Abstract

- Using "Poisson Image Editing" technique from `SigGraph 2004` to make two images fuse together.
- 已知target的被贴图区域的边缘一圈的像素值，以及贴图的散度，使用拉普拉斯算子，运用泊松方程求出融合图像被贴图区域的像素值。使用共轭梯度法求解，并使用稀疏矩阵运算库`scipy`进行加速。
    - 注意：对于图片融合任务，我们使用三个图片进行一次融合，分别是source（源图像）、mask（即源图像ROI部分的掩膜）、target（待插入贴图的图像），我们将源图像ROI部分称为贴图。

Keyword

- Poisson Equation
- Laplacian Operator
- Sparse Matrix
- Conjugate Gradient Iteration

Principle

泊松方程

- 泊松方程是数学中的一个常见的**偏微分方程**。
- 公式：$\Delta f = \Omega$
    - ∇**梯度**：一阶微分（离散形式）

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

    - Δ**散度**：二阶微分（离散形式）

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

    - 随着h->0，式子的值也越来越逼近微分结果，而对于离散形式的图片来说，h最小为1，即相邻像素的距离。因此，二阶微分可以转换成如下卷积的形式：
        - 一维

$$[1, -2, 1]$$

        - 二维，又称**拉普拉斯卷积核**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

偏微分方程

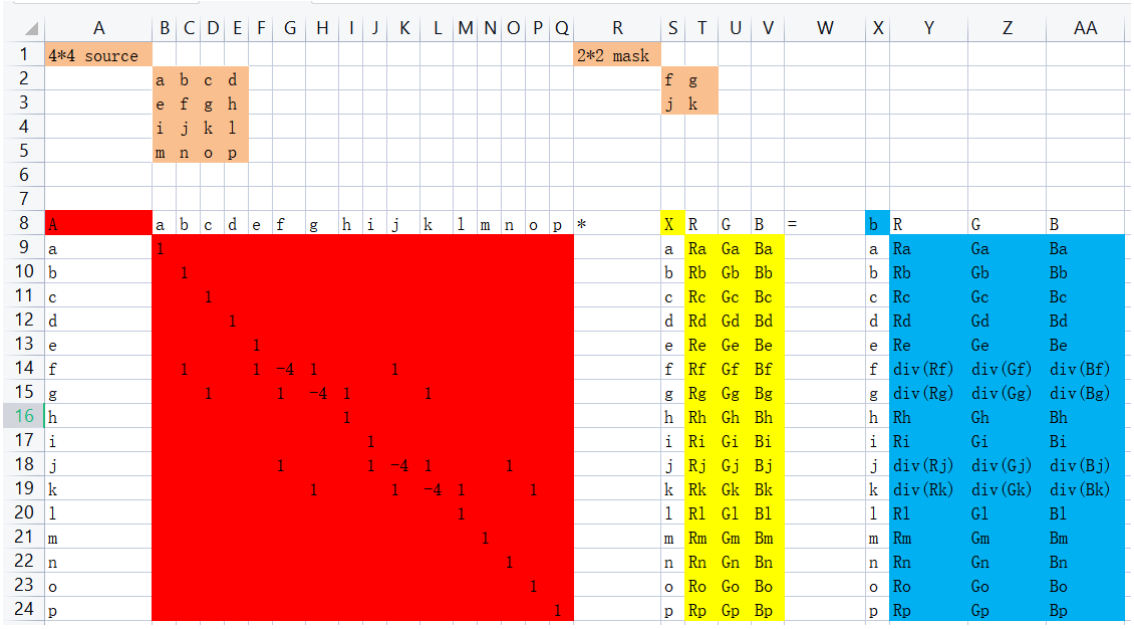
- WIKI
- Partial Differential Equation，简称PDE。
- 指含有未知函数及其偏导数的方程，符合这个关系的函数是这个方程的解。

