ECRICOME S 2021

EXERCICE 1

Partie 1 : Étude de trois matrices

On note A, J et S les matrices de $\pi_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $\mathrm{Sp}(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J.
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie 2 : Étude des matrices magiques

Soit $n \geqslant 3$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant :
• $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$,
• pour tout i de $[[1;n]]$, $\ell_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$,
• pour tout j de $[[1;n]]$, $c_j(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,j}$,
• $d_1(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$ et $d_2(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,n-i+1}$,
alors :
M est magique si et seulement si : $\forall (i,j) \in [[1;n]]^2, \quad \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$.
Si M est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée **somme** de la matrice M.
On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n, et on admet que $\mathcal{E}_n$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer que ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On admettra dans la suite que, pour tout i de$[[2;n]]$ et pour tout j de $[[1;n]]$, les applications ℓ_i, c_j, d_1, d_2 et s sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_n$ de somme nulle.
   Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$.
7. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que ${}^tM$ est aussi un élément de $\mathcal{E}_n$ et déterminer $s\left({}^tM\right)$.
8. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer qu il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$,
   avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.
9. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$

On se place dans cette partie dans le cas particulier où $n = 3$.

10. Vérifier que les matrices A, J et S définies dans la partie 1 sont magiques, et déterminer leur somme.

11. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que :

$$M = M_1 + M_2, \qquad \text{avec } \begin{cases} M_1 \text{ antisymétrique,} \\ M_2 \text{ symétrique.} \end{cases}$$

    On explicitera notamment M_1 et M_2 en fonction de M.

12. Soit $M \in \mathcal{K}_3$. On écrit $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition vue en question 11 .

    a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{K}_3$.

    b) Montrer qu il existe deux réels α et β tels que :

$$M_1 = \alpha A \text{ et } M_2 = \beta S \ .$$

13. En déduire une base de $\mathcal{K}_3$, puis montrer que (A, J, S) est une base de $\mathcal{E}_3$.

14. On note $\Delta = \{M \in \mathcal{E}_3 \ / \ P^{-1}MP \text{ est diagonale}\}$, où P est la matrice définie dans la partie 1. Montrer que $\Delta = \text{Vect}(J, S)$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+y)\, e^{-\left(x^2+y^2\right)} \end{array}$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

    On **admettra** dans la suite que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1} f(x,y) &= 2\left(\left(1-(x^2+y)\right)(1-2x^2) - 2x^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ \partial^2_{2,2} f(x,y) &= -2\left(x^2+2y+y\left(1-2y\left(x^2+y\right)\right)\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) &= -2x\left(1+2y\left(1-x^2-y\right)\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)} \end{aligned}$$

3. Montrer que la hessienne de f en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est diagonale.

    La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$? Si oui, de quelle nature ?

4. Montrer que f admet un extremum local en $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ et préciser sa nature.

5. Montrer que la hessienne de f en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ est la matrice $H = e^{-3/4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$.

    Justifier que H est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont toutes deux strictement négatives.

    Qu'en déduire pour le point $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$?

6. a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \left((\max(|x|,|y|))^2 + \max(|x|,|y|)\right) e^{-(\max(|x|,|y|))^2}$$

b) En étudiant la limite en $+\infty$ de $u \longmapsto (u^2+u)\,e^{-u^2}$, montrer qu'il existe un réel r strictement positif tel que :

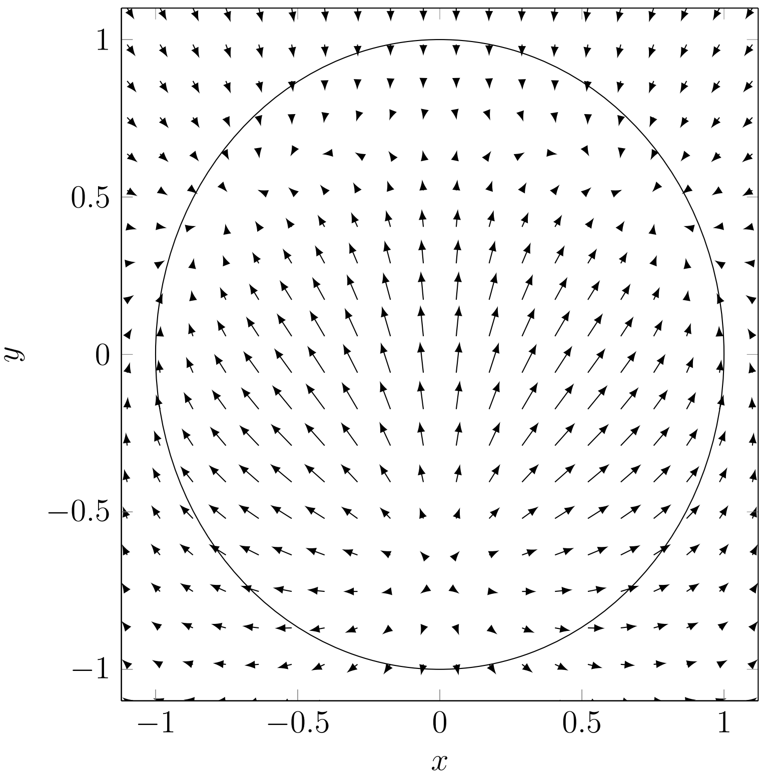
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(|x|,|y|) \geqslant r \Longrightarrow 0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$$

