Enoncé et corrigé HEC ESSEC 2019

Le problème comporte cinq parties.
Dans les trois premières parties, on étudie des porpriétés usuelles des matrices ${}^tAA$ où $A \in M_n(\mathrm{IR})$.
Dans la quatrième partie, on définit la racine carrée d'une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives, afin d'obtenir une décomposition d'une matrice $A \in GL_n(\mathrm{IR})$.
Dans la cinquième partie, on applique ce qui précède au calcul de la distance d'une matrice $A \in GL_n(\mathrm{IR})$ à l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathrm{IR})$.
Dans tout le problème:
*n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
*$\mathrm{B}_0 = (e_1, ..., e_n)$ désigne la base canonique de IR^n.
*Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un vecteur de IR^n, on lui associe la matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de ses coordonnées dans la base B_0.
*$\langle \ \mid \ \rangle$ est le produit scalaire canonique sur IR^n et la norme euclidienne qui lui est associée est notée $\| \quad \|$.
*Si $A \in M_n(\mathrm{IR})$, ${}^tA$ désigne sa transposée et trA désigne sa trace.
*I_n désigne la mtrice unité de $M_n(\mathrm{IR})$ et Id l'endomorphisme identité de IR^n.
* Endomorphisme adjoint : Si $A \in M_n(\mathrm{IR})$ et si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on note f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tA$. on notera aussi $s_f = f^* o f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tAA$.
*Si λ est un nombre réel, on définit

$$\mathrm{E}_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id) \text{ et } \mathrm{E}_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n).$$

* Liste étendue des valeurs propres: Lorsqu'une matrice A de $M_n(\mathrm{IR})$ est diagonalisable, on appelle liste étendue
des valeurs propres de A, une liste de nombres réels où chaque valeur prope λ de A se trouve répétée $\dim E_\lambda(A)$ fois. Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

admet $(1,4,4)$ pour liste étendue des valeurs propres.
*$S(\mathrm{IR}^n)\big(\text{respectivement } S_n(\mathrm{IR})\big)$ désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de IR^n (respectivement des matrices symétriques de $M_n(\mathrm{IR})$).
*$S^+(\mathrm{IR}^n)\big(\text{respectivement } S_n^+(\mathrm{IR})\ \big)$désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de IR^n (respectivement des matrices symétriques de $M_n(\mathrm{IR})$) à valeurs propres positives ou nulles.
* On note $O_n(\mathrm{IR})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathrm{IR})$. Si $P \in M_n(\mathrm{IR})$, on rappelle que P est une amtrice orthogonale si m$\mathrm{P} estinversibleetsi \mathrm{P}^{-1} =^t P$.
*Matrices définies par bloc: Considérons $r \in [[1, n-1]]$ et $(A, B) \in (M_n(\mathrm{IR}))^2$ définies par

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \text{et } B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

où

$$(A_1, B_1) \in (M_r(\mathrm{IR}))^2; (A_4, B_4) \in (M_{n-r}(\mathrm{IR}))^2$$

et

$$(A_2, B_2) \in (M_{r,n-r}(\mathrm{IR}))^2; (A_3, B_3) \in (M_{n-r,r}(\mathrm{IR}))^2.$$

On utilisera sans démonstration les égalités suivantes

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix} \text{ et } {}^tA = \begin{bmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_2 \\ {}^tA_3 & {}^tA_4 \end{bmatrix}.$$

Partie I- Un premier exemple
Soit a un réel différent de 1 et

$$A = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{bmatrix} \in M_2(\mathrm{IR}).$$

1) Quel est le rang de A?*Calculer* A^2.Que peut-on dire de l'endomorphisme f canoniquement associé à A? est-ce un endomorphisme diagonalisable?Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f?
2) Calculer $M = {}^tAA$. La matrice M est -elle diagonalisable? Comparer Kerf et $Ker(s_f)$. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de s_f?
3) À quelle condition nécessaire et suffisante, M est-elle la matrice d'un projecteur?

PartieII – Généralités

4) Produit scalaire sur $M_n(\mathrm{IR})$
a) Soit

$$A = [a_{ij}]_{(i,j)\in[[1,n]]^2} et B = [b_{ij}]_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$$

deux matrices de $M_n(\mathrm{IR})$. Donner l'expression de $tr\left({}^tAB\right)$ en fonction des coefficients de A et de B.
b) Montrer que l'application $(A,B) \mapsto tr({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathrm{IR})$.
Dans la suite du problème, on notera:

$$(A|B) = tr(({}^tA)B) \text{ et } \|A\|_2 = \sqrt{tr(({}^tA)A)}$$

la norme euclidienne associée.
c) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que