梯度共轭法

- WIKI
- 适用于系数矩阵为**实正定对称的稀疏矩阵**的线性方程组的求解。

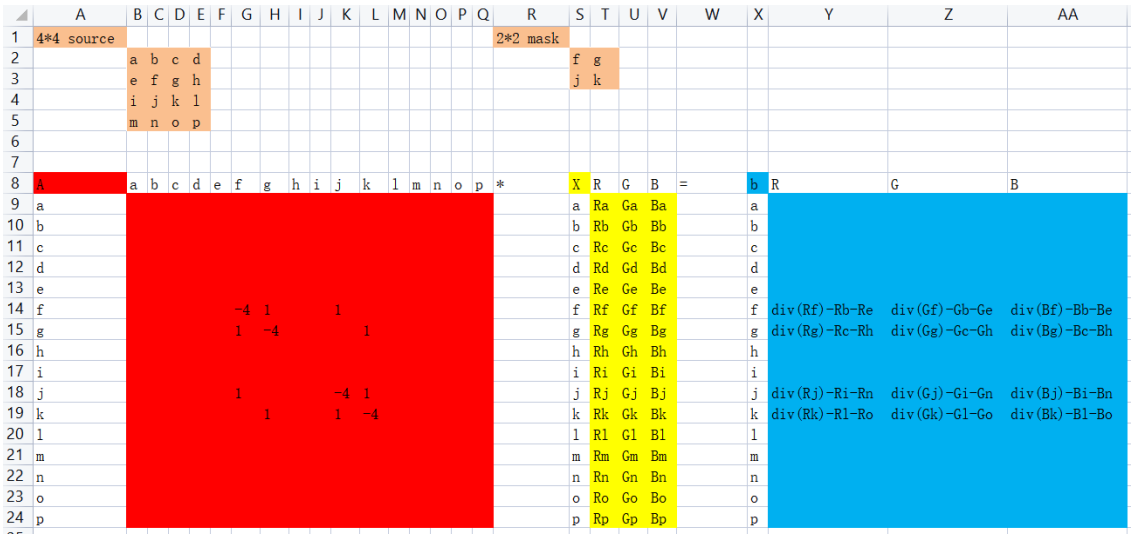
Mathematics

1. 设原图为4 * 4矩阵，其ROI为中间2 * 2的小矩形区域，构建泊松方程。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1	4*4 source																	2*2 mask									
2		a	b	c	d														f	g							
3		e	f	g	h														j	k							
4		i	j	k	l																						
5		m	n	o	p																						
6																											
7																											
8	A	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	*	X	R	G	B	=	b	R	G	B
9	a	1																	a	Ra	Ga	Ba		a	Ra	Ga	Ba
10	b		1																b	Rb	Gb	Bb		b	Rb	Gb	Bb
11	c			1															c	Rc	Gc	Bc		c	Rc	Gc	Bc
12	d				1														d	Rd	Gd	Bd		d	Rd	Gd	Bd
13	e					1													e	Re	Ge	Be		e	Re	Ge	Be
14	f		1				1	-4	1			1							f	Rf	Gf	Bf		f	div(Rf)	div(Gf)	div(Bf)
15	g			1				1	-4	1			1						g	Rg	Gg	Bg		g	div(Rg)	div(Gg)	div(Bg)
16	h								1										h	Rh	Gh	Bh		h	Rh	Gh	Bh
17	i									1									i	Ri	Gi	Bi		i	Ri	Gi	Bi
18	j							1			1	-4	1				1		j	Rj	Gj	Bj		j	div(Rj)	div(Gj)	div(Bj)
19	k								1			1	-4	1				1	k	Rk	Gk	Bk		k	div(Rk)	div(Gk)	div(Bk)
20	l													1					l	Rl	Gl	Bl		l	Rl	Gl	Bl
21	m														1				m	Rm	Gm	Bm		m	Rm	Gm	Bm
22	n															1			n	Rn	Gn	Bn		n	Rn	Gn	Bn
23	o																1		o	Ro	Go	Bo		o	Ro	Go	Bo
24	p																	1	p	Rp	Gp	Bp		p	Rp	Gp	Bp

