que está estrictamente prohibido en RMHD ideal, convierte energía magnética en energía cinética y térmica.
- **Limitación de la Amplificación:** En las simulaciones RR-MHD, la componente poloidal del campo magnético, que se amplifica por el cizallamiento, es comprimida en estructuras filamentarias hasta que el **evento de reconexión** comienza de manera intermitente, limitando así la amplificación del campo y haciendo que la turbulencia decaiga a escalas disipativas.

4.3 Efectos Macroscópicos y Manifestaciones Observables

La KHI es un motor de efectos no lineales que se traducen directamente en firmas astrofísicas observables:

Efectos Macroscópicos

- **Generación de Turbulencia y Mezcla:** La KHI es un mecanismo crucial para generar turbulencia, redistribuir el momento y transportar energía, llevando a la mezcla de capas de plasma.
- **Vorticidad y Estructuras Filamentarias:** La KHI desarrolla **estructuras de vórtices** (*vortices*) y, en la fase no lineal, las líneas de campo se agrupan en **estructuras estiradas y filamentarias**. La morfología de estos vórtices

difiere significativamente dependiendo de la Ecuación de Estado (EoS) del plasma relativista.

- **Amplificación del Campo Magnético (Generación de Semilla):** La KHI es capaz de transformar la energía cinética del flujo cizallado en energía magnética. Esta amplificación de campos magnéticos débiles de "semilla" es un mecanismo fundamental.

Manifestaciones Observables (Emisión de Radiación)

La RR-MHD permite calcular las propiedades de emisión (e.g., sincrotrón) asociadas con los flujos turbulentos.

- **Variabilidad de Emisión:** Las fluctuaciones en la emisividad local (debido a cambios en la presión térmica p y el campo magnético B'_\perp) generadas por la KHI pueden ser muy grandes localmente. Sin embargo, cuando la emisión se integra a lo largo de la línea de visión, los efectos de diferentes parches de fluido tienden a compensarse. Las fluctuaciones totales observadas suelen ser **menores**, no excediendo típicamente el 10–20% en los modelos de PWNe.
- **Factor Doppler (D):** En el caso relativista, el término de **boost** Doppler D es un ingrediente fundamental en el cálculo de la emisividad, y las modulaciones de la emisión pueden estar relacionadas con el *boosting* provocado por el campo de velocidad turbulento generado tras la saturación de la inestabilidad.
- **GRBs y Emisión No-Térmica:** La KHI se ha utilizado para explicar la fuerza del campo magnético requerida para la **emisión no térmica** de los GRBs. El crecimiento de la inestabilidad y la amplificación de campos de semilla (especialmente en fluidos paramagnéticos) sugieren que la KHI puede ser un mecanismo efectivo y eficiente para la amplificación magnética en estos sistemas.

4.4 Esquemas Conceptuales de KHI Resistivo-Relativista

Ejemplo 1: Interfaces de Jets Relativistas

En un jet relativista que se propaga a través del medio intergaláctico, se forma una interfaz de cizallamiento entre el material rápido del jet y el material circundante (cocoon). La KHI genera vórtices que estiran y curvan las líneas de campo magnético. Si el plasma es resistivo, estas regiones de cizallamiento se convierten en **hojas de corriente** donde la **reconexión magnética** disipa la energía magnética en energía térmica y partículas de alta energía. Este proceso explica:

- La **deceleración** observada del jet.
- La **variabilidad rápida** en la luz de los jets (emisiones de rayos X o gamma) debido a los pulsos de liberación de energía de la reconexión.

Ejemplo 2: Fusiones de Estrellas de Neutrones (NS Binarias)

Tras la fusión de dos NS, la materia forma una capa de cizallamiento entre el remanente central (agujero negro o estrella de neutrones masiva) y el toro magnetizado circundante. La KHI se desarrolla rápidamente.

- **Amplificación Semilla:** La KHI tuerce un campo magnético poloidal inicialmente débil, generando un campo **toroidal fuerte** en la capa de vórtice. Si el modelo incluye propiedades de polarización magnética, se ha encontrado que la amplificación es más fuerte si el fluido es paramagnético que si es diamagnético.
- **Relevancia para GRBs:** Esta amplificación magnética es esencial para los modelos de GRBs cortos, donde el campo amplificado es necesario para extraer la energía rotacional del agujero negro y lanzar un chorro. El papel de la resistividad aquí sería el de regular la turbulencia y la tasa de reconexión, influyendo en la eficiencia terminal de la conversión de energía.

5 Análisis Lineal y Límites de la Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RRMHD)

La Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RRMHD) es esencial para modelar fenómenos astrofísicos donde la conductividad eléctrica es finita, como en regiones de alta disipación magnética o en plasmas de muy alta densidad 15, 376. La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KH), que surge en capas de cizallamiento de velocidad (vortex sheets) 331, 407, 426, es un mecanismo crucial de transporte de momento y energía, cuya evolución es profundamente modificada por efectos relativistas y resistivos.

5.1 Formulación de las Ecuaciones Linealizadas de RRMHD

Las ecuaciones completas de RRMHD se formulan como un sistema de leyes de conservación hiperbólicas con términos de relajación (stiff terms) que dependen de la conductividad σ 380, 388, 389, 457. Para la simulación numérica, a menudo se emplea el sistema aumentado de ecuaciones de Maxwell, que incluye pseudopotenciales escalares (ψ y ϕ) para mantener las restricciones de divergencia del campo eléctrico y magnético (limpieza de divergencia GLM) 356, 387, 428, 455, 456.

El sistema de evolución para las variables conservadas \mathbf{U} (densidad de masa D , densidades de momento \mathbf{S} , densidad de energía τ , y los campos electromagnéticos \mathbf{B} y \mathbf{E}) se puede expresar esquemáticamente como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_{\text{hip}}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{\text{res}}(\mathbf{U}, \sigma) \quad (20)$$

donde \mathbf{F} son los flujos conservativos, \mathbf{S}_{hip} agrupa términos fuente no resistivos (como los potenciales de limpieza de divergencia y términos de carga), y \mathbf{S}_{res} representa los términos de relajación resistiva, derivados de la ley de Ohm resistiva relativista 385, 389, 457:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{cond}} + \mathbf{J}_{\text{conv}} = \sigma W [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}] + q \mathbf{v} \quad (21)$$

donde W es el factor de Lorentz y σ la conductividad eléctrica.

