

КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ 5  
«ФОРМАЛІЗАЦІЯ ДИСКРЕТНО-ПОДІЙНИХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНОЮ  
МЕРЕЖЕЮ ПЕТРІ»

**5.1 Завдання до виконання**

**1. Розробити мережу Петрі для наступної задачі (20 балів):**

Конвеєрна система складається з п'ятих обслуговуючих пристроїв, розташованих уздовж стрічки конвеєра. Деталі надходять на опрацювання на перший пристрій із постійною швидкістю, рівної 4 одиниці за 1 хвилину. Тривалість обслуговування на кожному пристрої розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням 1 хвилину. Вільного місця перед кожним конвеєром немає, тому пристрій може зняти деталь із конвеєра, тільки якщо знаходиться в стані «вільний». Якщо перший пристрій вільний, то деталь обробляється на ньому. По закінченні оброблення деталь залишає систему. Якщо перший пристрій зайнятий у момент надходження деталі, деталь по конвеєру надходить до другого пристрою. Інтервал проходження деталі між пристроями дорівнює 1 хвилину. Якщо при прямуванні деталі по конвеєру всі пристрої були зайняті, вона повертається до першого пристрою з затримкою 5 хвилин.

Метою моделювання є визначення статистичних характеристик часу перебування деталі в системі, завантаження обслуговуючих пристроїв і кількості зайнятих пристроїв.

**2. Розробити мережу Петрі для наступної задачі (25 балів):**

Експериментальна роботизована гнучка виробнича система має два верстати із числовим пультом керування, три роботи, пункт прибуття і склад оброблених деталей. Деталі прибувають на пункт прибуття кожні 40 секунд згідно з експоненціальним законом розподілу, захоплюються одним з вільних роботів і переміщуються ним до першого верстата, після чого робот звільняється. Після завершення обробки на першому верстаті деталь захоплюється одним з роботів і переміщується на другий верстат, а після обробки на другому верстаті – одним з роботів переміщується на склад оброблених деталей. Кожний з верстатів може одночасно обробляти до трьох деталей.

Час переміщення робота між пунктом прибуття та першим верстатом, першим і другим верстатом, другим верстатом та пунктом зберігання оброблених деталей складає відповідно 6, 7, і 5 секунд незалежно від того, холостий це хід, чи ні. Роботу потрібний час  $8 \pm 1$  секунд на захоплення або вивільнення деталей. Час обробки на першому верстаті розподілений за нормальним законом із середнім значенням 60 секунд і стандартним відхиленням 10 секунд. Середній час обробки на другому верстаті дорівнює 100 секунд і має експоненціальний закон розподілу.

Метою моделювання є визначення найкращого (з точки зору підвищення

пропускної здатності гнучкої виробничої системи) способу закріплення роботів до операцій. Можливі варіанти закріплення:

- 1) по одному роботу на кожний з трьох шляхів переміщення деталей (пункт прибуття – перший верстат, перший верстат – другий верстат, другий верстат, склад);
- 2) кожний робот може використовуватися на кожному шляху переміщення деталей(при цьому повинен займатися найближчий з роботів).

3. Розробити мережу Петрі для наступної задачі **(25 балів)**:

На маршруті приміського сполучення працюють два мікроавтобуси (А і В), кожний з яких має  $n$  місць. Мікроавтобус А користується більшою популярністю, ніж автобус В, оскільки водій мікроавтобуса А їздить акуратніше і швидше. Тому пасажир, який підійшов до зупинки, сідає в мікроавтобус В тільки у випадку, коли автобуса А немає. Мікроавтобус відправляється на маршрут, якщо всі місця в ньому зайняті. Пасажири підходять до зупинки через  $0,5 \pm 0,2$  хвилин і, якщо немає мікроавтобусів, утворюють чергу. Якщо черга більша, ніж 30 осіб, то пасажир не стає у чергу і йде до іншого маршруту. Припускається, що всі пасажири їдуть до кінця маршруту. На проходження маршруту мікроавтобус А витрачає  $20 \pm 5$  хвилин, а мікроавтобус В –  $30 \pm 5$  хвилин. Після того, як пасажири звільнили автобус (протягом часу  $5 \pm 1$  хвилин), він їде у зворотному напрямку тим же чином.

Плата за проїзд складає 20 гривень. Авто підприємство стільки ж втрачає (недоотримує), якщо пасажир, прийшовши на зупинку, не стає у чергу і обирає інший маршрут.

Метою моделювання є визначення таких характеристик:

- час очікування пасажира у черзі;
- кількість місць  $n$  (не більше 25), при якому час очікування в черзі пасажира буде мінімальним;
- виручку автопідприємства за день від маршруту, якщо мікроавтобуси працюють 10 годин на добу.

4. Розробити мережу Петрі для наступної задачі **(30 балів)**:

У супермаркеті планується ввести систему управління запасами холодильників. Час між надходженнями замовлень на холодильники має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 0,2 тижні. Якщо покупцю знадобився холодильник тоді, коли його в запасі немає, він у 80% випадків відправляється в інший найближчий магазин, представляючи тим самим продаж, що не відбувся для даного універмагу. У 20% таких випадків робиться повторне замовлення, і покупці чекають надходження наступної партії вантажу. Магазин використовує періодичну систему перегляду стану запасів, у якому запас проглядається кожні 4 тижні і приймається рішення про необхідність здійснення замовлення. Стратегія прийняття рішення складається в розміщенні замовлення, що доводить запас до контрольного рівня, що складає 72 холодильники. Поточний стан запасу визначається як наявний запас плюс

замовлені раніше приймачі і мінус невдоволений попит. Якщо поточний стан запасів менше або дорівнює 18 холодильникам (точка замовлення), здійснюється розміщення замовлення. Час доставки (час між розміщенням замовлення і його одержання) постійний і складає 3 тижні. Початкові умови: стан запасу - 72 холодильника, невдоволеного попиту немає.

Визначити середню кількість холодильників у запасі, середній час між продажами, що не здійснилися.

## 5.2 Теоретичні відомості з розробки мереж Петрі

### 5.2.1 Мережі Петрі з часовими затримками

Мережі Петрі є засобом формального опису процесів функціонування дискретних систем. У дискретній системі зміни її стану трапляються в особливі моменти часу, коли виникають умови для здійснення події. Здійснення події означає зміну стану системи, а значить, виникнення або не виникнення умов для інших подій. Процес функціонування дискретної системи – це упорядкована в часі послідовність подій.

Розглянемо, наприклад, процес обслуговування клієнтів звичайним банкоматом. Подія перша полягає у тому, що клієнт підходить до банкомату. Подія друга - клієнт розпочав виконувати потрібні йому операції. Подія третя - клієнт закінчив виконувати потрібні йому операції. Подія четверта – клієнт залишив банкомат. Якщо у момент, коли клієнт з'явився перед банкоматом, банкомат зайнятий іншим клієнтом, то клієнт очікує звільнення банкомату. Умови, що передують виконанню певної події називають *передумовами*. Умови, які є результатом здійснення події, називають *післяумовами*. Так, передумовами події «клієнт розпочав виконувати операції» являються умови а) «банкомат вільний» та б) «у черзі клієнтів є клієнт». Післяумовою події «клієнт розпочав виконувати операції» являється умова «клієнт обслуговується». Передумовами події «клієнт закінчив виконувати операції» являється умова «клієнт обслуговується». Післяумовами цієї події являються умови а) «банкомат вільний» та б) «є обслугований клієнт». Складемо таблицю взаємозв'язків між подіями та умовами (табл. 5.1):

Таблиця 5.1

Таблиця взаємозв'язків між подіями та умовами

<i>Подія</i>	<i>Передумови події</i>	<i>Післяумови події</i>
«клієнт підійшов до банкомату»	«можливо, що клієнт підійде до банкомату»	«у черзі клієнтів є клієнт»
«клієнт розпочав виконувати операції»	«у черзі клієнтів є клієнт»; «банкомат вільний»	«клієнт обслуговується»
«клієнт закінчив виконувати операції»	«клієнт обслуговується»	«банкомат вільний»; «є обслугований

		клієнт»
«клієнт залишив банкомат»	«є обслугований клієнт»	«кількість обслугованих клієнтів збільшилась на одиницю»;

При графічному представленні мережі Петрі користуються такими позначеннями (рисунок 5.6). Події зображуються планками, які називають *переходами*. Умови для виникнення подій зображуються кругами, які називають *позиціями*. Зв'язки між позиціями та переходами зображуються дугами. Виконання (або не виконання) умови зображується наявністю (або відсутністю) *маркери* в позиції. Маркер позначається крапкою. В позиції може знаходитись не одна маркер, а декілька, що означає багатократне виконання умови запуску переходу. Число, яке записане в позиції, означає кількість маркерів, що міститься в ній. Якщо передумовою запуску являється наявність не однієї, а певної кількості маркерів у позиції, то між позицією та переходом існує не один, а кілька зв'язків. Для великої кількості зв'язків введемо позначення пучка зв'язків - дуга із косою рисою та числом біля неї, яке означає кількість зв'язків у пучку зв'язків.