2. 因为需要使用梯度共轭法求解方程，这要求系数矩阵是实正定对称的稀疏矩阵，故对方程进行一定的等价变换。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1	4*4 source																	2*2 mask									
2		a	b	c	d														f	g							
3		e	f	g	h														j	k							
4		i	j	k	l																						
5		m	n	o	p																						
6																											
7																											
8	A	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	*	X	R	G	B	=	b	R	G	B
9	a																		a	Ra	Ga	Ba		a			
10	b																		b	Rb	Gb	Bb		b			
11	c																		c	Rc	Gc	Bc		c			
12	d																		d	Rd	Gd	Bd		d			
13	e																		e	Re	Ge	Be		e			
14	f						-4	1			1								f	Rf	Gf	Bf		f	div(Rf)-Rb-Re	div(Gf)-Gb-Ge	div(Bf)-Bb-Be
15	g						1	-4				1							g	Rg	Gg	Bg		g	div(Rg)-Rc-Rh	div(Gg)-Gc-Gh	div(Bg)-Bc-Bh
16	h																		h	Rh	Gh	Bh		h			
17	i																		i	Ri	Gi	Bi		i			
18	j						1				-4	1							j	Rj	Gj	Bj		j	div(Rj)-Ri-Rn	div(Gj)-Gi-Gn	div(Bj)-Bi-Bn
19	k							1			1	-4							k	Rk	Gk	Bk		k	div(Rk)-Rl-Ro	div(Gk)-Gl-Go	div(Bk)-Bl-Bo
20	l																		l	Rl	Gl	Bl		l			
21	m																		m	Rm	Gm	Bm		m			
22	n																		n	Rn	Gn	Bn		n			
23	o																		o	Ro	Go	Bo		o			
24	p																		p	Rp	Gp	Bp		p			

3. 注意，如果令内部区域为不规则图形，如将f-g-i作为内部区域，则更有助于理解方程的等价变换之后代码应该怎么写。这里留给读者自行验证。

Coding

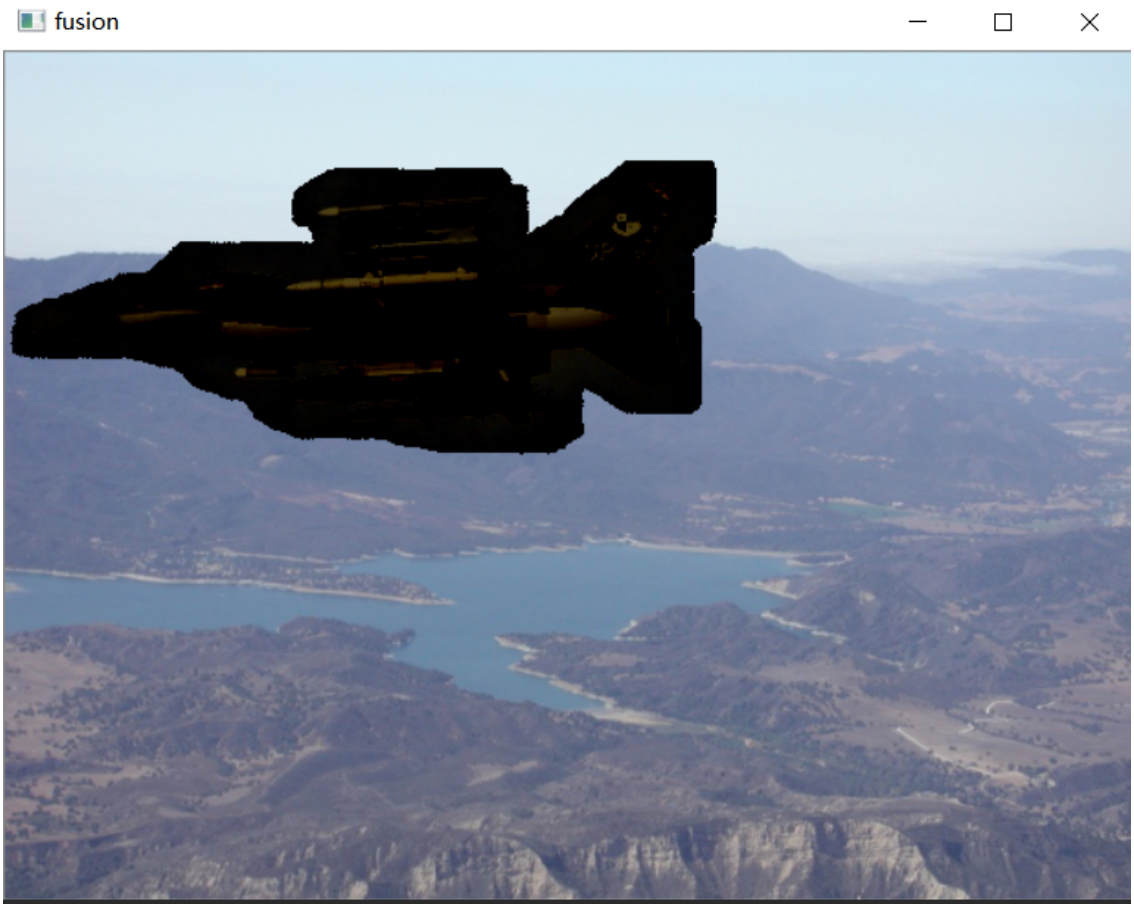
- 文件目录结构

- docs：存放报告文档
- imgs：存放使用的图像
- source：存放工程代码
  - utils：存放实验参数以及各种脚本。
    - `args.py`：实验参数，供main.py使用
    - `createMask.py`：生成mask的脚本。
  - `main.py`：主函数，进行泊松编辑
  - `PIE.py`：泊松编辑的实现类

