LIFE

COLECCIÓN CIENTÍFICA DE LIFE EN ESPAÑOL

el oso panda

MATEMATICAS

INTRODUCCIÓN

EL HOMBRE primitivo vivía atemorizado y amedrentado ante los hechos naturales debido a que no podía explicárselos. El mito y la magia dominaban su pensamiento. Posteriormente y en forma gradual empezó a comprender la naturaleza y aprendió a disfrutar de ella y a controlarla. Los historiadores hablan de la época en la que esta comprensión empezó a afectar la cultura occidental y la llamaron la Ilustración.

Hoy en día esta frase ha perdido algo de su significado. Los principios de la Ilustración, suficientes para dejarnos vivir en paz con las fieras de la selva, con las mareas del océano con los truenos y los relámpagos, resultan inadecuados para calmar nuestra inquietud en torno a los cohetes, los computadores, bevatrones y la enorme proliferación de bacterias engendradas por drogas maravillosas. De nuevo vivimos en un mundo de magia, esta vez elaborado por el hombre, y buscamos nuestra incierta ruta entre los «robots» que, según algunos, amenazan nuestra existencia.

Se requiere ahora una segunda Ilustración en la que el hombre pueda vivir en paz con sus propios descubrimientos y creaciones, que le permita, debido a una mayor comprensión, utilizarlos para su enriquecimiento y bienestar. El cambio de énfasis de las humanidades de viejo estilo a la ciencia en los planes de estudios de nuestras escuelas, indica una Clara conciencia de la mencionada necesidad. Con una apreciación optimista creo que, durante mis treinta años de enseñanza universitaria, habré inculcado lo que se conoce con el nombre de espíritu científico a más de 5.000 estudiantes. Los libros científicos que hay disponibles, y los hay en gran cantidad, los lee sólo un grupo relativamente pequeño de americanos. Es evidente que son necesarios libros con suficiente atractivo y poder de persuasión para ilustrar al gran público.

Cuando los editores de LIFE decidieron publicar una serie de libros de ciencia, con el apoyo de su enorme capacidad editorial y con la seriedad y preocupación propias del científico mis esperanzas aumentaron. He aquí una prometedora evidencia de lo que puede llegar a ser la nueva Ilustración, en la cual la separación entre nuestra *tecnología y su significado en términos de valores humanos puede ser reducida y superada.*

Con estas grandes esperanzas saludo la publicación del presente volumen, el primero de una serie sobre las ciencias físicas y biológicas. Resulta apropiado en extremo que se refiera a las matemáticas, materia que tiene prestigio suficiente para merecer el título de «Reina de las Ciencias».

Henry Margenau

Catedrático Eugene Higgins de Física y Filosofía Natural, Universidad de Yale

EL AUTOR

DAVID BERGAMINI es un escritor independiente que está especializado en temas científicos. Al escribir Las Matemáticas vuelve a un tema que le fascinó por primera vez siendo un joven en un campo de concentración japonés durante la segunda Guerra Mundial; virtualmente los únicos libros disponibles eran textos de algebra, geometría y trigonometría. Autor del volumen de LIFE Nature Library, The Universe, también contribuyó a preparar The World We Live In como redactor de LIFE. Su notable ensayo, «The Language of Science», aparece en numerosas antologías.

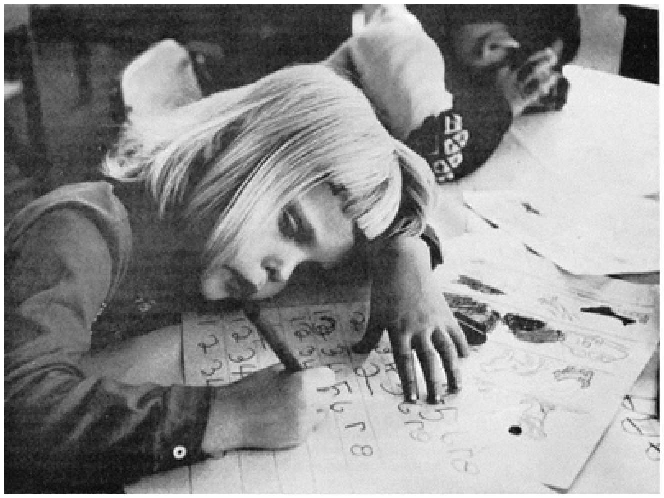
Capítulo 1

Los números: un largo recorrido desde uno hasta cero

Contenido:

1. *Introducción*
2. *Jugadores, contadores de votos y átomos*
3. *La lógica de los ojos azules*
4. *Los dedos de la mano, los del pie y las antiguas veintenas*
5. *El esplendoroso 60*
6. *El triunfo de la base decimal*
7. *Ensayo Gráfico*
8. *Maravillas mecánicas para acelerar el trabajo de cálculo*
9. *El maravilloso lenguaje del "sí o no" de las fichas perforadas*
10. *Computadores: Máquinas universales para la era electrónica*
11. *En un computador: división por medio de la sustracción*
12. *Instrucciones detalladas para guiar a un cerebro complejo*
13. *Un computador común para acelerar la tarea de una comunidad*
14. *Máquinas inteligentes que actúan casi como un ser humano*
15. *El hombre ha ido a la luna y regresado de ella gracias a los computadores*

1. Introducción



INICIACIONES MATEMÁTICAS.
Una atenta alumna de primer grado se esfuerza en aprender las formas de los números. Durante este proceso repite las etapas primitivas del desarrollo matemático del hombre: después de aprender a contar, inventó las palabras para los números, y más tarde los símbolos numéricos.

Piensan los radioastrónomos que, algún día, uno de sus colegas experimentará la enorme sensación de recibir el primer mensaje procedente de seres inteligentes radicados en otro planeta o en otra estrella. ¿Y cómo descifrarán el mensaje? ¿Pero qué podrían decir que entendiéramos, estos seres diferentes de nosotros en sus orígenes y evolución, y probablemente también en su estructura biológica? Después de ponderar el problema, los científicos han concluido que el tipo de mensaje con mayor probabilidad de tener sentido en cualquier forma de vida inteligente, en cualquier parte, sería matemático.

