

# ECRICOME 2018 - VOIE SCIENTIFIQUE

## Exercice 1

On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , muni du produit scalaire canonique.

Pour toutes matrices colonnes  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on note  $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ .

Pour toute matrice colonne  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on note  $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$ .

On considère  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$ , et on note  $A$  et  $B$  leurs matrices respectives dans la base canonique de  $E$ .

### Partie 1

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose **dans cette partie uniquement** que  $n = 2$  et que les matrices de  $u$  et  $v$  dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que  $u$  et  $v$  sont des projecteurs.
2. a) Vérifier que les endomorphismes  $u$ ,  $v$  et  $u \circ v$  sont tous de rang 1.  
b) Vérifier que le vecteur  $x_0 = (1, a)$  est un vecteur propre de  $u \circ v$ .  
c) Déterminer le spectre de  $u \circ v$ .
3. a) Montrer que les valeurs propres de  $u \circ v$  appartiennent à l'intervalle  $[0; 1]$ .  
b) Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$ ,  $u \circ v$  est-il un projecteur?

### Partie 2

On revient dans cette partie au cas général, où  $n$  désigne un entier tel que  $n \geq 2$ .

On suppose que  $u$  et  $v$  sont des projecteurs symétriques de  $E$  et on pose :  $C = BAB$ .

4. Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  :

$$\|BX\|^2 = \langle BX, X \rangle.$$

En déduire que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  :

$$\|BX\| \leq \|X\|.$$

5. Montrer que  $C$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
6. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $C$  et un  $X$  un vecteur propre associé.  
a) Exprimer  $\|ABX\|^2$  en fonction de  $\lambda$  et  $\|X\|$ .  
b) En déduire que les valeurs propres de  $C$  sont réelles positives.
7. Soit  $\mu$  une (éventuelle) valeur propre de  $AB$  non nulle, et  $X$  un vecteur propre associé.  
a) Montrer que  $BX$  est un vecteur propre de  $C$ .  
b) Montrer :  $ABX = \mu AX$ . En déduire que :  $AX = X$ .  
c) Montrer que :  $\langle X, BX \rangle = \mu \|X\|^2$ .
8. Déduire des questions précédentes que le spectre de  $AB$  est inclus dans  $[0; 1]$ .

## Exercice 2

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et on note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

1. Vérifier que  $\varphi > 1$  et que les réels  $\varphi$  et  $\frac{-1}{\varphi}$  sont les solutions de l'équation :  $x^2 - x - 1 = 0$ .
2. a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- b) Montrer que les seuls points critiques de  $f$  sont  $(\varphi, \varphi + 1)$  et  $\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi + 1}\right)$ .
- c) Étudier la nature des points critiques de  $f$ .
3. Montrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ .
4. a) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier  $n \geq 2$ , elle calcule et renvoie la valeur du terme  $u_n$  de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

```
function u=suite(n)
    v=0
    w=1
    for k=2:n
        .....
        .....
        .....
    end
    u=.....
endfunction
```

- b) Justifier qu'il existe des réels  $\lambda$  et  $\mu$ , que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

- c) En déduire que la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 1}$  converge et déterminer sa limite
5. On considère pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ .
- a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général  $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$  converge.
- b) En déduire que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge.
- c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

- d) Montrer que :  $\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ .

## Problème

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

### Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire  $N$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$  vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel  $a < 1$  et un réel  $b$  tels que :

$$P(N = 0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N = k - 1).$$

1. On suppose **dans cette question** que  $a = 0$ , et que  $b$  est un réel strictement positif.

- a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = \frac{b^k}{k!} P(N = 0).$$

- b) Calculer  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)$ . En déduire que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $b$ .

Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que  $a < 0$  et que  $b = -2a$ .