La linealización de este sistema para una pequeña perturbación $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1$ (donde $\mathbf{U}_1 \propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$) sobre un equilibrio \mathbf{U}_0 (que se asume estático o con flujo uniforme y

σ constante en el modelo más simple) resulta en un sistema matricial de la forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}, \omega, \sigma) \cdot \mathbf{U}_1 = 0 \quad (22)$$

La matriz \mathbf{M} contiene los términos derivados de la linealización de los flujos hiperbólicos y los términos fuente, incluyendo la contribución explícita y dependiente de ω de la resistividad $\eta = 1/\sigma$ (o σ) en el campo eléctrico \mathbf{E} y la inducción magnética 386, 387.

5.2 Relación de Dispersión y Condiciones de Crecimiento Lineal

La **relación de dispersión** $\mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega, \sigma) = 0$ se obtiene al requerir que el determinante de la matriz linealizada \mathbf{M} sea nulo:

$$\det[\mathbf{M}(\mathbf{k}, \omega, \sigma)] = 0 \quad (23)$$

Dado que el sistema RRMHD se clasifica como hiperbólico con términos de relajación 380, 389, la dependencia de ω con respecto a σ es algebraica, pero altamente compleja, a diferencia del caso de la Magnetohidrodinámica Ideal Relativista (RMHD) 458, 459.

En el límite de conductividad infinita ($\sigma \rightarrow \infty$ o resistividad $\eta \rightarrow 0$), la relación de dispersión converge a la de RMHD ideal. En el marco de RMHD ideal para un flujo plano paralelo con campo magnético \mathbf{B} paralelo al flujo, se identifican las siguientes raíces de inestabilidad (modos que crecen exponencialmente, $\omega = i\gamma$, con $\gamma > 0$):

1. **Modos Magnetoacústicos (Slow y Fast):** Estos son los modos principales que contribuyen a la inestabilidad KH 414, 475, 484, 495. La inestabilidad aparece en regiones específicas del espacio de parámetros definidos por el número de Mach relativista (M_r) y el número de Mach de Alfvén (ζ) 406, 416.
2. **Modos de Alfvén:** En la aproximación de capa de cizallamiento con propagación paralela al flujo y al campo, los modos de Alfvén no contribuyen a la inestabilidad, ya que sus frecuencias son siempre reales, indicando soluciones estables u oscilatorias 414, 495.

Las **condiciones de crecimiento lineal** se satisfacen cuando las soluciones de ω de la Ecuación 23 tienen una parte imaginaria positiva ($\text{Im}(\omega) = \gamma > 0$) 415, 482.

5.3 Interpretación Física y Efecto de la Resistividad Finita

La resistividad finita ($\eta = 1/\sigma > 0$) introduce disipación y juega un papel doble en la inestabilidad KH:

- **Recuperación del Límite Ideal:** Cuando la conductividad es muy alta ($\sigma \rightarrow \infty$, típicamente $\sigma \gtrsim 10^6$), la solución RRMHD converge a la solución ideal RMHD 19, 390, 398, 462. Esto se debe a que la resistividad física se vuelve despreciable frente a la disipación numérica (error de truncamiento) inherente a las simulaciones 379, 399.
- **Efectos de Relajación y Estabilización:** La resistividad introduce términos de relajación que actúan en escalas de tiempo mucho más cortas que la dinámica

hiperbólica, haciendo que el sistema sea **rígido** (stiff) 388, 389, 457. En el contexto de KH:

1. *Frecuencia de Crecimiento:* Estudios numéricos sugieren que, al disminuir la conductividad (aumentar η), la tasa de crecimiento lineal puede ser más baja que en el caso de alta conductividad 20, 429, 493. La interfaz se estabiliza más en fluidos diamagnéticos ($\chi_m < 0$) y se desestabiliza ligeramente en fluidos paramagnéticos ($\chi_m > 0$), especialmente cerca del umbral de estabilidad, aunque esto se analizó en el marco de RMHD con polarización magnética, que es un modelo distinto pero relacionado 496.
2. *Difusión Magnética:* La resistividad permite la difusión del campo magnético, un proceso esencialmente no ideal 362, 386. Esta difusión disipa las estructuras de pequeña escala que se forman por la inestabilidad, como las láminas de corriente (current sheets) 378.

El tratamiento de RRMHD requiere el uso de esquemas numéricos avanzados, como los métodos de Runge-Kutta Implícitos-Explícitos (IMEX-RK), que están diseñados específicamente para resolver de manera eficiente las ecuaciones hiperbólicas con términos de relajación rígidos (stiff relaxation terms) que surgen debido a la resistividad 289, 381, 388, 391, 402, 457.

5.4 Límites de la Aproximación Lineal

La aproximación lineal solo es válida para perturbaciones de amplitud pequeña y predice un crecimiento exponencial de la inestabilidad 91, 117, 230, 336. Una vez que la amplitud de la perturbación se vuelve comparable a la escala de longitud del problema (como el ancho de la capa de cizallamiento), los términos no lineales dominan la evolución y la aproximación lineal se invalida 336.

5.4.1 Fenómenos No Capturados Linealmente

La evolución no lineal de la KH en RRMHD introduce una rica fenomenología física y morfológica que no puede ser descrita por la teoría lineal:

1. **Saturación del Crecimiento:** La tasa de crecimiento exponencial predicha linealmente (γ) no puede continuar indefinidamente. El crecimiento se satura cuando los efectos no lineales limitan la transferencia de energía a los modos inestables 20, 230, 336. El tiempo de saturación depende de la velocidad de cizallamiento inicial (V_0) 348.
2. **Formación y Dinámica de Vórtices:**
 - *Fase de Crecimiento No Lineal:* Despues de la fase lineal, se produce la formación de grandes vórtices (eddies) 330, 348. Estos vórtices se distorsionan y estiran en la fase no lineal 22, 330.
 - *Fusión de Vórtices (Coalescencia):* En algunos casos, existe una fase de múltiples vórtices que luego colapsan en un único vórtice dominante 330, 348.
3. **Amplificación y Topología del Campo Magnético:** En la fase no lineal, el movimiento vortical estira y retuerce las líneas de campo, lo que lleva a una

amplificación significativa del campo poloidal 21, 22, 349, 473. Esta amplificación puede ser de casi un orden de magnitud en casos de alta conductividad 21. La amplificación es un proceso no lineal y continúa incluso después de que la KH se ha desarrollado completamente 21.

