# Fragenkatalog zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie"

Jannis Klingler

19. September 2020

**Frage 1:** Wie ist die Tangentialebene parametrisiert?

Nicht klar was hier gemeint ist. Es gibt aber ein paar Zusammenhänge zur Parametrisierung der Fläche. Zum einen lässt sich feststellen, dass die beiden Vektoren $\frac{\partial F}{\partial u^1}$ und $\frac{\partial F}{\partial u^2}$ eine Basis der Tangentialebene bilden, da der Rang der Jacobimatrix $D_u F$ gerade 2 ist und somit die beiden Vektoren eine Ebene aufspannen. Es gilt mit Proposition 2.13 für einen Punkt $p \in S$ sogar

$$T_p S = \mathrm{Bild}(D_{u_0} F) = span\left(\frac{\partial F}{\partial u_0^1}, \frac{\partial F}{\partial u_0^2}\right),$$

wobei $u_0 = F^{-1}(p) \in U$. Die von den beiden Vektoren erzeugte Ebene entspricht also gerade der Tangentialebene im Punkt $p$.
Als zweites steht das Normalenfeld eines Punktes $p \in S$ senkrecht auf der Tangentialebene in diesem Punkt. Es gilt also

$$T_p S = N(p)^{\perp}.$$

Das Normalenfeld lässt sich mit den Vektoren $\frac{\partial F}{\partial u^1}$ und $\frac{\partial F}{\partial u^2}$ berechnen, also mit der Parametrisierung der Fläche.

**Frage 2:** Warum bildet die Weingartenabbildung $T_p S$ auf $T_p S$ ab?

*(Siehe auch Bär S. 119)* Die Weingartenabbildung einer regulären Fläche $S \in \mathbb{R}^3$ mit Orientierung gegeben durch das Einheitsnormalenfeld $N$ ist definiert durch

$$W_p(X) = -d_p N(X).$$

Wir betrachten also das Differential der Gauß-Abbildung $N : S \to S^2$.

**Erinnerung.** *Für das Differential $d_p f$ einer glatten Abbildung $f : S_1 \to S_2$ zwischen zwei regulären Flächen $S_1$ und $S_2$ in $p$ gilt:*

$$d_p f : T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2.$$

*Vergleiche auch Bär Buch S. 108.*

Damit gilt für das Differential der Gauß-Abbildung:

$$d_p N : T_p S \to T_{N(p)} S^2.$$

Für einen Punkt $p \in S^2$ gilt nun $T_p S^2 = p^{\perp}$. Der Punkt $N(p)$ liegt offenbar in $S^2$ also erhalten wir

$$T_{N(p)} S^2 = N(p)^{\perp}.$$

Weiter ist das Normalenfeld einer Fläche $S$ durch die Eigenschaft $N(p) \perp T_p S$ definiert *(Vergleiche Bär S. 115)*. Es ergibt sich also

$$T_{N(p)} S^2 = N(p)^{\perp} = T_p S.$$

Also bildet die Weingartenabbildung von $T_p S$ auf $T_p S$ ab.

**Frage 3:** Welche Richtung des Beweises von Satz 1.42 funktioniert nicht, wenn die Kurve nicht einfach geschlossen ist? Gegenbeispiel einer Kurve hierfür?

Gegenbeispiel siehe Bär Buch S. 55.

**Frage 4:** Sind Kreise und Geraden die einzigen ebenen Kurven mit konstanter Krümmung?

Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung mit $f(t) = \kappa$ für alle $t \in I$. Dann gibt es mit dem Hauptsatz der ebenen Kurventheorie eine bis auf Dahinterschaltung von orientierungserhaltenden euklidischen Bewegungen (Drehung und Verschiebung) eindeutig bestimmte, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa$. Falls $\kappa = 0$ so ist $c$ offensichtlich eine Gerade. Nach dem Hauptsatz ist diese bis auf Dahinterschaltung orientierungserhaltender euklidischer Bewegungen eindeutig. Für alle $\kappa > 0$ gibt es ein $r > 0$ mit $\kappa = \frac{1}{r}$. Wir wissen, dass jeder gegen den Uhrzeigersinn verlaufende Kreis mit Radius $r$ die Krümmung $\frac{1}{r}$ hat. Umgekehrt hat jeder im Uhrzeigersinn verlaufende Kreis mit Radius $r$ die Krümmung $-\frac{1}{r}$. Wie oben begründet sich auch hier mit dem Hauptsatz die Eindeutigkeit dieser Kurven. Damit finden wir für alle $\kappa \in \mathbb{R}$ eine bis auf orientierungserhaltende euklidische Bewegung eindeutig bestimmte Kurve, mit Krümmung $\kappa$, die entweder eine Gerade oder ein Kreis ist.