Una raza adelantada extraterrena podría transmitir un simple fragmento de aritmética en clave, por ejemplo, y seguir repitiéndolo como tipo de señal de llamada. «Bip, bip-bip, bip-bip-bip» podría significar «Contando, uno, dos tres». «Punto-raya-punto» -pausa- «punto-punto» podría significar «Uno más uno igual a dos.» Una vez que se hubieran captado y reconocido signos sencillos de esta clase, se podrían intercambiar grupos enteros de hechos matemáticos y de fórmulas a fin de establecer un vocabulario básico para una comunicación posterior.

En el Observatorio Nacional de Radio en Green Bank, Virginia Occidental, los radioastrónomos han dirigido antenas gigantescas en forma de disco en dirección a dos estrellas remotas, Tau Cita y Épsilon Eridani, a fin de escuchar «bips» matemáticamente organizados. El que este esfuerzo haya sido efectuado con toda seriedad subraya una cualidad de universalidad en las matemáticas que todo el mundo siente, pero nadie sabe cómo definir. Muchos de los grandes pensadores de la humanidad, intoxicados por este algo indefinible, han decidido que las matemáticas representan la verdad absoluta. «Dios siempre hace geometría», dijo Platón. «Dios siempre hace aritmética», repitió el prusiano del siglo XIX Carl Gustav Jacob Jacobi. En nuestra misma época, el físico británico sir James Jeans ha declarado: «El Gran Arquitecto del Universo empieza ahora a revelarse como un matemático puro».

Hoy, aunque los matemáticos afirman la universalidad de su disciplina, muchos niegan que posea categoría de verdad absoluta. De hecho, una de las definiciones favoritas de las matemáticas es la aguda síntesis de Bertrand Russell: «La ciencia de la que nunca sabemos a qué nos referimos ni si lo que decimos es cierto». Esta definición no refleja modestia alguna, sino una jactancia tan orgullosa como jamás hiciera el hombre. En efecto, estos matemáticos dicen que su trabajo puede aplicarse al universo y a nuestro mundo debido a que lo diseñaron para que fuese aplicable a todo posible mundo y universo que pudiera imaginarse dentro de unas líneas lógicas. Dicen que las matemáticas llegan a un grado tal de sofisticación final que ya no importa la verdad o falsedad de cualquier premisa dada. Lo que importa, dicen, es que la premisa esté razonada correctamente hasta su conclusión. Utilizando este criterio, un matemático podría suponer a ciegas que la luna está hecha de queso verde, y argumentar a través de una serie de premisas hasta llegar a la conclusión de que los astronautas deberían llevar galletas «crakers».

Las matemáticas no constituyen tanto un cuerpo de conocimiento como un tipo especial de lenguaje, tan perfecto y abstracto que es de esperar sea comprendido por seres inteligentes en todo el universo. La gramática del lenguaje -su adecuada utilización- viene determinada por las reglas de la lógica. Su vocabulario está formado por símbolos tales como:

- cifras para los números

- letras para los números desconocidos
- ecuaciones para las relaciones entre números
- π para la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro
- sen (para el seno), cos (para el coseno) y tan (para la tangente) para las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo;
- $\sqrt{\ }$ para una raíz cuadrada
- ∞ para el infinito;
- Σ, ∫, ∂ y → para otros conceptos de las matemáticas superiores.

Todos estos símbolos ayudan muchísimo al científico, ya que sirven para abreviarle su pensamiento. Para los muchos no versados, no obstante, hacen que las matemáticas parezcan, más que una lengua universal, una barrera lingüística entre «dos culturas».

Sólo una parte del vocabulario de las matemáticas ha sido seleccionado por la ciencia. El resto -y toda su gramática- permanece en la esfera del pensamiento general humano. En realidad, las matemáticas pueden relacionarse tanto con la filosofía, la economía, la estrategia militar, la composición musical, la perspectiva artística y los juegos de salón como con la física atómica. Se comprende que quien esté instruido en matemáticas pueda amarlas con tanta efusión como un apasionado del ballet, de la plata fina, de las antigüedades o de cualquier otro adorno de la civilización.

Debido a su aspecto estético y a su total falta de relación con la práctica, las matemáticas puras pueden parecer el logro más absurdo jamás imaginado por los soñadores. Pero incluso algunas ramas de las matemáticas que hasta hace poco se consideraban inútiles, hoy han adquirido una importancia vital para los industriales, los generales y los planificadores gubernamentales. Nuestra civilización apenas existiría sin las leyes físicas y las técnicas intelectuales desarrolladas como producto conjunto con la investigación matemática. Nadie puede saldar su talonario de cheques sin hacer uso de la aritmética inventada por los antiguos mesopotámicos e hindúes. Nadie puede construir una pared sin utilizar las técnicas de medición geométrica creadas por los matemáticos egipcios. Fueron los pioneros griegos de la geometría quienes concibieron la idea que la tierra podría tener la forma de una esfera. Las matemáticas clásicas, al ser rescatadas del olvido de la Edad de las Tinieblas, favorecieron la propagación del espíritu aventurero de la era de Colón. Los hombres que forjaron la Revolución Industrial pusieron su confianza en las máquinas y en las investigaciones de Galileo y Newton. Hoy en día, la investigación atómica descansa en gran parte en la Teoría de la Relatividad de Einstein, quien a su vez utilizó las abstrusas especulaciones matemáticas del siglo XIX.

Los dos pilares de las matemáticas de la Antigüedad fueron la aritmética, la ciencia de los números, y la geometría, la ciencia de las formas y de las relaciones espaciales. A través de los siglos la aritmética fue ampliada por el álgebra, la cual suministró una notación abreviada para resolver los problemas en el supuesto de que hubiese cantidades desconocidas. En el siglo XVII, la aritmética y el álgebra se unificaron con la geometría en la «geometría analítica», la cual suministró una técnica para representar los números como puntos en un diagrama, para convertir las ecuaciones en formas geométricas y para convertir las formas geométricas en ecuaciones. La aproximación analítica de esta nueva geometría, aclarando una rama de las matemáticas en función de otra, abrió el camino a disciplinas de matemáticas superiores resumidas en la palabra «análisis».

