

# Abstract

---

- Implementation of "GrabCut" technique.

# Keyword

---

- Gaussian Mixture Model
- Maximum Likelihood Estimation
- Expectation Maximization Algorithm
- Network Flow Algorithm
- GrabCut
- GraphCut

# Principle

---

- 步骤：
  1. 将矩形内、外数据分别初始化为前景、后景点集。
  2. 将点集数据送给两个GMM并让它们学习到收敛。
  3. 对前景集合中的数据分别计算它们属于内GMM和外GMM的概率，并按照论文中公式赋值t-link和n-link。
  4. 使用求最大流的方法，找出最小割，并获得新的前景后景点集。
  5. 重复step 2-4.
- 注意：
  1. 为图片的前景类和后景类分别建立一个GMM，分别承担对应的二分类任务。
  2. 两类边权：区域项和边界项，区域项代表该像素属于前景分布或后景分布的概率，边界项代表该像素与周围像素的相似性。
  3. 使用网络流算法进行最大流最小割的计算。
  4. 论文中的 $\gamma$ 设置为50，但在本代码实现中应设置为5.

# Usage

---

1. 在图片上画出红色框，包裹住前景。
2. 可选：
  - 按下 f 键，然后涂抹出蓝色区域，代表标注前景。
  - 按下 b 键，然后涂抹出绿色区域，代表标注后景。

# Mathematics

---

1. Gaussian Mixture Model (高斯混合模型)
  1. [WIKI](#)
  2. 概念：是单一高斯概率密度函数的延伸，使用多个高斯概率密度函数（即正态分布曲线）精确地量化变量的总体分布，可以将变量的总体分布分解为若干个高斯分布。它可以作为一种聚类算法使用，事实上典型的聚类方法K-means就是GMM的一种特殊形式。
  3. 结构：每个高斯混合模型由K个模型分量组成，每个分量都是一个高斯分布模型，可以是多维的。

4. 使用：对于每个输入的样本点 $x$ ，每个分量模型可以通过自己的概率密度函数（Probability Density Function，简称PDF），分别给出该点属于自己的概率，然后通过一个分割阈值来确定它是否属于自己。显然，对于只有一个分量的模型（退化成高斯模型），可以承担二分类任务；而对于含有多个分类的模型，则可以承担多分类任务（也可以作为二分类，使用多个分量模型的权和即可）。

5. 公式：

1. 分量模型（多维高斯分布）： $N(x|\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp[-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)].$

- $x$ :  $d$ 维，样本点向量，注意与一维的高斯分布（每个样本点是一个标量）不同。
- $\mu$ :  $d$ 维，样本的均值向量。
- $\Sigma$ :  $d * d$ 维，样本的协方差矩阵（[WIKI](#)）， $\Sigma_{i,j}$ 代表第*i*维随机变量和第*j*维随机变量的协方差。 $|\Sigma|$ 为其行列式。
- 推导过程

1. 首先考虑1维标准高斯分布，即随机变量 $x \sim N(0, 1)$ ，其PDF为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

2. 对于*n*维独立的标准高斯分布，即*n*个独立随机变量的联合分布，有

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2}\right).$$

3. 若令 $X$ 为*n*维的列向量，则上式可表示为 $f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T x\right)$ .

4. 推广到一般形式，即设 $y$ 由 $x$ 进行线性变换得到，如 $y = Ax + b$ 。由于原随机变量满足 $x \sim N(0, 1)$ ，所以 $\mu = b$ ，即 $y = Ax + b = Ax + \mu$ .

5. 显然，可以有逆变换 $x = A^{-1}(y - \mu)$ ，亦有 $dx = |A^{-1}| dy$ .

6. 定义协方差矩阵 $\Sigma$ ，令 $\Sigma^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1}$ ，则有 $|A| = |\Sigma|^{\frac{1}{2}}$ .

7. 最后，由联合概率分布密度的定义，有

$$\begin{aligned} 1 &= \int \dots \int f(x) dx \\ &= \int \dots \int f(A^{-1}(y - \mu)) |A^{-1}| dy \\ &= \int \dots \int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |A|} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - \mu)^T (A^{-1})^T A^{-1} (y - \mu)\right] dy \\ &= \int \dots \int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - \mu)^T (\Sigma^{-1})^T \Sigma^{-1} (y - \mu)\right] dy \end{aligned}$$

8. 故，多维向量 $y$ 的联合概率密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - \mu)^T (\Sigma^{-1})^T \Sigma^{-1} (y - \mu)\right], \text{ 将向量 } y \text{ 代换为向量 } x \text{ 即可得到结果。}$$

- 几何意义：

■ 在二维空间中，一个2维高斯分布（分量模型）所表示的流形应当近似为一个椭圆；而三维空间中，一个3维高斯分布对应一个椭球。而对于那些不成该类形状的分布，则应使用多个分量模型（高斯混合模型）共同表征。

2. 高斯混合模型： $p(x) = \sum_{k=1}^K p(k)p(x|k) = \sum_{k=1}^K \pi_k N(x|\mu_k, \Sigma_k).$

- $p(k)$ ：选择该分量模型的概率（先验概率），满足 $\sum_{k=1}^K p(k) = 1$ .

2. Expectation Maximization (迭代求解算法)

1. Maximum Likelihood Estimation (极大似然估计)

- 概念：设有样本  $Y = y_1, y_2, \dots, y_N$ ，并假设抽样是独立的。则从该分布中恰好抽样到该样本的概率为  $L(Y; \mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^N p(y_i; \mu, \Sigma)$ 。对上式求导并令导数为零时，所求出的参数  $\mu, \Sigma$  就是使此概率最大的参数。所以，极大似然估计的意义就是，通过最大化样本集的联合概率，来对参数进行估计，从而选择最佳的分布模型（参数）。

## 2. EM算法（注意，如果只关心求解方法，只看迭代过程部分即可）

- 到这里，我们应当已经知道GMM的求解过程就是求出其参数  $\pi_k, \mu, \Sigma$ ，使得该组参数下的GMM最有可能产生我们的样本。

- 那么，使用MLE能否求解GMM呢？接下来我们证明MLE无法求解GMM。

1. 引入隐变量  $\gamma$ ，它是一个  $K$  维的指示函数（二值），显然  $p(\gamma_k = 1) = \pi_k$ .

