Correction du sujet EM Lyon voie S 2021

Problème 1

1. (a) Soit $t \in]0, +\infty[$, la fonction ln est continue sur $[t, t+1]$ et dérivable sur $]t, t+1[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]t, t+1[$ tel que $\ln(t+1) - \ln(t) = (t+1-t)\ln'(c) = \frac{1}{c}$ or $0 < t < c < t+1$ donc par passage à l'inverse $\frac{1}{t+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{t}$.
Finalement $\boxed{\frac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \frac{1}{t}.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1))$.
Or avec la question précédente en remplaçant t par $n+1 \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
De façon analogue, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n))$.
Or avec la question précédente en remplaçant t par $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ donc la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
On remarque que
$$v_n - u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$
Nous avons montré que les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et donc elles $\boxed{\text{convergent et ont la même limite}}$. On la note γ, dite constante d'Euler.

2. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante vers γ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante vers γ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n \text{ donc } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leqslant \gamma \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$
Par conséquent
$$\gamma + \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \gamma + \ln(n+1).$$
Avec $n > 1$, on peut diviser par $\ln(n) > 0$,
$$\frac{\gamma}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leqslant \frac{\gamma}{\ln(n)} + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$
donc
$$\frac{\gamma}{\ln(n)} + 1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leqslant \frac{\gamma}{\ln(n)} + \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = \frac{\gamma}{\ln(n)} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} + 1.$$
Il est clair que $\frac{\gamma}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ et $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ donc par encadrement
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$$
finalement $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

3. (a) On a déjà vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$. Par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right| = \left|\frac{u_n-\gamma}{2}+\frac{v_n-\gamma}{2}\right| \leqslant \frac{|u_n-\gamma|}{2}+\frac{|v_n-\gamma|}{2}.$$

Comme $u_n - \gamma \leqslant 0$ on a $|u_n-\gamma| = \gamma - u_n$ et comme $0 \leqslant v_n - \gamma$, on a $|v_n-\gamma| = v_n-\gamma$ donc

$$\boxed{\left|\frac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right| \leqslant \frac{\gamma-u_n}{2}+\frac{v_n-\gamma}{2} = \frac{v_n-u_n}{2}}.$$

(b) • On voit que $v_n - u_n = \ln(n+1)-\ln(n)$. On calcule le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$0 \leqslant \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{2} \leqslant 10^{-5}$$

avec une boucle `while`. Quand ce n est connu, on calcule $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ avec une opération pointée, on en déduit u_n, v_n puis $\frac{v_n+u_n}{2}$ qui est une approximation de γ telle que

$$\left|\frac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right| \leqslant \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{2} \leqslant 10^{-5}.$$

```
function gamma=approx()
    n=1
    while 0.5*(log(n+1)-log(n))>10^(-5)
        n=n+1
    end
    S=sum(1 ./[1:n])
    u=S-log(n+1)
    v=S-log(n)
    gamma=(u+v)/2
endfunction
```

On obtient 0.5772157.

• Il est possible de donner une valeur acceptable de n en résolvant

$$\frac{v_n-u_n}{2} = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{2} \leqslant 10^{-5} \iff \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{2}{10^5} \iff \frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{2}{10^5}}-1$$

$$\iff \frac{1}{e^{\frac{2}{10^5}}-1} \leqslant n.$$

Pour être sûr que n soit entier et plus grand que $\frac{1}{e^{\frac{2}{10^5}}-1}$, on fixe $n = \left\lfloor \frac{1}{e^{\frac{2}{10^5}}-1} \right\rfloor + 1$. Comme $e^{\frac{2}{10^5}} - 1 \simeq \frac{2}{10^5}$, on voit que $n \simeq \frac{10^5}{2}$. On donne aussi un calcul de S avec une boucle `for`.

```
function gamma=approx2()
    n=floor(1/(exp(2/10000)-1))+1
    S=0
    for k=1:n
        S=S+1/k
    end
    gamma=S-(log(n+1)+log(n))/2
endfunction
```

• Version python :

```
import numpy as np
def approx() :
    n=1
    while 0.5*(np.log(n+1)-np.log(n)) > 10**(-5) :
        n=n+1
    S=0
    for k in range(1,n+1) :
        S += 1/k
    return(S-0.5*(np.log(n+1)+np.log(n)))
```

4. Soit $x \geqslant 0, k \in \mathbb{N}^*$, le calcul donne $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{x}{k(k+x)}$ comme $k + x \underset{k \to +\infty}{\sim} k$, on a $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$.

   La série de Riemann $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge car l'exposant est supérieur à 1, donc la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{x}{k^2}$ converge.

   Elle est à terme général positif donc par comparaison, la série $\boxed{\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \text{ converge}}$ aussi.

5. (a) Pour $x = 0, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+0} = 0$ donc $\boxed{S(0) = 0.}$

   Pour $x = 1$, on applique un télescopage, soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \underset{N \to +\infty}{\to} 1.$$

   Donc $\boxed{S(1) = 1.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k+1},$$

   de façon classique, j'ajoute les termes d'indices pairs

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}_{= \sum_{j=2}^{2n+1} \frac{1}{j}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\Big),$$

   on développe puis isole le terme le terme en $k = 1$ du premier sigma

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\left(\sum_{j=2}^{2n+1} \frac{1}{j} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{j=2}^{2n+1} \frac{1}{j} = 2 + 2\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{2n+1} \frac{1}{j}\right).$$

   On simplifie

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{j=n+1}^{2n+1} \frac{1}{j}.}$$

   On poursuit

$$2 - 2\sum_{j=n+1}^{2n+1} \frac{1}{j} = 2 - \frac{2}{2n+1} - 2\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j},$$

on pense au changement de variable $k = n - j$,

$$2 - 2\sum_{j=n+1}^{2n+1} \frac{1}{j} = 2 - \frac{2}{2n+1} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})},$$

finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{j=n+1}^{2n+1}\frac{1}{j} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}}.$$

La dernière somme suggère l'usage des sommes de Riemann. La fonction $f : x \mapsto \frac{2}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $[0,1]$. De sorte que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2}{1+x}\mathrm{d}x = [2\ln(1+x)]_0^1 = 2\ln(2).$$

On sait que $\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement

$$\boxed{S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln(2)}.$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+y}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{y-x}{(k+x)(k+y)} = (y-x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

On sait que $\frac{1}{(k+x)(k+y)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et comme $\frac{1}{k^2} > 0$, la série $\sum \frac{1}{(k+x)(k+y)}$ converge aussi. On peut donc faire tendre n vers $+\infty$.