## Е Л Е М Е Н Т И М Е Р Е Ж І П Е Т Р І



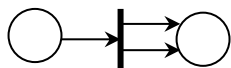


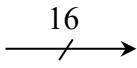
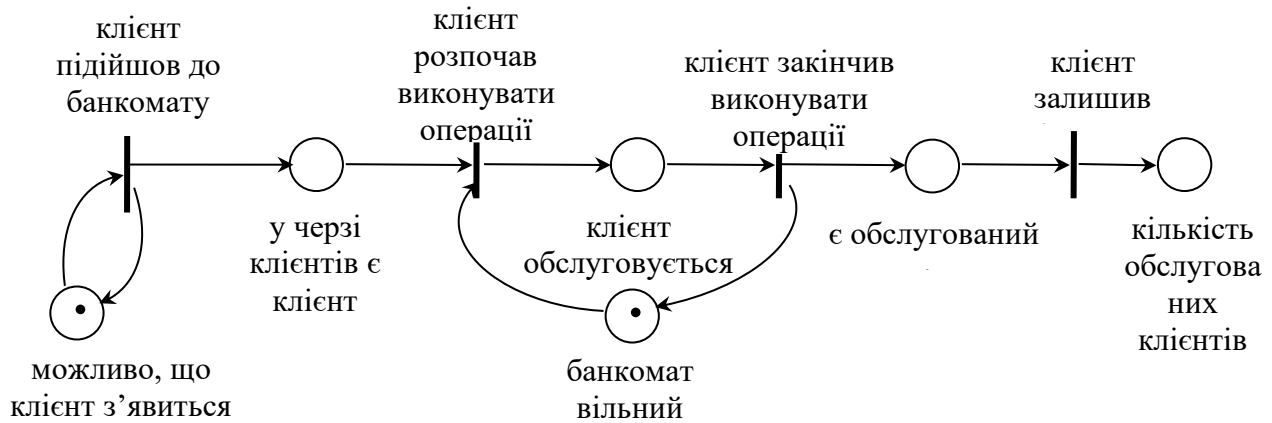
Перехід		позначає подію
Позиція		позначає умову
Дуга		позначає зв'язки між подіями та умовами
Маркер(один)		позначає виконання (або не виконання) умови
Багато фішок		позначає багатократне виконання умови
Багато дуг		позначає велику кількість зв'язків

Рисунок 5.6. Елементи мережі Петрі

Скористаємось графічними позначеннями і представимо процес обслуговування клієнтів банкоматом мережею Петрі (рисунок 5.7).



**Рисунок 5.7 Мережа Петрі, яка представляє процес обслуговування клієнтів банкоматом**

Коли спрацює перехід «клієнт підійшов до банкомату», у позиції «у черзі клієнтів є клієнт» з'явиться маркер. Наявність маркерів у позиціях «у черзі клієнтів є клієнт» та «банкомат вільний» означає, що виконані умови для події «клієнт розпочав виконувати операції». При запуску переходу «клієнт розпочав виконувати операції» маркери з позицій «у черзі клієнтів є клієнт» та «банкомат вільний» видаляються, а в позиції «клієнт обслуговується» маркер з'являється. Наявність маркеру в позиції «клієнт обслуговується» означає, що виконані умови для події «клієнт закінчив виконувати операції». При запуску цього переходу маркер з позиції «клієнт обслуговується» видаляється, а в позиції «банкомат вільний» та «є обслугований клієнт» маркери додаються. Наявність маркеру в позиції «є обслугований клієнт» являється умовою запуску переходу «клієнт залишає банкомат». При запуску цього переходу маркер з позиції «є обслугований клієнт» видаляється.

На перший погляд здається, що умова «банкомат вільний» являється зайвою. Але наявність умови «банкомат вільний» забезпечує, що обслуговування клієнтів здійснюється по-одному.

Випадковий характер процесів, які моделюються, проявляється у випадковому запуску переходів, для яких виконані передумови: якщо виконані передумови одночасно для декількох переходів, то послідовність їх запуску визначається випадком.

В процесі обслуговування клієнтів банкоматом можемо спостерігати, наприклад, таку послідовність переходів:

- клієнт підійшов до банкомату;
- клієнт розпочав виконувати операції;
- клієнт закінчив виконувати операції;
- клієнт залишив банкомат;
- клієнт підійшов до банкомату.

Наступна послідовність переходів теж являється можливою:

- клієнт підійшов до банкомату;
- клієнт розпочав виконувати операції;
- клієнт підійшов до банкомату;

клієнт закінчив виконувати операції;  
клієнт підійшов до банкомату;  
клієнт залишив банкомат;  
клієнт розпочав виконувати операції;  
клієнт закінчив виконувати операції;  
клієнт залишив банкомат;  
клієнт розпочав виконувати операції;  
клієнт закінчив виконувати операції;  
клієнт залишив банкомат.

У першому випадку клієнтам не доводиться очікувати звільнення банкомату, а у другому спостерігається черга клієнтів до двох чоловік.

На рисунку 5.8 представлена послідовність дій, яку потрібно виконати досліднику для формалізації системи засобами мережі Петрі.

**Для того, щоб представити систему засобами мереж Петрі потрібно:**

- виділити події, що виникають в системі, і поставити у відповідність кожній події перехід мережі Петрі;
- з'ясувати умови, при яких виникає кожна з подій, і поставити у відповідність кожній умові позицію мережі Петрі;
- визначити кількість фішок у позиції мережі Петрі, що символізує виконання умови;
- з'єднати позиції та переходи відповідно до логіки виникнення подій у системі : якщо умова передуює виконанню події, то з'єднати в мережі Петрі відповідну позицію з відповідним переходом; якщо умова являється наслідком виконання події, то з'єднати в мережі Петрі відповідний перехід з відповідною позицією;
- з'ясувати зміни, які відбуваються в системі при здійсненні кожної події, і поставити у відповідність змінам переміщення визначеної кількості фішок із позицій в переходи та з переходів у позиції;
- визначити числові значення часових затримок в переходах мережі Петрі;
- визначити стан мережі Петрі на початку моделювання.

**Рисунок 5.8. Послідовність дій, виконуваних для формалізації системи засобами мережі Петрі**

Кількість маркерів у позиціях складає вектор, який називається *маркіруванням*. В графічному представленні мережі Петрі зображується тільки початкове маркірування. В процесі функціонування мережі Петрі маркірування змінюється.

*Умовою запуску переходу* є наявність маркерів у його вхідних позиціях в кількості рівній кількості зв'язків. Якщо умова запуску переходу виконана, то здійснюється *запуск переходу*: з усіх вхідних позицій маркери видаляються у кількості рівній кількості зв'язків, а в усі вихідні позиції маркери додаються у кількості рівній кількості зв'язків. Наприклад, на рис. 5.9 умова запуску

переходу  $T_1$  виконана, оскільки в позиції  $P_1$  є один маркер і в позиції  $P_2$  є один маркер, а умова запуску переходу  $T_2$  – не виконана, так як в позиції  $P_2$  не має трьох маркерів. Після запуску переходу  $T_1$  в позиції  $P_1$  маркер залишиться, в позиції  $P_2$  стане один маркер, а в позиції  $P_3$  з'явиться два маркери.

Взагалі, позиції та переходи можна зображувати в будь-якому порядку і позначати будь-якими літерами. Головна мета при цьому – читабельність мережі Петрі. Час, який витрачений на представлення мережі Петрі в найбільш зрозумілому вигляді, окупиться меншою кількістю помилок при її реалізації. Наприклад, корисно позначати позиції та переходи не літерами, а іменами «покупці», «самоскиди», «склад», «завантаження», «розвантаження» і т.і., які підказують зв'язок того чи іншого фрагменту мережі Петрі з текстом задачі.

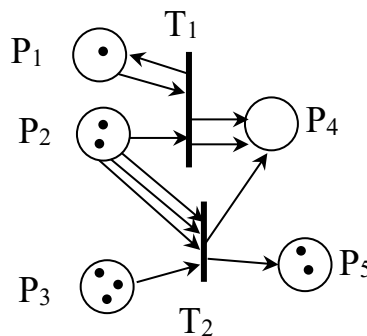


Рисунок 5.9. Фрагмент мережі Петрі

При зображенні мережі Петрі маркери в позиціях розставляються так, як вони розташовані на початку роботи моделі. Потім їх розташування змінюється, але то вже є результат функціонування моделі. Зрозуміло, що для того, щоб розпочався процес функціонування моделі, початкове розташування маркерів у позиціях повинно дозволяти запуск одного або декількох переходів.