$$\forall A \in M_n(\mathrm{IR}),\ \mathrm{tr}(A^2) \leq tr({}^tAA).$$

Montrer également que

$$(trA^2 = tr({}^tAA)) \Leftrightarrow (A \in S_n(\mathrm{IR}))$$

Dans la suite, $A \in M_n(\mathrm{IR})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.
5) Caractérisation de la matrice de f^* en base orthonormée:
Soit $B' = (e'_1,...,e'_n)$ une base orthonormée de IR^n, on note P la matrice de passage de B_0 vers B'*et* A' la matrice de f dans la base B'.
a) Rappeler la relation liant A et A'.
b) Rappeler pourquoi P est une matrice orthogonale
c) En déduire que ${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base B'.
6) Réduction de s_f.
a) Vérifier que, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathrm{IR})$, ${}^tX({}^tAA)X = \|AX\|^2$.
b) Montrer que Kerf $= Ker(s_f)$ et $rgs_f = rgf$.
c) Vérifier que s_f est un endomorphisme symétrique de IR^n.
d) Montrer que les valeurs propres de s_f sont positives ou nulles.
On note $r = rgf$ et on suppose pour la fin de la question 6) que $1 \leq r \leq n-1$.
e) Justifier qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_r,...,\varepsilon_n)$ de IR^n dans laquelle la matrice de s_f est de la forme

$$\begin{bmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

,

où D est une matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux $\lambda_1,...,\lambda_r$ sont strictement positifs et où $0_{r,n-r}, 0_{n-r,r}, 0_{n-r,n-r}$ sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls.
f) Montrer que la matrice de f dans la base C est de la forme

$$Mat_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

où $A_1 \in M_r(\mathbb{R}), A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$. Vérifier que ${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$.
7) Étude des valeurs porpres de $A \times^t A$
On note $\tau_f = fof^*$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A \times^t A$.
a) Montrer que $rg(s_f) = rg(\tau_f)$ et $\dim(Ker(s_f)) = \dim(Ker(\tau_f))$.
b) Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et x un vecteur propre associé. Vérifier que λ est une valeur propre de τ_f et que $f(x)$ est un vecteur propre associé. Montrer alors que

$$\dim(E_\lambda(s_f)) \leq \dim(E_\lambda(\tau_f)).$$

c) Montrer que τ_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que s_f et que, pour chacune de ces valeurs propres λ, on a

$$\dim(E_\lambda(s_f)) = \dim(E_\lambda(\tau_f)).$$

d) En déduire enfin qu'il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times^t A = \Omega({}^tAA){}^t\Omega$.
8) Une inégalité
Dans cette question, on pose

$$V = \{(x_1,...,x_n) \in [0,+\infty[^n\} \text{ et } U = \{(x_1,...,x_n) \in]0,+\infty[^n\},$$

et φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi : (x_1,...,x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

On admet que V est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.
a) Montrer que

$$W = \left\{(x_1,...,x_n) \in V \,/\, x_1 + ... + x_n = 1\right\}$$

est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.
b) En déduire que φ admet un maximum global noté M sur W.
c) Calculer $\varphi(x_1,...,x_n)$ lorsque $(x_1,...,x_n) \in V \backslash U$.
d) En déduire que M est le maximum de φ sur U sous la contrainte $x_1 + ... + x_n = 1$.
e) Déterminer alors la valeur du maximum M et préciser en quel vecteur de U il est atteint.
f) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives ou nulles et on note $(\mu_1,...,\mu_n)$ une lsite étendue des valeurs propres de S. Déduire de ce qui précède que

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leq \left(\frac{trS}{n}\right)^n.$$

Dans quel cas a-t-on égalité dans cette inégalité?
9) Dans cette question, on note $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tAA$.
On définit l'application Δ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(x) = \prod_{i=1}^{n}(x + \lambda_i).$$

Montrer alors que pour tout réel $x \geq 0$,

$$\Delta(x) \leq \left(\frac{tr\left(xI_n + {}^tAA\right)}{n}\right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + ... + \lambda_n}{n}\right)^n.$$

Partie III. **Étude de deux cas particuliers**
Dans cette partie encore, $A \in M_n(\mathrm{IR})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.
9) On suppose dans cette question que f est un projecteur de rang $r \in [[1,n-1]]$.
a) Montrer que la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme f est r.
b) On reprend les notations de la question 6) selon lesquelles

$$Mat_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

vérifier que $A_1^2 = A_1$ et que $tr(A_1) = r,$ et en déduire la matrice A_1.
c) Montrer alors que les valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ sont supérieures ou égales à1 et que $tr({}^tAA) \geq r$.
d) Quels sont les projecteurs orthogonaux pour lesquels $tr({}^tAA) = r$?
10) On suppose dans cette question que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = Id$.
a) Justifier que ${}^tAA$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de ${}^tA$.
b) Montrer que si λ est une valeur propre de ${}^tAA, alors$ $\frac{1}{\lambda}$ est aussi une valeur propre de ${}^tAA$ et que

$$\dim E_\lambda({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}({}^tAA)$$