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = S(y) - S(x) = (y-x)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leqslant y$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+x)(k+y)} > 0$ donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)} > 0$.

Comme $y - x \geqslant 0$, on a $S(y) - S(x) \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la fonction } S \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+.}$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^+, h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \geqslant 0$, on a

$$\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right| = \left|\frac{1}{h} \times \underbrace{h\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+h)}}_{\text{avec Q6(a)}} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+h)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+x-(k+x+h)}{(k+x)^2(k+x+h)} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|h|}{(k+x)^2(k+x+h)}.$$

On a $k+x+h \geqslant k > 0$ et $k+x \geqslant k > 0$ donc $0 < \frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)} \leqslant \frac{1}{k^3}$ donc en multipliant par $|h| \geqslant 0, 0 \leqslant \frac{|h|}{(k+x)^2(k+x+h)} \leqslant \frac{|h|}{k^3}$. Il reste à sommer sachant que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^3}$ converge. Finalement

$$\boxed{\left| \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leqslant |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}}.$$

Le terme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ est indépendant de h donc $|h| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{h\to 0}{\to} 0$, comme une valeur absolue est toujours positive, par encadrement,

$$\left| \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

Le terme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$ est indépendant de h donc $\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \underset{h\to 0}{\to} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$. Donc le taux d'accroissement de S en x évalué en $x+h$ a une limite finie quand $h \to 0$ donc S est dérivable en x et $\boxed{S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.}$ C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, donc S est $\boxed{\text{dérivable sur } \mathbb{R}^+}$.

7. (a) Soit $x \geqslant 0$, la question 6(a) donne

$$S(x+1)-S(x) = (x+1-x)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+x+1)-(k+x)}{(k+x)(k+x+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right).$$

L'erreur ici serait d'écrire $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+x}$ car cette série diverge. Donc on utilise les sommes partielles, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

par télescopage. Ainsi $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{1+x}$.

Donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{1+x}$. Donc $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}$. Finalement

$$\boxed{S(x+1) = S(x) + \frac{1}{1+x}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{H}_n : S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- Pour $n = 1$, la question 5(a) donne $S(1) = 1 = \sum\limits_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$. Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{H}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$, avec la question 7(b), on a $S(n+1) = S(n) + \frac{1}{n+1}$ donc avec $\mathcal{H}_n$,

$$S(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Finalement $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$

(c) Soit $x > 2$, on sait qu'avec la partie entière, $1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc avec la croissance de S, on a

$$S(\lfloor x \rfloor) \leqslant S(x) \leqslant S(\lfloor x \rfloor + 1).$$

Donc avec 7(b)

$$\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} \leqslant S(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{1}{k} = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1} + \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}.$$

On divise par $\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} > 0$,

$$1 \leqslant \frac{S(x)}{\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{(\lfloor x \rfloor + 1) \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} + 1.$$

On a $\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} \geqslant 1$ donc $(\lfloor x \rfloor + 1) \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} \geqslant \lfloor x \rfloor + 1 \geqslant \lfloor x \rfloor > 0$ donc $0 < \frac{1}{(\lfloor x \rfloor + 1) \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$ donc par encadrement

$$\frac{1}{(\lfloor x \rfloor + 1) \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

donc on a montré que $\frac{S(x)}{\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$ et $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}$.

La question 2 donne alors $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(\lfloor x \rfloor)$.

Sachant que ln est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ qui implique $0 \leqslant \ln(\lfloor x \rfloor) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(\lfloor x \rfloor + 1)$. Avec $x > 2$, on a $\lfloor x \rfloor > 1$ donc $\ln(\lfloor x \rfloor) > 0$, et

$$1 \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} \leqslant \frac{\ln(\lfloor x \rfloor + 1)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} = \frac{\ln(\lfloor x \rfloor) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)}{\ln(\lfloor x \rfloor)}.$$

Une fois de plus par encadrement on a $\frac{\ln(x)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$ donc $\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(\lfloor x \rfloor)$. Finalement

$$\boxed{S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)}.$$

8. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{k+x}$ est continue sur $[0, 1]$ comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas donc on peut intégrer $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ selon x sur $[0, 1]$, la somme étant finie. La linéarité de l'intégration donne

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \int_0^1 1 \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{1}{k+x} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+x)]_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

donc par télescopage

$$\boxed{\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = u_n}.$$

(b) La fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc continue sur $[0,1]$, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n = \int_0^1 \left(S(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k(k+x)}\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k(k+x)}\right)\right) \mathrm{d}x.$$

Avec $0 \leqslant x$, $k \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < k^2 \leqslant k(k+x)$ donc $0 < \frac{1}{k(k+x)} \leqslant \frac{1}{k^2}$, donc en sommant sachant que les séries convergent

$$0 < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

ainsi

$$0 \leqslant x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)} \leqslant x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

On intègre selon x sur $[0,1]$ avec $0 < 1$,

$$0 \leqslant \int_0^1 x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Finalement

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

(c) La quantité $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série convergente donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

donc

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$ est indépendant de n, $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} \displaystyle\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$, l'unicité de la limite assure avec 1(b) que

$$\boxed{\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \gamma.}$$

9. La fonction f est définie et positive sur $\mathbb{R}$.
Sur $]-\infty, 1[$, f est constante donc continue.
Sur $[1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ donc f est continue sur $[1, +\infty[$ comme carré de la fonction inverse.
Soit $A > 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{A} f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{A} f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{A} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^A = -\frac{1}{A} + 1 \underset{A\to+\infty}{\to} 1.$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge est vaut 1.

Finalement $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

10. On note F la fonction de répartition de X.
   (a) Soit $x < 1$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0.$
   Soit $1 \leqslant x$, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$

   Bilan :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}}$$

   (b) X est à densité donc X a une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Or, pour $t > 1$, $tf(t) = \frac{1}{t}$ et on sait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge donc X n'a pas d'espérance.