4. **Reconexión Magnética y Disipación:**

- La turbulencia y la formación de estructuras localizadas (como filamentos o láminas de corriente) crean gradientes muy grandes 70, 349, 378.
- La resistividad física (η) permite la **reconexión magnética** dentro de estas láminas de corriente 16, 23, 59, 378, un fenómeno altamente dinámico que convierte la energía magnética en energía fluida (cinética y térmica) 16, 23.

5. **Mezcla Turbulenta y Retroalimentación:** La evolución posterior a la saturación a menudo conduce a un régimen turbulento que involucra la mezcla del fluido a lo largo de la capa de cizallamiento 22, 292. Los vórtices pueden volverse filamentosos y generar un patrón ondulatorio 349.

5.4.2 Necesidad de Tratamiento No Lineal y Simulaciones Numéricas en RRMHD

Estas características no lineales requieren un tratamiento que vaya más allá de la linearización por las siguientes razones:

- **Dominio de los Términos No Lineales:** Fenómenos como la amplificación del campo magnético por estiramiento de las líneas, la formación y distorsión de vórtices 22, 341, y la retroalimentación de las fluctuaciones de presión (que pueden ser del mismo orden que la presión de fondo en plasmas relativistamente calientes) 341 son intrínsecamente no lineales y no pueden ser aproximados.
- **Reconexión Impulsada por Resistividad:** La reconexión magnética, esencial para la disipación de energía y los cambios de topología en plasmas resistivos 16, 379, solo puede capturarse mediante las ecuaciones RRMHD en su forma no lineal, ya que se produce debido a la resistividad η en regiones de altas concentraciones de corriente (láminas de corriente) 34, 59, 378.
- **Precisión Numérica en Discontinuidades:** El desarrollo de inestabilidades, choques y regiones de cizallamiento en el régimen relativista genera discontinuidades y fuertes gradientes que requieren simulaciones numéricas completas utilizando esquemas de captura de choques de alta resolución (HRSC) 272, 277, 432 o métodos de alto orden (WENO, Discontinuous Galerkin), a menudo implementados con integradores de tiempo híbridos como IMEX-RK para manejar la rigidez de las ecuaciones RRMHD 287, 289, 392, 430, 447, 456.

En resumen, mientras la teoría lineal proporciona la condición de inicio (onset condition) y la tasa de crecimiento inicial, la descripción de la evolución, la mezcla, la turbulencia y la conversión de energía en la Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz requiere la solución de las ecuaciones RRMHD completas, aprovechando el potencial de las simulaciones numéricas para explorar el régimen no lineal 336, 448.

6 Método Numérico para Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RRMHD)

El modelado numérico de la Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RRMHD) es fundamental para la simulación de fenómenos astrofísicos donde la resistividad es finita y desempeña un papel dinámico, como la reconexión magnética o el transporte de momento en plasmas altamente magnetizados [? ? ?]. La inclusión de la conductividad finita (σ) transforma el sistema de ecuaciones en un conjunto hiperbólico que incluye **términos de relajación rígidos** (*stiff relaxation terms*), especialmente en el límite de alta conductividad (límite RMHD ideal).

6.1 Principios Fundamentales y Motivación

6.1.1 Motivación y Desafío de la Rigidez

La principal dificultad al resolver numéricamente las ecuaciones RRMHD radica en el término de corriente resistiva $\mathbf{J}_s = \sigma W[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}]$. Cuando la conductividad σ es muy grande (baja resistividad), la escala de tiempo característica asociada a la relajación resistiva ($\tau_{\text{res}} \propto 1/\sigma$) se vuelve extremadamente corta en comparación con la escala de tiempo dinámica del flujo.

- **Problemas de Estabilidad:** Los esquemas de integración temporal puramente explícitos se vuelven inestables en el límite de alta conductividad, ya que el paso de tiempo (Δt) requerido por la condición de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) para la parte hiperbólica suele ser mucho mayor que τ_{res} , causando inestabilidades en la solución numérica.
- **Enfoques Numéricos:** Métodos pioneros como la **separación de Strang** (*Strang splitting*) (utilizado por Komissarov 2007 y Mizuno 2013 [? ? ?]) intentan abordar la rigidez resolviendo la parte stiff analíticamente o por separado. Sin embargo, la separación de Strang puede volverse inestable en presencia de discontinuidades (shocks) y alta conductividad ($\sigma \gtrsim 7000$ en algunos tests).

6.1.2 Enfoque de Integración Implícita-Explícita (IMEX-RK)

El enfoque de integración IMEX (Implicit-Explicit) Runge-Kutta (RK), propuesto por Palenzuela et al. (2009) [? ? ?], y adoptado en trabajos posteriores relacionados con el código MR-GENESIS, como en Miranda-Aranguren et al. (2014), es una solución robusta al problema de la rigidez.

El esquema IMEX divide el sistema de evolución $\partial_t \mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{R}(\mathbf{U})/\epsilon$ en dos partes:

1. **Parte Explícita (F):** La parte no rígida o hiperbólica (flujos advecivos), tratada con un esquema RK explícito que preserva la estabilidad fuerte (SSP, *Strong Stability Preserving*).
2. **Parte Implícita (R/ε):** La parte rígida (términos de relajación resistiva), tratada con un esquema RK implícito diagonalmente implícito y L-estable (DIRK).

Esto permite que el paso de tiempo (Δt) esté limitado por la condición CFL estándar de la parte hiperbólica, en lugar de la escala de tiempo mucho más restrictiva de la difusión resistiva.