CUATRO SÍMBOLOS FAMILIARES ESCRITOS EN ESTILO ANTIGUO.

Desde la primitiva Babilonia los matemáticos han ahorrado tiempo y esfuerzos al sustituir los símbolos por palabras. Entre dichas creaciones abreviadas se encuentran nuestros guarismos y los breves signos +, -, ×, : que utilizamos para indicar suma, resta, multiplicación y división. Estos cuatro cálculos son relativamente nuevos en la historia matemática. Abajo aparecen algunas formas primitivas de representarlos.

LA SUMA

El calculista del Renacimiento, Tartaglia utilizó la primera letra del italiano «piu» (más) para representar la adición. El signo + es una forma taquigráfica del latín «et» (y).

LA SUSTRACCIÓN

Este signo menos fue utilizado en los tiempos griegos por Diofanto. Nuestro símbolo de sustracción puede derivar de una barra que utilizaban los comerciantes medievales.

LA MULTIPLICACIÓN

Nuestro signo x, basado en la Cruz de San Andrés, se conoció cuando el signo representado fue utilizado por Leibniz en la Alemania del siglo XVIII

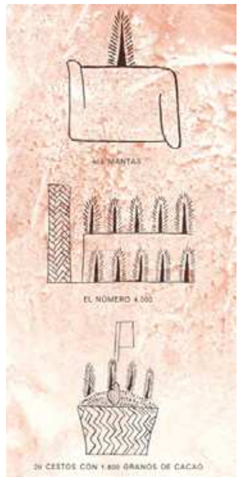
LA DIVISIÓN
En la Francia del siglo XVIII J. E. Gallimard utilizó esta D invertida para la división. El signo que utilizamos puede provenir de la línea fraccionaria adornada por dos puntos

El primer descendiente del análisis fue el cálculo, un sistema para analizar el cambio y el movimiento en función de puntos o números unidos en una sucesión continua. Esto permite a los científicos solucionar problemas de dinámica: comprender las ondulaciones de una onda, la trayectoria de una estrella errante. El cálculo continúa siendo un patrón para los tecnólogos cuando diseñan coches y cohetes.

2. Jugadores, contadores de votos y átomos

Muchos científicos creían, cuando el cálculo empezó a utilizarse por primera vez, que les permitiría finalmente predecir el comportamiento continuo de todo objeto en movimiento. Pero en la misma época aproximadamente, mediante el estudio de los juegos de azar, los matemáticos descubrieron las leyes de la probabilidad que recordaron la creciente incertidumbre que acecha prácticamente a toda sucesión de hechos. En la actualidad dichas leyes sirven para facilitar el cálculo de lo que debe pagar un hombre de cincuenta años por una nueva póliza de seguros. Hacen posible que los contadores de votos puedan hacer una predicción exacta del resultado de las elecciones. Y se utilizan en los experimentos atómicos para valorar estadísticamente tipos de distribución de la descarga que efectúan los millones de invisibles partículas subatómicas cuando dan en el blanco en el fondo de un desintegrador de átomos.

Por medio de ecuaciones muy complicadas descubiertas a partir del cálculo y de la geometría analítica, los matemáticos concibieron formas geométricas fuera del alcance de nuestra vista: formas de un número cualquiera de dimensiones. También concibieron espacios de infinitas dimensiones para hacer encajar las formas. El concepto de espacio de más de tres dimensiones se ha tornado fundamental para las ideas acerca de la relatividad y el universo.



SÍMBOLOS NUMÉRICOS PRECOLOMBINOS.
Los aztecas de México del siglo XV representaban los objetos cotidianos con pinturas que a menudo incluían símbolos numéricos. Un símbolo común, una espiga orlada, significaba el número 400. Una espiga sobre la pintura de una manta (arriba) significa «400 mantas». Diez espigas (medio) significaban el número 4.000. Las espigas del cesto (abajo) indicaban 1.600 granos de cacao; la bandera colocada sobre las espigas significaba 20 cestos

También ha servido para la solución de difíciles problemas referentes a campos eléctricos y magnéticos del complicado mecanismo de los computadores y de los aparatos de televisión. En la época actual los geómetras están alcanzando una abstracción todavía mayor de su arte a través de la «topología», el arte de analizar aquellas propiedades de una forma que permanecen inalteradas después de que ésta se ha contraído, alargado o retorcido.

3. La lógica de los ojos azules

Otros matemáticos han retrocedido para encontrar la inspiración entre las más elementales de todas las ideas matemáticas. Los «teóricos del número» han vuelto a los primeros pasos, los más falaces, por los que contamos, y reiteradamente han llegado a la conclusión de que los enteros son los más engañosos, estimulantes y divertidos de los temas que estudian las matemáticas. Incluso los procesos fundamentales del propio pensamiento han pasado a ser objeto de la exploración matemática. Los significados de los nombres y de los verbos utilizados en el razonamiento humano habitual, dicen los matemáticos, están sujetos a diferentes interpretaciones: ¿por qué no reemplazarlos por símbolos numéricos precisos y por operaciones concretas tales como la suma y la multiplicación? Si tal se hiciera, se lograría hacer desaparecer la ambigüedad de la interpretación. Los que proponen «esta lógica simbólica» han buscado ansiosamente la manera de reducir todos los objetos de estudio humano a «conjuntos» y «grupos», colecciones de pensamientos o de cosas que van enlazadas lógicamente, tales como «todos los ojos azules» o «todas las señoras que conducen». Y han tratado de encontrar caminos estrictamente lógicos para no hacer comparaciones odiosas al relacionar los elementos de un conjunto o de un grupo con los de otro.