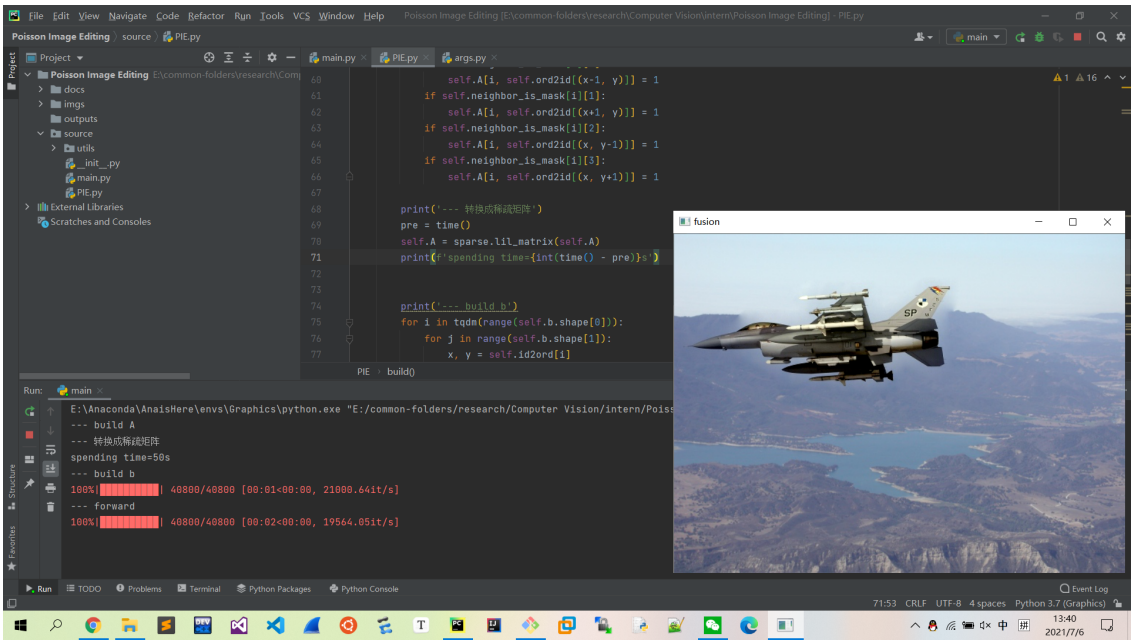
1. 第一个问题，贴图内部像素值太大，且边缘有毛刺。

fusion

2. 毛刺显然可以通过改变mask的判断方式解决，即将mask图中偏向于黑色的像素全部算作mask，属于数据层面的不严谨；而颜色全都过大则是由于读入的图片在进行计算时会出现溢出，导致结果不准确，可以通过强制类型转换破除计算过程中像素值为0-255的限制。