6.2 Ventajas y Limitaciones del Método IMEX-RK

- **Ventaja Principal (Robustez y Unificación):** El IMEX-RK no presenta los problemas de inestabilidad que afectan a la separación de Strang en presencia de discontinuidades y alta conductividad. Además, permite utilizar un marco matemático unificado para describir regiones de flujo con conductividad grande (interior de objetos compactos) y conductividad pequeña (magnetósferas o vacío).
- **Ventaja de Precisión:** Cuando el esquema explícito de la parte IMEX es SSP, el método IMEX resultante también es SSP para el sistema de equilibrio en el límite rígido, lo cual es crucial para evitar oscilaciones espurias cerca de datos no suaves (discontinuidades).
- **Limitación (Conversión de Variables):** La principal dificultad técnica del método IMEX-RRMHD surge durante el paso de **conversión de variables conservativas (\mathbf{U}) a primitivas (\mathbf{V})**. Esto requiere la inversión simultánea de cuatro campos primitivos y es computacionalmente costoso e inestable para ciertas relaciones de presión magnética a gas (ratios de $|B|^2/p$ entre 1 y 5 en algunos tests). Este proceso generalmente requiere la implementación de un robusto resolvente iterativo (como Newton-Raphson), a menudo en una dimensión.

6.3 Construcción de las Ecuaciones Aumentadas GLM-RRMHD

El sistema resuelto por el código subyacente al póster sigue el formalismo de leyes de conservación (balance laws) en forma 3 + 1 (formulación Valencia) [? ? ? ?]. Para garantizar la estabilidad y la consistencia física, se emplea el sistema aumentado (GLM-RRMHD) propuesto por Dedner et al. (2002) [? ? ? ? ? ? ?].

6.3.1 Discretización de las Ecuaciones de RRMHD

El sistema se formula como un conjunto de leyes de conservación para el vector de variables conservadas $\mathbf{U} = (D, \mathbf{S}, \mathcal{E}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, q, \psi, \phi)^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_{\text{hip}}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{U}) \quad (24)$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ es el tensor de flujos, \mathbf{S}_{hip} agrupa términos fuente hiperbólicos (relacionados con la geometría y la limpieza de divergencia), y $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{U})$ incluye los términos de relajación [? ?].

Las ecuaciones evolucionadas incluyen:

- **Densidad de Masa (D):** $D = \rho W$, donde ρ es la densidad de masa en reposo y W es el factor de Lorentz $W = (1 - v^2)^{-1/2}$.
- **Densidad de Momento (S):** $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{em}} + \mathbf{S}_{\text{hyd}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \rho h W^2 \mathbf{v}$.
- **Densidad de Energía Total (E):** $\mathcal{E} = E_{\text{em}} + E_{\text{hyd}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \rho h W^2 - p$.
- **Campos Electromagnéticos (E, B) y Densidad de Carga (q).**

6.3.2 Tratamiento de la Resistividad y la Rigidez

La resistividad finita $\eta = 1/\sigma$ se incorpora en la ley de Ohm relativista y aparece en los términos fuente del campo eléctrico \mathbf{E} . La **estrategia IMEX-RK** se implementa dividiendo el término fuente total $\boldsymbol{\Omega}$ en componentes explícitas (no rígidas, $\boldsymbol{\Omega}_{ns}$) e implícitas (rígidas, $\boldsymbol{\Omega}_s$):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\Omega}_{ns}(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\Omega}_s(\mathbf{U}) \quad (25)$$

donde $\mathbf{L}(\mathbf{U}) = -\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U})$ es el operador hiperbólico (que incluye los flujos espaciales).

El término rígido ($\boldsymbol{\Omega}_s$) se identifica como la parte resistiva de la evolución del campo eléctrico \mathbf{E} . Por ejemplo, en la evolución de \mathbf{E} :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \psi - \mathbf{J} \quad (26)$$

La **corriente resistiva** \mathbf{J}_s ($\propto \sigma$) se trata implícitamente, mientras que los flujos (hiperbólicos) y los términos de convección de carga son tratados explícitamente. Los esquemas IMEX-RK resuelven el sistema de evolución mediante una combinación de pasos implícitos y explícitos, donde las variables auxiliares $U^{(i)}$ se actualizan en cada sub-paso.

6.3.3 Limpieza de Divergencia (GLM)

Para abordar la violación numérica de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que puede llevar a comportamientos no físicos, se utiliza la técnica GLM. Esta técnica introduce pseudopotenciales escalares ϕ y ψ que se propagan mediante ecuaciones de onda (hiperbólicas/parabólicas) para disipar los errores de divergencia:

$$\partial_t \phi = -\nabla \cdot \mathbf{B} - \kappa_\phi \phi \quad (27)$$

$$\partial_t \psi = -\nabla \cdot \mathbf{E} + q - \kappa_\psi \psi \quad (28)$$

donde κ_ϕ y κ_ψ son constantes de amortiguamiento. Esto asegura que el campo magnético (y, en esta formulación, el campo eléctrico y la carga) cumplan con sus respectivas restricciones, al menos hasta el error de truncamiento.

6.4 Algoritmos de Integración Temporal y Espacial

6.4.1 Integración Temporal

El sistema semi-discreto (discretizado en espacio, continuo en tiempo) se resuelve mediante la familia de métodos IMEX-RK, que son una extensión del método de líneas (*Method of Lines*, MoL).

- **Algoritmo IMEX-RK:** Utiliza la estructura de Butcher Tableau para definir los coeficientes de los sub-pasos [? ?]. La elección de un esquema específico, como SSP2(332) o SSP3(332), depende de la robustez y el orden de precisión deseado.

- **Estabilidad Numérica:** La condición CFL (limitación en el paso de tiempo Δt) está determinada por la velocidad de onda más rápida (el modo electromagnético, generalmente la velocidad de la luz c) en la parte hiperbólica. La estabilidad del método IMEX permite utilizar este Δt sin que la rigidez de la resistividad cause inestabilidad.

6.4.2 Discretización Espacial (HRSC)

Los métodos utilizados para la discretización espacial son típicamente esquemas de captura de choques de alta resolución (HRSC), que emplean el formalismo de **Volumen Finito (FV)** para garantizar la conservación de las cantidades.

1. **Reconstrucción Intercelular:** Para lograr una precisión de segundo orden o superior (evitando la difusión excesiva del método de Godunov de primer orden), se utilizan técnicas de reconstrucción para estimar los valores de las variables en las interfaces de la celda (U_L y U_R). Métodos comunes incluyen la reconstrucción PPM (*Piecewise Parabolic Method*) o el uso de limitadores de pendiente TVD (*Total-Variation Diminishing*) como el limitador MC (*Monotonised Central-difference limiter*). El limitador MC se utiliza explícitamente en el código CAFE (base de Pimentel et al. 2018) debido a que reproduce adecuadamente las tasas de crecimiento analítico de la inestabilidad KH [?].
2. **Resolvedores de Riemann Aproximados:** Los flujos numéricos en la interfaz ($\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}$) se calculan utilizando resolvedores de Riemann. Para RRMHD, se han empleado el resolvedor **HLL** (*Harten-Lax-van Leer*) o el resolvedor **HLLC** (que incluye la onda de contacto, C). El resolvedor HLL es muy robusto pero altamente difusivo, mientras que el HLLC mejora la captura de las discontinuidades de contacto/tangenciales. El método HLLE (una variante del HLL) se usa comúnmente en simulaciones relativistas.