Las distintas clases de matemáticas arriba esbozadas constituyen los montes principales de estas cordilleras. Las ramas de la geometría comprenden la proyectiva, la afín, la euclidiana y la de Riemann; las del álgebra incluyen la de Banach, la de Boole y la conmutativa. Todas estas ingeniosas creaciones del pensamiento no tan sólo tienen aplicación en la vida cotidiana, sino que en cierto sentido emanan de la vida misma. Cuando un indio del Amazonas dispara una flecha envenenada a un mono que está en la copa de un árbol, intuitivamente está juzgando la trayectoria de un proyectil que podría ser estimada más exactamente a través del análisis y de las leyes del movimiento. Cuando aceleramos el coche, arriesgamos la vida por una estimación precisable por medio del cálculo.

En la actualidad apenas existe actividad humana o proceso del pensamiento que los matemáticos no hayan intentado reducir a sus elementos esenciales. Como resultado de esto, las matemáticas han seguido desarrollándose. Sus grandes obras son revisadas continuamente y puestas en términos más simétricos, generales y precisos. Esta revisión sin fin ha contribuido a evitar que las matemáticas, incluso después de unos 6.000 años de desarrollo, llegaran a ser voluminosas y dispersas. Hasta hace un siglo, un matemático dotado podía confiar en dominarlas con bastante detalle; incluso en la actualidad, un estudiante puede obtener una visión de conjunto bastante representativa, a fin de elegir una especialidad.

Inevitablemente el lenguaje de las matemáticas ha pasado a ser mucho más útil y difícil que cualquiera de las lenguas habladas. Los niños tienen una mayor oportunidad que los adultos para familiarizarse con él. Más de un padre puede mirar desdeñosamente a su hijo que está en la escuela elemental y que está familiarizado con parte de la terminología e ideas de la lógica simbólica, pero el hecho es que básicamente los nuevos conceptos de las matemáticas superiores son a menudo mucho menos difíciles que las ideas del último curso de aritmética elemental. Un grupo de matemáticos franceses que trabajan bajo el pseudónimo colectivo de «Nicholas Bourbaki» demostraron este punto hace algunos años cuando emprendieron una descripción enciclopédica de todas las matemáticas y encontraron que habían dedicado 200 páginas para el concepto, aparentemente inocente, del número «uno».

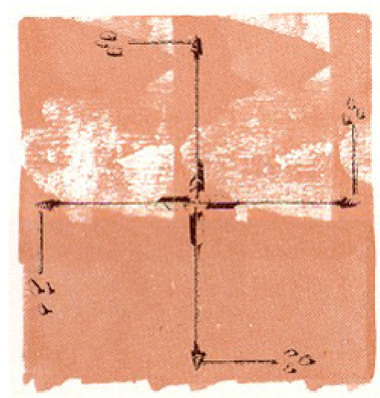
Mientras que ambas técnicas pedagógicas y de solución de problemas pueden a menudo simplificarse, los fundamentos abstractos nunca pueden ser expresados en forma fácil. Hace unos 2.300 años, se dice que Ptolomeo I pidió al matemático griego Euclides una explicación rápida de la geometría. La respuesta fue áspera: «No hay en la geometría camino especial para los reyes». La respuesta de Euclides sigue siendo válida. Los profesionales que se han adentrado por este camino, naturalmente, sienten una mezcla de superioridad y de impotencia hacia todos los Ptolomeos preguntones de la actualidad.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\Delta x$$

Afortunadamente, de la misma forma que no es necesario llegar a hablar con fluidez la lengua de un país para apreciar el carácter de su pueblo, tampoco es necesario ser capaz de decir a un matemático -o incluso pronunciarlo correctamente- para poder apreciar las ramas principales de su disciplina, a saber de qué tratan, por qué emocionan y tienen valor, y cómo han llegado a tener existencia.

CONTADOR PRECOLOMBINO
Las cuentas en el Imperio Inca del Perú (siglos XII a XVI las llevaba el denominado «gran tesorero». Utilizando un ábaco con granos de maíz (abajo), trasladaba después sus resultados a una larga cuerda. Los nudos hechos en los cordeles hacían posible tener un registro permanente de los impuestos, los gastos y las estadísticas vitales.

Las matemáticas empezaron con la invención de los números para contar. La necesidad de contar del hombre prehistórico era limitada, como podemos apreciar a través de sus últimos descendientes, los hombres de las tribus supervivientes de la Edad de Piedra en Australia, Nueva Guinea y Brasil.



UN SISTEMA PRIMITIVO DE CONTAR
Esta svástica rudimentaria trazada en el suelo representa el número 21 en la forma que lo «escriben» los pueblos indios del Sudoeste de los Estados Unidos. Cada una de las cuatro flechas en la svástica vale 1. El «místico centro» en donde se encuentran las flechas vale 1. Cuatro flechas, 1 centro místico, 4 palos y 12 guijas igual a 21. Los otros números se construían utilizando guijas, flechas y palos en una diversidad de combinaciones distintas.

Muchos no tienen nombres para los números superiores al dos o al tres. En parte, sin duda alguna, la razón es que viven en pequeños grupos familiares y son pobres en posesiones. Probablemente, también tienen pocas palabras para representar grupos. Algunos son botánicos instintivos que pueden reconocer y nombrar cientos de distintas especies de árboles, pero no tienen una palabra genérica para el árbol mismo. Un jefe indio del Brasil es probable que reaccione con desdén a la pregunta «¿cuántos?» Si se le presiona, normalmente recurre a un brujo -los antropólogos, por cierto, llaman a este hombre un «numerador»- para que invente nombres de números compuestos a partir de 1, 2, 3, y los recite después de cada objeto que el jefe enumere.

Al retirarse los glaciares hace unos 10.000 años, originando un cambio de clima, los hombres que habían sido cazadores nómadas de la Edad de Piedra se reunieron paulatinamente en los valles del Nilo, Tigris y Éufrates y se dedicaron a la agricultura. Inmediatamente el campesino individual afrontó el problema de tener en cuenta los días y las estaciones, de saber cuándo tenía que plantar y la cantidad de grano y semilla que debía guardar, de pagar las deudas sociales llamadas impuestos y dejar una herencia equitativa de tierra a sus hijos. Todos estos incidentes hicieron preciso que se diera nombre a los números y que se elaborara la operación de contar más allá de las nociones de «uno» y «muchos».

