

Numerische Methoden der Physik Serie 2

Cedric Sigrist

29. März 2025

1 Theoretische Betrachtungen

Es ist die folgende Transformation gegeben:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f \left(\begin{bmatrix} r \\ \phi \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Die Kovarianzmatrix der Transformierten Variablen lässt sich nun mit der Jakobi Matrix $J_f = \frac{\partial(f_x, f_y)}{\partial(r, \phi)}$ finden:

$$K_{XY} = J_f K_{r\phi} J_f^T = \begin{bmatrix} k_{11} \cos^2(\phi) + k_{22} r^2 \sin^2(\phi) & k_{11} \sin(\phi) \cos(\phi) - k_{22} r^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \\ k_{11} \sin(\phi) \cos(\phi) - k_{22} r^2 \sin(\phi) \cos(\phi) & k_{11} \sin^2(\phi) + k_{22} r^2 \cos^2(\phi) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

mit

$$K_{r\phi} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}$$

Möchte man diese nun visuell Matrix in Abhängigkeit von r, ϕ darstellen, bietet sich ein Plot der Eigenvektoren der Kovarianzmatrix an. So lässt sich visuell die Achse der grössten Varianz und die der kleinsten Varianz ablesen. Ein solches Diagramm ist in der Abbildung 1.1 zu sehen.

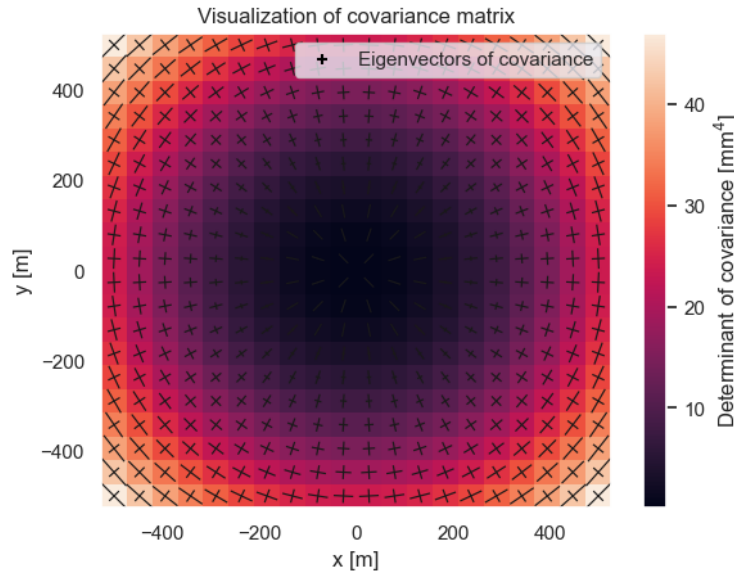


Abbildung 1.1: Darstellung der Kovarianzmatrix

Hier wurden Kovarianzmatrizen in einem 1 km^2 Bereich um den Ursprung dargestellt. Für die Varianzen wurde $\sqrt{k_{11}} = 2 \text{ mm}$ und $\sqrt{k_{22}} = 1''$ verwendet. Hier sieht man auch, dass der Fehler des Winkels für Werte nahe am Ursprung vernachlässigbar sind, und erst bei grossem Radius relevant werden. Die Schattierung der Abbildung stellt die Determinante der Kovarianzmatrix dar.

2 Datenanalyse

Ich betrachte nun die Daten aus `campPP_mar2024.dat`. Wendet man die Transformation gegeben in Gleichung (1.1) auf die Datenpunkte ab, ist es möglich die Datenpunkte in Kartesischen Daten graphisch darzustellen, eine solche Darstellung ist in Abbildung 2.1 zu sehen.