6.4.3 Conversión de Variables ($\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$)

Este paso es crucial en cada sub-paso RK. Las variables conservadas (\mathbf{U}) se convierten a variables primitivas ($\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{v}, p, \mathbf{B}, \mathbf{E}, q, \psi, \phi)^T$) para calcular los flujos y las velocidades en el marco del fluido.

- **Dificultad:** La relación entre \mathbf{U} y \mathbf{V} en la MHD Relativista (y RRMHD) no es analítica y requiere la solución de ecuaciones no lineales (como la búsqueda iterativa de la raíz para la presión o la densidad).
- **Metodología:** Se utiliza típicamente un algoritmo de Newton-Raphson unidimensional para resolver implícitamente una ecuación para la presión p , y luego se determinan las otras variables. La robustez de esta inversión es un factor limitante en la estabilidad general del código.

7 Configuración, Serie de Experimentos y Resultados de las Simulaciones RRMHD de KHI

Este análisis se centra en la simulación numérica de la Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KHI) bidimensional dentro del régimen de RRMHD, explorando específicamente cómo la conductividad finita (σ) o la resistividad (η) modifican la evolución no lineal de las estructuras vorticales y la amplificación del campo magnético [?].

7.1 Configuración del Experimento Numérico (Set-up)

Las simulaciones se basan en la resolución numérica de las ecuaciones RRMHD aumentadas, que incluyen potenciales escalares (ψ y ϕ) para la limpieza de divergencia ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) [? ?].

7.1.1 Condiciones Iniciales y Dominio

El sistema se configura como un flujo de cizallamiento (shear flow) a lo largo de un plano de interfaz, ubicado en la dirección x , con perturbaciones iniciales que desencadenan la KHI.

- **Geometría y Simetría:** Las simulaciones se realizan en un dominio cartesiano bidimensional (x, y), asumiendo que el campo es uniforme en la dirección z ($\partial_z U = 0$) [? ?]. Un dominio típico utilizado en pruebas de KHI MHD es $D = [0, 1.0] \times [-1.0, 1.0]$ [?].
- **Ecuación de Estado (EoS):** Se adopta una EoS de gas ideal con un coeficiente adiabático constante $\Gamma = 4/3$ [?]. Este valor es apropiado para describir un plasma relativísticamente caliente, un régimen de interés astrofísico (por ejemplo, en el entorno de Pulsar Wind Nebulae) [? ? ?].
- **Perfiles de Velocidad Iniciales (Cizallamiento):** Se implementa un perfil de velocidad base (v_x) que define la capa de cizallamiento y una perturbación inicial de pequeña amplitud (v_y) para excitar la inestabilidad. Los perfiles son [?]:
$$v_x = \begin{cases} v_{sh} \tanh\left(\frac{y-0.5}{a}\right) & \text{si } y > 0.0 \\ -v_{sh} \tanh\left(\frac{y+0.5}{a}\right) & \text{si } y \leq 0.0 \end{cases}$$

La perturbación normal v_y es de tipo sinusoidal en x y localizada en y (Gaussian-like) [? ?].

- **Campos Magnéticos y Densidad/Presión:** La configuración inicial incluye un campo magnético \mathbf{B} y, típicamente, campos eléctricos $\mathbf{E} = 0$ y densidad de carga $q = 0$ [? ?].
 - Las condiciones de presión y densidad varían, pero una configuración base para un plasma caliente utiliza $\rho = 1$ y una presión p/ρ alta (e.g., $p/\rho = 20$) [?].
 - El campo magnético se inicializa como $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ con $B_y = 0$, lo que significa que el campo se encuentra primordialmente en el plano de la interfaz, siendo $\mathbf{B} = (\sqrt{2\mu_p p}, 0, \sqrt{2\mu_t p})$ en el póster [?].

7.1.2 Discretización y Estabilidad Numérica

Se emplea un esquema numérico de alta resolución para manejar la naturaleza hiperbólica de las ecuaciones y la presencia de choques.

- **Discretización Espacial y Temporal:** Se utiliza típicamente un esquema de Volumen Finito (FV) combinado con reconstrucción de alta resolución (High-Resolution Shock-Capturing, HRSC) [?]. La evolución temporal se realiza con esquemas de Runge-Kutta (RK) [? ?]. La resolución espacial para pruebas comparativas suele ser de 512×512 celdas (lo que corresponde a un nivel de refinamiento $L = 9$ en algunos códigos) [?].
- **Condiciones de Frontera:** Se aplican **condiciones de frontera periódicas** en todas las direcciones del dominio computacional para simular un sistema infinito [?].
- **Tratamiento de la Rígidez (Stiffness):** Para RRMHD, el desafío numérico es la rigidez del sistema en el límite de alta conductividad ($\sigma \rightarrow \infty$) [? ?]. El código subyacente (extensión de MR-GENESIS) emplea métodos **Implícitos-Explícitos de Runge-Kutta (IMEX-RK)** [? ? ?], o alternativamente, Minimally Implicit Runge-Kutta (MIRK) [?], para manejar los términos rígidos resistivos ($\propto \sigma$) y preservar la estabilidad con un paso de tiempo (Δt) limitado solo por la velocidad de la luz c (condición CFL) [? ? ?].

7.2 Serie de Simulaciones y Parámetros Variados

La serie de simulaciones se diseñó para contrastar la evolución en el límite ideal (RMHD) con la dinámica disipativa de RRMHD, aislando el impacto físico de la resistividad en la propagación y amplificación de la KHI.

7.2.1 Parámetro Variado: Conductividad σ

El parámetro clave de variación es la **conductividad eléctrica** σ (o la resistividad $\eta = 1/\sigma$) [? ?].