2. 样本点概率为  $p(y) = \sum_{\gamma} p(\gamma) p(y|\gamma) = \sum_{k=1}^K \pi_k N(y|\mu_k, \Sigma_k)$ .

3. 则样本的联合概率为

$$L(y|\mu, \Sigma, \pi) = \prod_{i=1}^N p(y_i|\mu, \Sigma, \pi) = \prod_{i=1}^N \sum_{j=1}^K \pi_j N(y_i|\mu_j, \Sigma_j).$$

4. 取对数，有  $\log L(y|\mu, \Sigma, \pi) = \sum_{i=1}^N \log \sum_{j=1}^K \pi_j N(y_i|\mu_j, \Sigma_j)$ .

5. 若想用MLE求解，则需要求上式的导数，而上式形式为对数中含有求和，所以无法求导。

- 这就要求我们寻找一个迭代式的解法来求解这个优化问题。

- 证明

1. 首先，不加证明地给出EM算法的参数迭代公式

$$\theta^{(t+1)} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \left( \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x, z|\theta) dz \right)$$

2. 然后，证明该公式的有效性，也即每次迭代都有  $p(x|\theta^{(t+1)}) > p(x|\theta^{(t)})$

1. 首先引入（分量）模型选择隐变量  $z$

$$p(x, z|\theta) = \frac{p(x, z, \theta)}{p(\theta)} = \frac{p(x, \theta)}{p(\theta)} \cdot \frac{p(x, z, \theta)}{p(x, \theta)} = p(x|\theta) \cdot p(z|x, \theta)$$

2. 等式两侧取对数

$$\log p(x, z|\theta) = \log p(x|\theta) + \log p(z|x, \theta)$$

3. 如此可以将隐变量  $z$  引入到了似然函数中

$$\log p(x|\theta) = \log p(x, z|\theta) - \log p(z|x, \theta)$$

4. 对等式两侧同时求关于  $p(z|x, \theta^{(t)})$  的期望（连续积分，离散权和）

$$\int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x|\theta) dz = \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x, z|\theta) dz - \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta) dz$$

5. 化简左式

$$\int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x|\theta) dz = \log p(x|\theta) \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) dz = \log p(x|\theta) \cdot 1 = \log p(x|\theta)$$

6. 所以，我们有

$$\log p(x|\theta) = \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x, z|\theta) dz - \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta) dz$$

3. 而迭代式求解极大似然估计的思想就是使每一轮迭代之后，都满足

$$\log p(x|\theta^{(t+1)}) \geq \log p(x|\theta^{(t)})$$

4. 故将该约束转化为

$$\begin{aligned} & \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x, z|\theta^{(t+1)}) dz - \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t+1)}) dz \\ & \geq \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x, z|\theta^{(t)}) dz - \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t)}) dz \end{aligned}$$

5. 将上式拆分，分别得到

$$\int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x, z|\theta^{(t+1)}) dz \geq \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(x, z|\theta^{(t)}) dz \quad (1)$$

$$\int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t+1)}) dz \leq \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t)}) dz \quad (2)$$

6. 观察式 (1) , 发现其左右两侧恰好是EM算法的公式形式, 而EM算法建立的前提就是 $p(x|\theta^{(t+1)}) > p(x|\theta^{(t)})$ , 因此, 式 (1) 得证。

7. 观察式 (2) , 对其进行等价变换

$$\begin{aligned} \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t+1)}) dz &\leq \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t)}) dz \\ \implies \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t)}) dz - \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t+1)}) dz &\geq 0 \\ \implies \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t)}) - p(z|x, \theta^{(t)}) \log p(z|x, \theta^{(t+1)}) dz &\geq 0 \\ \implies \int_z p(z|x, \theta^{(t)}) \log \frac{p(z|x, \theta^{(t)})}{p(z|x, \theta^{(t+1)})} dz &\geq 0 \end{aligned}$$

8. 观察上式, 发现它是KL散度 ([WIKI](#)) 的形式, 而KL散度的基本性质就是非负性, 故上式成立, 故式 (2) 得证。

9. 综上所述, 该公式的有效性证明完毕。

## ■ 数学分析

1. 首先, 引入隐变量 $\gamma_{i=(1\dots N), j=(1\dots K)}$ , 代表第*i*个样本点属于第*j*个分量模型的概率。如此我们可以将不完全数据 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  (仅含各个样本点, 不含各样本点属于哪个分量模型) 补成完全数据 $Y = ((y_1, \gamma_1), (y_2, \gamma_2), \dots, (y_N, \gamma_N))$ .

2. 可以写出完全数据的似然函数

$$\begin{aligned} p(y, \gamma | \mu, \Sigma, \pi) &= \prod_{i=1}^N p(y_i, \gamma_i | \mu, \Sigma, \pi) \\ &= \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^K (\pi_j N(y_i | \mu_j, \Sigma_j))^{\gamma_{i,j}} \\ &= \prod_{j=1}^K \prod_{i=1}^N (\pi_j N(y_i | \mu_j, \Sigma_j))^{\gamma_{i,j}} \\ &= \prod_{j=1}^K \pi_j^{\sum_{i=1}^N \gamma_{i,j}} \cdot \prod_{j=1}^K \prod_{i=1}^N (N(y_i | \mu_j, \Sigma_j))^{\gamma_{i,j}} \end{aligned}$$

3. 对数似然函数 (注意, 这里每个样本*i*对应的是*j*都是已知的)

$$\log p(y, \gamma | \mu, \Sigma, \pi) = \sum_{j=1}^K (\sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \log \pi_j) + \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} N(y_i | \mu_j, \Sigma_j)$$