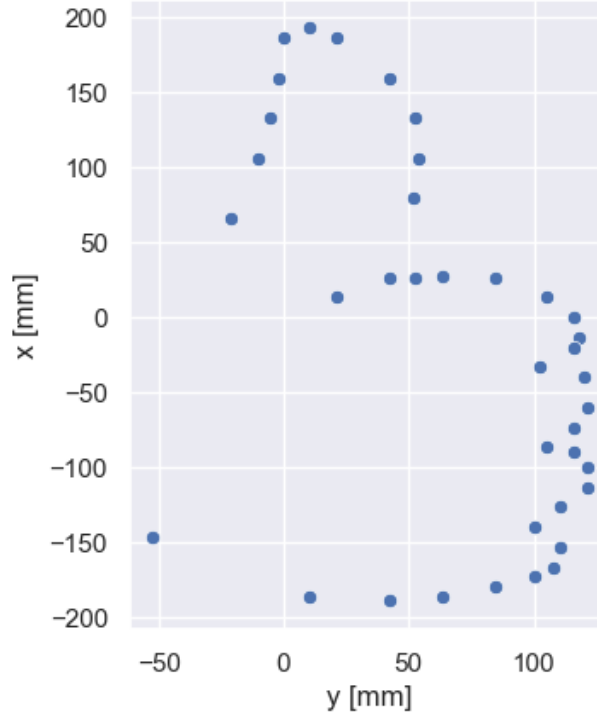


Abbildung 2.1: Datenpunkte in kartesischen Koordinaten

Beachte dass die x und y Achsen vertauscht wurden um das 'Daumen hoch' Bild schöner darzustellen. Das war nötig, da die Konvention verwendet wurde, den Winkel ϕ als Winkel in positive Drehrichtung von der x -Achse zu interpretieren.

Mit den gegebenen Unsicherheiten von $\sigma_r = 2$ mm und $\sigma_\phi = 1''$ lässt sich mit Formel (1.2) die Kovarianzmatrix für jeden einzelnen Datenpunkt berechnen. Sei $K_{XY}^{(i)}$ die Kovarianzmatrix für den Datenpunkt i . Dann ist die Kovarianzmatrix aller Datenpunkte die Block-diagonale Matrix \mathcal{K}_{XY} mit

$$\mathcal{K}_{XY} = \begin{bmatrix} K_{XY}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{XY}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{XY}^{(N)} \end{bmatrix}$$

Für die gegebenen Datenpunkte lässt sich diese Matrix als Heatmap darstellen, diese ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Ausserdem ist es möglich für jeden Datenpunkt seine Kovarianzmatrix via dessen Eigenvektoren darzustellen, dies ist in Abbildung 2.3 zu sehen. In solch einer Graphik lässt sich die Kovarianz Matrix sehr geometrisch deuten. Wichtig ist aber zu beachten dass diese Darstellung nur Sinn machen kann wenn die einzelnen Messungen unkorreliert sind.

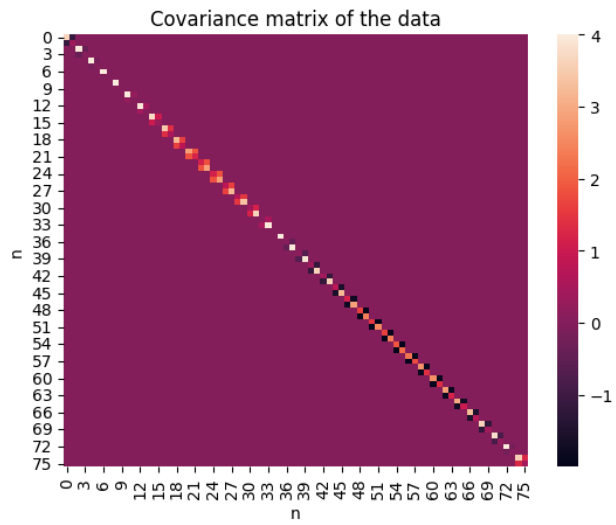


Abbildung 2.2: Kovarianzmatrix der Datenpunkte

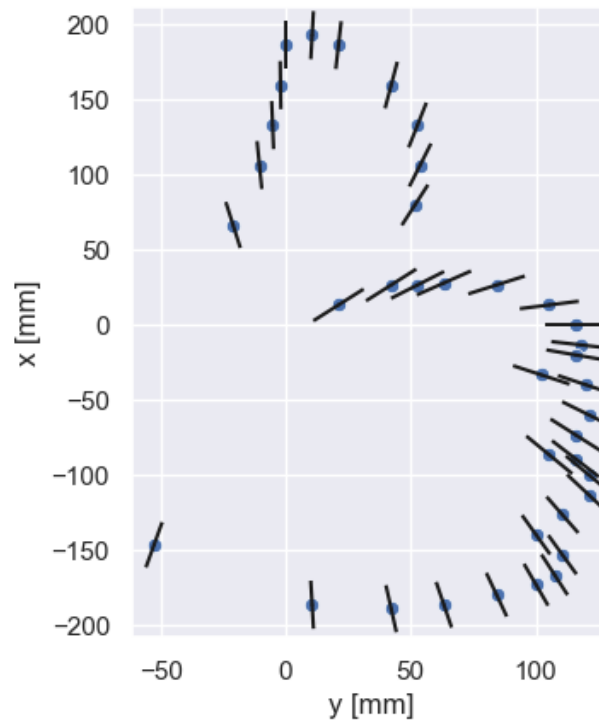


Abbildung 2.3: Eigenvektoren der Kovarianzmatrix der Datenpunkte