Для переходу може бути задана часова затримка. Тоді при виконанні умови запуску переходу з усіх вхідних позицій маркери видаляються, а добавляються маркери в вихідні позиції тільки після того, як сплине заданий час затримки. Мережа Петрі, в якій задані часові затримки, називають *мережею Петрі з часовими затримками*. Імітаційні моделі складних систем складають на основі саме мереж Петрі з часовими затримками.

Процес функціонування звичайної мережі Петрі полягає у повторюваному послідовному перегляді усіх переходів мережі Петрі і виконанні наступних дій:

**Якщо умова запуску переходу виконана, здійснюється вхід маркерів до переходу і запам'ятовується момент виходу маркерів з переходу. Потім обирається перехід, для якого момент виходу маркерів з переходу найменший, і здійснюється вихід маркерів з обраного переходу. Вихід маркерів з переходу змінює маркірування мережі Петрі, тому знову перевіряється умова запуску переходу і т.д. Процес продовжується, доки запускається хоч один перехід, або, доки вичерпаний час спостереження мережі Петрі.**

Розглянемо найбільш вживані фрагменти мереж Петрі, що виникають при моделюванні дискретних систем.

Надходження: До системи надходять об'єкти у кількості  $k$  штук через заданий інтервал часу  $t$ .

Відповідна мережа Петрі представлена на рисунку 5.10. Подія «надходження» відбувається завжди, тобто у вхідній позиції цієї події завжди є маркер. Виконання події «надходження» означає прибуття  $k$  маркерів у позицію «черга». Для події «надходження» задається часова затримка  $t$  одиниць часу.



Рисунок 5.10. Фрагмент мережі Петрі для події «надходження»

Захват ресурсу: Ресурс у загальній кількості  $p$  використовується для обробки об'єктів 1 та 2. Об'єкти 1 вимагають для своєї обробки  $m$  одиниць ресурсу, об'єкти 2 –  $n$  одиниць ресурсу.

Відповідна мережа Петрі представлена на рисунку 5.11. Подія «захват ресурсу об'єктами типу 1» відбувається за умов, що є об'єкти типу 1 у черзі та є  $m$  одиниць ресурсу. Здійснення цієї події означає звільнення ресурсу та збільшення кількості оброблених об'єктів типу 1. Для події задається часова затримка  $t1$ .

Подія «захват ресурсу об'єктами типу 2» відбувається за умов, що є об'єкти типу 2 у черзі та є  $n$  одиниць ресурсу. Здійснення цієї події означає звільнення ресурсу та збільшення кількості оброблених об'єктів типу 2. Для події задається часова затримка  $t2$ .

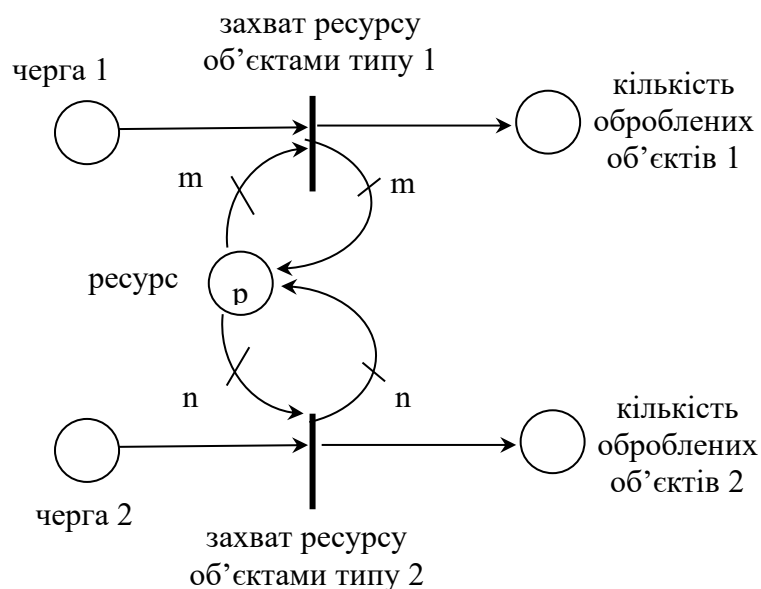


Рисунок 5.11. Фрагмент мережі Петрі для події “захват ресурсу”

Зборка: Об'єкти двох типів у кількості  $m$  та  $n$  з'єднуються в один об'єкт. Відповідна мережа Петрі представлена на рисунку 5.12. Для зборки об'єкта



необхідно  $m$  елементів 1-ого типу,  $n$  елементів 2-ого типу та вільний «складальник». Здійснення події «зборка» означає збільшення кількості зібраних об'єктів на одиницю та звільнення «складальника». Часова затримка  $t$ , що задається для події «зборка», дорівнює часу, який витрачається на збирання.

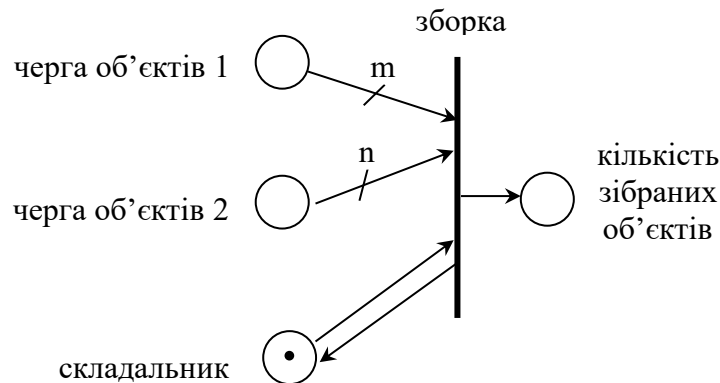


Рисунок 5.12. Фрагмент мережі Петрі для події «зборка»

Поломка: Пристрій, що використовується в технологічному процесі, ламається, налагоджується і знову включається в процес. Об'єкти, обслуговування яких не було завершено з причини поломки пристрою, очікують його налагодження і знову обслуговуються.

Відповідна мережа Петрі представлена на рисунку 5.13.

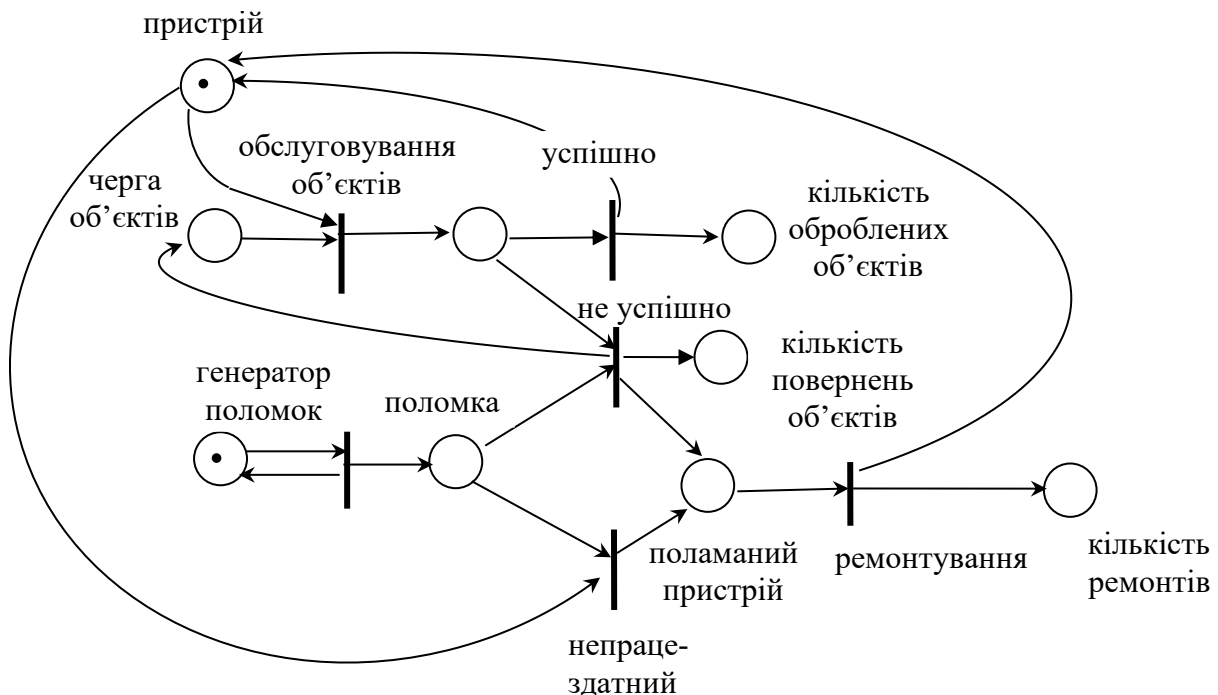


Рисунок 5.13. Фрагмент мережі Петрі для події «поломка»

Черга об'єктів обслуговується за умови, що є діючий пристрій. Якщо обслуговування завершено успішно, то пристрій звільнюється, а кількість оброблених об'єктів збільшується. Якщо під час обслуговування об'єкта сталася

поломка, то після закінчення обслуговування виконані умови для здійснення переходу «не успішно». В результаті запуску переходу «не успішно» об'єкт, обслуговування якого не завершено, повертається до черги об'єктів, а пристрій об'являється поламаним. Поламаний пристрій вилучається з технологічного процесу і відправляється на ремонтування (перехід «ремонтування»).