4. Los dedos de la mano, los del pie y las antiguas veintenas

Algunas tribus antiguas, según se cree, utilizaban una base de dos para contar: 1, 2, 2-1, 2-2, 2-2-1, etc. Otras utilizaban una base de 3: 1, 2, 3, 3-1, 3-2, 3-3, 3-3-1, etc. A medida que se convertían en campesinos y constructores, las gentes más avanzadas aumentaron su límite básico para contar. Muchos utilizaron sus propios dedos de la mano y del pie como instrumentos de cálculo, contando así hasta 20. Los sistemas de numeración con base 20 están todavía presentes en las palabras francesas de 80 y 90, «quatre-vingt» y «quatre-vingt-dix», que significan «cuatro veintes» y «cuatro veintes y diez», y en la libra inglesa de 20 chelines.

(El tradicional sistema británico, con sus medio penique, penique, tres peniques, seis peniques, chelines, medias coronas, libras y guineas, es un sistema de ½ -1-3-6-12-30-240-252, una mezcla de varios sistemas arcaicos que el Parlamento decidió abandonar en 1967.)

Cualquiera que fuera el sistema que utilizaran para contar, parece ser que los comerciantes de las primeras civilizaciones utilizaron guijas amontonadas en el suelo para representar los números contados. Probablemente de este método derivó el mecanismo de cálculo conocido por ábaco, que todavía se utiliza como un instrumento común en los bazares de Teherán a Hong-Kong. El ábaco puede haber empezado como una especie de pote de póquer en el que una clase determinada de fichas debía representar el 1, otra el 10, otra el 100. Con el tiempo, se desarrollaron distintos tipos de ábaco. Algunos estaban organizados mecánicamente de forma tal que las fichas de uno se deslizaban por una barra, las fichas de 10 por otra, las fichas de cien y de mil en una tercera y una cuarta.

La destreza en el uso de las fichas de cálculo para los cálculos financieros puede haber retrasado la perfección de los números escritos.

EL INSTINTO DE LA GEOMETRÍA
El arte primitivo muestra claramente que los hombres con pocos conocimientos matemáticos pueden tener un sentido innato de la geometría. Los recipientes egipcios, chipriotas y etruscos datan de antes de Cristo. Las máscaras contemporáneas y tejidos hechos por las tribus del Perú y África tienen una forma precisa y audaz.

Y fue a partir del desarrollo de las anotaciones escritas para los números de donde brotaron las ideas de la aritmética y álgebra modernas. Una de las formas más elementales de escribir los números la conservamos en los números romanos I, II, II, IV, V, VI, etc. Básicamente es una técnica según la cual cada número se expresa como la adición o sustracción de unos cuantos símbolos básicos. Utilizamos un sistema similar cuando anotamos los resultados a través de |, ||, |||, ||||.

Se cree que los símbolos escritos, para los números que utilizamos en la actualidad, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, deben su origen a los hindúes. Se idearon para un método de cálculo de base 10, o «decimal», denominado así a partir de la palabra latina décima, que significa diez o diezmo. La forma en que unimos nuestros números parece bastante simple, pero de hecho es el resultado artificioso de siglos de desarrollo, lo que los matemáticos denominan una «notación posicional». En este sistema la posición de cada dígito en una sucesión de números determina su valor. Los números mayores de uno están separados de los números menores (las fracciones) por una coma decimal. A la izquierda de la coma, el primer dígito vale lo que representa; el dígito siguiente vale diez veces su valor representativo; el dígito siguiente cien veces; el siguiente mil veces su valor, y así sucesivamente. A la derecha de la coma, el primer dígito vale 1/10 de su valor; el dígito siguiente, 1/100; el siguiente, 1/1.000, etc.

El número 8.765,4321, por ejemplo, significa:

$$8 \times 1.000 + 7 \times 100 + 6 \times 10 + 5 \times 1 + 4 \times 1/10 + 3 \times 1/100 + 2 \times 1/1.000 + 1/10.000.$$

Finalmente se inventó un sistema abreviado, el denominado «potencial», o «exponencial», mediante el cual el número 8.765,4321 puede expresarse también así:

$$8 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 1 \times 10^{-4}.$$

En el caso de 10^3 el número 3 indica la «potencia» y es otra forma de escribir 10 x 10 x 10, o sea 1.000. De manera parecida, se usan los exponentes negativos para denotar las fracciones decimales; así:

$$10^{-3} = 1/10^3 = 1/1.000.$$

Dentro de este sistema de potencias se plantea algunas veces la cuestión del significado de 10^0 ó 10 elevado a cero. De nuestra sucesión de cifras, 8.765,4321, resulta obvio que 10^0 se encuentra entre 10^1 y 10^{-1} o entre 10 y 1/10 y, por lo tanto, 10^0 se define arbitrariamente que es igual a uno. Esta simetría de los exponentes se extiende a otros números y, excepto el cero, todo número elevado a la potencia cero se define como igual a 1.

El sistema para contar que se utiliza en la actualidad -el sistema de notación posicional decimal, para designarlo con su nombre completo utiliza una base de 10. Pero en modo alguno está justificado que no escribamos en su lugar números con una base de 12 ó 20. Durante más de la mitad del transcurso de la civilización los científicos del mundo occidental escribieron sus fracciones por un sistema de notación posicional en una base diferente. Era un sistema «sexagesimal», sorprendentemente artificioso, de los antiguos mesopotámicos, a base del número 60.

A pesar que 60 es un número extraordinariamente grande para utilizarlo como la base de un sistema de notación, todavía lo utilizamos diariamente en nuestra división de la hora en 60 minutos, del minuto en 60 segundos, y en la del círculo en 6 veces 60°. Si un oficial de la marina dice a sus hombres que sincronicen sus relojes a las 5:07:09, saben que quiere decir nueve segundos y siete minutos después de las 5 en punto. Pocos serían capaces de descifrar el número antiguo de base 60, 579, por el que los mesopotámicos querían decir:

$$5 \text{ X } 60^2 + 7 \text{ X } 60^1 + 9 \text{ X } 60°;$$

pero si pudieran llegarían al número actual 18.429. Y esto es lo que 5:07:09 significa: exactamente 18.429 segundos después de medianoche.

