

Numerische Methoden der Physik Serie 1

Cedric Sigrist

13. März 2025

1 Zentrale Momente

1.1 Aufgabe 1

1.1.1 Das Zentrale Moment zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} E([X - \mu]^2) &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ (\text{linearität}) \quad &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ (\text{def. } \mu) \quad &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

1.1.2 Das Zentrale Moment dritter Ordnung

$$\begin{aligned} E([X - \mu]^3) &= E(X[X - \mu]^2 - \mu[X - \mu]^2) \\ (\text{Teilaufgabe 1}) \quad &= E(X^3 - 2\mu X^2 - X\mu^2) - \mu E(X^2) + \mu^3 \\ (\text{linearität}) \quad &= E(X^3) - 2\mu E(X^2) - \mu^2 E(X) - \mu E(X^2) + \mu^3 \\ \text{def. } \mu \quad &= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3 \end{aligned}$$

1.2 Aufgabe 2

Es gelte:

$$V(X) = 50, \quad V(X + Y) = 80, \quad V(X - Y) = 40$$

also:

$$\begin{aligned} (I) \quad & E[X^2] - E[X]^2 = 50 \\ (II) \quad & E[(X + Y)^2] - E[X + Y]^2 = E[X^2] - E[X]^2 + 2(E[XY] - E[X]E[Y]) + E[Y^2] - E[Y]^2 = 80 \\ (III) \quad & E[(X - Y)^2] - E[X - Y]^2 = E[X^2] - E[X]^2 - 2(E[XY] - E[X]E[Y]) + E[Y^2] - E[Y]^2 = 40 \end{aligned}$$

Man kann nun die folgenden summen bilden:

$$\begin{aligned} (II) + (III) - 2(I) \quad & 2(E[Y^2] - E[Y]^2) = 80 + 40 - 2 \cdot 50 = 20 \\ \implies \quad & E[Y^2] - E[Y]^2 = V[Y] = 10 \\ (II) - (III) \quad & 4(E[XY] - E[X]E[Y]) = 80 - 40 = 40 \\ \implies \quad & E[XY] - E[X]E[Y] = \sigma_{XY} = 10 \end{aligned}$$

2 Werfen von zwei Würfeln

Die Resultate sind in Abbildung 2.1 und Tabelle 2.1 dargestellt. Für die Zufallsvariable X = Summe der aufliegenden Augenzahlen gilt:

$$E[X] = 7, \quad V[X] = 5.8\bar{3}$$

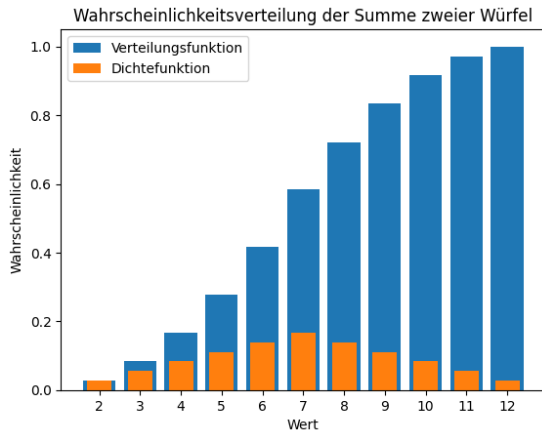


Abbildung 2.1

Wert	Wahrscheinlichkeit
2	0.027778
3	0.055556
4	0.083333
5	0.111111
6	0.138889
7	0.166667
8	0.138889
9	0.111111
10	0.083333
11	0.055556
12	0.027778

Tabelle 2.1

3 Ausreisserdetektion

3.1 Verarbeitungsschritte

Die Daten wurden in die Monate September, Oktober und November eingeteilt und iterativ von Ausreissern befreit.

Die gefilterten und ungefilterten daten für die einzelnen Monate sind in Abbildung 3.1 bis 3.3 zu finden.