- **Régimen Ideal (Referencia):** Se establece una conductividad muy alta (e.g., $\sigma \rightarrow \infty$ o un valor numéricamente grande como $\sigma = 10^6$) para recuperar el límite de Magnetohidrodinámica Ideal Relativista (RMHD), que sirve como referencia teórica y numérica [? ?].
- **Régimen Resistivo (Disipación):** Se varían valores finitos de conductividad (σ moderada o baja, o $\eta > 0$). Por ejemplo, se han probado valores de resistividad como $\eta = 0.02$, $\eta = 0.005$, y $\eta = 0.05$ [? ?].

7.2.2 Objetivos de la Variación

El objetivo principal de esta parametrización es cuantificar la influencia de la resistividad en los fenómenos de la KHI [? ?].

- Tasa de Crecimiento y Estabilización:** Determinar cómo la resistividad finita afecta la tasa de crecimiento exponencial inicial de la inestabilidad (fase lineal), comparando la evolución con las predicciones teóricas lineales (RMHD ideal) [?].
- Amplificación Magnética y Deformación:** Evaluar la capacidad del campo magnético para ser amplificado por el movimiento de cizallamiento y la dinámica vertical en presencia de disipación óhmica. La resistividad se espera que reduzca la capacidad del campo magnético para deformarse y amplificar las perturbaciones iniciales [? ?].
- Morfología y Turbulencia:** Observar cómo la disipación resistiva influye en la transición a la fase no lineal, incluyendo la formación de estructuras turbulentas y la difusión de los gradientes de pequeña escala que surgen en los vórtices [? ?].

7.3 Resultados Obtenidos y Discusión Física

Los resultados del póster, ilustrados a través de las distribuciones de presión, densidad y componentes de velocidad v_y y v_z para diferentes conductividades (Figuras 1, 2, 3 y 4 del póster [?]), muestran una clara diferencia morfológica entre los casos ideal y resistivo.

7.3.1 Tendencias Generales y Efecto de la Difusión

- Difusión Aumentada:** La característica más notable en los resultados resistivos es su naturaleza **más difusiva** en comparación con el caso ideal [? ?]. Esto es un resultado esperado, ya que la resistividad (η) introduce términos disipativos adicionales en las ecuaciones (difusión magnética) [?].
- Localización de Estructuras:** Los vórtices generados por el cizallamiento son las regiones donde se concentran los gradientes más grandes (por ejemplo, cerca de $y = \pm 0.5$ si el cizallamiento se centra en 0) [?].

7.3.2 Interpretación del Rol de la Resistividad

La principal conclusión extraída de la simulación RRMHD con respecto a la KHI es la siguiente:

- Crecimiento Amortiguado:** La resistividad en el plasma magnetizado reduce la capacidad del campo magnético para amplificar y deformar las perturbaciones iniciales [?].
- Efectividad de la Inestabilidad:** En entornos con alta resistividad (baja conductividad), el crecimiento de la inestabilidad es **lento y menos efectivo** [?]. Esto se debe a que la resistividad permite que las líneas de campo magnético se deslicen a través del fluido, disipando la energía magnética y térmica, lo que contrarresta el estiramiento y torsión (amplificación) inducidos por los vórtices [?].
- Turbulencia Reducida:** La formación de estructuras turbulentas se ve obstaculizada por la alta resistividad, ya que la difusión magnética lisa (smooths) las estructuras finas de corriente que se formarían en el límite ideal [? ?].

El análisis de la evolución temporal (no lineal) muestra que, mientras que la teoría lineal predice la *aparición* y la *tasa inicial* de crecimiento, solo las simulaciones RRMHD completas pueden capturar la **saturación** y la morfología vortical en presencia de estos efectos disipativos, lo cual es crucial para comprender la mezcla y el transporte de energía en plasmas astrofísicos no ideales [??].

Tratamiento numérico de la inestabilidad Kelvin-Helmholtz bajo el marco de la RRMHD



B. Martinez-Anzola¹ J. Acuña-Tellez² S. Rodriguez-Garcia³
S. Miranda-Aranguren⁴

bmartineza@udistrital.edu.co¹ jasacunat@udistrital.edu.co² sebrodriguezg@udistrital.edu.co³
smiranda@udistrital.edu.co⁴



RESUMEN

Este trabajo analiza numéricamente la Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KHI) en dos dimensiones en el marco de la Magnetohidrodinámica Resistiva Relativista (RRMHD). La KHI ocurre cuando hay una diferencia de velocidad entre dos capas de fluido o plasma en contacto, generando perturbaciones crecientes con el tiempo. Esta inestabilidad se observa en contextos astrofísicos, como en vientos estelares, discos de acreción, límites de gas en supernovas y choques en jets relativistas. Estudios recientes, como los de Osmanov et al. 2008 [?], Pimentel y Lora-Clavijo [?], y Chow et al. 2023 [?].

En nuestra aproximación a la inestabilidad estudiamos el efecto que la resistividad en el plasma produce en su crecimiento.

ECUACIONES DE LA RRMHD

$$\begin{aligned}\partial_t \psi &= -\nabla \cdot \mathbf{E} + q - \kappa \psi \\ \partial_t \phi &= -\nabla \cdot \mathbf{B} - \kappa \phi \\ \partial_t \mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \psi - \mathbf{J} \\ \partial_t \mathbf{B} &= -\nabla \times \mathbf{E} - \nabla \phi \\ \partial_t q &= -\nabla \cdot \mathbf{J} \\ \partial_t D &= -\nabla \cdot \mathbf{F}_D \\ \partial_t \mathcal{E} &= -\nabla \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{E}} \\ \partial_t \mathbf{S} &= -\nabla \cdot \mathbf{F}_S\end{aligned}$$

Utilizamos el sistema aumentado de las ecuaciones de Maxwell propuesto por Dedner et al. [?]. Donde se introducen las nuevas variables (pseudo-potenciales) ψ y ϕ , que evolucionan de forma similar a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ ó $\nabla \cdot (\mathbf{E} + q)$. Donde q es la densidad de carga y las densidades de masa D , de energía \mathcal{E} y de momentum \mathbf{S} , están dadas por,

$$\begin{aligned}D &= \rho W, \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_{em} + \mathcal{E}_{hyd} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \rho h W^2 - p, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}_{em} + \mathbf{S}_{hyd} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \rho h W^2 \mathbf{v}.\end{aligned}$$

$W = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$ el factor de lorentz y h la entalpia.