.

c) Vérifier que pour tout x réel strictement positif on a:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

puis établir l'équivalence logique

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

d) On note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tAA$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geq 2^n.$$

e) Quelles sont les matrices pour lesquelles $\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = 2^n$?Montrer que cette égalité correspond au cas où f est une symétrie orthogonale, ce qui signifie que les sous-espaces $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

Partie IV- **Décomposition polaire**
Dans cette partie encore, $A \in M_n(\mathrm{IR})$,f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A et on suppose de plus que A est inversible.
11) Montrer qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$\forall i \in [[1,n]], s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i,$$

et on pose alors

$$\forall i \in [[1,n]], v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\, \varepsilon_i.$$

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme v de IR^n tel que $v \in S^+(\mathrm{IR}^n)$ et $v^2 = s_f$.
12) Soit ω un endomoprhisme de IR^n tel que $\omega \in S^+(\mathrm{IR}^n)$ et $\omega^2 = s_f$.
Montrer que, pour toute valeur propre μ de $\omega,$ on a $E_\mu(\omega) \subset E_{\mu^2}(s_f),$ et montrer ensuite que

$$E_\mu(\omega) = E_{\mu^2}(s_f) \text{ et } \mathrm{Sp}(\omega) = \left\{\sqrt{\lambda} \ / \ \lambda \in Sp(s_f)\right\}.$$

13)En déduire qu'il existe un unique endomorphisme v de IR^n tel que $v \in S^+(\mathrm{IR}^n)$ et $v^2 = s_f$ et que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de $s_f,$ la matrice de v est diagonale.
14) En déduire qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{{}^tAA}$ appartenant à $S_n^+(\mathrm{IR})$

telle que $\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^2 = {}^tAA$.

15) Vérifier que la matrice $A\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^{-1}$ *est* orthogonale. Montrer alors qu'il existe un unique couple

$$(\Omega, S) \in O_n(\mathrm{IR}) \times S_n^+(\mathrm{IR})$$

tel que $A = \Omega S$. C'est ce qu'on appelle la décomposition polaire de A.

Partie V- Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $O_n(\mathrm{IR})$

Dans cette partie, A est une matrice inversible de $O_n(\mathrm{IR})$. Soit $M \in GL_n(\mathrm{IR})$.
On note $d(M)$ la distance de M à $O_n(\mathrm{IR}), c'est-à-dire$

$$d(M) = \inf_{V \in O_n(\mathrm{IR})} \|M - V\|_2$$

16)Justifier que $d(M)$ est bien définie.
17)Soit $R \in O_n(\mathrm{IR})$. Montrer que

$$\forall N \in M_n(\mathrm{IR}), \quad \|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2$$

Montrer que les applications $V \mapsto VR^{-1}$ et $V \mapsto R^{-1}V$ sont des bijections de $O_n(\mathrm{IR})$ sur lui-même.
En déduire que:

$$d(M) = d(RM) = d(MR)$$

18)On note $A = \Omega S$ la décomposition polaire de A. On considère une matrice diagonale D à éléments diagonaux
strictement positifs et une matrice $P \in O_n(\mathrm{IR})$ telles que

$$S = PD \times^t P.$$

Vérifier que $d(A) = d(D)$.
19)Soit $V \in O_n(\mathrm{IR}).On$ note

$$W = \frac{1}{2}\left(V + {}^tV\right),$$

et v l'endomorphisme canoniquement associé à V.
a)Justifier que W est diagonalisable. On note ω l'endomorphisme canoniquement associé à W.
b)Soit $x \in \mathrm{IR}^n$. Vérifier que $\langle \omega(x) | x \rangle = \langle v(x) | x \rangle$ et que $\|v(x)\| = \|x\|$. En déduire que

$$|\langle \omega(x) | x \rangle| \leq \|x\|^2 \text{ et } \langle x - \omega(x) | x \rangle \geq 0.$$

c)Montrer alors que ls valeurs porpes de $I_n - W$ sont positives ou nulles.
d)On note $W = [w_{ij}]_{(i,j) \in [[1,n]]^2}$. Montrer que, pour tout $i \in [[1,n]], 1 - w_{ii} \geq 0$
.e) Montrer que, pour tout $i \in [[1,n]]$, on a $\mathrm{w}_{ii} = 1$ si, et seulement si,$W = I_n$.
20)On conserve les notations des questions 18) et 19).
a)Montrer que

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2(I_n - V|D) = 2(I_n - W|D)$$

b)En déduire que

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geq 0$$

c)Montrer alors que

$$d(A) = \|D - I_n\|_2 = \left\| \sqrt{{}^tAA} - I_n \right\|_2,$$

et montrer aussi que I_n est l'unique élément V de $O_n(\mathrm{IR})$ tel que $d(A) = \|D - V\|_2$