**Frage 5:** Bezug der Tangentialebene zum Gradienten?

Hier wird vermutlich Proposition 2.15 gemeint sein. Hierbei ist der Zusammenhang zu einer regulären Fläche $S$, die sich mithilfe einer Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ darstellen lässt *(Verleiche hierzu auch Proposition 2.4)*. Hierbei gilt

$$S = \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = 0\}$$

und $\mathrm{grad} f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$. Nun gilt mit Proposition 2.15, dass der Gradient von $f$ für alle $p \in S$ senkrecht auf der Tangentialeben, das heißt es gilt

$$T_pS = \mathrm{grad} f(p)^\perp.$$

**Frage 6:** Zweite kovariante Ableitung erläutern.

Todo

**Frage 7:** Warum ist die Definition des Normalenvektors im Raum nicht eindeutig?

Auf Seite 65 im Bär Buch steht hierzu eine Erklärung.1

**Frage 8:** Wie sieht die Taylorentwicklung einer Raumkurve mithilfe von Krümmung und Torsion aus?

Todo

**Frage 9:** Was ist die Winkelfunktion $\theta$? Bild dazu?

Ein hilfreiches Video.

**Frage 10:** Bär Buch Seite 168. Beispiel 4.2.3. Wie kommt man von der ausgerechneten Gleichung auf die Darstellung von $\xi^j$?

Todo

**Frage 11:** Beweis zu 2.38:
Sei $S$ eine kompakte nicht leere reguläre Fläche. Wegen der Kompaktheit ist $S$ also auch beschränkt und es existiert ein genügend großer Radius $R > 0$, sodass $S$ in der abgeschlossenen Kugel $\overline{B_R(0)}$ enthalten ist, das heißt

$$S \subseteq \overline{B_R(0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| \leq R\}.$$

Wir wollen den Radius der Kugel nun solange verkleinern bis die Kugeloberfläche die Fläche berührt. Wir werden festellen, dass wir hierbei einen Punkt erhalten, dessen Gauß-Krümmung positiv ist. Wir wählen gerade den minimalen Radius für die Kugel, sodass die Fläche $S$ noch in der abgeschlossenen Kugel enthalten ist. Dafür definieren wir

$$R_0 := \inf\{R > 0 \mid S \subseteq \overline{B_R(0)}\}.$$

Es gilt also offenbar $S \subseteq \overline{B_{R_0}(0)}$. Als nächstes müssen wir uns also überlegen warum die Fläche $S$ und die Kugeloberfläche $S_{R_0}(0) = \partial\overline{B_{R_0}(0)}$ einen Schnittpunkt haben, also $S \cap S_{R_0}(0) \neq \emptyset$. Angenommen der Schnitt beider Mengen ist leer, dann gibt ein $\varepsilon > 0$ nämlich

$$\varepsilon := min\{||x - y|| \mid x \in S, y \in S_{R_0}(0)\}.$$

Wir bemerken, dass dieses Minimum existiert, da sowohl $S$ als auch $S_{R_0}(0)$ jeweils abgeschlossene Mengen sind. Weiter ist aber auch $S$ nun in dem um $\varepsilon$ verkleinerten abgeschlossenen Ball $\overline{B_{R_0-\varepsilon}(0)}$ enthalten, also