Може статися так, що поломка трапилася в момент, коли пристрій вільний. В такому випадку повернення об'єкта, що не обслугований, непотрібне, а поламаний пристрій вилучається з технологічного процесу і відправляється на ремонтування.

Переходи «не успішно» і «не працездатний» не являються конфліктними, оскільки, якщо виконана умова запуску переходу «не успішно», то пристрій знаходиться у стані зайнятий, а значить маркер у позиції «пристрій» відсутній. Відсутність маркеру в позиції «пристрій» означає, що умова запуску переходу «не працездатний» не виконана. З іншого боку, якщо виконана умова запуску переходу «не працездатний», то в позиції «пристрій» має бути маркер, а значить пристрій вільний і об'єкта, що має бути «неуспішним», не може бути.

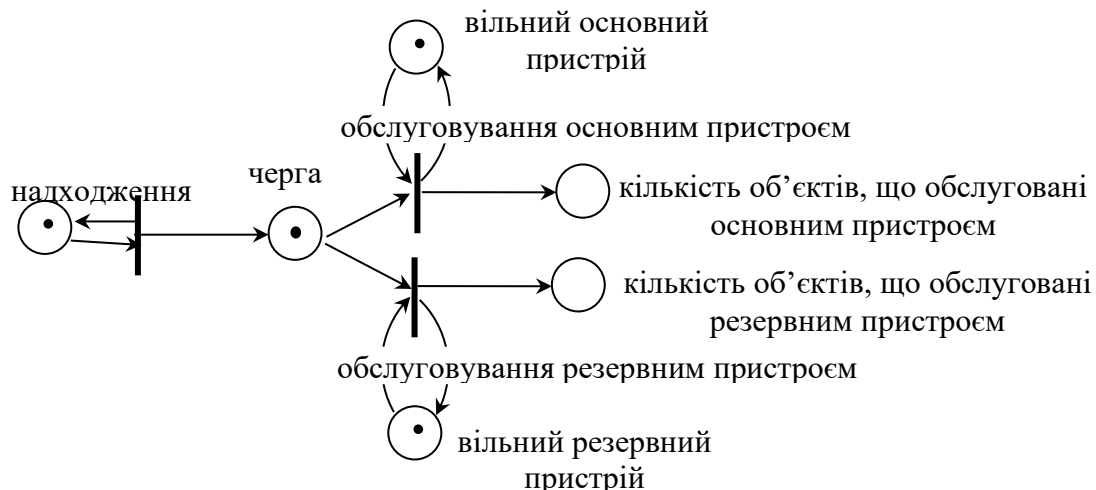
### 5.2.2 Мережі Петрі з конфліктними переходами

Якщо в мережі Петрі одночасно виконана умова запуску декількох переходів, то такі переходи називають *конфліктними*. Уявіть, що на рисунку 5.5 в позиції  $P_2$  не два маркери, а три. Тоді для переходів  $T_1$  і  $T_2$  одночасно виконана умова запуску переходу і вони в даний момент є конфліктними.

Існують наступні способи розв'язування конфлікту:

- 1) пріоритетний (явний та неявний спосіб завдання пріоритету);
- 2) ймовірнісний (з рівною та указаною ймовірністю).

При *пріоритетному способі* указується пріоритет запуску переходів і першим запускається перехід, що має вищий пріоритет. Наприклад, якщо один із пристроїв, що обслуговує об'єкти, основний, а інший – резервний, то для переходу «обслуговування основним пристроєм» повинен бути указаний пріоритет запуску вищий, ніж для переходу «обслуговування резервним пристроєм». На рисунку 5.14 наведений приклад подібної конфліктної ситуації.

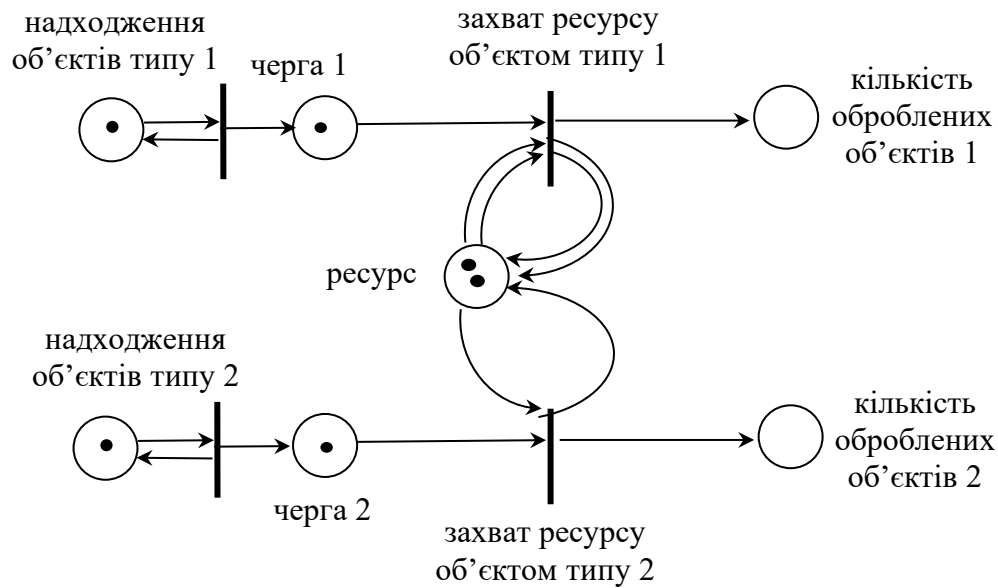


**Рисунок 5.14. Мережа Петрі, що моделює обслуговування об'єктів основним та резервним пристроями**

Мережа Петрі, що моделює поломку пристрою (див. рис. 5.13), має конфліктні переходи «успішно» та «не успішно». Для того, щоб модель працювала вірно, потрібно установити пріоритет для переходу «не успішно».

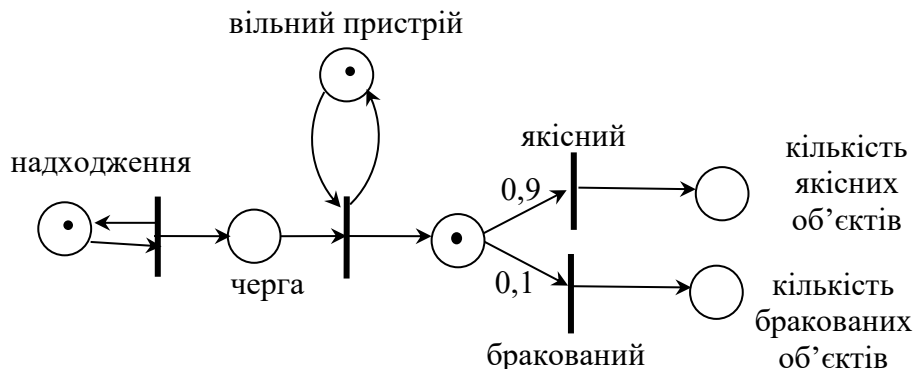
Зауважимо, що, якщо переходи мережі Петрі передивляються і запускаються у певному порядку, це означає *неявний* спосіб завдання пріоритету. Дійсно, перехід, що передивляється першим, виконується з більшим пріоритетом ніж другий. У загальному випадку переходи мережі Петрі мають передивлятись у випадковому порядку, що забезпечить рівний пріоритет запуску переходів.

Мережа Петрі, що моделює захват ресурсу (див. рис. 5.11), має конфліктні переходи «захват ресурсу об'єктом типу 1» та «захват ресурсу об'єктом типу 2» за умови, що в позиціях «черга 1» і «черга 2» одночасно з'явилися об'єкти і до того ж у позиції «ресурс» є наявний вільний ресурс тільки для одного з об'єктів, що надійшли. Приклад такого конфлікту наведений на рисунку 5.15. Очевидно, що від того, яким способом розв'язується конфлікт у даній мережі Петрі, сильно залежить кількість об'єктів типу 1 та типу 2, обслугованих протягом часу моделювання.