11. (a) Une densité f de X est nulle sur $]-\infty, 1[$ donc on peut considérer $X(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $\lfloor X \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $\{[\lfloor X \rfloor = k]\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$P(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([\lfloor X \rfloor = k] \cap [Y \leqslant x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([\lfloor X \rfloor = k] \cap [X - \lfloor X \rfloor \leqslant x])$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P([\lfloor X \rfloor = k] \cap [X \leqslant \lfloor X \rfloor + x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([\lfloor X \rfloor = k] \cap [X \leqslant k + x]).$$

   On sait que $[\lfloor X \rfloor \leqslant X]$ est certain donc

$$P(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([\lfloor X \rfloor = k] \cap [k \leqslant X \leqslant k + x]).$$

   Comme $0 \leqslant x < 1$, si $w \in [k \leqslant X \leqslant k + x]$ alors $k \leqslant X(w) \leqslant k+x$ donc $k \leqslant X(w) \leqslant k+x < k+1$ donc nécessairement $\lfloor X(w) \rfloor = k$ donc $w \in [\lfloor X \rfloor = k]$ donc $[k \leqslant X \leqslant k + x] \subset [\lfloor X \rfloor = k]$ et $[\lfloor X \rfloor = k] \cap [k \leqslant X \leqslant k + x] = [k \leqslant X \leqslant k + x]$.
   Finalement

$$\boxed{P(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leqslant X \leqslant k + x)}.$$

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leqslant k \leqslant k + x$ donc

$$P(k \leqslant X \leqslant k + x) = F(x + k) - F(k) = -\frac{1}{k + x} + 1 - \left(-\frac{1}{k} + 1\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k + x}$$

donc par somme avec des séries qui convergent

$$\boxed{P(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = S(x)}.$$

(b) On note F_Y la fonction de répartition de Y. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$. Or $Y = X - \lfloor X \rfloor$ donc $Y(\Omega) \subset [0, 1[$. On en déduit

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S(x) & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}}$$

(c) Sur les intervalles $]-\infty, 0[,]0, 1[,]1; +\infty[$, la fonction F_Y est est C^1 donc continue car c'est le cas des fonctions constantes et de S sur $[0, 1]$.
En 0, on a $\lim_{0^-} F_Y = \lim_{0^-}(0) = 0$ et $\lim_{0^+} F_Y = \lim_{0^+}(S) = S(0) = 0 = F_Y(0)$ (question 5(a)) donc F_Y est continue en 0.
En 1, on a $\lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^-}(S) = S(1) = 1$ (question 5(a)) et $\lim_{1^+} F_Y = \lim_{1^+}(1) = 1 = F_Y(1)$ donc F_Y est continue en 1.
Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Finalement $\boxed{Y \text{ est à densité.}}$ On a une densité de Y en dérivant F_Y là où elle est C^1 et en imposant des valeurs positives en 0 et 1, par exemple, on propose avec la question 6(c),

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}}.$$

En 0 et en 1, j'ai imposé les valeurs $S'(0)$ et $S'(1)$ qui sont positives ainsi f_Y est continue sur $[0, 1]$.

12. On a vu que $Y(\Omega) \subset [0, 1[$ donc le support de Y est borné et Y admet une espérance. Et

$$E(Y) = \int_0^1 x f_Y(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 x S'(x) \mathrm{d}x.$$

On pose $u(x) = x, u'(x) = 1$ et $v = S$, ces fonctions sont C^1 sur $[0, 1]$ et par intégartion par parties,

$$E(Y) = [xS(x)]_0^1 - \int_0^1 S(x) \mathrm{d}x = S(1) - 0 - \gamma$$

avec la question 8(c). Finalement Y a une espérance et elle vaut $\boxed{E(Y) = 1 - \gamma.}$

Problème 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $e_k(X) = X^k$.

(a) On a $e_0' = e_0'' = \theta$, le polynôme nul. Donc $\varphi_n(e_0) = \varphi_n(1) = Xe_0(X)$ donc $\boxed{\varphi_n(1) = X.}$
Et comme $e_1' = 1, e_1'' = \theta$ donc

$$\varphi_n(X) = Xe_1 - \frac{1}{n^2}((2n-1)X + 1)(X-1)e_1' = \frac{1}{n^2}\left(n^2X^2 - (2n-1)X^2 - X + (2n-1)X + 1\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left((n^2-2n+1)X^2+(2n-2)X+1\right) = \frac{1}{n^2}\left((n-1)^2X^2+2(n-1)X+1\right).$$

Soit $i \in [\![2,n]\!]$, $e_i' = ie_{i-1}, e_i'' = i(i-1)e_{i-2}$ donc

$$\varphi_n(X^i) = Xe_i - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)e_i' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2e_i''$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2X^{i+1} - \left((2n-1)X^2+X-(2n-1)X-1\right)iX^{i-1} + (X^3-2X^2+X)i(i-1)X^{i-2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2X^{i+1} - (2n-1)iX^{i+1} + (2n-2)iX^i + iX^{i-1} + (X^3-2X^2+X)i(i-1)X^{i-2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left((n^2-2ni+i+i^2-i)X^{i+1} + (2ni-2i-2i^2+2i)X^i + iX^{i-1} + i(i-1)X^{i-1}\right)$$

donc

$$\boxed{\varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}}$$

Cette formule reste valable quand on remplace i par 1.

(b) On va montrer que φ_n est linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Soit A, B dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation,

$$\varphi_n(\alpha A+B) = X(\alpha A+B) - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)(\alpha A+B)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(\alpha A+B)''$$

$$= X(\alpha A) - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)(\alpha A)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(\alpha A)''$$

$$+XB(X) - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)(B)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(B)''$$

$$= \alpha\varphi_n(A) + \varphi_n(B).$$

Montrons que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ_n, pour cela on montre que les images par φ_n d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$. On prend la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

- $\varphi_n(1) = X \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $i \in [\![1, n-1]\!], \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1} \in \mathbb{R}_n[X]$ car $i+1 \leqslant n$ donc X^{i+1}, X^{i-1}, X^i sont dans $\mathbb{R}_n[X]$.
- $\varphi_n(X^n) = \frac{(n-n)^2}{n^2}X^{n+1} + \frac{2n(n-n)}{n^2}X^n + \frac{n^2}{n^2}X^{n-1} = X^{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ_n, finalement $\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. On fixe dans cette question $n = 2$.

(a)
- $\varphi_2(1) = X$.
- $\varphi_2(X^1) = \frac{(2-1)^2}{2^2}X^{1+1} + \frac{2(2-1)}{2^2}X^1 + \frac{1^2}{2^2}X^{1-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}X^2$.
- $\varphi_2(X^2) = X^{2-1} = X$.

On retrouve bien A_2 en mettant en colonnes les coordonnées de ces images dans la base $(1, X, X^2)$.