- a) Montrer que :

$$\forall k \geq 2, \quad P(N = k) = 0.$$

- b) En déduire que  $N$  suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de  $a$ .
3. On suppose **dans cette question** que  $Z$  suit une loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0; 1[$ .
- a) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z = k-1).$$

- b) En déduire que  $Z$  vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de  $a$  et  $b$  correspondantes, en fonction de  $n$  et  $p$ .
4. On revient dans cette question au cas général :  $a$  est un réel vérifiant  $a < 1$ ,  $b$  est un réel, et on suppose que  $N$  est une variable aléatoire, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , vérifiant la relation de Panjer.
- a) Calculer  $P(N = 1)$ . En déduire que  $a + b \geq 0$ .
- b) Montrer que pour tout entier  $m \geq 1$  :

$$\sum_{k=1}^m kP(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N = k).$$

- c) En déduire que  $\left( (1-a) \sum_{k=1}^m kP(N = k) \right)_{m \geq 1}$  est majorée, puis que  $N$  admet une espérance.

Préciser alors la valeur de  $E(N)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

- d) Montrer que  $N$  admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

- e) En déduire que  $N$  admet une variance et préciser la valeur de  $V(N)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
- f) Montrer que  $E(N) = V(N)$  si, et seulement si,  $N$  suit une loi de Poisson.

## Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = P(N = k),$$

où  $N$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

5. Montrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , la série  $\sum_{k \geq 0} p_k x^k$  est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de  $N$**  la fonction  $G$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) x^k$$

et on suppose dans cette partie que  $N$  vérifie une relation de Panjer avec  $0 < a < 1$  et que  $\frac{b}{a} > 0$ . On pose :

$$\alpha = \frac{-(a+b)}{a}.$$

On note enfin  $f$  la fonction définie par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = p_0(1-ax)^\alpha.$$

6. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}.$$

7. Soit  $x \in [0; 1]$ .

- a) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k + (n+1)p_{n+1} \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt.$$

- b) Vérifier que pour tout  $t \in [0, x]$ ,  $\frac{x-t}{1-at} \leq 1$  puis montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} dt.$$

c) En déduire que :

$$G(x) = p_0(1 - ax)^\alpha.$$

En calculant  $G(1)$ , exprimer  $p_0$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\alpha$ , et vérifier que  $G'(1) = E(N)$ .

### Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable  $N$  étudiée dans la question 4 de la partie 1.

On considère alors la variable aléatoire  $S$  définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum_{k=1}^N X_k & \text{si } N \geq 1 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon.}$$

9. Calculer  $P(S = 0)$  lorsque  $a \in ]0; 1[$  à l'aide de la partie 2.

10. a) Calculer  $P(S = 0)$  lorsque  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

b) On considère la fonction Scilab suivante, où  $n$  est un paramètre dont dépend la loi commune des  $X_k$  :

```
function y=simuX(n)
    y=0;
    for i=1:n
        if rand()<1/2
            y=y+1;
        end
    end
endfunction
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simuX`? Préciser ses paramètres.

c) On rappelle qu'en Scilab l'instruction `grand(1,1,"poi",lambda)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.

On suppose que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , et que la loi des variables  $X_k$  est celle simulée à la question précédente par la fonction `simuX`.

Recopier et compléter la fonction Scilab suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire  $S$  :

```
function s=simulS(lambda,n)
    N=grand(1,1,"poi",lambda)
    .....
    .....
    .....
    .....
    .....
endfunction
```

11. Dans la suite du problème, on revient au cas général où  $N$  vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \geq 0, \quad p_k = P(N = k)$$

et on notera également :

$$\forall k \geq 0, \quad q_k = P(X_1 = k).$$

Enfin, on considère pour tout entier  $n \geq 1$ , la variable aléatoire  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , en convenant qu'on a  $S_0 = 0$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

$$\forall i \in [1, n+1], \quad E(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$

*Indication : on pourra considérer la somme  $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i | S_{n+1} = k)$ .*

b) Justifier que :

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = q_j \mathbb{P}(S_n = k - j).$$

c) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\sum_{j=0}^k \left( a + \frac{bj}{k} \right) q_j \mathbb{P}(S_n = k - j) = \left( a + \frac{b}{n+1} \right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

12. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

a) Montrer que :

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{P}(S_n = k - j).$$

b) Montrer que :

$$\sum_{j=0}^k \left( a + \frac{bj}{k} \right) q_j \mathbb{P}(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

c) Justifier que :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

d) En déduire finalement que :

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^k \left( a + \frac{bj}{k} \right) q_j \mathbb{P}(S = k - j).$$