**Рисунок 5.15. Мережа Петрі, що моделює захват ресурсу об'єктами різних типів**

При *ймовірнісному способі* розв'язування конфлікту вказується ймовірність запуску переходу і першим запускається перехід, на який указав «випадок». Генерується випадкове число рівномірно розподілене на інтервалі  $(0;1)$  і за його значенням приймається рішення про запуск того чи іншого переходу. Наприклад, об'єкт із заданою ймовірністю після обробки виявляється бракованим (рис. 5.16).



**Рисунок 5.16. Мережа Петрі, що моделює виникнення бракованих об'єктів у процесі обробки**

Якщо в описі системи, що моделюється, не міститься інформація про особливості виникнення подій, що можуть статися одночасно, то для розв'язання конфліктів використовується *рівноймовірнісний спосіб*. У цьому способі кожний із конфліктних переходів запускається з ймовірністю  $1/k$ , якщо конфліктують  $k$  переходів. Наприклад, для мережі Петрі, що моделює захват ресурсу (див. рис. 5.15), конфлікт переходів «захват ресурсу об'єктом 1» та «захват ресурсу об'єктом 2» може бути розв'язаний завданням рівної ймовірності запуску цих переходів.

Зауважимо, що наявність конфліктних переходів у мережі Петрі означає,

що змінюється процес запуску переходів мережі Петрі:

У мережі Петрі з конфліктними переходами спочатку перевіряється умова запуску усіх її переходів, потім розв'язується конфлікт для конфліктних переходів і тільки потім здійснюється запуск переходу, що «виграв» конфлікт.

### 5.2.3 Мережі Петрі з багатоканальними переходами

Багатоканальними називають переходи з часовою затримкою, в яких одночасно може знаходитись декілька маркерів. На рисунку 5.17 представлений фрагмент мережі Петрі, що моделює одночасне обслуговування  $k$  об'єктів. Об'єкти накопичуються у позиції «черга об'єктів» і обслуговуються протягом часу обслуговування. Оскільки умовою запуску переходу «обслуговування» є наявність маркера в позиції «черга об'єктів» та наявність маркера в позиції «кількість одночасно обслуговуваних об'єктів», то в перехід може потрапити до  $k$  штук маркерів з позиції «черга об'єктів». Кожний маркер, яка входить у перехід, знаходиться в ньому протягом часу обслуговування, указанного в часовій затримці переходу. Перехід «обслуговування» має часову затримку  $t_{обс}$ .

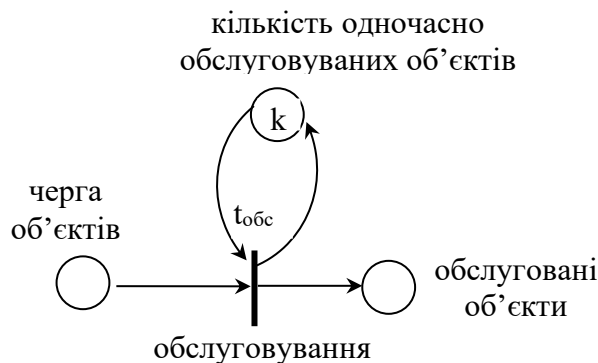
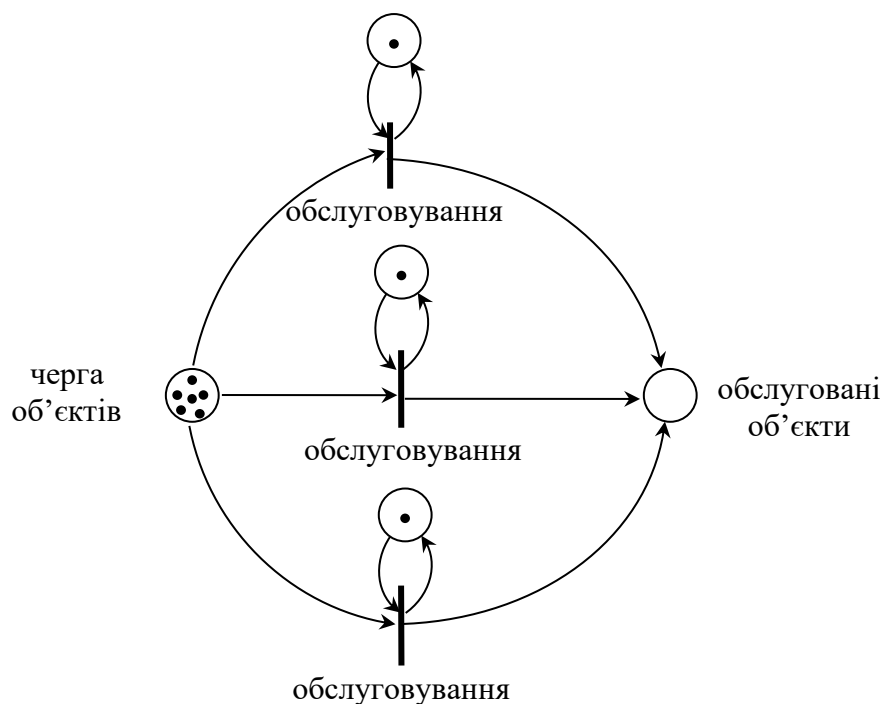


Рисунок 5.17 . Багатоканальний перехід, що моделює паралельне обслуговування об'єктів

Багатоканальний перехід з невеликою кількістю об'єктів, що одночасно можуть обслуговуватись, еквівалентний простій сітці Петрі, в якій кожний канал обслуговування моделюється окремим фрагментом мережі Петрі. На рисунку 5.18 зображений фрагмент мережі Петрі, що моделює одночасне паралельне обслуговування трьох об'єктів. Зрозуміло, що при великій кількості паралельно обслуговуваних об'єктів кількість використовуваних переходів та позицій при такому представленні значно зростає і зображувана мережа Петрі стає незрозумілою і переобтяженою кількістю зв'язків.



**Рисунок 5.18. Реалізація багатоканального переходу простою мережею**

Використання багатоканальних переходів значно спрощує вид мережі Петрі і робить її наближеною до змісту реальної системи. Проте процес функціонування такої мережі Петрі ускладнюється. По-перше, умова запуску переходу перевіряється та здійснюється запуск переходів до тих пір, доки є можливість запуску. По-друге, у багатоканальному переході часової мережі Петрі запам'ятовується не одне значення моменту часу, в який маркери мають вийти з переходу, а масив значень виходу маркерів. Тобто, кожний раз, при виконанні умови запуску здійснюється вхід маркерів у перехід і запам'ятовується момент виходу маркерів з переходу в кінець масиву значень. Запуск багатоканального переходу здійснюється стільки разів, скільки це дозволяє кількість маркерів у його вхідних позиціях. Під час виходу маркерів з переходу відповідне значення у масиві значень видаляється.

Отже, наявність багатоканальних переходів у мережі Петрі означає, що процес запуску її переходів змінюється:

**У мережі Петрі з багатоканальними переходами умова запуску переходу перевіряється та здійснюється запуск переходу стільки разів, скільки це дозволяє кількість маркерів у його вхідних позиціях. Під час запуску переходу запам'ятовується момент виходу маркерів з переходу у масиві значень. Під час виходу маркерів з переходу відповідне значення моменту часу у масиві значень видаляється.**

## **5.2.4 Мережі Петрі з інформаційними зв'язками**

Процеси управління, сутність яких полягає у тісній взаємодії підсистеми управління та підсистеми об'єкту управління, в загальному випадку не можуть бути описані як процеси обслуговування об'єктів. Мережі Петрі являються

універсальним засобом формалізації, що дозволяє описувати процеси як в підсистемі управління, так і в підсистемі об'єкта управління.

Розглянемо декілька прикладів.

### Приклад 1. Управління дорожнім рухом.

Досліджувана система представляє собою дорожній рух на перехресті, керований світлофорами (рисунок 5.19). Перехрестя є простим перетином двох доріг.