4. 假设我们可以使用一组初始参数, 即 $\mu^0, \Sigma^0, \pi^0$ , 则我们可以使用完全数据的似然函数对 $E_j(\gamma_{i,j} | y_i, \mu^0, \Sigma^0, \pi^0)$ 求一个期望, 这个期望称作Q函数。

5. Q函数

$$\begin{aligned} Q &= \log p(y, \gamma | \mu, \Sigma, \pi) \cdot E_j(\gamma_{i,j} | y_i, \mu^0, \Sigma^0, \pi^0) \\ &= \sum_{j=1}^K (\sum_{i=1}^N E_j(\gamma_{i,j} | y_i, \mu^0, \Sigma^0, \pi^0) \log \pi_j) + \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^N E_j(\gamma_{i,j} | y_i, \mu^0, \Sigma^0, \pi^0) N(y_i | \mu_j, \Sigma_j) \end{aligned}$$

6. 其中,  $E_j$ 就是对于某样本点*i*, 它属于第*j*个分量模型的概率。

$$\begin{aligned} E_j(\gamma_{i,j} | y_i, \mu^0, \Sigma^0, \pi^0) &= p(\gamma_{i,j} = 1 | y_i, \mu^0, \Sigma^0, \pi^0) \\ &= \frac{\pi_j^0 N(y_i | \mu_j^0, \Sigma_j^0)}{\sum_{j=0}^K \pi_j^0 N(y_i | \mu_j^0, \Sigma_j^0)} \end{aligned}$$

7. EM迭代求解的过程, 就是最大化Q函数的过程。

■ 迭代过程: 首先初始化一组参数 $\mu, \Sigma, w, \pi$ , 然后循环进行E步和M步, 直至收敛。

1. E步: expectation, 期望步。

- 根据上一轮的各分量模型的高斯分布参数 $\mu, \Sigma$ , 求出模型选择参数 $\pi$ .
- 步骤

1. 首先, 使用 $\pi, \mu, \Sigma$ 计算每个变量分别属于每个簇的概率 $w$ .

$$w_{i,j} = \frac{\pi_j P(x_i | \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k P(x_i | \mu_k, \Sigma_k)}$$

2. 然后，使用 $w$ 计算分量模型的选择概率 $\pi$ .

$$\pi_j = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K w_{i,j}}$$

2. M步：maximization，最大化步。

- 根据E步求出的模型选择参数 $\pi$ ，求出新一轮的各分量模型的高斯分布参数 $\mu, \Sigma$ .
- 步骤

1. 首先，使用 $w$ 计算各分量模型的均值 $\mu$ .

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,j} x_i}{\sum_{i=1}^N w_{i,j}}$$

2. 然后，使用 $w, \mu$ 计算各分量模型的协方差矩阵 $\Sigma$ .

$$\Sigma_j = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,j} (x_i - \mu_j)^T (x_i - \mu_j)}{\sum_{i=1}^N w_{i,j}}$$

## Coding

---

- 文件目录结构
  - source
    - imgs
    - testbench
      - GMM\_EM.py : 使用二维数据测试GMM和EM算法的正确性。
      - UVA10480\_Sabotage.cpp : 使用带当前弧优化的Dinic算法求解无向边最大流最小割课题，并输出边割集，测试网络流算法的正确性。
    - utils
      - get\_positive\_definite.py : 获取正定矩阵。
      - get\_positive\_semidefinite.py : 获取半正定矩阵。
    - main.py
- 开发过程

1. 编程 GMM\_EM.py 文件，对GMM模块进行测试。

1. 设置数据的分布情况。我们使用二维数据，分为3簇高斯分布，并设置其均值、协方差矩阵、点数。

```
mu_hat = np.array(
(
    [2.5, 8],
    [8, 2.5],
    [10, 10]
)
) # [3, 2]
sigma_hat = np.array(
(
    [[2, 2], [2, 4]],
    [[4, 2], [2, 2]],
    [[2, 0], [0, 2]]
)
```

```

)    # [3, 2, 2]
pts_hat = [300, 600, 900]
k = 3

```

2. 初始化模型，并生成数据集。

```

gmm = GMM(mu_hat, sigma_hat, pts_hat, k)
class GMM():
    def __init__(self, mu, sigma, pts, k):
        '''这里传递的是真实值，而非迭代的初始值。（GMM的类属性都是真实值而非计算值）
        mu: [k, d]
        sigma: [k, d, d]
        pts: num of points in each sample set
        k: num of component models
        '''
        self.mu, self.sigma, self.pts = mu, sigma, pts
        self.k = k
        self.x0, self.x1, self.x2, self.x = self.get_x(mu, sigma,
pts)

    def get_x(self, mu, sigma, pts):
        x0 = np.random.multivariate_normal(mu[0], sigma[0], pts[0])
        x1 = np.random.multivariate_normal(mu[1], sigma[1], pts[1])
        x2 = np.random.multivariate_normal(mu[2], sigma[2], pts[2])
        # 生成三簇数据，每簇100个样本点
        x = np.vstack((x0, x1, x2))      # [300+600+900, 2]
        return x0, x1, x2, x

```

3. 进行模型训练，设置我们期望的分量模型个数也为3，最大迭代轮数为100。每一轮迭代依次更新 $w, \pi, \mu, \Sigma$ （其各自的更新函数详见代码）。

```

gmm.learn(k=3, num_epoch=100)
def learn(self, k, num_epoch):
    '''
    k: num of component models
    '''
    mu = np.random.randint(1, 5, (k, 2))
    sigma = np.random.randint(1, 5, (k, 2, 2))
    w = np.ones((sum(self.pts), k)) / k      # w[i][j]代表第i个样本点属于第j个分量模型的概率，初始为等概率
    pi = np.sum(w, axis=0) / np.sum(w)        # p[j]代表选择第j个分量模型的概率，初始为等概率
    llh_ls = []
    for epoch in range(num_epoch):
        llh_ls.append(self.get_llh(k, pi, mu, sigma))
        print(f'{epoch}: loglikelihood: {llh_ls[-1]}')
        if len(llh_ls) > 1 and llh_ls[-1] == llh_ls[-2]:
            self.show(k, mu, sigma)
            break
    elif epoch % 10 == 0:
        self.show(k, mu, sigma)
    w = self.update_w(k, mu, sigma, pi)
    pi = self.update_pi(k, w)
    mu = self.update_mu(k, w)