(b) On sait que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A_2 si et seulement si $A_2 - \lambda I_3$ est non inversible. Pour le prouver on résout $(A_2 - \lambda I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il y a une solution $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nulle si et seulement si λ est valeur propre de A_2, on a, au passage, une base du sous-espace propre (SEP) associé à λ.

- $\lambda = -\frac{1}{2}$,

$$\left(A_2 + \frac{1}{2}I_3\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b \\ a+b+c \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\iff} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}b \\ a+b+c \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b + c \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il y a une solution non nulle donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A_2. Et SEP $\left(A_2, -\frac{1}{2},\right)$ est généré par un vecteur non nul donc il forme une base de ce SEP, on peut dire que $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est une base de SEP $\left(A_2, -\frac{1}{2}\right)$. En multipliant par -2 non nul, on peut aussi choisir $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de SEP $\left(A_2, -\frac{1}{2}\right)$.

- $\lambda = 0$,

$$(A_2 - 0I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}b \\ a + \frac{1}{2}b + c \\ \frac{1}{4}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il y a une solution non nulle donc 0 est valeur propre de A_2. Donc SEP $(A_2, 0)$ est généré par un vecteur non nul donc il forme une base de ce SEP, on peut dire que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de SEP $(A_2, 0)$.

- $\lambda = 1$,

$$(A_2 - I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{4}b \\ a - \frac{1}{2}b + c \\ \frac{1}{4}b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b + c \\ \frac{1}{4}b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Il y a une solution non nulle donc 1 est valeur propre de A_2. Donc SEP $(A_2, 1)$ est généré par un vecteur non nul donc il forme une base de ce SEP, on peut dire que $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est une base de SEP $(A_2, 0)$. On peut aussi choisir $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A_2 a 3 valeurs propres donc $\boxed{A_2 \text{ est diagonalisable}}$ et ses SEP sont de dimension 1.
On a montré SEP $(A_2, 1) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, SEP $(A_2, 0) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, SEP $\left(A_2, -\frac{1}{2}\right) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) A_2 et φ_2 ont le même spectre. Pour obtenir une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2, on traduit dans $(1, X, X^2)$ les vecteurs propres de A_2 formant des bases des 3 SEP de A_2. Cela donne $\boxed{\left(1-2X+X^2, 1-X^2, 1+4X+X^2\right)}$ comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2.

3. Pour $n=1$, $\varphi_1(X-1) = \varphi_1(X) - \varphi_1(1) = 1 - X = \frac{-1}{1}(X-1)$. Comme $X-1$ n'est pas le polynôme nul, $X-1$ est vecteur propre de φ_1 associé à $\frac{-1}{1} = -1$.

   Soit $n \geqslant 2$, on a alors $((X-1)^n)' = n(X-1)^{n-1}$ et $((X-1)^n)'' = n(n-1)(X-1)^{n-2}$ donc

$$\begin{aligned}
\varphi_n((X-1)^n) &= X(X-1)^n - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)\left((X-1)^n\right)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2\left((X-1)^n\right)'' \\
&= X(X-1)^n - \frac{1}{n}((2n-1)X+1)(X-1)(X-1)^{n-1} + \frac{1}{n}X(X-1)^2(n-1)(X-1)^{n-2} \\
&= \frac{1}{n}(X-1)^n\left(nX - ((2n-1)X+1) + (n-1)X\right) = \frac{-1}{n}(X-1)^n.
\end{aligned}$$

   Comme $(X-1)^n$ n'est pas le polynôme nul, $\boxed{(X-1)^n \text{ est vecteur propre de } \varphi_n \text{ associé à } \frac{-1}{n}.}$

4. (a) Pour $i=0$, $\varphi_n(X^0) = X$ donc en évaluant en 1, on a bien $\left(\varphi_n(X^0)\right)(1) = 1$.

   Pour $i \in [\![1, n]\!], \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}$ donc en remplaçant X par 1, on a

$$\left(\varphi_n(X^i)\right)(1) = \frac{(n-i)^2}{n^2} + \frac{2i(n-i)}{n^2} + \frac{i^2}{n^2} = \frac{n^2 - 2ni + i^2 + 2ni - 2i^2 + i^2}{n^2} = 1.$$

   (b) Soit $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ une colonne de A_n, on sait que, pour un $i \in [\![0, n]\!]$, elle représente les coordonnées de $\varphi_n(X^i)$ dans la base $(1, X, ..., X^n)$ donc

$$\varphi_n(X^i) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

   On évalue en 1 et on utilise la question précédente,

$$\left(\varphi_n(X^i)\right)(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k 1^k = \sum_{k=0}^{n} a_k = 1.$$

   Donc $\boxed{\text{la somme des coeeficients de chaque colonne de } A_n \text{ est égale à } 1}$.

   (c) Ce qui précède montre que ${}^tA_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ car les lignes de ${}^tA_n$ sont les colonnes de A_n et quand on multiplie ${}^tA_n$ par $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on additionne les termes ligne par ligne et on trouve toujours 1.

   Donc comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, on voit que 1 est valeur propre de ${}^tA_n$ donc $\mathrm{rg}({}^tA_n - I_n) < n+1$ donc $\mathrm{rg}(A_n - I_n) < n+1$ car une matrice et sa transposée ont le même rang. Cela prouve que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A_n \text{ donc de } \varphi_n}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.On a $((X-1)P)' = P + (X-1)P'$ et $((X-1)P)'' = 2P' + (X-1)P''$. Donc

$$(n+1)^2\varphi_{n+1}((X-1)P) = (n+1)^2X((X-1)P) - ((2n+1)X+1)(X-1)((X-1)P)' + X(X-1)^2((X-1)P)''$$
$$= (n+1)^2X((X-1)P) - ((2n+1)X+1)(X-1)(P+(X-1)P') + X(X-1)^2(2P'+(X-1)P'')$$
$$= (X-1)\left((n+1)^2XP - ((2n+1)X+1)(P+(X-1)P') + X(X-1)(2P'+(X-1)P'')\right)$$
$$= (X-1)\left(\left((n+1)^2X - ((2n+1)X+1)\right)P + \left(-((2n+1)X+1)(X-1) + 2X(X-1)\right)P'\right.$$
$$\left. + (X-1)\left(X(X-1)(X-1)P''\right)\right)$$
$$= (X-1)\left((n^2X-1)P + \left(-((2n+1)X+1) + 2X\right)(X-1)P' + X(X-1)^2P''\right)$$
$$= (X-1)\left((n^2X-1)P + ((-2n+1)X-1)(X-1)P' + X(X-1)^2P''\right)$$
$$= (X-1)\left(n^2XP - ((2n-1)X+1)(X-1)P' + X(X-1)^2P'' - P\right).$$