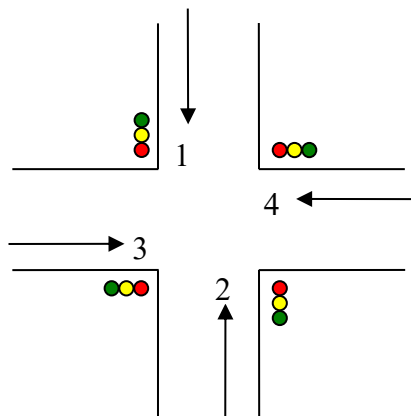


Рисунок 5.19. Схема руху автотранспорту на перехресті

Управління транспортним рухом здійснюється світлофорами так, що протягом певного часу горить зелене світло в першому та другому напрямках руху, а в третьому та четвертому напрямках горить червоне світло. Потім горить жовте світло в усіх напрямках протягом часу, що дозволяє автомобілям, які виїхали на перехрестях, залишити його до початку руху автомобілів з іншого напрямку. Далі вмикається зелене світло в третьому та четвертому напрямках руху, а в першому та другому напрямках горить червоне світло. Потім знову вмикається жовте світло в усіх напрямках і

так далі. Тривалості горіння зеленого та червоного світла задаються так, як у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

Параметри управління світлофорного об'єкта

Напрямок руху	Фаза світлофора							
	I		II		III		IV	
	світло	час	світло	час	світло	час	світло	час
1	зелений	20	жовтий	10	червоний	30	жовтий	10
2	зелений	20	жовтий	10	червоний	30	жовтий	10
3	червоний	20	жовтий	10	зелений	30	жовтий	10
4	червоний	20	жовтий	10	зелений	30	жовтий	10

Інтенсивність руху автомобілів в усіх напрямках відома і наведена у таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

Інтенсивність руху автомобілів у напрямках

Напрямок руху	Інтенсивність руху, $\lambda = 1/a,$ $1/c$
1	1/15
2	1/9
3	1/20
4	1/35

Метою моделювання є визначення параметрів управління, при яких максимум середньої кількості автомобілів, що очікують переїзду в різних напрямках, досягає свого найменше значення:

$$L = \min\{L_1, L_2, L_3, L_4\} \rightarrow \min.$$

Виділимо події, які відбуваються при переїзді автомобілів перехрестя в  $i$ -ому напрямку:

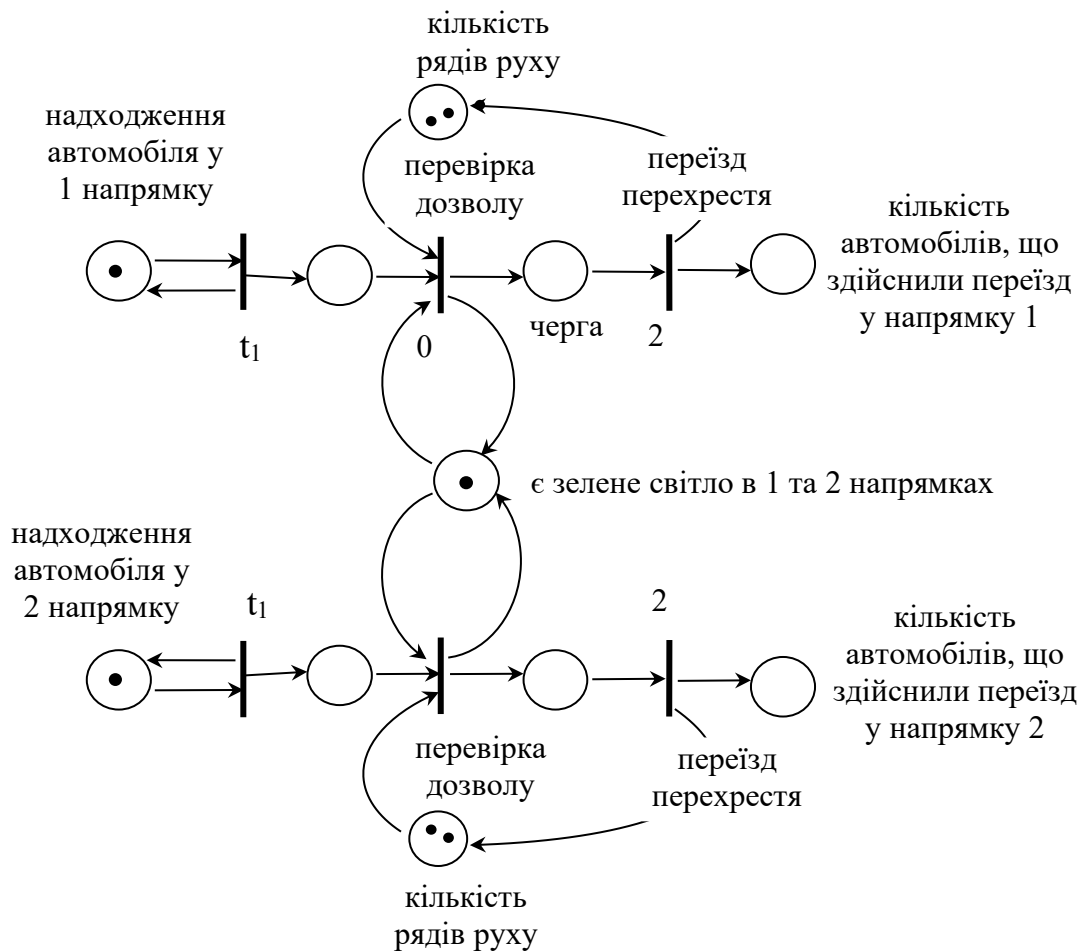
- \* надходження автомобіля в  $i$ -ому напрямку;
- \* переїзд автомобілем перехрестя в  $i$ -ому напрямку.

Подія «переїзд автомобілем перехрестя в  $i$ -ому напрямку» відбувається за умови, що надійшов автомобіль в  $i$ -ому напрямку та є зелене світло в  $i$ -ому напрямку. Введемо позиції «є зелене світло в 1-ому та 2-ому напрямках» та «є зелене світло в 3-ому та 4-ому напрямках», за наявності маркеру в яких буде прийматись рішення про переїзд автомобілем перехрестя. В результаті функціонування підсистеми управління маркер в позиції «є зелене світло в 1-ому та 2-ому напрямках» з'являється або зникає.

Маркером у позиції «є зелене світло» повинні користуватись одночасно декілька автомобілів (в декількох рядах і в декількох напрямках), але вона не являється ресурсом, який використовують одночасно, в ній тільки міститься інформація типу «дозвіл».

Спробуємо представити фрагменту руху автомобілів через перехрестя у напрямках 1 та 2, використовуючи позицію «є зелене світло у напрямку 1 та 2» звичайною мережею Петрі (рис.5.20). Маркер з позиції «є зелене світло у напрямку 1 та 2» доводиться забирати і віддавати миттєво, аби інші автомобілі могли скористатись нею. З цієї причини довелося ввести додатковий перехід «перевірка дозволу». Тепер подивимось уважно на те, що вийшло. Переходи «перевірка дозволу в 1 напрямку» та «перевірка дозволу у 2 напрямку» виявились конфліктними.





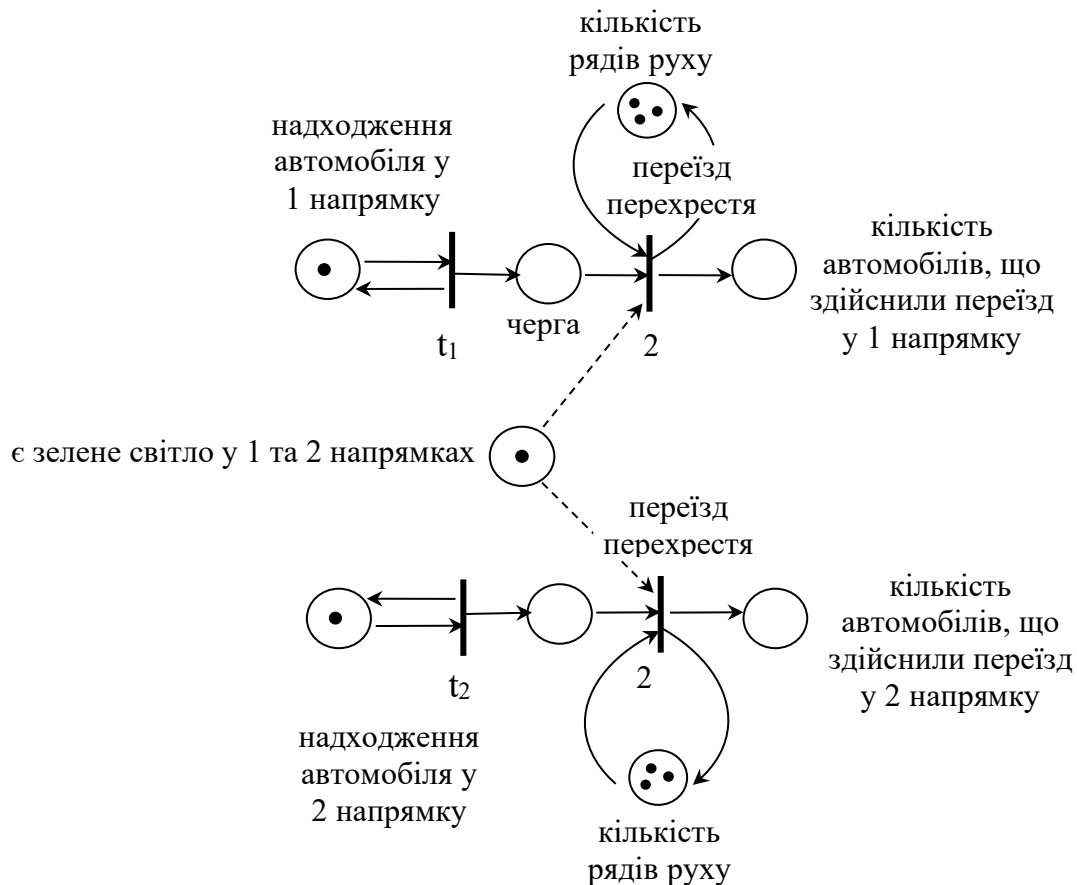
**Рисунок 5.20. Підсистема руху автомобілів у  $i$ -ому напрямку, представлена мережею Петрі**