```

```
sigma = self.update_sigma(k, w, mu)
```

4. 在每一轮迭代时，都计算目前GMM能够获得的最大似然估计，并判断模型是否收敛。

```
def get_llh(self, k, pi, mu, sigma):
    pdfs = np.zeros((self.x.shape[0], k))
    for j in range(k):
        pdfs[:, j] = pi[j] * multivariate_normal.pdf(
            self.x,
            mu[j],
            np.diag([sigma[j], _, _] for _ in
range(sigma.shape[-1])))
    return -np.mean(np.log(pdfs.sum(axis=1)))
```

5. 每10轮迭代，展示拟合结果。

```
def show(self, k, mu, sigma):
    plt.figure(figsize=(10, 8))
    plt.axis((-5, 15, -5, 15))
    def true_plot():
        '''展示真实数据类'''
        plt.scatter(self.x0[:, 0], self.x0[:, 1], s=5)
        plt.scatter(self.x1[:, 0], self.x1[:, 1], s=5)
        plt.scatter(self.x2[:, 0], self.x2[:, 1], s=5)
    def calc_plot():
        '''展示计算分类'''
        colors = ['r', 'g', 'b']
        plt.scatter(self.x[:, 0], self.x[:, 1], s=5)
        ax = plt.gca()
        for cur in range(self.k):
            # 绘制真实高斯分布流形
            args = {
                'facecolor': 'None',           # 默认有颜色填充，将其更改为
无填充
                'edgecolor': colors[cur],     # 默认为无色，将其更改为有颜
色
                'linewidth': 2,                # 线条粗细
                'linestyle': ':'             # 默认为实线，设置为虚线
            }
            conv = self.sigma[cur]
            _, v = np.linalg.eig(conv)   # 计算协方差矩阵的特征向量
            angle = np.rad2deg(np.arccos(v[0, 0])) # 计算应该偏转的角度
            e = Ellipse(self.mu[cur], 3 * self.sigma[cur][0][0], 3 *
self.sigma[cur][1][1], angle, **args)
            # 椭圆中心坐标，宽度，高度，绘画参数
            ax.add_patch(e)
        for cur in range(k):
            # 绘制计算高斯分布流形
            args = {
                'facecolor': 'None',           # 默认有颜色填充，将其更改为
无填充
                'edgecolor': 'r',              # 默认为无色，将其更改为有颜
色
            }
```

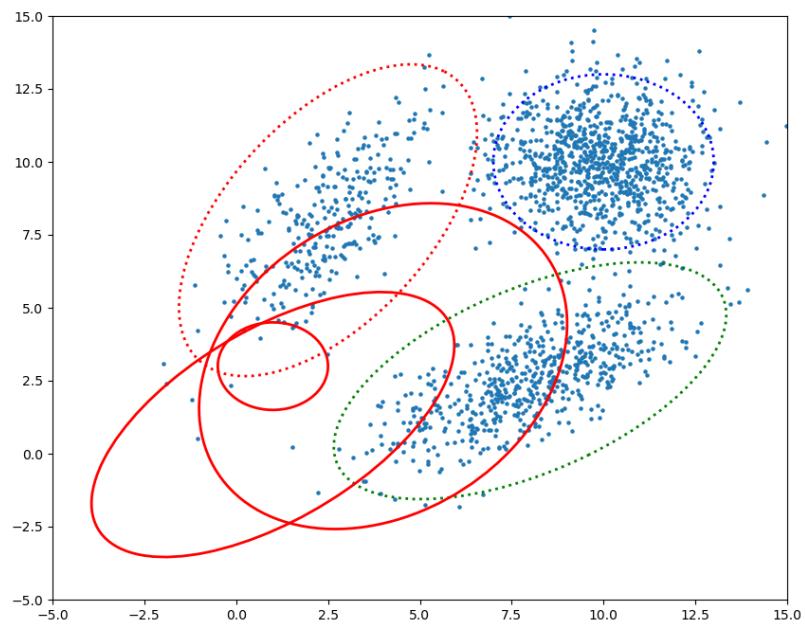
```

        'linewidth': 2,           # 线条粗细
    }
conv = sigma[cur]
_, v = np.linalg.eig(conv)  # 计算协方差矩阵的特征向量
angle = np.rad2deg(np.arccos(v[0, 0]))  # 计算应该偏转的角度
e = Ellipse(mu[cur], 3 * sigma[cur][0][0], 3 *
sigma[cur][1][1], angle, **args)
ax.add_patch(e)            # 绘制高斯分布（椭圆）
calc_plot()
plt.show()

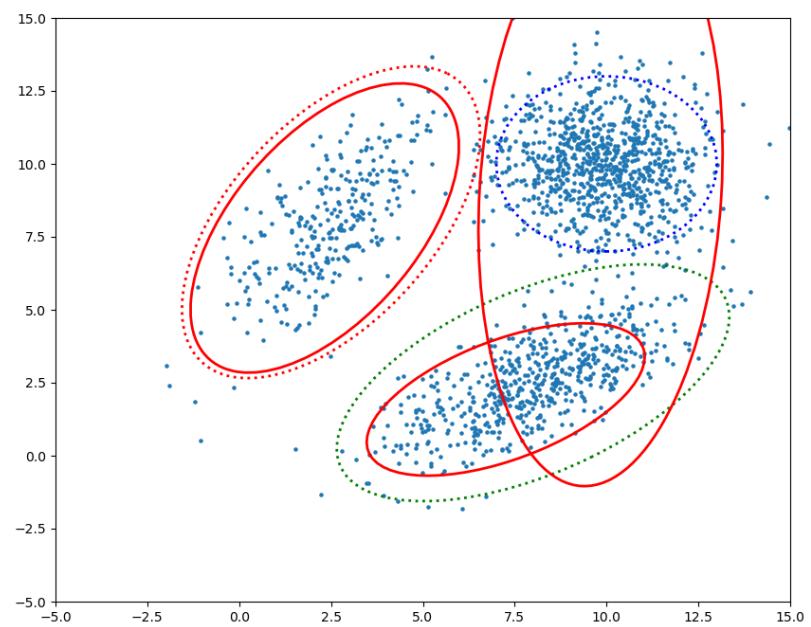
```