c) Représenter l'ensemble $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|,|y|) \leqslant r\}$ et justifier que cet ensemble est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

d) Vérifier que tous les points critiques de f appartiennent à $\mathcal{K}$.
En déduire tous les extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$, et les points où ils sont atteints.

On cherche maintenant à étudier les extrema de la fonction f sous la contrainte $x^2+y^2=1$.
On a représenté sur la figure 1 ci-dessous le champ de vecteurs correspondant au gradient de f (une flèche partant du point des coordonnées (x,y) représente le vecteur $\nabla f(x,y)$), ainsi que le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2=1$.

7. En s'appuyant sur la figure 1, la fonction f semble-t-elle admettre un extremum sous la contrainte $x^2+y^2=1$ au point de coordonnées $(1,0)$? Justifier votre réponse.
8. Déterminer sur $[-1,1]$ les extrema de la fonction $g : y \mapsto 1+y-y^2$.
9. Déduire de la question précédente l'ensemble des points pour lesquels f admet un extremum sous la contrainte $x^2+y^2=1$. Commenter ce résultat au vu de la figure 1.



Gradients de f et cercle d'équation $x^2+y^2=1$

PROBLÈME

Soit a un réel strictement positif.
On considère dans toute la suite du problème une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, d, \mathbb{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, a]$. L'objectif de ce problème est d'étudier puis de comparer deux estimateurs de a.
Les parties 1 et 2 de ce problème sont indépendantes.

Partie 1 : Estimateur du maximum de vraisemblance

On note pour tout $n \geqslant 1, V_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, appelé estimateur de a du maximum de vraisemblance.

1. a) On rappelle qu'en Scilab, l'instruction `grand (n,m, 'unf', a, b )` permet d'obtenir une matrice à `n` lignes et `m` colonnes, où chaque coefficient simule une loi uniforme sur l'intervalle [`a`,`b`].

   Écrire une fonction d'en-tête `function V=simV(n,a)` prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et un réel `a` strictement positif, et qui renvoie une réalisation de V_n.

   b) On a tracé ci-dessous cinq réalisations mutuellement indépendantes de $(V_1, V_2, \ldots, V_{100})$, dans le cas où $a = 1$.

   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer sur l'estimateur V_n ?

Figure n°2 Cinq évolutions de $(V_1, V_2 \cdots, V_{100})$ pour $a = 1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Rappeler l'expression de la fonction de répartition de X_1, suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, a])$.

   b) Déterminer la fonction de répartition F_n de V_n.

   c) En déduire que V_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de V_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que V_n admet une espérance et déterminer l'espérance de V_n.
   L'estimateur V_n est-il sans biais ?

4. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathbb{P}(|V_n - a| \geqslant \varepsilon)$ en fonction de F_n, de a et de ε.
   L'estimateur V_n est-il convergent ?

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t, exprimer $\mathbb{P}(n(a - V_n) \leqslant t)$ à l'aide de F_n.
   En déduire que la suite $(n(a - V_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi et son(ses) paramètre(s).

6. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer à partir de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre a, construit à l'aide de V_n.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Montrer que V_n admet un moment d'ordre 2, que l'on déterminera.

   b) Montrer que le risque quadratique de V_n vaut $\frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$.
   Quel résultat précédemment établi cela permet-il de retrouver ?

Partie 2 : Méthode des moments

Pour un entier $n \geqslant 1$, on note $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On note $M_n = 2\overline{X}_n$, appelé estimateur de a par la méthode des moments.