$$S \subseteq \overline{B_{R_0-\varepsilon}(0)},$$

was jedoch im Widerspruch zur Annahme steht, dass $R_0$ der minimale Radius mit dieser Eigenschaft ist. Damit ist der Schnitt von $S$ und $S_{R_0}(0)$ nicht leer und wir erhalten also einen Punkt $p \in S \cap S_{R_0}(0)$. Es bleibt nun noch zu zeigen, dass für $p \in S$ gilt $K(p) > 0$.
Zunächst überlegen wir uns, dass $S_{R_0}(0)$ eine reguläre Fläche ist und dass $S$ und $S_{R_0}(0)$ in $p$ dieselbe Tangentialebene haben:

$$T_pS = T_pS_{R_0}(0).$$

Es gilt $T_pS_{R_0}(0) = N(p)^\perp = p^\perp$ und damit ist

$$T_pS_{R_0}(0) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X, p\rangle = 0\}.$$

Angenommen die Tangentialebenen stimmen nicht überein, dann gibt es $X \in T_pS$ mit $X \notin T_pS_{R_0}(0)$, das heißt $\langle X, p\rangle \neq 0$. Da $X \in T_pS$ liegt, gibt es eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Da $c$ in der Fläche $S$ liegt und die Fläche wiederum in $\overline{B_{R_0}(0)}$ enthalten ist gilt

$$||c(t)|| \leq R_0$$

für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Weiter gilt $||c(0)|| = ||p|| = R_0$, also hat die Betragsfunktion $||c||$ in 0 ein lokales Maximum und damit offensichtlich auch $||c||^2$. Es folgt also $(||c||^2)'(0) = 0$ und damit

$$0 = (||c||^2)'(0) = 2\langle c', c\rangle(0) = 2\langle X, p\rangle.$$

Also gilt $\langle X, p\rangle = 0$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $X \notin T_pS_{R_0}(0)$ steht. Es gibt also keinen Punkt der in $T_pS$ liegt und nicht in $T_pS_{R_0}(0)$ und damit gilt $T_pS \subseteq T_pS_{R_0}(0)$. Da $\dim T_pS = 2 = \dim T_pS_{R_0}(0)$ folgt $T_pS = T_pS_{R_0}(0)$.

Wir wollen nun Normalschnitte von $S$ und $S_{R_0}(0)$ im Punkt $p$ betrachten. Sei $E$ dazu eine Ebene, die durch den Normalenvektor $N(p)$ und einen Tangentialvektor aus $T_pS = T_pS_{R_0}(0)$ aufgespannt wird. Die Normalkrümmung der Kugeloberfläche in Richtung der Ebene hat den Wert $\left|\frac{1}{R_0}\right|$ ($\frac{1}{R_0}$ falls die Normale $N(p)$ nach innen zeigt und $-\frac{1}{R_0}$ falls die Normale nach außen zeigt). Dann sehen wir, dass $S \cap E$ immer innerhalb der Kreislinie $S_{R_0}(0) \cap E$ liegt und diese in $p$ berührt. Also gilt für die Normalkrümmung der Fläche $S$ in Richtung der Ebene

$$|\kappa_{\text{nor}}| \geq \frac{1}{R_0}.$$

Da wir den Tangentialvektor der $E$ aufspannt beliebig gewählt haben sind alle Normalkrümmungen in $p$ dementsprechend beschränkt. Betrachten wir nun die Werte der Hauptkrümmungen $\kappa_1$ und $\kappa_2$ der Fläche $S$, welche bekanntlich das Minimum bzw. Maximum aller Normalkrümmungswerte sind (*siehe Bär Buch S.127*), dann gilt

1. Falls die Normale nach innen zeigt ist $\kappa_1, \kappa_2 \in [\frac{1}{R_0}, \infty)$ und damit
$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 \geq \frac{1}{R_0} \cdot \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_0^2}.$$
2. Falls die Normale nach außen zeigt ist $\kappa_1, \kappa_2 \in (-\infty, -\frac{1}{R_0}]$ und damit $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \in [\frac{1}{R_0^2}, \infty)$ also
$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 \geq \frac{1}{R_0^2}.$$

In beiden Fällen erhalten wir also

$$K(p) = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \geq \frac{1}{R_0^2} > 0.$$