6. 展示结果 (虚线是真实分布, 实线是模型计算分布)

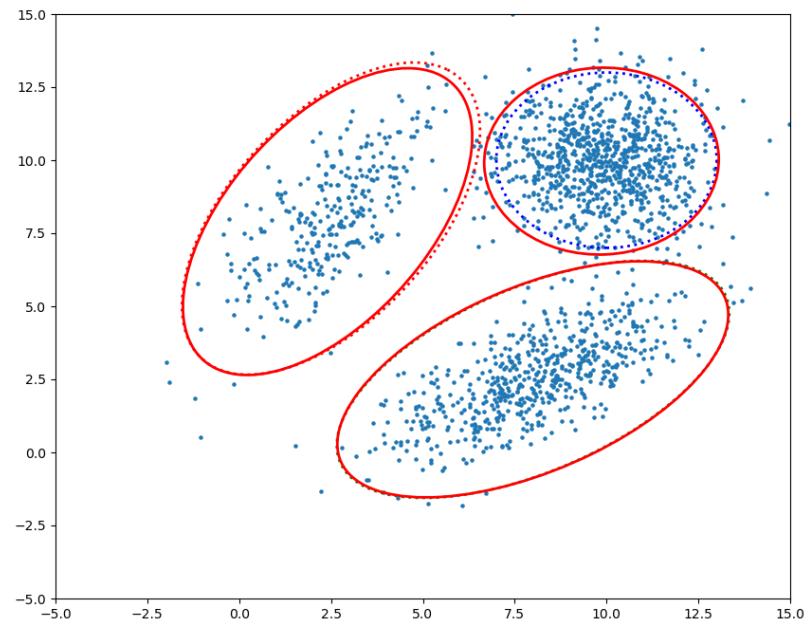
1. 0轮 (随机初始值)



