EML 2018 - Voie scientifique

Problème 1

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

Partie I : Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $W_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k \mathrm{d}u$.

1. Calculer les intégrales W_0 et W_1.
2. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $W_k - W_{k+2} = \dfrac{1}{k+1}W_{k+2}$.

   b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Partie II : Une autre expression de $I(x)$

3. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = W_k$.

   Pour cela, on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin(u)$ après avoir justifié sa validité.
4. a) Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$ et préciser sa parité.

   b) Donner la valeur de $I(0)$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

   a) Soient $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}$ entre 0 et xt, montrer :

$$\left| \mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^x.$$

   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\left| I(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}W_{2k} \right| \leqslant \dfrac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\mathrm{e}^x$.

   c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi}I(x)$.

Partie III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

6. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
7. a) Montrer, pour tout v de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$: $1 \leqslant \dfrac{1}{1-v} \leqslant (1+v)^2$.

   b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\dfrac{u}{2}}}\mathrm{d}u.$$

   c) En déduire, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\mathrm{d}u.$$

8. a) Rappeler l'expression d'une densité de la loi normale d'espérance nulle et de variance $\dfrac{1}{2}$.

   En déduire les convergences et les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

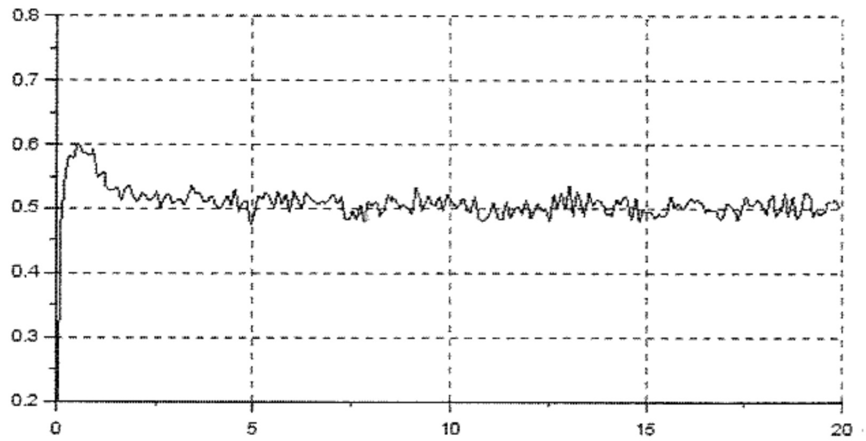
9. En déduire : $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$.

Partie IV : Une application en probabilités

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.
On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[X = Y]$.

10. a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function r = estime(lambda)` qui, prenant en argument un réel `lambda` strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y, et renvoie une estimation de $\mathrm{P}([X = Y])$.
On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'poi',lambda)` simule la loi de Poisson de paramètre `lambda`.

b) Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ, une estimation de $\sqrt{\pi\lambda}\mathrm{P}([X = Y])$ pour $\lambda \in]0;20]$ et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $\mathrm{P}([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

11. Montrer : $\mathrm{P}([X = Y]) = \mathrm{e}^{-2\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$.

12. a) Exprimer $\mathrm{P}([X = Y])$ en fonction de λ et de la fonction I.
b) En déduire un équivalent de $\mathrm{P}([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1,X,\ldots,X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP.'$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.
b) Calculer $\varphi(X^n)$.
c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
b) Soit P un polynôme non nul de $\ker(\varphi)$.
Montrer que P admet 1 comme unique racine (dans $\mathbb{C}$), et que P est de degré n.
c) En déduire une base de $\ker(\varphi)$.
4. Montrer que φ est diagonalisable.

5. On pose, pour tout k de $[\![0,n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
   a) Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   b) Montrer que la famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
   c) Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

6. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
   On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.
   a) Déterminer la loi de Z_2.
   b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, la valeur de $\mathrm{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1])$.
   En déduire : $\mathrm{P}([Z_{k+1}=1]) = 1 - \dfrac{1}{n}\mathrm{E}(Y_k)$.
   c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :
   $$\mathrm{P}([Z_{k+1}=1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{P}([Z_j=1]).$$
   d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}([Z_k=1]) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.
   e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

7. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
   $$G_k = \sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}([Y_k=i])X^i.$$
   a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.
   b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0,n]\!]$:
   $$\mathrm{P}([Y_{k+1}=i]) = \frac{i}{n}\mathrm{P}([Y_k=i]) + \left(1-\frac{i-1}{n}\right)\mathrm{P}([Y_k=i-1]).$$
   c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:
   $$G_{k+1} = \frac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k.$$
   d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:
   $$G_k = \varphi^k(G_0).$$

8. a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.
   b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:
   $$\mathrm{E}(Y_{k+1}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathrm{E}(Y_k) + 1.$$
   c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathrm{E}(Y_k)$ obtenue en question 6.e).

9. On rappelle que les polynômes $P_0,\ldots,P_n$ sont définis à la question 5. par :
   $$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0,n]\!],\quad P_j = X^j(1-X)^{n-j}.$$
   a) Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j$.

b) Montrer, pour tout j de $[\![0,n]\!]$:

$$P_j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i.$$

d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$\mathrm{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$