Numerische Methoden der Physik Serie 4

Cedric Sigrist

15. Mai 2025

1 Das Funktionale Modell

Das funktionale Modell ist wie folgt definiert:

$$f(a_0, a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2; I) = a_0 + \frac{a_1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(I-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{a_2}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(I-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Die partiellen Ableitungen nach den Parameter sind demnach

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a_0} &= 1 \\
\frac{\partial f}{\partial a_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{\frac{-(I-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial a_2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{\frac{-(I-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} &= \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^4} \left((I-\mu_1)^2 - \sigma_1^2\right) e^{\frac{-(I-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} &= \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2^4} \left((I-\mu_2)^2 - \sigma_2^2\right) e^{\frac{-(I-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial \mu_1} &= \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^3} (I-\mu_1)\, e^{\frac{-(I-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial \mu_2} &= \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2^3} (I-\mu_2)\, e^{\frac{-(I-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}
\end{aligned}$$

So habe ich dann die Designmatrix A definiert.

$$A = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial a_0}\right|_{I=I_1} & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial \mu_2}\right|_{I=I_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial f}{\partial a_0}\right|_{I=I_n} & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial \mu_2}\right|_{I=I_n} \end{bmatrix}$$

Mit der Definition der Gewichtsmatrix $P = \text{diag}(s_{z_1}^{-2}, \dots s_{z_n}^{-2})$ kann man nun iterativ die Parameter $a_0 \dots \mu_2$ bestimmen.

Mit den Startparametern aus dem Aufgabenblatt und meiner eigenen Wahl von $a_0 = 0\,\text{min}^{-1}$ können dann die Parameter iterativ wie folgt verbessert werden.

$$x^{(i+1)} \leftarrow x^{(i)} + ({A^{(i)}}^\mathsf{T} PA)^{-1} {A^{(i)}}^\mathsf{T} P(\hat{y} - y^{(i)})$$

Hier ist zu beachten, dass $A^{(i)}$ selbst auch von den Parametern $x^{(i)}$ abhängig ist, da f nicht linear von den Parametern abhängig ist, es wird daher auch immer mit der aktualisierten Designmatrix gerechnet.

2 Signifikanztest

Der Wert der geschätzten Gewichtseinheit m_0 konvergiert gegen seinen endgültigen Wert, wie in Tabelle 2.1 zu sehen ist. Da, falls die Modellannahmen und ursprünglichen Schätzung der Fehler der Beobachtungen stimmen, der Wert von m_0 mit dem von der Gewichtung der Kofaktorenmatrix der Beobachtungen σ_0 übereinstimmen sollte, lässt sich damit ein Signifikanztest mit $\alpha = 5\%, f = 22$ machen. In meinem Funktionalen Modell habe ich die Gewichtsmatrix so definiert, dass $\sigma_0 = 1$ ist. So erhält man

$$\frac{m_0^2}{\sigma_0^2} = 3.95 \qquad \frac{x_{1-\alpha}}{f} = 1.54$$

Das heisst die Annahme, dass m_0 eine Realisierung von σ_0 ist, müsste also verworfen werden.

Iteration	m_0
1	5.1459459481
2	2.4214154452
3	1.9989849978
4	1.9873981444
5	1.9870631055
6	1.9870506615
7	1.9870502009
8	1.9870501838
9	1.9870501832
10	1.9870501832

Tabelle 2.1: m_0 über mehrere Iterationen

3 Die Geschätzten Parameter

Für die geschätzten Parameter erhält man

$$\begin{aligned} a_0 &= (23.255 \pm 2.626)\,1/\mathrm{min} \\ a_1 &= (79.125 \pm 2.732)\,\mathrm{A/min} \\ a_2 &= (16.997 \pm 1.090)\,\mathrm{A/min} \\ \sigma_1 &= (0.113 \pm 0.004)\,\mathrm{A} \\ \sigma_2 &= (0.027 \pm 0.002)\,\mathrm{A} \\ \mu_1 &= (0.309 \pm 0.004)\,\mathrm{A} \\ \mu_2 &= (0.606 \pm 0.002)\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Die Korrelation der Parameter ist in Abbildung 3.1 zu sehen.

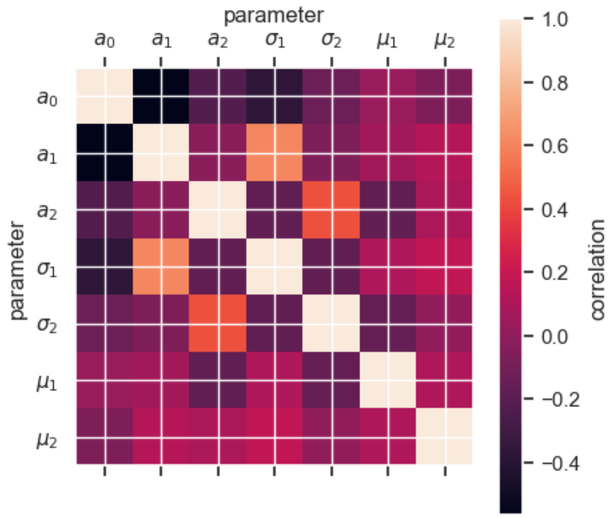

Abbildung 3.1: Korrelationsmatrix der Geschätzten Parameter

4 Die Ausgeglichenen Beobachtungen

Die Ausgeglichenen Beobachtungen und deren Fehler sind in Abbildung 4.1 zu sehen.