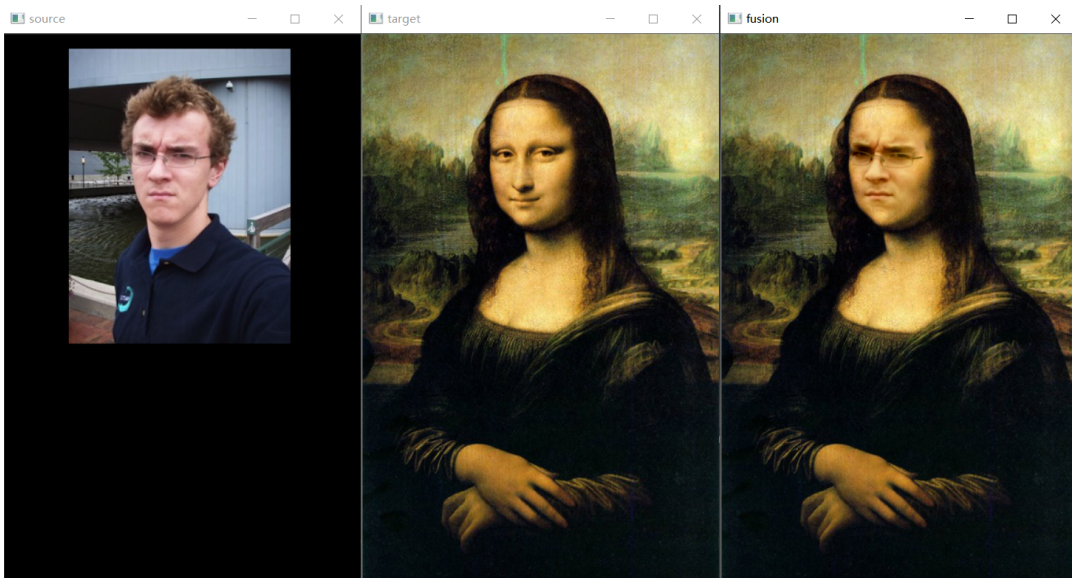
3. 最后这个bug比较难找，经观察，泊松方程解出的解非常小。再观察系数矩阵A和值矩阵b，发现b的值非常小，应该是边缘部分的真实值没有成功过渡给b。最终成功找出代码错误，完成复现。