On retrouve bien
$$\boxed{(n+1)^2\varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)\left(n^2\varphi_n(P) - P\right)}.$$

(b) Supposons que P soit un vecteur propre de φ_n associé à λ alors $\varphi_n(P) = \lambda P$ et

$$(n+1)^2\varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)\left(n^2\varphi_n(P) - P\right) = (X-1)\left(n^2\lambda P - P\right) = \left(n^2\lambda - 1\right)(X-1)P.$$

Comme $(n+1)^2 \neq 0$, on a

$$\varphi_{n+1}((X-1)P) = \frac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2}(X-1)P.$$

Comme P est vecteur propre de φ_n, P n'est pas le polynôme nul donc $(X-1)P$ n'est pas le polynôme nul et il est vecteur propre de φ_{n+1} associè à $\frac{n^2\lambda-1}{(n+1)^2}$.

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{H}_n : \mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{\frac{-n+j(j+1)}{n^2}; j \in [\![0, n]\!]\right\}$.

- Par définition, $\varphi_1(P) = XP - (X^2-1)P'$ car $P'' = \theta$ si le degré de P est dominé par 1. Dans la base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ on a la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On sait que λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou -1.
  Donc $\mathrm{Sp}(\varphi_1) = \{-1, 1\} = \left\{\frac{-1+j(j+1)}{1^2}; j \in [\![0, 1]\!]\right\}$.
  Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la question 5(b), on sait que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\frac{n^2\left(\frac{-n+j(j+1)}{n^2}\right)-1}{(n+1)^2}$ est valeur propre de φ_{n+1} donc $\frac{-(n+1)+j(j+1)}{(n+1)^2}$ est valeur propre de φ_{n+1}.
  On pose $g : x \mapsto \frac{-(n+1)+x(x+1)}{(n+1)^2}$, cette fonction est polynomiale donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{2x+1}{(n+1)^2} > 0$ lorsque $x \geqslant 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc avec j qui varie dans $[\![0, n]\!]$, on voit que $g(j)$ prend $n+1$ valeurs deux à deux distinctes comprises entre $g(0) = \frac{-1}{n+1}$ et $g(n) = \frac{-(n+1)+n(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n^2-1}{(n+1)^2} < 1$. Or on sait avec la question 4(c) que 1 est valeur propre de φ_{n+1} donc nous avons trouvé $n+2$ valeurs propres de φ_{n+1}, comme la dimension de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ est $n+2$, nous avons trouvé tous les éléments du spectre de φ_{n+1}. En remarquant que si $j = n+1$, on a $\frac{-(n+1)+j(j+1)}{(n+1)^2} = 1$, on peut conclure

$$\mathrm{Sp}(\varphi_{n+1}) = \left\{\frac{-(n+1)+j(j+1)}{(n+1)^2}; j \in [\![0, n+1]\!]\right\}$$

  donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Finalement $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{\frac{-n+j(j+1)}{n^2}; j \in [\![0, n]\!]\right\}.}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{\frac{-n+j(j+1)}{n^2}; j \in [\![0, n]\!]\right\}$. Nous savons que le spectre contient $n+1$ valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$ donc φ_n est $\boxed{\text{diagonalisable}}$ et ses SEP sont de dimension 1.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour $n = 1$, on a $\Pi_1(X) = 1 + X$ et on a déjà vu que $\varphi_1(X+1) = 1 + X = \Pi_1(X)$.
Soit $n \geqslant 2$. Par linéarité de φ_n,

$$\varphi_n\left(\Pi_n\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \varphi_n\left(X^i\right) = \varphi_n\left(1\right) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \varphi_n\left(X^i\right).$$

Avec 1(a),

$$\varphi_n\left(\Pi_n\right) = X + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \left(\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}\right).$$

On développe

$$\varphi_n\left(\Pi_n\right) = X + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}.$$

On simplifie

$$\varphi_n\left(\Pi_n\right) = X + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on utilise $\binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} = \left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} = \left(\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}\right)^2 = \binom{n-1}{i}^2$ et
$\binom{n}{i}^2 \frac{2i(n-i)}{n^2} = 2\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)^2 \frac{i(n-i)}{n^2} = 2\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right) \frac{i}{n} \left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right) \frac{n-i}{n} = 2\left(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\right)\left(\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\right)$
$= 2\binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i}$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on utilise $\binom{n}{i}^2 \frac{i^2}{n^2} = \binom{n-1}{i-1}^2$.

$$\varphi_n\left(\Pi_n\right) = X + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i}^2 X^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} 2\binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i} X^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1}^2 X^{i-1}.$$

on fait les changements de variables $k = i+1$ et $j = i-1$,

$$\varphi_n\left(\Pi_n\right) = X + \sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k-1}^2 X^k + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i} X^i + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}^2 X^j.$$

Pour $n = 2$, on obtient

$$\varphi_2\left(\Pi_2\right) = X + \sum_{k=2}^{2} \binom{1}{k-1}^2 X^k + 2\sum_{i=1}^{1} \binom{1}{i-1}\binom{1}{i} X^i + \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j}^2 X^j = X + X^2 + 2X + X^0 + X$$

$$= X^2 + 4X + 1 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 X^k = \Pi_2.$$

Pour $n \geqslant 3$, on peut isoler la plage commune d'indexation $[\![2, n-1]\!]$,

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + \underbrace{\binom{n-1}{n-1}^2 X^n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-1}^2 X^k} + 2\left(\binom{n-1}{1-1}\binom{n-1}{1} X^1 + \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i} X^i\right)$$

$$+\binom{n-1}{0}^2 X^0 + \binom{n-1}{1}^2 X^1 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}^2 X^j$$

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + X^n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-1}^2 X^k + 2\left((n-1)X + \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i} X^i\right)$$

$$+1 + (n-1)^2 X + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}^2 X^j.$$

On urbanise avec les puissances de X,

$$\varphi_n(\Pi_n) = 1 + \left(1 + 2(n-1) + (n-1)^2\right) X + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1}^2 + 2\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k}^2\right) X^k + X^n$$

$$= 1 + n^2 X + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right)^2 X^k + X^n.$$

Le triangle de Pascal donne, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Il est temps de conclure

$$\varphi_n(\Pi_n) = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 X + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k}^2 X^k + \binom{n}{n}^2 X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 X^k.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n.}$

