EM Lyon 2020, voie S

PROBLÈME 1

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

(1) (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

(2) (a) Montrer : $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n sont toutes simples.

(3) (a) Vérifier : $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right).$$

(b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1;2n+1]$.

(4) (a) Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x). \end{cases}$$

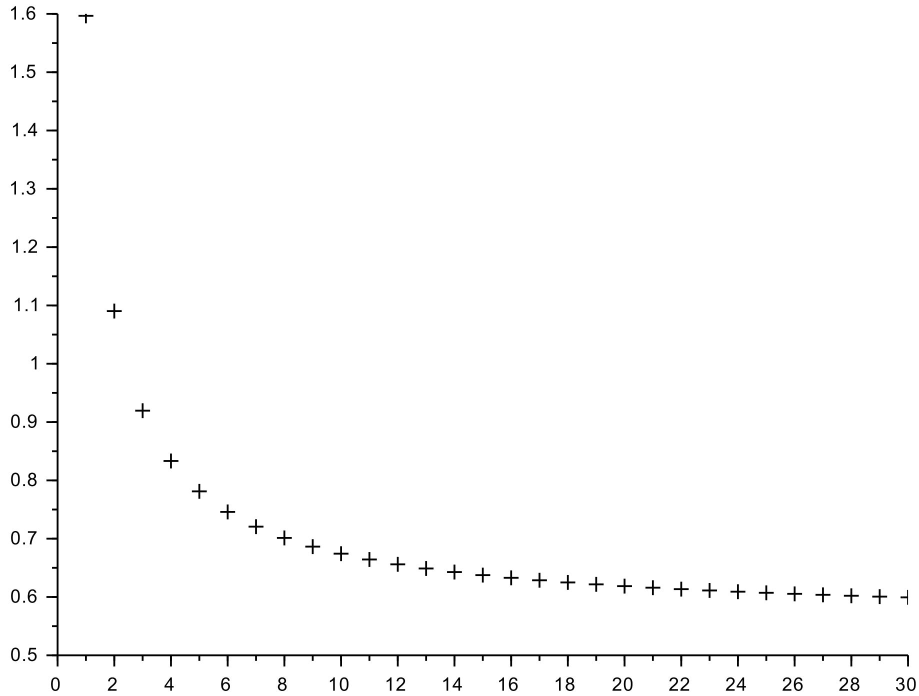
(b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

(5) (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y = P(n,x)` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `factorial(k)` *renvoie une valeur de* `k!`.

(b) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = suite(n)
    a = .........
    b = .........
    c = (a+b)/2
    while .........
        if ......... then
            a = c
        else
            b = c
        end
        c = .........
    end
    .........
endfunction
```

(c) On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



(6) (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right)$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(7) On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant e^{\ell}|u_n - \ell|$.

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.

(c) Aboutir à une contradiction.

(8) En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PARTIE B : Quelques résultats intermédiaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie A.

(9) On note f la fonction définie sur $]0;1]$ par : $\forall t \in]0;1],\ f(t) = -\ln(t)$.

(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge et préciser sa valeur.

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier, pour tout k de $[\![1;n+1]\!]$: $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leqslant \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

En déduire : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt + \dfrac{\ln(n)}{n}$.

(c) En déduire la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Montrer finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}$.

(10) On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall t \in]0;+\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1.$
Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$e^{-2} < \alpha < e^{-1}.$$

PARTIE C : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(11) (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt.$

(b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

(c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_n(x) \leqslant e^{-x} \leqslant P_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

(12) Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

(a) Montrer : $P_{n+1}(u_n) \leqslant e^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

(b) En utilisant le résultat des questions (3)(b) et (6)(a), obtenir : $\dfrac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant e^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!},$
puis :

$$(2n)! \leqslant (u_n)^{2n} e^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}.$$

(13) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $w_n = \dfrac{u_n}{2n}.$

(a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n e^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.$$

(b) En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question (10).

(14) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE A : Etude d'un produit scalaire

(1) Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge.

(2) Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$.

(a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation entre les intégrales I_{k+1} et I_k.

(b) En déduire : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ I_k = k!$

Pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\quad \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$

(3) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

(4) Calculer, pour tout (i, j) de $\mathbb{N}^2$, $\langle X^i, X^j\rangle$ et, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\|X^i\|$.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

- pour tout k de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_k est de degré k et de coefficient dominant strictement positif,
- pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $(Q_0, \ldots, Q_k)$ est une famille orthonormale.

(5) (a) Déterminer Q_0 et Q_1 et vérifier que $Q_2 = \dfrac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.

(b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $\mathcal{C}_k = (Q_0, \ldots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

On définit la matrice $H_n = (h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2,\ h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle.$$

On note également A_n la matrice de la famille $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ dans la base $\mathcal{C}_n$.

(6) **Étude du cas $n = 2$:**

(a) Expliciter la matrice H_2.

Montrer que la matrice H_2 est inversible et vérifier que $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(b) Expliciter la matrice A_2 et calculer ${}^tA_2A_2$. Que remarque-t-on ?

(7) On note, pour tout (i, j) de $[\![1; n+1]\!]^2$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A_n.

(a) Justifier que la matrice A_n est inversible.

(b) Justifier : $\quad \forall j \in [\![1; n+1]\!],\ X^{j-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j}Q_{k-1}.$

En déduire : $\quad \forall (i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2,\ \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}.$

(c) Montrer alors la relation : $\quad H_n = {}^tA_nA_n.$

(8) (a) Montrer que la matrice H_n est inversible.

(b) Établir (sans calcul) que la matrice H_n est diagonalisable.

(c) Montrer que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.
(On pourra calculer, pour tout vecteur propre Y de H_n, ${}^tYH_nY$.)

PARTIE B : Etude d'une projection

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P, 1\rangle \\ \langle P, X\rangle \\ \vdots \\ \langle P, X^n\rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

(1) Soit R un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de R dans la base $\mathcal{B}_n$.

(a) Montrer, pour tout i de $[\![0;n]\!]$: $\langle R, X^i\rangle = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle X^i, X^k\rangle$.

(b) Montrer : R est le projeté orthogonale de P sur $\mathbb{R}_n[X] \iff \forall i \in [\![0;n]\!],\ \langle P, X^i\rangle = \langle R, X^i\rangle$.
En déduire : R est le projeté orthogonale de P sur $\mathbb{R}_n[X] \iff V = H_n^{-1}U$.

(2) **Retour au cas $n = 2$:** Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente.
On définir la fonction f sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} (a + bt + ct^2 - t^3)^2 e^{-t} dt.$$

(a) Vérifier :
$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ f(a,b,c) = a^2 + 2b^2 + 24c^2 + 2ab + 4ac + 12bc - 12a - 48b - 240c + 720$.

(b) Montrer que f admet un unique point critique (a_0, b_0, c_0) vérifiant : $H_2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 120 \end{pmatrix}$.

(c) Montrer que la matrice hessienne de f au point (a_0, b_0, c_0) est la matrice $2H_2$.

(d) En déduire que la fonction f admet au point (a_0, b_0, c_0) un minimum local.

(e) Justifier : $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \inf\limits_{R\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - R\|^2$.
En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$ et que ce minimum est atteint en un unique point.

(f) Retrouver alors l'expression du projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

•FIN•