3.2 Resultate

Die Unsicherheit des Mittelwerts kann mit der Formel $\sqrt{V[X_i]/n} = \sigma/\sqrt{n}$ berechnet werden, so wurden folgende werte für den Mittelwert erhalten:

- September: -0.139 mm
- Oktober: (-0.100 ± 0.239) mm
- November: (-0.219 ± 0.194) mm

3.3 Mögliche Gründe für die Ausreisser

Ausreisser können durch Grobe Fehler oder durch zufällige Fehler verursacht werden

- **Grobe Fehler:** In diesem Fall könnten Grobe Fehler durch Reflektionen (von z.B. Flugzeugen oder anderen Satelliten) verursacht werden. Andere Gründe könnten Störungen des Messapparats sein z.B. Vibration durch vorbeifahrender Lastwagen.
- **Zufällige Fehler:** Hier ist es schwierig konkrete Beispiele zu nennen, die Zufälligen Fehler durch Ungenauigkeiten in der gesamten Messung entstehen.

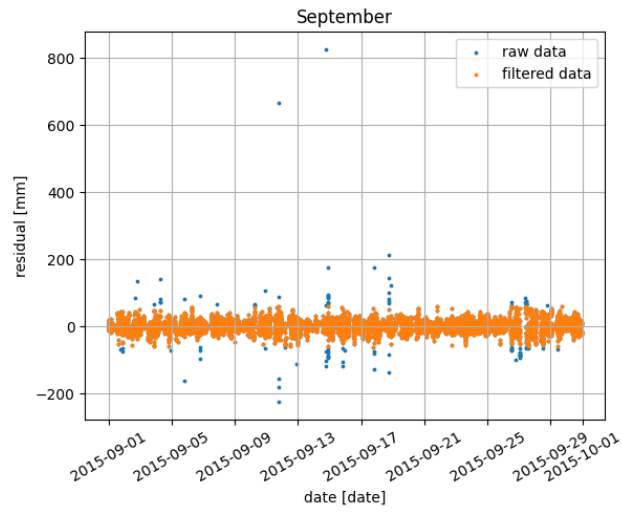


Abbildung 3.1

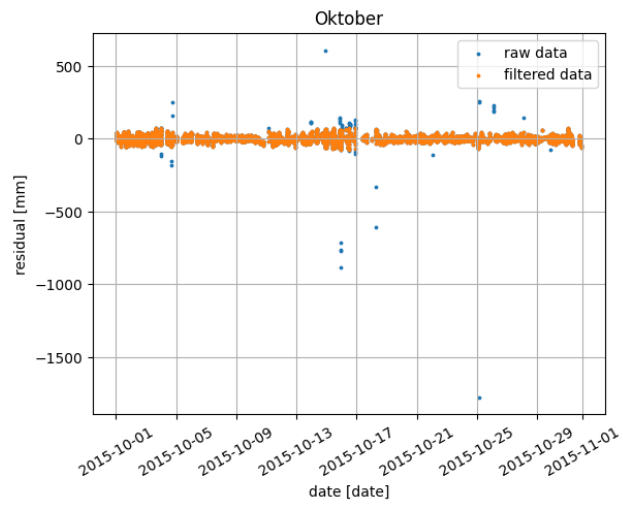


Abbildung 3.2

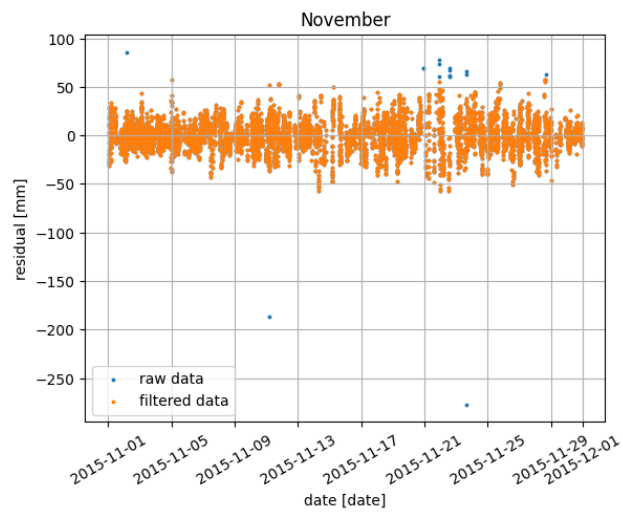


Abbildung 3.3