CONCLUSIONES

En resumen, la resistividad en plasmas magnetizados reduce la capacidad del campo magnético para deformarse y amplificar las perturbaciones iniciales. En entornos con alta resistividad, el crecimiento de la inestabilidad es lento y menos efectivo, y la formación de estructuras turbulentas se ven favorecidas.

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

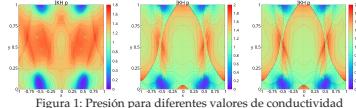


Figura 1: Presión para diferentes valores de conductividad

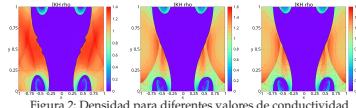


Figura 2: Densidad para diferentes valores de conductividad

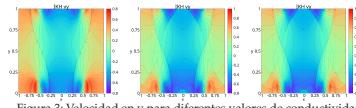


Figura 3: Velocidad en y para diferentes valores de conductividad

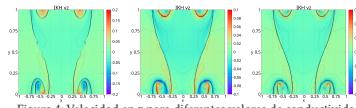
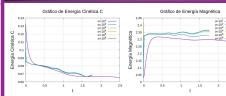


Figura 4: Velocidad en z para diferentes valores de conductividad

SET-UP

$$\begin{aligned}\Gamma &= 4/3 \\ v_y &= A_0 v_{sh} \sin(2\pi x) \exp[-(\frac{y-0.5}{\alpha})^2] \quad \text{si } y > 0.0 \\ v_y &= -A_0 v_{sh} \sin(2\pi x) \exp[-(\frac{y+0.5}{\alpha})^2] \quad \text{si } y \leq 0.0 \\ v_x &= v_{sh} \tanh(\frac{y-0.5}{\alpha}) \quad \text{si } y > 0.0 \\ v_x &= -v_{sh} \tanh(\frac{y+0.5}{\alpha}) \quad \text{si } y \leq 0.0 \\ (B_x, B_y, B_z) &= (\sqrt{2\mu_B p}, 0, \sqrt{2\mu_B p})\end{aligned}$$

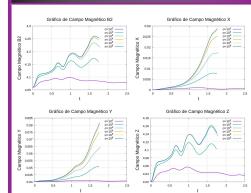
ENERGÍA



Anexos:



CAMPO MAGNÉTICO



REFERENCIAS

- [1] Chow A., et al., 2023, ApJL, 951
- [2] Miranda S., et al., 2018, MNRAS, 488, 249
- [3] Miranda S., et al., 2018, MNRAS, 476, 3837
- [4] Osmanov S., et al., 2008, A&A, 491, 101
- [5] Palenzuela C., Lehner L., Reula O., Rezzolla L., 2009, MNRAS, 394
- [6] Pimentel O. M., Lora-Clavijo F. D., 2019, MNRAS, 490

Fig. 1 Poster con toda la información.

8 Aspectos Pendientes y Extensión del Análisis en RRMHD

Las simulaciones de Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KHI) en Magnetohidrodinámica Resistivo-Relativista (RRMHD), especialmente aquellas que emplean una geometría de capa de cizallamiento plana (slab), dejan varios aspectos cruciales sin abordar, los cuales requieren investigación adicional en el régimen no lineal o mediante configuraciones físicas y numéricas más avanzadas.

- **Configuraciones de Campo Magnético no Paralelo:** El póster se centra típicamente en campos magnéticos paralelos al flujo de cizallamiento. Es esencial explorar:
 1. *Campos Transversales u Oblicuos:* La inestabilidad KH es profundamente sensible a la orientación del campo magnético. Un campo puramente transversal (B perpendicular al flujo) presenta un rango de inestabilidad incluso para propagación paralela. La propagación oblicua es necesaria para el crecimiento en flujos ultrarelativistas.
 2. *Geometría Curva y 3D:* La simulación 2D omite los efectos de curvatura presentes en jets astrofísicos (cilíndricos) y no puede capturar la **amplificación del campo magnético por efecto dínamo**. La extensión a tres dimensiones (3D) es necesaria para estudiar el crecimiento de la KHI y la turbulencia resultante.
- **Estabilidad Numérica a Largo Plazo y Rigidez:** Aunque el uso de esquemas **IMEX-RK** (Implicit-Explicit Runge-Kutta) resuelve el problema de la rigidez (stiffness) asociada a la alta conductividad ($\sigma \rightarrow \infty$) en el paso de tiempo, la estabilidad a largo plazo en el régimen turbulento sigue siendo un desafío:
 1. *Mantenimiento de Restricciones:* En simulaciones prolongadas, la violación de la restricción de divergencia magnética ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) puede llevar a inestabilidades artificiales. Métodos de corrección como GLM (Generalized Lagrange Multiplier) deben demostrar su eficacia para disipar estos errores a lo largo de extensos tiempos dinámicos.
 2. *Estabilidad Asintótica:* La robustez del método debe evaluarse en términos de σ -estabilidad, asegurando que el crecimiento de los errores (o inestabilidades residuales) no exceda una tasa tolerable durante escalas de tiempo de interés astrofísico (e.g., msegundos o segundos).
- **Exploración de la Fase No Lineal Tardía:** Más allá de la saturación inicial, la fase no lineal de KHI en RRMHD presenta fenómenos de conversión de energía y morfología complejos:
 1. *Reconexión Magnética:* La resistividad física ($\eta > 0$) permite la **reconexión magnética** dentro de las láminas de corriente (current sheets) que se forman en los vórtices KH. Este es el mecanismo principal de conversión de energía magnética a energía térmica/cinética en plasmas no ideales.
 2. *Cascada y Turbulencia Resistiva:* Se espera observar la transición a un estado de **turbulencia impulsada** por la KHI, donde la resistividad lisa (smooths) las estructuras de campo fino y reduce la amplificación magnética.

3. *Cuantificación de la Amplificación:* El campo poloidal es estirado y amplificado por el movimiento vortical en la fase no lineal. Es crucial cuantificar esta amplificación en función de la conductividad finita para determinar la eficiencia de la KHI como mecanismo de campo semilla.