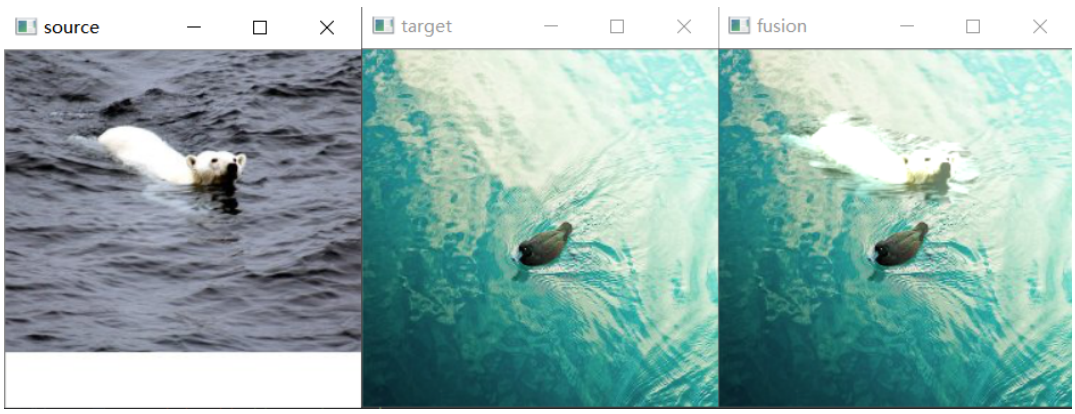
4. 检查调整target图片ROI区域的代码正确性。

5. 检查其它图片示例的代码正确性。

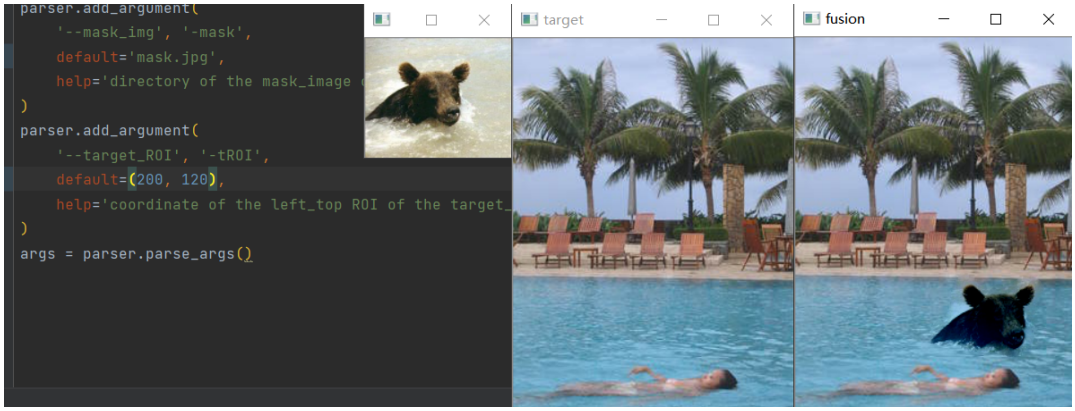
    1. mona



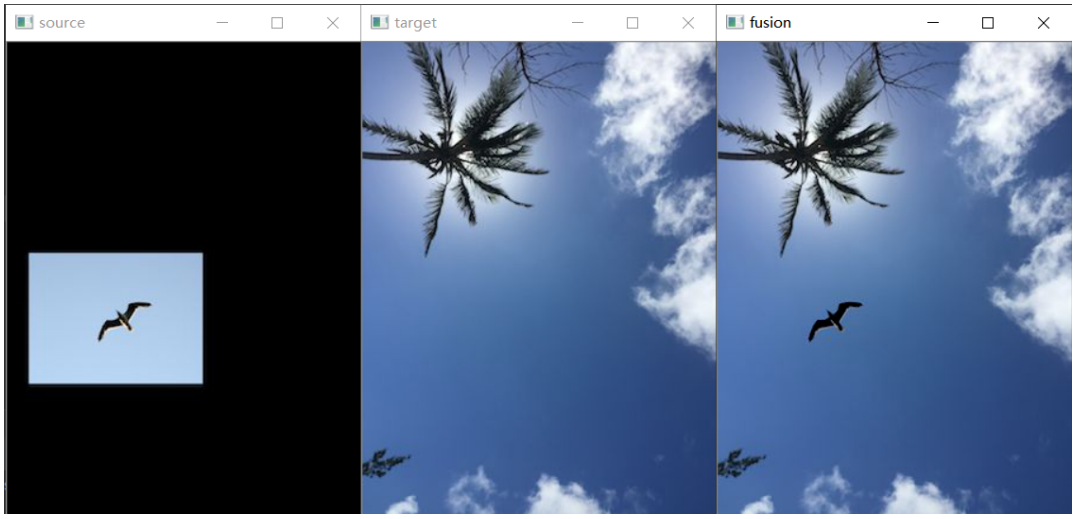
    2. sealion



3. bear

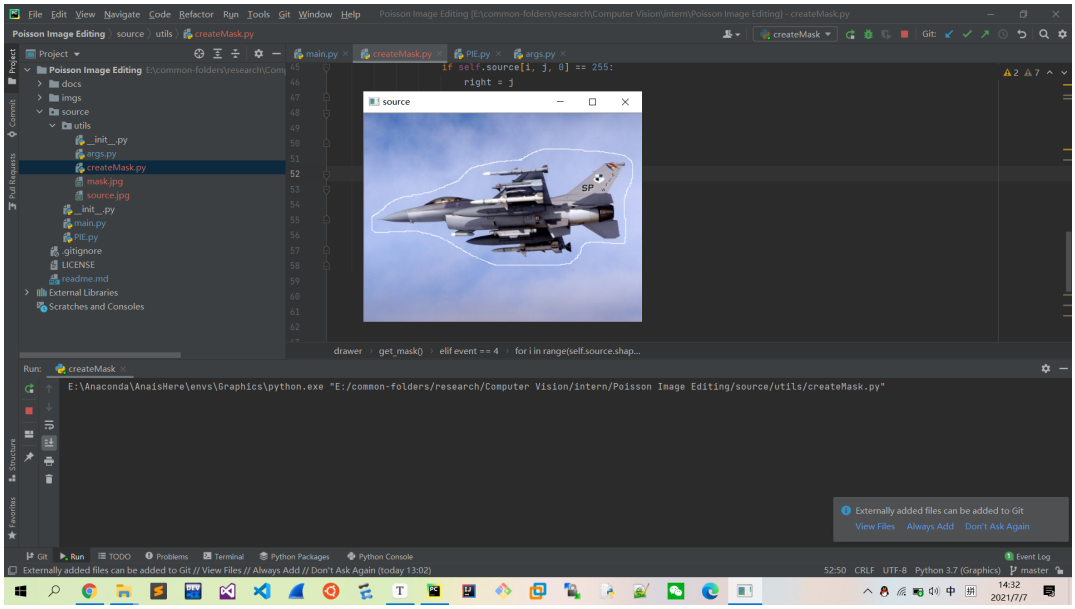


4. eagle

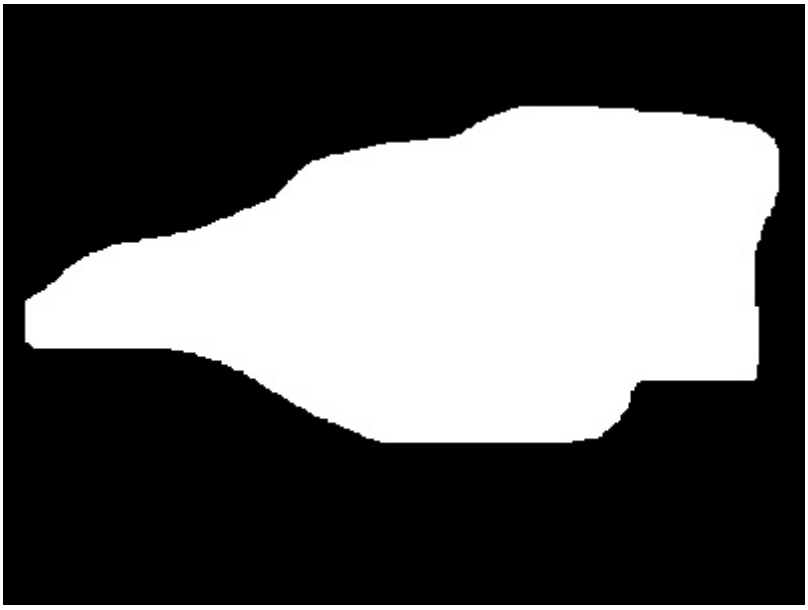


6. 制作mask绘制工具

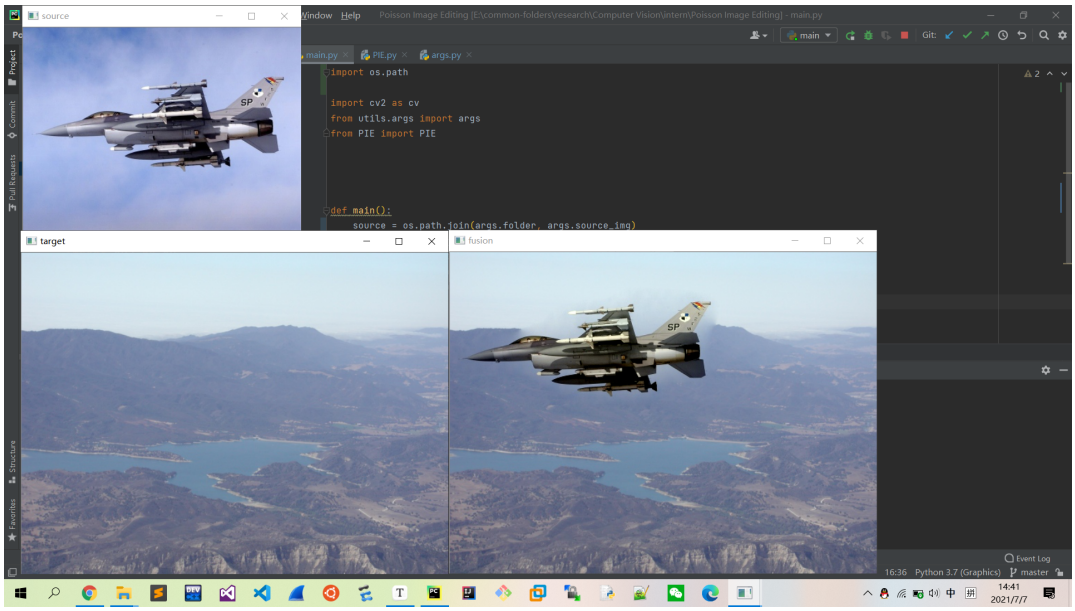
    1. 首先读入一张source图片并显示。
    2. 捕获用户鼠标动作，用户长按鼠标左键进行拖拽，绘制出轮廓线。



    3. 用户释放鼠标左键后，生成mask图片，并存储。



4. 验证生成mask的正确性。



Conclusion

- ~~从飞机的融合图片可以看出来贴图周围有明显的泛白，但是鹰的融合图片又没有这个问题，应继续对数值运算部分进行debug。~~通过使用mask生成工具进行验证，发现飞机的周围的泛白是原图飞机周围的云雾，由于原图的mask不够精细，贴图时引入了目标图中本不存在的云雾。

References

- Poisson Image Editing
- 从泊松方程的解法，聊到泊松图像融合
- Seamless cloning
- Code of huajh
- opencv鼠标绘图