(b) Π_n est de degré n donc ce n'est pas le polynôme nul et il est vecteur propre associé à 1. Or les SEP de φ_n sont tous de dimension 1 donc $\mathrm{SEP}(\varphi_n, 1)$ est une droite et tout vecteur non nul de $\mathrm{SEP}(\varphi_n, 1)$ est une base de $\mathrm{SEP}(\varphi_n, 1)$ donc $\boxed{\mathrm{SEP}(\varphi_n, 1) = \mathrm{Vect}(\Pi_n).}$

8. (a) Avec la question 6, on sait que φ_n est diagonalisable avec des SEP de dimension 1. On note $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ les $n+1$ valeurs propres, en notant R_j un vecteur propre associé à $0 \leqslant j \leqslant n$, on sait que R_j est une base de $\mathrm{SEP}(\varphi_n, \lambda_j) = \mathrm{Vect}(R_j)$. Ainsi la famille $(R_0, R_1, ..., R_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc tout vecteur $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est combinaison linéaire de $(R_0, R_1, ..., R_n)$ et il existe $(\alpha_j)_{0 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j R_j$, on compose par φ_n,

$$\varphi_n(P) = \varphi_n\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j R_j\right) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_n(R_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda_j R_j.$$

On peut composer à nouveau par φ_n,

$$\varphi_n^2(P) = \varphi_n\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda_j R_j\right) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda_j \varphi_n(R_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 R_j.$$

A ce stade de l'épreuve, on peut se permettre de dire qu'une récurrence simple assure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(\lambda_j^k\right) R_j}.$$

(b) Soit $n \geqslant 2$, on sait que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_j = \frac{-n+j(j+1)}{n^2} = g(j)$ avec les notations de la réponse 6(a). La fonction g est strictement croissante donc pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$g(0) = -\frac{1}{n} \leqslant g(j) = \lambda_j \leqslant g(n-1) = \frac{-n+(n-1)n}{n^2} = \frac{n^2-2n}{n^2} < 1.$$

Donc $-1 < \lambda_j < 1$ et $\lambda_j^k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$. Notons que $\lambda_n = g(n) = 1$.

Comme n est indépendant de k, on peut sommer les limites ce qui donne

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\varphi_n^k(P)\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(\lambda_j^k\right) R_j\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \left(\lambda_j^k\right) R_j + \alpha_n R_n\right) = \alpha_n R_n.$$

On sait que $R_n \in \mathrm{SEP}(\varphi_n, 1) = \mathrm{Vect}(\Pi_n)$ donc R_n est colinéaire à Π_n donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = \beta\Pi_n$ et en notant $\alpha = \alpha_n\beta$, on a bien

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \left(\varphi_n^k(P)\right) = \alpha\Pi_n}.$$

Pour $n = 1$, on a $\varphi_1(X) = 1$ et $\varphi_1^2(X) = X$ donc la suite $\left(\varphi_1^k(X)_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$ n'a pas de limite.

9. Au début de l'épreuve, il y a n rouges dans l'urne rouge et n bleues dans l'urne bleue donc comme il y a un échange, après la première épreuve il y a $n-1$ rouges dans l'urne rouge et Z_1 est constante de valeur $n-1$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours compris entre 0 et n car il y a toujours n boules dans cette urne. Donc $Z_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $\{[Z = \ell]\}_{0\leqslant\ell\leqslant n}$ est un système complet dévénements avec éventuellement des ensembles vides, on parle aussi de quasi-système complet dévénements. Soit $i \in [\![0, n]\!]$, avec la formule des probabilités totales,

$$P(Z_{k+1} = i) = \sum_{\ell=0}^{n} P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = \ell]).$$

Le $(k+1)^e$ échange permet d'enlever ou d'ajouter une boule rouge à l'urne rouge donc l'écart entre le nombre de boules rouges dans l'urne rouge entre le k^e échange et le $(k+1)^e$ échange ne peut dépasser 1. Donc si $\ell < i-1$ ou si $\ell > i+1$ alors $P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = \ell]) = 0$, donc

$$P(Z_{k+1} = i) = P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) + P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i]) + P([Z_{k+1} = i+1] \cap [Z_k = i+1]).$$

- Si $P(Z_k = i-1) \neq 0$, alors $P_{[Z_k=i-1]}(Z_{k+1} = i)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a $i-1$ boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait i au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une bleue de l'urne rouge et une rouge de l'urne bleue, or il y a $n-(i-1)$ boules bleues dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{n-(i-1)}{n} = 1 - \frac{i-1}{n}$. Pour l'urne bleue, c'est la même probabilité par symétrie donc $P_{[Z_k=i-1]}(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2$.
  Si $P(Z_k = i-1) = 0$, alors $P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) = 0$ donc dans tous les cas,

$$P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 P(Z_k = i-1).$$

- Si $P(Z_k = i) \neq 0$, alors $P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = i)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a i boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait i au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une bleue de l'urne rouge et une bleue de l'urne bleue ou bien que l'on a sorti une rouge de l'urne rouge et une rouge de l'urne bleue. Dans le premier cas, il y a $n-i$ boules bleues dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n}$ et il y a i boules bleues dans l'urne bleue donc,

par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{i}{n}$ donc le premier cas se réalise avec la probabilité $\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{i}{n}$. L'autre cas est incompatible avec le premier et par symétrie il a la même probabilité. donc $P_{[Z_k=i-1]}\left(Z_{k+1}=i\right)=2\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)$.
Si $P\left(Z_k=i\right)=0$, alors $P\left([Z_{k+1}=i]\cap[Z_k=i]\right)=0$ donc dans tous les cas,

$$P\left([Z_{k+1}=i]\cap[Z_k=i-1]\right)=2\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)P\left(Z_k=i\right).$$

- Si $P\left(Z_k=i+1\right)\neq 0$, alors $P_{[Z_k=i+1]}\left(Z_{k+1}=i\right)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a $i+1$ boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait i au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une rouge de l'urne rouge et une bleue de l'urne bleue, or il y a $i+1$ boules rouges dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{i+1}{n}$. Pour l'urne bleue, c'est la même probabilité par symétrie donc $P_{[Z_k=i+1]}\left(Z_{k+1}=i\right)=\left(\frac{i+1}{n}\right)^2$.
Si $P\left(Z_k=i+1\right)=0$, alors $P\left([Z_{k+1}=i]\cap[Z_k=i+1]\right)=0$ donc dans tous les cas,

$$P\left([Z_{k+1}=i]\cap[Z_k=i+1]\right)=\left(\frac{i+1}{n}\right)^2P\left(Z_k=i+1\right).$$