Der Wert der Ausgeglichenen Beobachtung $\bar{z}_1$ beträgt $\bar{z}_1 = (43.025 \pm 3.370)\,1/\mathrm{min}$

Bei einer Stromstärke von $I = 0.12\,\mathrm{A}$ erwartet man eine Zählrate $\bar{z}(I = 0.12\,\mathrm{A}) = (91.456 \pm 6.037)\,1/\mathrm{min}$.

Mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz kann man den Vorfaktor berechnen:

$$\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} = (280.302 \pm 8.402)\,1/\mathrm{min}$$

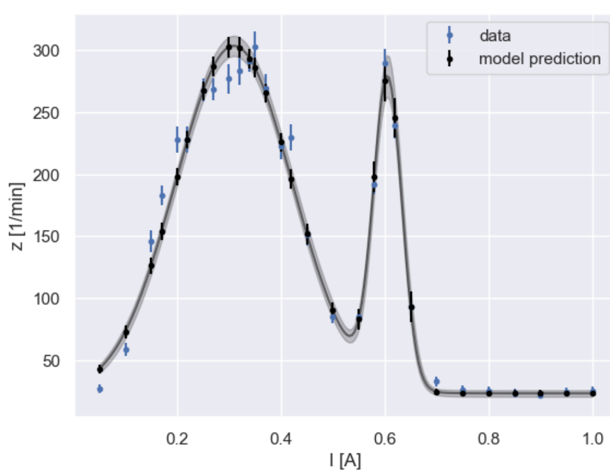

Abbildung 4.1: Die Gemessenen Werte und ausgeglichenen Beobachtungen

5 Überprüfung des Ergebnisses mit den Linearisierten Verbesserungen

Zur Überprüfung werde ich die Linearisierten Verbesserungen mit den Wahren vergleichen. Dazu nehme ich das Funktionale Modell zur Iteration $i = 9$ und werde mit dessen Design-Matrix die Linearisierten

Verbesserungen der letzten Iteration $i = 10$ abschätzen. Es gilt

$$v_{\text{lin}} = v^{(9)} - A^{(9)}(x^{(10)} - x^{(9)})$$

Vergleicht man nun $v_{\text{lin}}, v^{9)}$ und $v^{(10)}$ indem man ihre Abweichungen zu den wahren Residuen $v^{(10)}$ nimmt, wie in Abbildung 5.1 darstellt, sieht man dass die Verbesserungen der Iterationen 9 und 10 sich noch stark unterscheiden, aber die linearisierten Verbesserungen gut übereinstimmen. Die Design Matrix $A^{(9)}$ realisiert also eine Taylor Entwicklung der Funktion f um die Parameter $x^{(9)}$

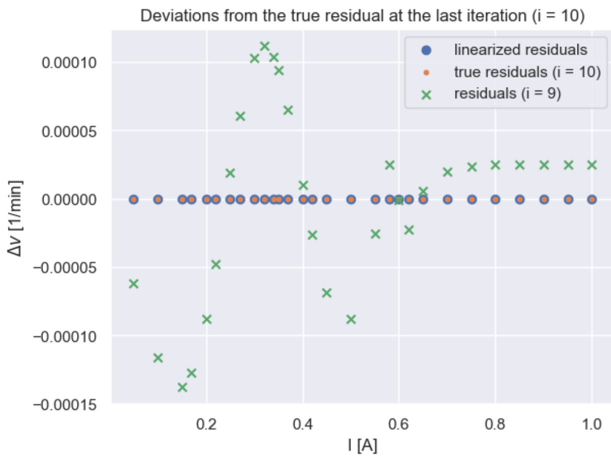

Abbildung 5.1: Die Linearisierten Verbesserungen und wahren Verbesserungen im Vergleich

6 Die Normalisierten Verbesserungen

Um die Residuen zu normalisieren braucht man deren Kovarianzmatrix welche wie folgt definiert ist.

$$K_{vv} = K_{\hat{l}\hat{l}} - K_{ll} = m_0 \left(Q_{\hat{l}\hat{l}} - Q_{ll} \right)$$

Nun erhält man die Normalisierten Residuen indem man mit der Wurzel der Diagonaleinträge skaliert.

$$\tilde{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{[K_{vv}]_{ii}}} = \frac{v_i}{\sigma_i}$$

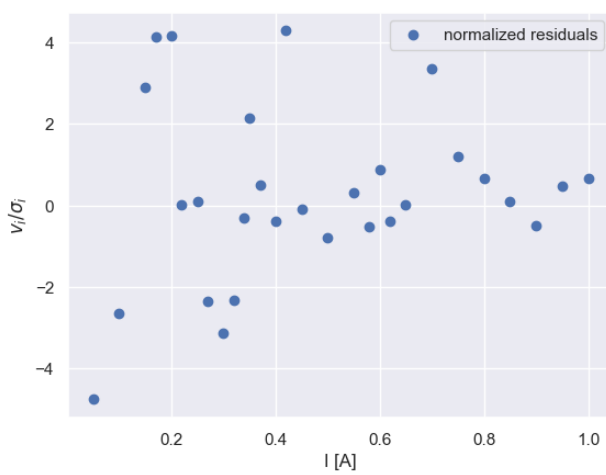

Abbildung 6.1: Die Normalisierten Verbesserungen

Berechnet man die Standardabweichung der normalisierten Residuen erhält man 0.991. Dass dieser Wert so nahe an 1 liegt ist zu erwarten, da m_0 ja gerade als Skalierung der gewichteten Residuen definiert Wurde.