За правилами мереж Петрі з конфліктними переходами спочатку потрібно розв'язати конфлікт одним із відомих способів, наприклад, запустити той з них, на який укаже випадкове число, і тільки після цього запустити інший перехід. Це декілька суперечить змісту реальної системи, що моделюється. Дійсно, при вмиканні зеленого світла автомобілі переїжджають перехрестя одночасно і в 1 і 2 напрямках не заважаючи один іншому. Можна позбавитись від конфліктної ситуації створивши замість однієї позиції «є зелене світло у 1 та 2 напрямках» дві позиції «є зелене світло у 1 напрямку» та «є зелене світло у 2 напрямку», що призведе до збільшення кількості позицій вдвічі.

Автомобілі не конфліктують при захопленні зеленого світла, тому моделювання світлофорного об'єкта звичайною мережею Петрі призводить до зайвих ускладнень, яких не має в реальній системі.

Введемо *інформаційний зв'язок* між позицією і переходом як такий, що наявність маркера в позиції перевіряється при здійсненні перевірки умови запуску переходу, але при здійсненні запуску переходу маркер з позиції не віднімається. Тобто звичайний матеріальний зв'язок між позицією та переходом означає пересування маркерів з позиції в перехід при виконанні умови запуску переходу. А інформаційний зв'язок між позицією та переходом означає, що пересування маркерів при запуску переходу не відбувається. Домовимось позначати інформаційний зв'язок пунктирною лінією.

Представимо підсистему руху автомобілів через перехрестя мережею Петрі з інформаційними зв'язками (рисунок 5.21). В такому представленні моделі конфлікт при сумісному використанні маркеру в позиції «є зелене світло» не виникає. По-друге, не виникає необхідності вводити додаткові переходи чи додаткові позиції, що ускладнюють модель. Функціонування такої моделі якнайбільш наближено до функціонування реальної системи.



**Рисунок 5.21. Підсистема руху автомобілів у  $i$ -ому напрямку, представлена мережею Петрі з інформаційними зв'язками**

Часові затримки, які передбачаються для переходів, указані на рисунку ( $t_1 = -a \cdot \ln \zeta$ , де  $a$  – середнє значення інтервалу надходження автомобілів,  $\zeta$  – рівномірно розподілена в інтервалі  $(0;1)$  випадкова величина).

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі управління:

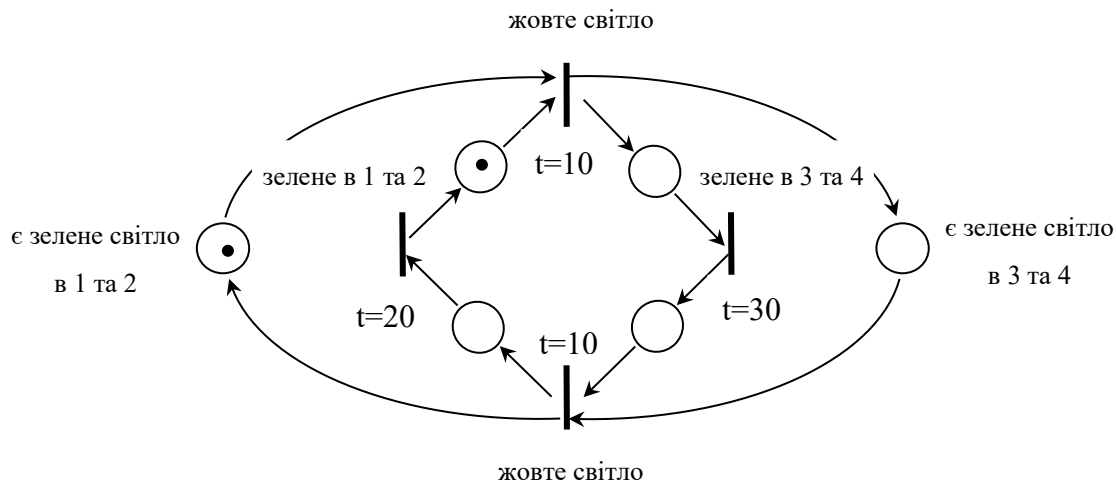
- \* горить зелене світло в 1-ому та 2-ому напрямках;
- \* горить жовте світло в усіх напрямках;

- \* горить зелене світло в 3-ому та 4-ому напрямках;
- \* горить жовте світло в усіх напрямках;

Подія «горить зелене світло в 1-ому та 2-ому напрямках» відбувається за умови, що вичерпаний час горіння червоного світла в усіх напрямках і настав час горіння зеленого світла в 1-ому та 2-ому напрямках. Результатом цієї події є виконання умови «є зелене світло в 1 та 2 напрямках». Подія «горить жовте світло усіх напрямках» відбувається за умови, що

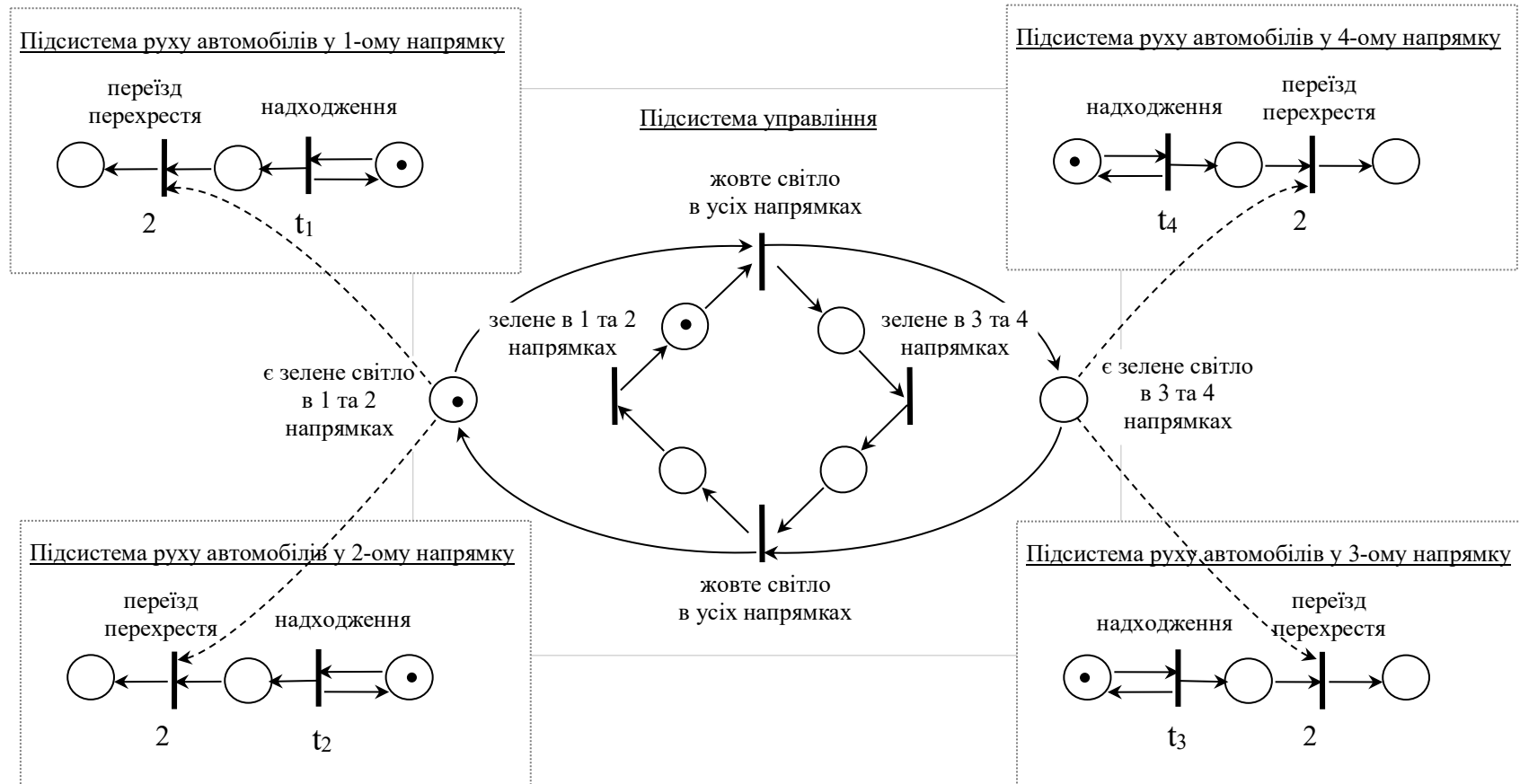
Події «горить зелене світло в першому напрямку», «горить жовте світло в обох напрямках», «горить зелене світло в другому напрямку», «горить жовте світло в обох напрямках» змінюють одна одну утворюючи коло подій, що відбуваються в підсистемі управління.