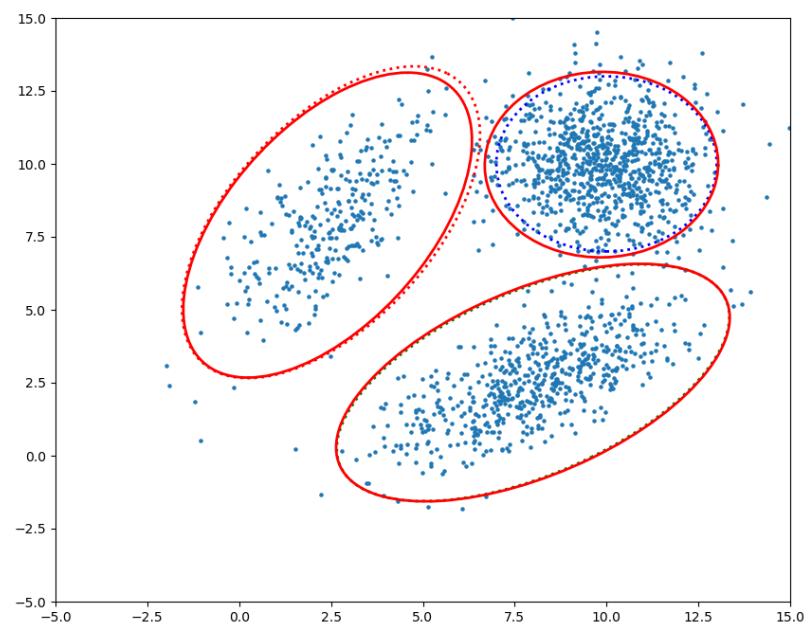
2. 10轮



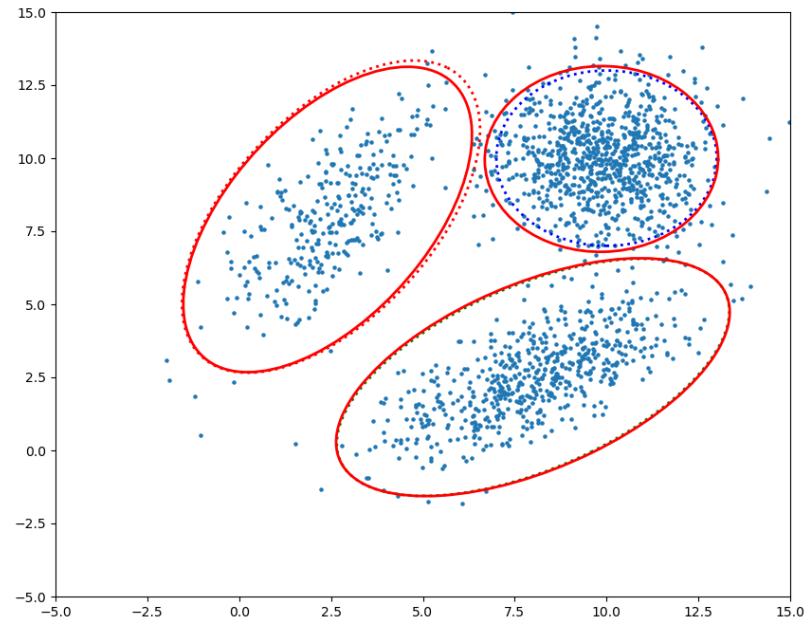
3. 20轮



4. 30轮



5. 40轮



6. 查看日志，证明模型已经收敛。

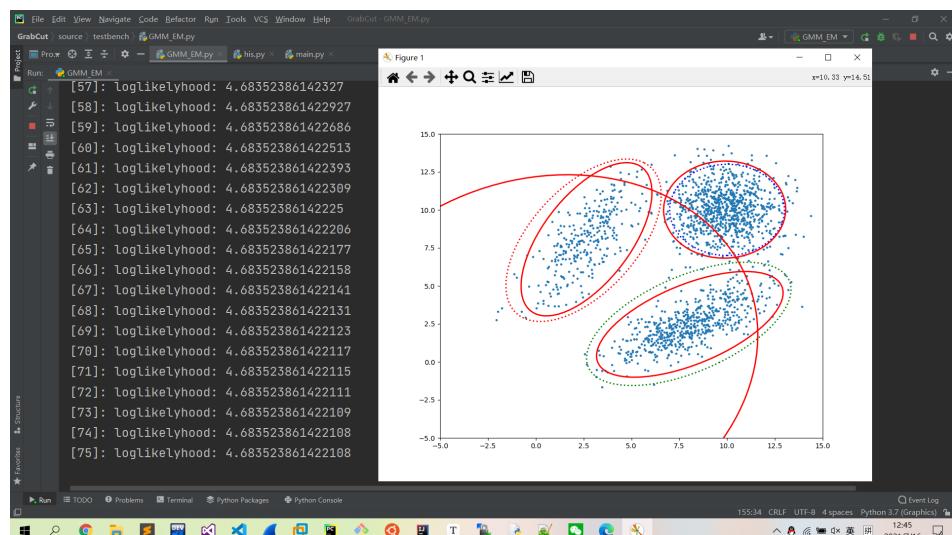
```
[0]: loglikelihood: 12.267037215186347
[1]: loglikelihood: 5.231127288615907
[2]: loglikelihood: 5.191702249004407
[3]: loglikelihood: 5.141392745986533
[4]: loglikelihood: 5.083904510923752
[5]: loglikelihood: 5.031166486827252
[6]: loglikelihood: 4.978405160769869
[7]: loglikelihood: 4.915171032957457
[8]: loglikelihood: 4.851509395119193
[9]: loglikelihood: 4.813266290280343
[10]: loglikelihood: 4.794315382867159
```

```

[11]: loglikelihood: 4.7810217720338715
[12]: loglikelihood: 4.768199038813596
[13]: loglikelihood: 4.754418071035711
[14]: loglikelihood: 4.7400823307206235
[15]: loglikelihood: 4.727472238166478
[16]: loglikelihood: 4.719337214227895
[17]: loglikelihood: 4.715690069335588
[18]: loglikelihood: 4.714507401831344
[19]: loglikelihood: 4.714208638336598
[20]: loglikelihood: 4.714143418564018
[21]: loglikelihood: 4.714130021165521
[22]: loglikelihood: 4.714127304229113
[23]: loglikelihood: 4.714126746883143
[24]: loglikelihood: 4.714126629655769
[25]: loglikelihood: 4.714126604148654
[26]: loglikelihood: 4.714126598370389
[27]: loglikelihood: 4.714126597002241
[28]: loglikelihood: 4.714126596663384
[29]: loglikelihood: 4.714126596575815
[30]: loglikelihood: 4.714126596552325
[31]: loglikelihood: 4.71412659654583
[32]: loglikelihood: 4.7141265965439905
[33]: loglikelihood: 4.714126596543459
[34]: loglikelihood: 4.714126596543306
[35]: loglikelihood: 4.714126596543257
[36]: loglikelihood: 4.714126596543245
[37]: loglikelihood: 4.714126596543243
[38]: loglikelihood: 4.714126596543241
[39]: loglikelihood: 4.714126596543238
[40]: loglikelihood: 4.714126596543238

```

7. 探索如果将分量模型个数设置为4，效果为：模型仍然能收敛，但是其中一个分量模型基本无贡献。



2. 编程 UVA10480 Sabotage.cpp，对Dinic模块进行测试。

1. 由于Grabcut是一个稀疏图，所以使用链表式建图。

```

struct Edge{
    int v, w, nxt;
}edge[maxn * 10];
// edge[i]以边为下标

```

```

int n, m;
int head[maxn], cnt;
// head[i]以点为下标, 存放最后一条以该点为起点的边
// cnt是所有边, 包括正向边和反向边
int deep[maxn]; // deep[i]以点为下标, 0代表该点不能到达点t
int now[maxn]; // now[i]以点为下标, 代表该点的当前弧
int vis[maxn]; // 只在dfs染色时使用, 以点为下标, 代表该点是否属于起点集合

void init(){
    memset(vis, false, sizeof(vis));
    memset(head, -1, sizeof(head));
    cnt = 0;
    return;
}
void addedge(int a, int b, int w){
    // 正向边
    edge[cnt].v = b;
    edge[cnt].w = w;
    edge[cnt].nxt = head[a]; // 上一条以a为起点的边
    head[a] = cnt; // 存储最后一条以a为起点的边
    cnt++;
    // 反向边
    edge[cnt].v = a;
    edge[cnt].w = w; // 因为是无向边, 所以反向边容量也为w
    edge[cnt].nxt = head[b];
    head[b] = cnt;
    cnt++;
    return;
}

```

2. 使用Dinic算法求解最大流，并且使用当前弧优化。每一次bfs进行多次增广。

```

int solve(int s, int t){
    int ans = 0;
    while(bfs(s, t)){
        int flow;
        while(flow = dinic(s, t, INF)){
            ans += flow;
        }
    }
    return ans;
}

bool bfs(int s, int t){
    memset(deep, 0, sizeof(deep)); // 首先认为所有点都到不了t
    queue<int> q;
    q.push(s);
    now[s] = head[s]; // s的当前弧应当是最后一条以s为起点的边
    deep[s] = 1;
    while(q.size()){
        int u = q.front();
        q.pop();
        for(int i=head[u]; i!=-1; i=edge[i].nxt){
            int w = edge[i].w, v = edge[i].v;
            if(deep[v] || !w)
                continue;

