情報通信工学第一 中間試験

2007/11/16 武田・長谷川

1. 情報源アルファベットを $\{0, 1\}$ とする。図の単純マルコフ情報源 L について、エントロピーを以下の手順で計算せよ。

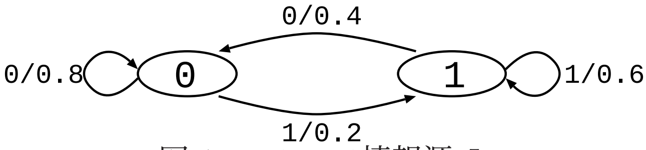

図 1: マルコフ情報源 L

   (a) 全ての状態 $q_1 := (0), q_2 := (1)$ について、各々の状態にあることを仮定したときのエントロピー $H_1(L), H_2(L)$ を計算せよ。ただし $\log_2 3 = 1.59, \log_2 5 = 2.32$ である。

   (b) 各々の状態 q_1, q_2 にある確率をそれぞれ p_1, p_2 とする。遷移状態行列 $A := [a_{ij} := p(q_j|q_i)]$ を用いて、以下を満たす定常な状態における p_1, p_2 $(0 \leq p_1, p_2 \leq 1,\ p_1 + p_2 = 1)$ を求めよ。

$$(p_1, p_2) = (p_1, p_2)\, A$$

   (c) 問 (b) の p_1, p_2 による問 (a) のエントロピーの期待値として、マルコフ情報源のエントロピー $H(L)$ を求めよ。

2. 情報源アルファベットを $\{a, b\}$ とする。このアルファベット中の情報源記号 a, b の生起確率がそれぞれ $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ である無記憶情報源を考える。

   (a) この情報源の出力を 3 記号ずつまとめることで 3 次の拡大情報源とみなす。この拡大情報源についてハフマン符号を用い 2 元符号化せよ。

   (b) 拡大情報源のハフマン符号について、“平均符号長” を求めよ。ただしここでの平均符号長とはオリジナルの情報源の 1 情報シンボルあたりの符号長の期待値を言う。

   (c) この情報源の出力を n 記号ずつまとめることで n 次の拡大情報源とみなしてハフマン符号化する。$n \to \infty$ とすることで問 (b) の平均符号長がどのような値に収束するか述べよ。

3. M 個の情報記号 $L_1, L_2, \ldots, L_M$ が生起確率の降順に並べられているとする。すなわち、$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_M$ かつ $p_1 + p_2 + \cdots + p_M = 1$ とする。累積確率 Π_s $(s = 1, 2, \ldots, M)$ を

$$\Pi_s = p_1 + p_2 + \cdots + p_{s-1}$$

   と置き、Π_s を 2 進小数表記する。この表記を以下を満足する ℓ_s 桁で打ち切り、小数点以下の部分を L_s の符号語とする。

$$-\log_2 p_s \leq \ell_s < -\log_2 p_s + 1$$

   (例: $p_1 = \Pi_1 = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ならば、2 進小数表記は 0.0 であり、$\ell_1 = 1$ から符号語は “0”)

   (a) $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{4}$ の場合について全ての符号語を求めよ。これが語頭条件を満たすことを確認せよ。なお、$\log_2 3 = 1.59$ とせよ。

   (b) 一般の場合について、得られた符号がクラフト＝マクミランの不等式を満たすことを示せ。

   (c) 一般の場合について、符号の瞬時復号性を語頭条件から示せ。
   (Hint: Π_s と Π_{s+1} の小数展開とは ℓ_s 桁以前が異なることを利用せよ)