Умова «є зелене світло в першому напрямку» виникає разом з умовою «вмикається зелене світло на першому напрямку» і зникає разом з початком горіння червоного світла в обох напрямках. Так само умова «є зелене світло в другому напрямку». Таким чином, підсистема управління дорожнім рухом на перехресті представляється мережею Петрі як на рисунку 5.22.



**Рисунок 5.22. Підсистема управління руху автомобілів на перехресті, представлена мережею Петрі**

З'єднуючи підсистеми руху в кожному напрямку та підсистему управління рухом, отримуємо модель, що представлена на рисунку 5.23.



**Рисунок 5.23. Модель дорожнього руху через перехрестя, кероване світлофорами.**

В результаті функціонування моделі спостерігається кількість автомобілів, що очікують переїзду, у позиціях «черга», розташованих між переходами «надходження» та «переїзд перехрестя» кожного напрямку руху. Середня кількість машин, що очікують переїзду в  $i$ -ому напрямку, розраховується як середнє динамічної випадкової величини за формулою:

$$\text{середня кількість автомобілів у черзі} = \frac{\sum_{k=0}^n M(\text{черга})_k \cdot \Delta t_k}{T_{\text{mod}}}.$$

Середній час очікування автомобілів у черзі розраховується як сумарне очікування автомобілів у черзі, розділене на кількість автомобілів, що здійснили переїзд:

$$\text{середній час очікування автомобілів у черзі} = \frac{\sum_{k=0}^n M(\text{черга})_k \cdot \Delta t_k}{M(\text{кільк\_авт\_зд\_переїзд})}.$$

Запропонований підхід до побудови моделі перехрестя, керованого світлофорами, реалізований в системі Crossroads [Стеценко, Батора, 2007]

### 5.3 Задачі для самостійного розв'язання

1. Складіть мережу Петрі для системи, що описана наступною мережею масового обслуговування (рис. 5.24):

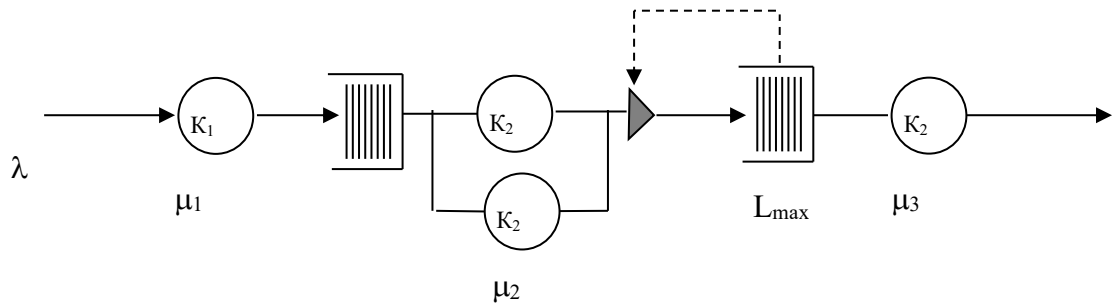


Рисунок 5.24 Мережа МО до задачі 1.

2. Складіть мережу Петрі для системи, що описана наступною мережею масового обслуговування (рис. 5.25):

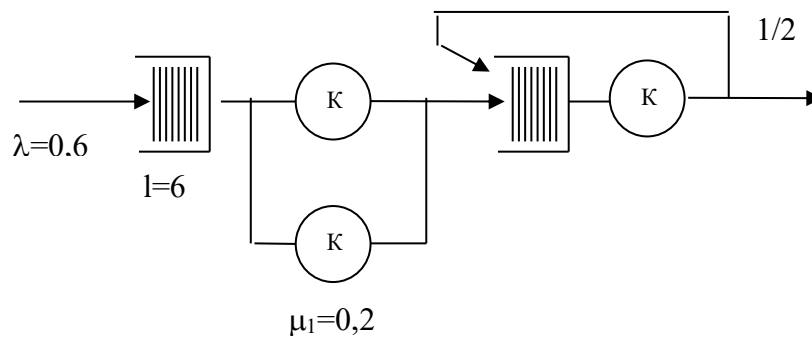


Рисунок 5.25 Мережа МО до задачі 2.

3. Складіть формалізовану модель системи засобами мереж Петрі для наступної задачі.

Завдання поступають на верстат у середньому один верстат у час. Розподіл величини інтервалу між ними експоненціальний. При нормальному режимі роботи завдання виконуються в порядку їхнього надходження. Час виконання завдання нормально розподілений з математичним сподіванням 0,5 години і середньоквадратичним відхиленням 0,1 година. Перед виконанням завдання відбувається наладка верстата, час здійснення якої розподілений рівномірно на інтервалі від 0,2 до 0,5 години. Завдання, які виконані на верстаті, направляються в інші відділи цеху. Верстат страждає від поломок, при яких він не може продовжувати виконання завдання. Інтервали між поломками розподілені нормально з математичним сподіванням 20 годин і середньоквадратичним відхиленням 2 години. При поломці виконуване завдання виймається з верстата і поміщається в початок черги завдань до верстата. Виконання завдання відновляється з того місця, на якому воно було перервано. Коли верстат ламається, починається процес усунення поломки, що складається із трьох фаз. Тривалість кожної фази має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням, рівним  $3/4$  години. Оскільки загальна тривалість усунення поломки є сумою незалежних випадкових величин, що мають експоненціальний закон розподілу з однаковими параметрами, можна вважати, що ця випадкова величина розподілена за законом Ерланга.

Метою моделювання є визначення завантаження верстата і часу виконання завдання.

4. Складіть мережу Петрі для такої задачі.

В африканському порту танкери завантажуються сировою нафтою, що морським шляхом доставляють потім по призначенню. Потужності порту дозволяють завантажувати не більш трьох танкерів одночасно. Танкери, що прибувають у порт через кожні  $11 \pm 7$  годин, відносяться до трьох різних типів. Значення відносної частоти появи танкерів даного типу і часу, необхідного на вантаження, приведені нижче:

Тип	Відносна частота	Час вантаження, годин
1	0,25	$18 \pm 2$
2	0,55	$24 \pm 3$

3	0,20	36±4
---	------	------

У порту є один буксир, послугами якого користуються всі танкери при причалювання та відчалюванні. Причалювання та відчалювання займають приблизно 1 годину, причому, якщо послуг буксира потребують відразу декілька танкерів, пріоритет віддається операції причалювання. Судновласник пропонує дирекції порту укласти контракт на перевезення нафти в Англію і забезпечити виконання умов контракту за допомогою п'ятих танкерів особливого, четвертого типу, що на вантаження потребують  $21 \pm 3$  годин. Після вантаження танкер відчалює і випливає в Англію, там розвантажується і потім знову повертається в африканський порт для вантаження. Час циклу обертання танкера, включаючи час розвантаження, складає  $240 \pm 24$  годин. Фактором, що ускладнює процес перевезення нафти, є шторми, яким піддається порт. Інтервал часу між штормами має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням 48 годин, причому шторм продовжується  $4 \pm 2$  години. Під час шторму буксир не працює.

Перед укладанням контракту керівництво порту вирішило визначити вплив, що вчинять п'ять додаткових танкерів на час перебування в порту інших судів. Отже, метою моделювання є визначення середнього та максимального часу перебування в порту додаткових танкерів і вже працюючих танкерів трьох типів.