```

```

        deep[v] = deep[u] + 1;
        now[v] = head[v]; // v的当前弧应当是最后一条以v为起点的边
        q.push(v);
        if(v == t)
            return true; // 只要能找到增广路就可以了
    }
}
return false;
}

int dinic(int s, int t, int flow){
    if(s == t)
        return flow;
    int i, rest=flow;
    for(i=now[s]; i!=-1 && rest; i=edge[i].nxt){
        int w = edge[i].w, v = edge[i].v;
        if(w && deep[v] == deep[s] + 1){
            int deep_rest = dinic(v, t, min(rest, w));
            if(!deep_rest)
                deep[v] = 0; // 从v无法到t
            edge[i].w -= deep_rest;
            edge[i^1].w += deep_rest;
            rest -= deep_rest;
        }
    }
    now[s] = i; // 当前弧需要跳过已经被榨干的弧
    return flow - rest; // 返回还剩余多少流量没有分配
}

```

3. 因为需要输出边割集，所以从起点开始对其所在集合进行染色。

```

void dfs(int s){
    vis[s] = true;
    for(int i=head[s]; i!=-1; i=edge[i].nxt){
        int v = edge[i].v;
        if(vis[v])
            continue;
        if(edge[i].w)
            dfs(v); // 如果已经为0，说明是瓶颈边，应当被切断
    }
    return;
}

```

4. 遍历所有边，两端点颜色不同的边即属于边割集。

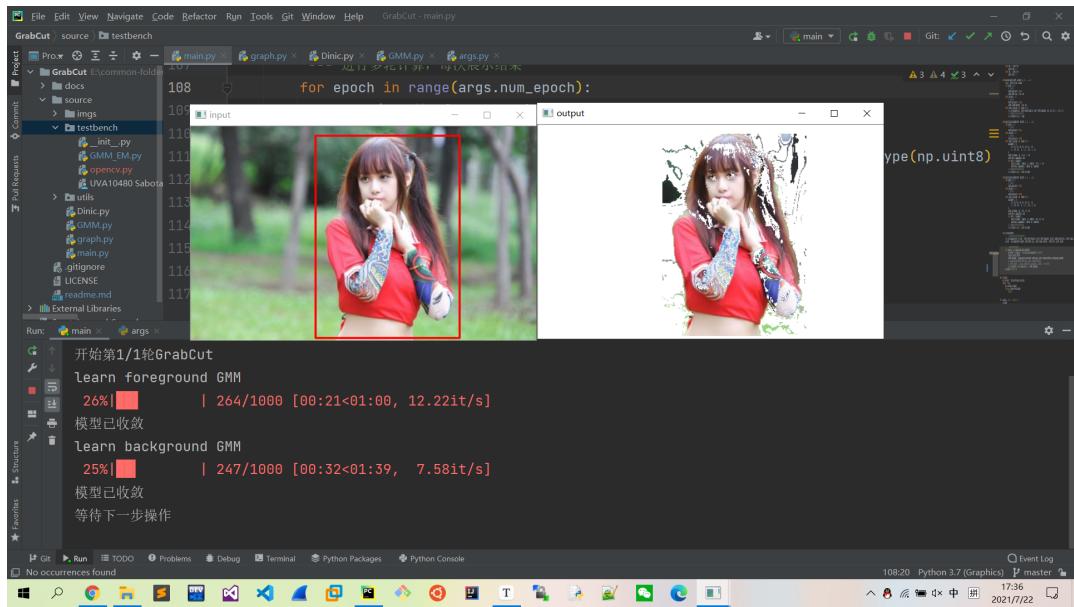
```

for(int i=0; i<cnt; i+=2){
    int u = edge[i^1].v, v = edge[i].v;
    if(vis[u] != vis[v])
        cout<<u<<' '<<v<<endl;
}

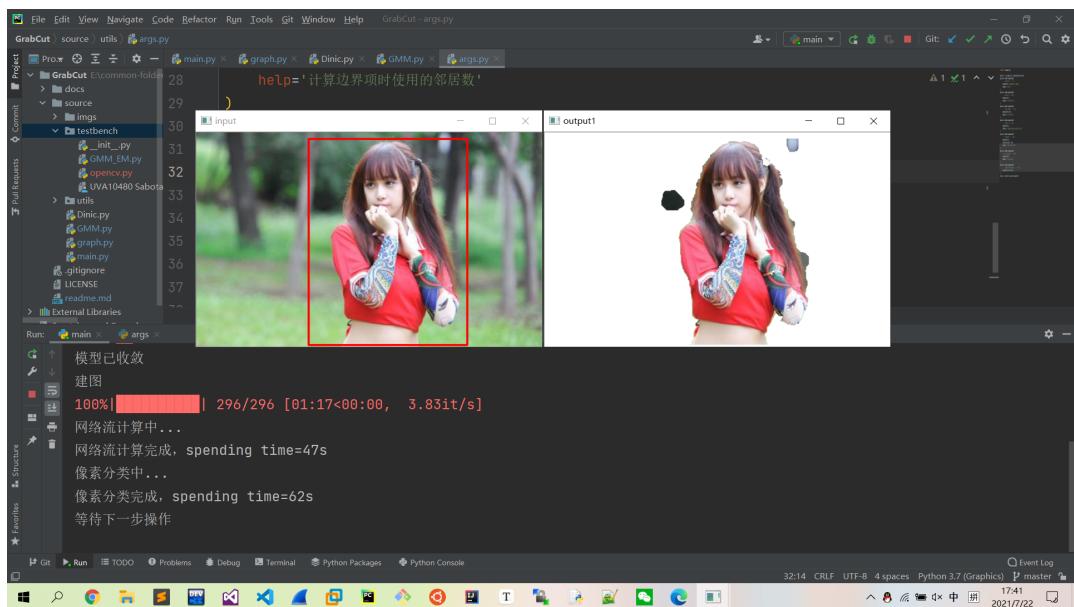
```