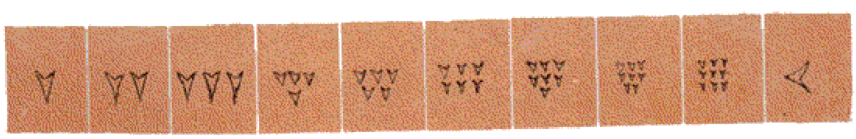
El sistema de base 60 tenía un importante inconveniente derivado de su amplia base. Para representar cada número desde cero hasta 59, los mesopotámicos tuvieron que hacer frente a la situación de tener que idear 59 símbolos separados. Nadie, ni siquiera los amantes de los números, sumerios y babilonios, quienes habitaron en Mesopotamia a continuación, quisieron jamás aprender de memoria los 59 números. Para superar esta dificultad, los antiguos utilizaron combinaciones de dos símbolos cuneiformes, uno que representa al número 1, el otro que representa el número 10.

5. El esplendoroso 60

Con su única desventaja, el sistema de base 60 también tenía ciertas virtudes. El número 60 es divisible por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60, mientras que 10 sólo es divisible por 1, 2, 5 y 10. Esto significa que los problemas de aritmética resueltos por el sistema 60 dieron resultados exactos con más frecuencia que el sistema de base 10. Lo que tal vez fue más importante para los mesopotámicos, que eran ávidos astrónomos, es que las base 60 encajaba bien con su división del año en 360 días.

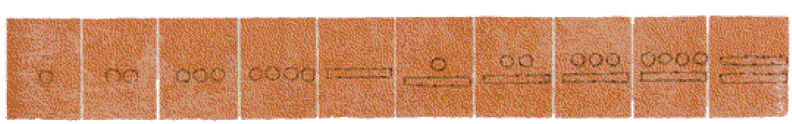
CÓMO EVOLUCIONARON LOS NÚMEROS. Los signos numéricos familiares de la actualidad derivan de la escritura hindú y de los numerales arábigos de la España musulmana, con posteriores refinamientos europeos. El punto redondo al final de ciertas columnas representa el símbolo del cero, cuya importancia reconocieron los árabes en una frase mordaz: «Cuando [al restar] no quede nada, escríbase el pequeño círculo de forma que el lugar no quede vacío».

El sistema 60 se originó con anterioridad al año 1700 a. de C. Las tablas cuneiformes de esa época muestran que por entonces ya era utilizado para las grandes hazañas del cálculo por parte de los matemáticos del reino de Hammurabi, rey-intelectual de Babilonia. Pero por aquel entonces no tenían ningún símbolo para el cero. Para indicar una posición vacía en una sucesión de números, dejaban un hueco. Pero como a menudo se olvidaban de hacerlo, a veces los números resultaban ambiguos.



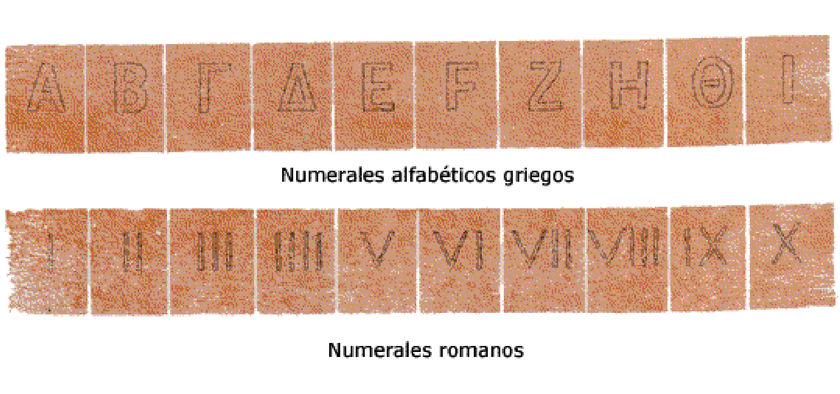
Numerales cuneiformes babilonios

Numerales hieráticos egipcios



Numerales mayas

Numerales chinos modernos



SEIS FORMAS DE ESCRIBIR DEL 1 AL 10
La mayoría de las notaciones antiguas muestran la influencia de las primeras incisiones practicadas por el hombre. Los babilonios usaron el estilete sobre barro; la hierática egipcia, la pluma sobre el papiro; los mayas, palos y guijas; los chinos, la pluma sobre papel. Los signos numéricos griegos se formaron a partir de las letras de su alfabeto. Los signos numéricos romanos, se cree que derivaron del contar con los dedos.

Alrededor del año 300 a. de C., la era del siguiente grupo importante de tablas cuneiformes que han descubierto los arqueólogos, había aparecido un símbolo para el cero, una señal algo parecida a una W con los extremos elevados.
Durante este período los persas gobernaban Mesopotamia, y el sistema 60 mostraba un considerable desarrollo sobre su forma original. La naturaleza prodigiosa de lo que se había logrado puede estimarse echando un vistazo a una secuencia de cifras del sistema 60 de sólo cuatro lugares. Si, por ejemplo, los persas deseaban expresar el número cinco millones once mil ciento sesenta y siete, lo hacían así: 23,11,59,27 que significa

$$23 \times 60^3 + 11 \times 60^2 + 59 \times 60^1 + 27 \times 60^0$$
$$(4.968.000 + 39.600 + 3.540 + 27 = 5.011.167).$$

