

Astronomisches Institut  
Universität Bern  
Prof. Dr. A. Jäggi

**Abgabetermin: 16. Mai 2025**

Betreuer: Linda Geisser, Martin Lasser  
ExWi Zi. 204, Zi. 212  
linda.geisser@unibe.ch  
martin.lasser@unibe.ch  
Sprechzeiten: Bitte vorbeikommen

## Numerische Methoden der Physik

### Serie 4 - Nicht-linearer Ausgleich

$\beta^-$ -Zerfall

## Aufgaben

### Nicht-linearer Ausgleich nach kleinsten Fehlerquadraten

Mit einem  $\beta$ -Spektrometer können  $\beta^-$ -Teilchen mit einem bestimmten Impuls gezählt werden. Aus der gemessenen Stromstärke kann auf den Impuls geschlossen werden. Die Anzahl der detektierten  $\beta^-$ -Teilchen je Zeitintervall entspricht dabei der Zählrate  $z$ . In der Datei `serie4-observations.obs` sind Beobachtungen für einen  $\beta^-$ -Zerfall einer  $^{137}\text{Cs}$  Quelle gegeben. Die Datei ist wie folgt aufgebaut:

$i$	$I$ [A]	$z'$ [ $\text{min}^{-1}$ ]	$\Delta z$ [ $\text{min}^{-1}$ ]
1	0.05	27.0	3.6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Das funktionale Modell für eine Zählrate  $z_i$  ist mittels

$$\bar{z}_i = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(\frac{-(I_i - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(\frac{-(I_i - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) + a_0 \quad (1)$$

gegeben. Implementieren Sie einen iterativen Ausgleich nach kleinsten Fehlerquadraten mit den A-priori-Werten  $a_1 = a_2 = 50$ ,  $\mu_1 = 0.3$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.05$  und  $\mu_2 = 0.6$ . Die Zählraten  $z'$  sind zusammen mit ihren Unsicherheiten  $\Delta z$  als Beobachtungen einzuführen, die gemessene Stromstärke ist dabei als fehlerfrei anzunehmen. Die Iteration ist abubrechen, wenn die relative Verbesserung der einzelnen Parameter kleiner als  $\varepsilon = 10^{-4}$  ist.

Beantworten Sie insbesondere folgende Fragen:

- Stellen Sie die partiellen Ableitungen nach allen unbekannten Parametern händisch auf und geben Sie diese in Ihrer Zusammenfassung an.
- Erklären Sie die Bedeutung des A-posteriori-Gewichtseinheitsfehlers  $m_0$  und geben Sie diesen für jeden Iterationsschritt an. Verwenden Sie das  $m_0$  der letzten Iteration, um einen Signifikanztest mit einem Niveau von  $\alpha = 5\%$  durchzuführen. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
- Geben Sie die Lösung für die geschätzten Parameter und deren Fehler an. Bestimmen Sie auch die Korrelation zwischen den Parametern.
- Bestimmen Sie die ausgeglichenen Beobachtungen und deren Fehler.

- Ermitteln Sie den Wert der ausgeglichenen Beobachtung  $\bar{z}_1$  und ihren Fehler. Welche Zählrate und welcher Fehler sind bei einer Stromstärke von  $I = 0.12$  A zu erwarten? Berechnen Sie auch den Fehler des Vorfaktors  $\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}$ .
- Führen Sie eine Überprüfung Ihres Ergebnisses durch, indem Sie die linearisierten Verbesserungen mit den wahren vergleichen.
- Zur Ausreisserdetektierung könnten die normalisierten Verbesserungen  $(\frac{v_i}{\sigma_{v_i}})$  betrachtet werden. Stellen Sie die normalisierten Verbesserungen graphisch dar und geben Sie deren Standardabweichung an.
- Vergessen Sie nicht die korrekten Einheiten anzugeben.

## Abgabe

Laden Sie Ihr(e) Skript(e) und die Plots sowie eine ein- bis zweiseitige, ordentlich formatierte Zusammenfassung der Ergebnisse auf *ILIAS*  $\rightarrow$  *Numerische Methoden der Physik*  $\rightarrow$  *Abgaben* hoch. Verwenden Sie bitte die Skript- und Dateinamen:

`serie4_< Nachname > .py`  
`serie4_< Nachname > .pdf`

Abgabetermin ist Freitag, der **16. Mai 2025**.