8. Écrire une fonction d'en-tête `function y=simM(n, a)` qui, prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et le réel `a`> 0, renvoie une réalisation de la variable aléatoire M_n.
9. Déterminer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$. En déduire que M_n est un estimateur sans biais.
10. Déterminer le risque quadratique de M_n. Cet estimateur est-il convergent ?
11. Justifier que la suite $\left(\sqrt{n}\,(M_n - a)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi et le(s) paramètre(s).
12. Soit $\alpha \in]0,1[$. Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1-\alpha$ pour le paramètre a, construit sur M_n.
    Quel intervalle de confiance vous semble meilleur entre ce dernier et celui déterminé à la question 6. ?
13. Comparer le risque quadratique de M_n a celui de V_n, obtenu a la question 7.b).
    Commenter ce résultat à l'aide de la figure 3 ci dessous :

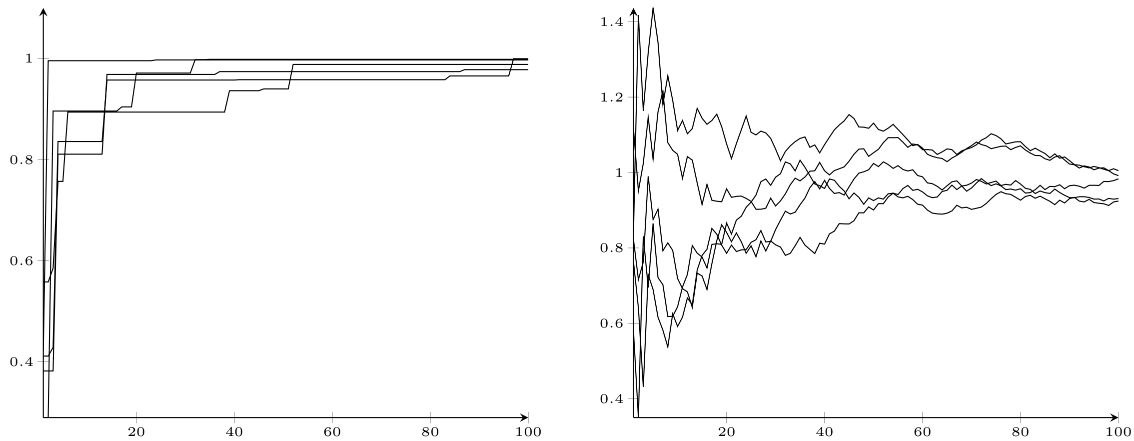


Figure 3 Cinq évolutions de $(V_1, V_2 \cdots, V_{100})$ (à gauche) et de $(M_1, M_2 \cdots, M_{100})$ pour $a = 1$

Partie 3 : Consistance de ces estimateurs

Dans les parties précédentes, nous avons montré que (V_n) convergeait « plus vite » vers a que (M_n).
Nous allons maintenant étudier la sensibilité de ces estimateurs à une perturbation, en supposant que la première mesure (X_1) est erronée.
Nous supposons donc toujours que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes, mais nous supposons maintenant que :
• X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 2a]$:
• si $i \geqslant 2$, X_i suit la loi uniforme sur $[0, a]$ (comme précédemment).
On considère toujours, pour tout entier $n \geqslant 1$: $V_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $M_n = 2\overline{X}_n = \frac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

14. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t de $]a, 2a]$, montrer que : $\mathrm{P}(V_n \leqslant t) = \frac{t}{2a}$.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de V_n.
   La suite de variables aléatoires $(V_n)_{n \geqslant 1}$ converge-t-elle en loi ?
   c) Calculer $\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right)$.
   L'estimateur V_n est-il toujours convergent ?
15. On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $M'_n = \frac{2}{n-1}(X_2 + \cdots + X_n)$.
   On rappelle que la suite $(M'_n)_{n \geqslant 2}$ converge en probabilité vers a.
   a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, exprimer M_n en fonction de X_1, M'_n et n.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$|M_n - a| \leqslant \frac{3a}{n} + |M'_n - a|$$
   c) Soit $\varepsilon > 0$ et soit n_0 un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\frac{3a}{n_0} < \varepsilon$.
   Pour tout entier n vérifiant $n \geqslant n_0$, comparer les événements $[\,|M'_n - a| < \varepsilon]$ et $[\,|M_n - a| < 2\varepsilon]$.
   d) La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \geqslant 2}$ converge-t-elle en probabilité vers a ?
16. Commenter les résultats de cette partie à partir des parties précédentes.