Finalement

$$\boxed{P\left(Z_{k+1}=i\right)=\left(1-\frac{i-1}{n}\right)^2P\left(Z_k=i-1\right)+2\frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)P\left(Z_k=i\right)+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2P\left(Z_k=i+1\right)}.$$

11. (a)
```
function Z=simule(n,k)
    R=n
    for j=1:k
        aleaR=rand()
        aleaB=rand()
        if aleaR <= (R/n) & aleaB <= (R/n) then // on enlève une rouge de
            //l'urne rouge et une bleue de l'urne bleue
            R=R-1
        elseif aleaR > (R/n) & aleaB > (R/n) then // on enlève une bleue de
            //l'urne rouge et une rouge de l'urne bleue
            R=R+1
            // dans les autres cas le nombre de rouge est constant l'urne
            // rouge
        end
    end
    Z=R
endfunction
```

(b) On s'appuie sur la méthode de Monte-Carlo. On utilise la loi faible des grands nombres, on simule un grand nombre de fois la variable Z_k de façon indépendante et on fait la moyenne des valeurs obtenues, cette moyenne dite empirique converge en probabilité vers $E(Z_k)$. On fixe 10 000 simulations.

```
function E=esperance(n,k)
    S=0
    for k=1:10000
        S=S+simule(n,k)
    end
    E=S/10000
endfunction
```

(c) Les associations $30 \to 15, 20 \to 10, 10 \to 5$ suggèrent la relation $n \mapsto \frac{n}{2}$. Donc $\boxed{\lim_{k \to +\infty} (E(Z_k)) = \frac{n}{2}.}$

12. (a) Pour $k = 0$, on sait que $[Z_0 = n], [Z_1 = n-1]$ sont certains donc $\Delta_0(\Omega) = \{-1\}$.
Pour $k = 1$, on sait que $[Z_1 = n-1]$ est certain et $Z_2(\Omega) = \{n-2, n-1, n\}$ donc $\Delta_1(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.
Pour $k \geqslant 2$, on montre par récurrence que $\Delta_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. En effet, après un échange la variation du nombre de boules rouges est compris entre -1 et 1.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, on reprend la formule des probabilités totales avec le quasi-système complet dévénements $\{[Z = i]\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$,

$$P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} P([\Delta_k = -1] \cap [Z_k = i]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} - Z_k = -1] \cap [Z_k = i])$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} = i-1] \cap [Z_k = i]).$$

Si $P(Z_k = i) \neq 0$, alors $P_{[Z_k = i]}(Z_{k+1} = i-1)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a i boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait $i-1$ au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une rouge de l'urne rouge et une bleue de l'urne bleue, or il y a i boules rouges dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{i}{n}$. Pour l'urne bleue, c'est la même probabilité par symétrie donc $P_{[Z_k = i+1]}(Z_{k+1} = i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$.
Si $P(Z_k = i) = 0$, alors $P([Z_{k+1} = i-1] \cap [Z_k = i]) = 0$ donc dans tous les cas,

$$P([Z_{k+1} = i-1] \cap [Z_k = i]) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i).$$

Finalement

$$\boxed{P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)}.$$

De façon analogue,

$$P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} P([\Delta_k = 1] \cap [Z_k = i]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} - Z_k = 1] \cap [Z_k = i])$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} = i+1] \cap [Z_k = i]).$$

Si $P(Z_k = i) \neq 0$, alors $P_{[Z_k = i]}(Z_{k+1} = i+1)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a i boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait $i+1$ au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une bleue de l'urne rouge et une rouge de l'urne bleue, or il y a $n-i$ boules bleues dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{n-i}{n}$. Pour l'urne bleue, c'est la même probabilité par symétrie donc $P_{[Z_k = i+1]}(Z_{k+1} = i) = \left(\frac{n-i}{n}\right)^2$.
Si $P(Z_k = i) = 0$, alors $P([Z_{k+1} = i+1] \cap [Z_k = i]) = 0$ donc dans tous les cas,

$$P([Z_{k+1} = i+1] \cap [Z_k = i]) = \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i).$$

Finalement

$$\boxed{P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)}.$$

(c) Le support de Δ_k contient au plus 3 valeurs donc Δ_k a une espérance et

$$E(\Delta_k) = -P(\Delta_k = -1) + 0 \times P(\Delta_k = 0) + P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(-\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \right) P(Z_k = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(1 - 2\frac{i}{n}\right) P(Z_k = i) = \sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i) - \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n} iP(Z_k = i)$$

or $Z_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ donc $\sum\limits_{i=0}^{n} P(Z_k = i) = 1$ et $\sum\limits_{i=0}^{n} iP(Z_k = i) = E(Z_k)$ finalement

$$\boxed{E(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n} E(Z_k)}.$$

Par linéarité de l'epérance, $E(\Delta_k) = E(Z_{k+1}) - E(Z_k) = 1 - \frac{2}{n} E(Z_k)$ donc

$$\boxed{E(Z_{k+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(Z_k)}.$$

(d) On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = E(Z_k)$, on a $u_{k+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) u_k$ avec $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ indépendant de k, on voit que la suite (u_k) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
Le point fixe ℓ est solution de $\ell = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ell \iff \ell - \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ell = 1 \iff \frac{2}{n} \ell = 1 \iff \ell = \frac{n}{2}$.
Par soustraction terme à terme de $\ell = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ell$ et $u_{k+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) u_k$, on a

$$u_{k+1} - \ell = \left(1 - \frac{2}{n}\right)(u_k - \ell)$$

donc la suite $(u_k - \ell)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$.
Et pour tout $k \in \mathbb{N}^*, u_k - \ell = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1} (u_1 - \ell)$.
On sait que $n \geqslant 2$, donc $0 < \frac{2}{n} \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1 - \frac{2}{n} < 1$ donc $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ donc $u_k - \ell \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ donc

$$\boxed{u_k = E(Z_k) \underset{k \to +\infty}{\to} \ell = \frac{n}{2}.}$$

Il est naturel de s'attendre à un équilibre des boules rouges et bleues dans les deux urnes après un grand nombre d'échanges étant entendu qu'il y a au total autant de rouges que de bleues dans le jeu.

13. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Avec 1(a),

$$\varphi_n(Q_k) = \sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i) \varphi_n\left(X^i\right) = P(Z_k = 0) \varphi_n(1) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(Z_k = i) \left(\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1} \right)$$
$$= P(Z_k = 0) X + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i) X^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} 2\frac{i}{n} \left(\frac{n-i}{n}\right) P(Z_k = i) X^i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i) X^{i-1}.$$

On enlève les termes nuls,

$$\varphi_n(Q_k) = P(Z_k = 0) X + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i) X^{i+1}$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} 2\frac{i}{n}\left(\frac{n-i}{n}\right) P\left(Z_k=i\right) X^i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 P\left(Z_k=i\right) X^{i-1}.$$

On fait des changements de variables

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=P\left(Z_k=0\right) X+\sum_{j=2}^{n}\left(1-\frac{j-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=j-1\right) X^j+\sum_{i=1}^{n-1} 2\frac{i}{n}\left(\frac{n-i}{n}\right) P\left(Z_k=i\right) X^i$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=j+1\right) X^j.$$

Pour $n=2$,

$$\varphi_2\left(Q_k\right)=P\left(Z_k=0\right) X+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k=1\right) X^2+2\frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2}\right) P\left(Z_k=1\right) X^1$$

$$+\sum_{j=0}^{1}\left(\frac{j+1}{2}\right)^2 P\left(Z_k=j+1\right) X^j$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2}\right) P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{1+1}{2}\right)^2 P\left(Z_k=1+1\right)\right) X$$

$$+\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)\right) X^2.$$

On applique la question 10, avec $i=0$, on a $P\left(Z_{k+1}=0\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)$
puis avec $i=1$, $P\left(Z_{k+1}=1\right)=P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2}\right) P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{1+1}{2}\right)^2 P\left(Z_k=1+1\right)$
puis avec $i=2$, $P\left(Z_{k+1}=2\right)=\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)\right)$ car $P\left(Z_k=3\right)=0$ donc

$$\varphi_2\left(Q_k\right)=P\left(Z_{k+1}=0\right)+P\left(Z_{k+1}=1\right) X+P\left(Z_{k+1}=2\right) X^2=Q_{k+1}.$$

Pour $n \geqslant 3$, la plage commune d'indexation est $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$,

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=P\left(Z_k=0\right) X+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=n-1\right) X^n$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}\left(1-\frac{j-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=j-1\right) X^j+\sum_{i=2}^{n-1} 2\frac{i}{n}\left(\frac{n-i}{n}\right) P\left(Z_k=i\right) X^i+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) P\left(Z_k=1\right) X$$

$$+\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right) X^0+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right) X^1+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=j+1\right) X^j.$$

On urbanise selon les puissances de X,

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)\right) X$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}\left(2\frac{i}{n}\left(\frac{n-i}{n}\right) P\left(Z_k=i\right)+\left(1-\frac{i-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=i-1\right)+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=i+1\right)\right) X^i$$

$$+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=n-1\right) X^n.$$

Dans le sigma, on utilise la question 10,

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)\right) X$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1} P\left(Z_{k+1}=i\right) X^i+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=n-1\right) X^n.$$

Avec la question 10, en remplaçant i par n avec $P\left(Z_k=n+1\right)=0$ on a

$$P\left(Z_{k+1}=n\right)=\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=n-1\right)$$

donc

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)\right) X$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1} P\left(Z_{k+1}=i\right) X^i+P\left(Z_{k+1}=n\right) X^n.$$

Avec la question 10, en remplaçant i par 0 avec $P\left(Z_k=-1\right)=0$ on a

$$P\left(Z_{k+1}=0\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)$$

donc

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=P\left(Z_{k+1}=0\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)\right) X$$

$$+\sum_{i=2}^{n} P\left(Z_{k+1}=i\right) X^i.$$

Avec la question 10, en remplaçant i par 1 on a

$$P\left(Z_{k+1}=1\right)=P(Z_k=0)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)$$

donc finalement

$$\boxed{\varphi_n\left(Q_k\right)=\sum_{i=0}^{n} P\left(Z_{k+1}=i\right) X^i=Q_{k+1}}.$$

(b) On applique la question 8(b), avec $Q_0=X^n\in\mathbb{R}_n[X]$ et $n\geqslant 2$, on sait qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi_n^k(Q_0)=\alpha\Pi_n$ or par récurrence facile $\varphi_n^k(Q_0)=Q_k$ donc

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} Q_k=\alpha\Pi_n}.$$

14. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$, on utilise l'indication du début de sujet qui nous dit que

$$\lim_{k \to +\infty} a_{k,i} = b_i$$

ici $a_{k,i} = P(Z_k = i)$ et $b_i = \alpha \binom{n}{i}^2$ d'après les définition de Q_k et $\alpha \Pi_n$.

(b) On a $Z_k(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $\sum\limits_{i=0}^{n} P(Z_k = i) = 1$ donc par somme de limites quand $k \to +\infty$ avec une somme de $n+1$ termes et n indépendant de k il vient

$$1 = \lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i) \right) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{k \to +\infty} \left(P(Z_k = i) \right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha \binom{n}{i}^2$$

donc avec $\binom{n}{i}^2 > 0$ il vient $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \neq 0$ et $\alpha = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2}$.

Ensuite on sait que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ donc $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{n+n}{n}$ avec le rappel de la formule de Van der Monde. Finalement $\boxed{\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}.}$

(c) (Z_k) est une suite de variables discrètes à support dans $[\![0, n]\!]$ donc avec 14(a), (Z_k) converge en loi vers une variable T telle que $T(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $i \in [\![0, n]\!], P(T = i) = \alpha \binom{n}{i}^2$. Les upport de T est fini donc T a une espérance et

$$E(T) = \alpha \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i}^2 = \alpha \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i}^2 = \alpha \sum_{i=1}^{n} n \binom{n-1}{i-1} \binom{n}{i}$$

avec $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$ et comme $\binom{n-1}{i-1} = \binom{n-1}{n-i}$,

$$E(T) = n\alpha \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{n-i} \binom{n}{i}.$$

Sachant $\binom{n-1}{n-0} = 0$, et la formule de Van der Monde,

$$E(T) = n\alpha \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{n-i} \binom{n}{i} = n\alpha \binom{2n-1}{n}.$$

Pour conclure

$$\boxed{E(T) = \frac{n\binom{2n-1}{n}}{\binom{2n}{n}}}.$$

On pourrait aussi calculer la variance...