El sistema 60 sobrevivió a los mesopotámicos quienes lo adoptaron debido a que su notación posicional continuó, durante siglos, siendo la única existente. Los astrónomos griegos lo utilizaron para registrar, en forma posicional, las fracciones que resultaban de la representación del firmamento. Los griegos y los hindúes

también utilizaron el sistema 10, pero sólo para simples operaciones de contar. Las letras del alfabeto griego e hindú sirvieron de símbolos para los números decimales.
Después, probablemente alrededor del año 500, algún hindú ideó una notación posicional para el sistema decimal. Los hindúes abandonaron los ya innecesarios símbolos escritos que habían utilizado para los números mayores de 9 y estandarizaron los símbolos de los nueve primeros. Aunque modernizados posteriormente, estos nueve símbolos constituyen lo que hoy conocemos por números del uno al nueve. El signo para el cero no se obtuvo hasta que se desarrolló la notación posicional.
El primer gran popularizador de esta notación fue un matemático árabe, al-Khowarizmi de Bagdad, quien alrededor del año 825 escribió un libro sobre los números indios en el que recomendaba la nueva técnica a los matemáticos y comerciantes del resto del mundo. Los nuevos números tardaron dos siglos en llegar a España, donde fueron reconstituidos en una escritura moderna reconocible a la que se conoce por guarismos de Ghobar, denominados así, según se cree, debido a la palabra árabe «polvo», o arena, ya que ocasionalmente se utilizaba una especie de caja de arena para contar. A finales del siglo XIII el gobierno de la ciudad de Florencia estaba dictando leyes contra el uso de los primeros guarismos decimales a fin de proteger a los honrados ciudadanos de las fáciles alteraciones, que los falsificadores de billetes de Banco, por ejemplo, podían realizar en los números 0, 6 y 9. Por la misma época la nueva técnica para escribir números llegó a Inglaterra con el *Crafte of Nombrynge*.

6. El triunfo de la base decimal

El sistema de notación posicional de base 10 se impuso finalmente sobre los anteriores sistemas debido a que los comerciantes europeos lo adoptaron. Es muy probable que los expertos árabe-indios de los despachos de las empresas navieras más importantes de Génova y Hamburgo encontrasen que podían hacer las cuentas más rápidamente que los colegas que se especializaban, por ejemplo, en los números romanos. En el entusiasmo de los hombres de negocios no participaron inicialmente los científicos y eruditos. Los círculos cultos continuaron apoyándose en el viejo sistema de base 60.

Nuestro propio sistema para designar las fracciones decimales -$0,23 para 23/100 de un dólar, ó 0,365 para el promedio de «battings» de un jugador de base-ball- hemos de agradecerlo a ciertos pensadores, tanto de Asia como de Europa. Uno de éstos fue al-Kashi, que en el siglo XV era director del Observatorio Astronómico de Samarcanda, fundado por Ulugh Beg, nieto de Tamerlán el Conquistador. Al-Kashi fue uno de los primeros matemáticos en darse cuenta que los exponentes podían utilizarse en el sistema de base 10 así como en el de base 60. Un alemán del siglo XVI, Cristoff Rudolff, elaboró una explicación aclaratoria más avanzada. Después un belga, Simon Stevin, presentó el primer tratamiento sistemático de las nuevas fracciones decimales en una obra orientadora denominada La Disme («El arte de los Dieces»). El punto decimal en la forma en que lo conocemos apareció por primera vez en 1617 en el libro de un escocés, John Napier.

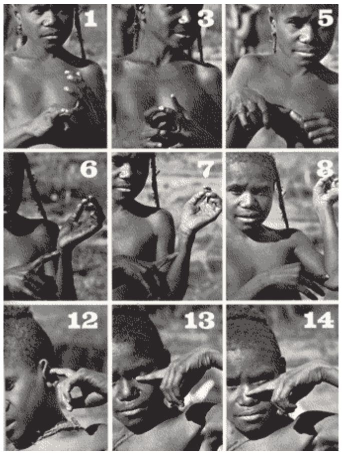
Incluso hoy en día, con todos nuestros conocimientos, sería temerario pensar que ya hemos solucionado nuestro sistema de cálculo. Hay algunos ateos inconvertibles, que no son de carne y hueso: los «robots» o máquinas de cálculo. Estas criaturas del genio humano funcionan por medio de interruptores eléctricos que pueden estar o bien «cerrados» o «abiertos». Como resultado de esto sólo pueden contar dos números: «1 al estar abierto y 0 al estar cerrado». Por lo tanto, cada vez más el hombre moderno se apoya en un sistema de aritmética de base 2 o binario.

Irónicamente, en el momento en que oigamos el primer «Bip, bip-bip, bip-bip-bip» desde un planeta, puede que retrocedamos a la simplicidad de un aborigen, pero podremos añadir la comprensión de un Einstein.

7. Ensayo Gráfico

El cálculo: desde los dedos hasta los cerebros hechos por el hombre

La operación de contar es un proceso intrincado; de todos los seres de la tierra sólo el hombre puede hacerlo.



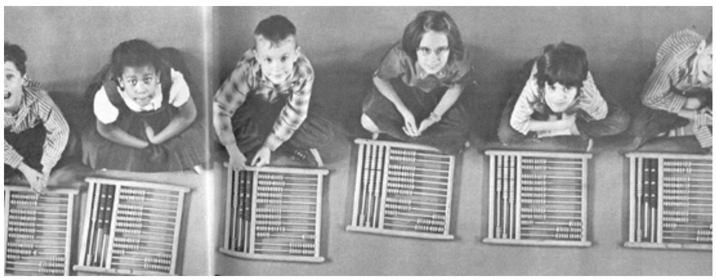
EL CALCULO PRIMITIVO
Usando los dedos y otras partes del cuerpo, un niño de la tribu Sibiller, Nueva Guinea, cuenta hasta 27. Utiliza su índice derecho para señalar los dedos de la mano izquierda (1-5), después su muñeca izquierda, antebrazo, bíceps, clavícula, hombro, oreja y ojo (6-13). La nariz es el 14. Señalando con su índice izquierdo, desciende del ojo hasta el meñique para los números 15 al 27.

Los primeros hombres probablemente formaron números con sus dedos, como todavía lo hacen algunos pueblos primitivos. A medida que la sociedad iba evolucionando, el hombre tuvo que hacer cálculos bastante complicados que comprendían resta, multiplicación y división, y los medios de que se valió progresaron más.

EL ÁBACO EN EL ORIENTE
Un japonés calcula por medio de fichas. El ábaco todavía es el computador más corriente en Asia. Algunos calculan más aprisa que los oficinistas con máquinas de sumar.