3. 编程框图部分，程序打开输入图片，用户需要在图片上绘制出红色矩形框，可以多次绘制，确定粗略的前后景。

4. 将GMM模块加入程序，并测试其运行结果。

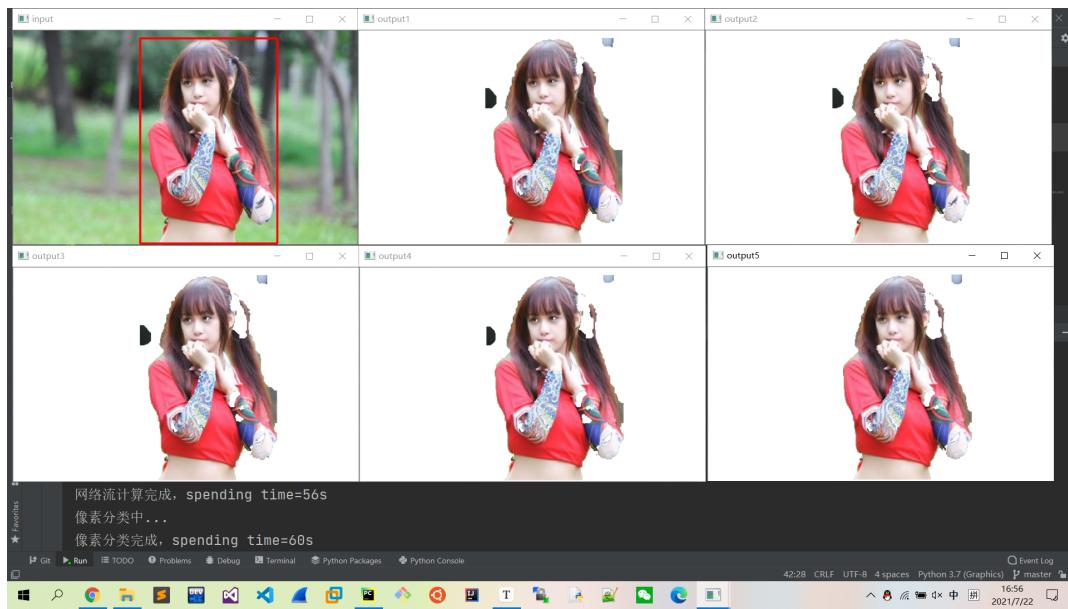


5. 将网络流部分加入程序，并测试其只迭代一轮的运行结果。可以看到，比单纯使用GMM要好得多，但是仍不完美，尤其是前景、后景的交界处。

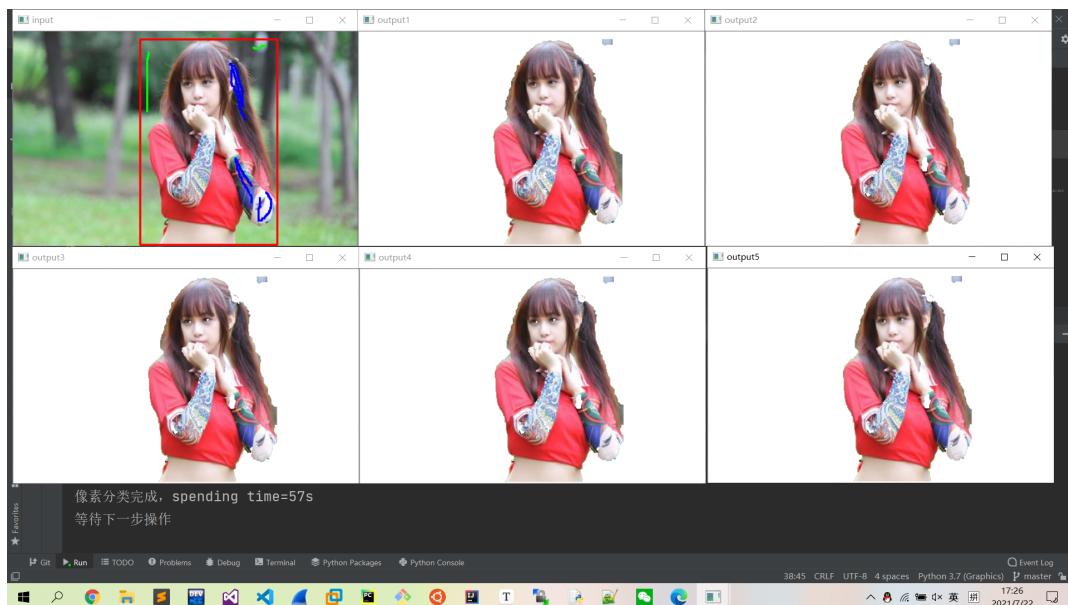


6. 编程人工标定前景后景部分：用户按下 f 键，然后使用鼠标涂抹出蓝色的区域，视为前景；  
用户按下 b 键，然后使用鼠标涂抹出绿色的区域，视为后景。

7. 测试多轮迭代结果，可以看到，经过5轮迭代之后，错误的前景区域逐渐减少直至消失  
(advantage)，但是错误的后景区域会逐渐扩大 (weakness)。同时正确的后景区域也在  
逐渐扩大，使前景边缘更贴合。



8. 测试添加标注的效果，可以看到，错误的前景从一开始就很少，并且错误的后景也大量减少了。



## Conclusion

- python递归不能过深，默认最大深度为1000。解决办法有：

1. 增大递归深度

```
import sys
sys.setrecursionlimit(maxValidTimes)
```

2. 将dfs改成 bfs

- 注意像素是无符号数，要破除其限制，可以：

```
x = x.astype(int)
```

但是这样会导致在使用 `imshow` 函数时无法正常显示图片 (`imwrite`不受影响)，可以：

```
x = x.astype(np.uint8)
```

- 如果继续做的话，可能会去写一下 `GraphCut`，看看能否达到较好的效果。

## References

---

- [GrabCut: Interactive Foreground Extraction using Iterated Graph Cuts](#)
- [GraphCut算法](#)
- [搞懂多维高斯分布的由来](#)
- [详解EM算法与混合高斯模型](#)
- [EM算法的有效性证明](#)
- [EM算法计算过程](#)
- [GMM与EM算法的Python实现](#)
- [Vjudge-UVA10480 Sabotage](#)
- [Sabotage讲解](#)
- [实时显示矩形框](#)