9 Preguntas Estructuradas para Exposición de Póster RRMHD-KHI

1. Deducción y formulación tensorial completa de las ecuaciones de RRMHD

Técnica ¿Cómo se define el término de corriente resistiva rígida (\mathbf{J}_s) en la ley de Ohm relativista, y cuáles son las principales implicaciones de esta dependencia para la estructura del sistema de ecuaciones resultante? [? ?]

Técnica/Conceptual Dado que las ecuaciones RRMHD se formulan como leyes de conservación, ¿por qué es necesario aumentar el sistema con pseudopotenciales escalares (ψ y ϕ) (enfoque GLM) en lugar de simplemente usar las ecuaciones de Maxwell para hacer cumplir las restricciones de divergencia? [? ? ? ?]

Conceptual El sistema RRMHD se clasifica como hiperbólico con términos de relajación; en el límite de conductividad infinita ($\sigma \rightarrow \infty$), ¿cuál es el "sistema de equilibrio" ($\mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}) = 0$) al que converge el RRMHD, y cuáles son sus características dinámicas? [? ? ?]

2. Análisis de las inestabilidades de Kelvin–Helmholtz (KH) en RRMHD

Física ¿Cuál es el papel dual de la resistividad finita (η) en la dinámica de KH? Es decir, ¿cómo afecta la capacidad del campo magnético para deformarse (amplificación) y cómo se relaciona esto con la disipación en las estructuras de corriente? [? ?]

Física/Interpretativa En la transición de RMHD ideal a RRMHD, ¿cómo se manifiesta la resistividad en términos de estabilización o desestabilización de la interfaz en comparación con el efecto estabilizador de la tensión superficial del campo magnético? [? ?]

Técnica En el sistema de RRMHD (o RMHD), ¿cuáles son los modos de onda específicos (por ejemplo, magnetoacústicos lentos o rápidos) que se encuentran en las soluciones de la relación de dispersión lineal que impulsan la inestabilidad KH? [?]

3. Presencia y relevancia astrofísica de las inestabilidades KH resistivo-relativistas

Física/Interpretativa Considerando fenómenos como los jets relativistas de AGN o la magnetosfera de púlsares, ¿en qué regiones o estructuras físicas (a escala, e.g., de láminas de corriente) el modelado RRMHD es indispensable sobre el RMHD ideal? [? ? ?]

Física ¿Cómo se relaciona la inestabilidad KH con la amplificación de campos magnéticos semilla en fuentes como los GRBs o las PWNe, y cuál es la limitación física que introduce la resistividad finita en la eficiencia de este proceso? [?]

Interpretativa ¿Por qué la dependencia del valor de la conductividad (σ) con respecto a las variables termodinámicas (ρ, ϵ) es crucial para modelar correctamente la disipación en los procesos astrofísicos no ideales? [?]

4. Solución lineal de la inestabilidad y los límites del régimen lineal

Técnica En el contexto lineal, se sabe que los modos de Alfvén típicamente no contribuyen a la inestabilidad KH en la geometría de cizallamiento paralela al campo; ¿cuál es el resultado análogo de esta linealización en el marco de RMHD con polarización magnética? [?]

Crítica Una vez que la perturbación entra en la fase no lineal, ¿qué fenómenos clave, como la saturación del crecimiento, la mezcla turbulenta o la formación de vórtices, no se pueden predecir o describir mediante la aproximación lineal? [? ? ?]

Física/Interpretativa ¿Qué diferencia la fase inicial de crecimiento de la KH de las fases no lineales subsiguientes (p. ej., la fase de múltiples vórtices o la transición a un único vórtice) y cómo estas fases se ven modificadas por la resistividad? [? ? ?]

5. Descripción del método numérico utilizado (inspirado en Mizuno)

Metodológica ¿Por qué los esquemas de integración temporal puramente explícitos (como Runge-Kutta estándar) se vuelven inestables cuando se resuelve el sistema RRMHD, especialmente en el límite de alta conductividad ($\sigma \rightarrow \infty$)? [? ? ?]

Metodológica Explique el principio fundamental de los métodos IMEX Runge-Kutta (Implicit-Explicit) y cómo esta división entre términos rígidos (\mathbf{R}/ϵ) y no rígidos (\mathbf{F}) permite un paso de tiempo (Δt) limitado solo por la condición CFL hiperbólica. [? ?]

Metodológica/Técnica En la implementación RRMHD con esquemas de captura de choques (HRSC), ¿cuáles son las variables evolucionadas (\mathbf{U}) y cuáles son las variables primitivas (\mathbf{V}), y por qué la conversión entre \mathbf{U} y \mathbf{V} es un paso computacionalmente difícil que requiere resolviendo iterativos? [? ? ?]

6. Set-up y resultados obtenidos en las simulaciones presentadas en el póster

Metodológica ¿Qué índices adiabáticos (Γ) y qué tipo de perfil de cizallamiento de velocidad (tanh) y campo magnético inicial se utilizaron, y por qué $\Gamma = 4/3$ es una elección estándar para plasmas relativistas? [? ?]

Física/Interpretativa ¿Cómo demuestran las simulaciones (Figuras 1-4) que la alta resistividad hace que el crecimiento de la inestabilidad sea "lento y menos efectivo", y qué evidencia morfológica hay de una mayor difusión en el régimen resistivo? [? ? ?]

Interpretativa El póster menciona el uso de la limpieza de divergencia GLM; ¿cómo verifica la simulación que la restricción $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se mantiene satisfactoriamente, especialmente en la vecindad de las discontinuidades o vórtices? [? ?]

7. Aspectos pendientes del estudio: influencia de campos magnéticos, estabilidad del método en tiempos largos y fase no lineal

Crítica/Prospectiva ¿Por qué el estudio de la KHI requiere extender la simulación a tres dimensiones (3D) para capturar completamente la fase no lineal y fenómenos como la turbulencia o la amplificación del campo por efecto dínamo? [?]

- Crítica/Metodológica ¿Qué estrategias se han adoptado o se proponen para garantizar la estabilidad numérica a muy largo plazo de las simulaciones RRMHD, especialmente para evitar la acumulación de errores de truncamiento asociados a la divergencia o a la inversión de variables? [? ?]
- Prospectiva Más allá de los campos paralelos al flujo, ¿qué configuraciones de campo magnético (p. ej., campos oblicuos o transversales) deberían explorarse para caracterizar completamente el rango de estabilidad/inestabilidad de la KH relativista? [? ?]