EL ÁBACO EN LA VIEJA EUROPA
A través de la mayor parte de la historia de Europa, aparece el ábaco. Un antiguo grabado representa a Boecio y a Pitágoras calculando con signos numéricos escritos y con el ábaco.

En la época de los antiguos griegos ya se utilizaban los calculadores mecánicos, y en los 2.000 años transcurridos desde entonces se ha desarrollado una colección de máquinas de cálculo cada vez más complicadas. La culminación fue el computador electrónico, ese maravilloso «cerebro» que puede resolver problemas matemáticos en una fracción de segundo. En realidad, puede haber algo de verdad en la exuberante afirmación del gran matemático-filósofo Augusto Comte: «No hay investigación que no sea finalmente reducible a un problema de números».



EL ÁBACO EN LA ESCUELA

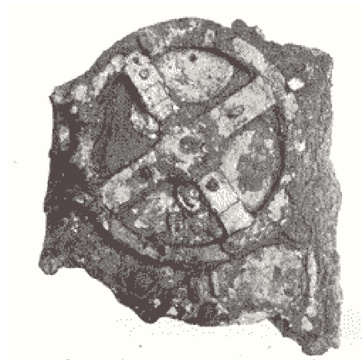
Utilizan el «Abacounter» los alumnos de segundo grado en Columbus, Ohio. Las doce barras horizontales son para las unidades, y las tres verticales para los múltiplos decimales.

UN COMPUTADOR QUE HA RESISTIDO LA PRUEBA DEL TIEMPO

El ábaco (arriba) es una de aquellas raras invenciones que se transmiten de civilización en civilización. Puede ser que sucediera hace unos 5.000 años, en la antigua Babilonia, que el hombre descubrió por primera vez que si marcaba las cifras en un tablón cubierto de polvo podía contar más rápidamente que con los dedos. Este "tablón de polvo" se transformó en el "ábaco calculador" en el que se hicieron unas ranuras en el tablón y los pequeños discos que representaban los signos numéricos eran movidos a lo largo de las ranuras. Los chinos son probablemente los responsables del refinamiento que el ábaco tiene en la actualidad.

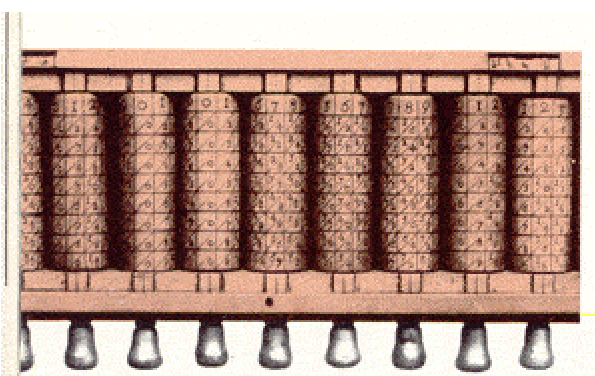
8. Maravillas mecánicas para acelerar el trabajo de cálculo

En 1900, los pescadores de esponjas griegos descubrieron el mecanismo corroído que había permanecido en el fondo del mar Egeo durante 2.000 años. La mayoría de los historiadores modernos quedaron sorprendidos al averiguar que este mecanismo provenía de un complejo computador con engranajes.

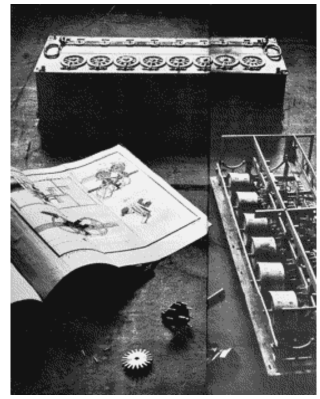


Parte de un antiguo computador

Los museos de computadores que posee la Humanidad están repletos de estos extraños ingenios. Varían desde el tamaño de un bolsillo de chaleco, como los Rodillos de Napier, al tamaño de una habitación, como el analizador diferencial y reflejan la necesidad de máquinas cada vez más perfeccionadas para facilitar los cálculos.

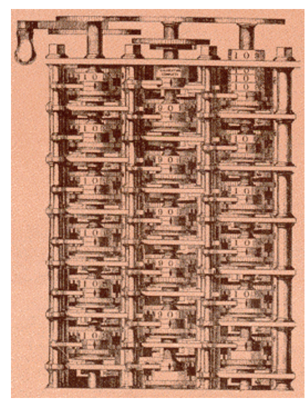


«LOS RODILLOS DE NAPIER»
El descubrimiento tan simple y barato de John Napier para multiplicar, conocido por «los rodillos de Napier», fue popular en la Europa del siglo XVII. Cada uno de sus círculos (arriba) contenía los dígitos del 1 al 9, con sus múltiplos en columnas debajo de ellos. La multiplicación se hacía al hacer girar los círculos en una forma determinada.

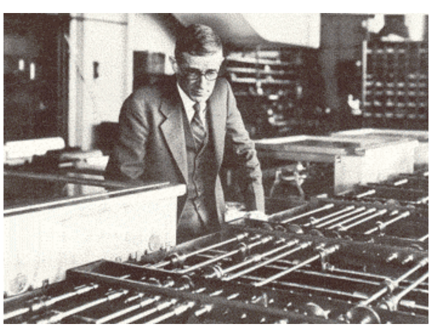


LA MAQUINA SUMADORA DE PASCAL
En 1642 el filósofo francés Blaise Pascal inventó la fantástica máquina para sumar y restar. Sus cilindros y sus engranajes (primer término) estaban encerrados en una pequeña caja (parte posterior). Las ruedas de la parte superior de esta caja correspondían a las unidades, decenas, centenas, etc. Cada rueda registraba de 0 a 9.

ADELANTADO A SU ÉPOCA
Charles Babbage, inventor inglés del siglo XIX, ideó su Máquina de Diferencias para calcular e imprimir tablas matemáticas. Fracasó debido a que sus piezas no pudieron mecanizarse.



EL MULTIPLICADOR DE BABBAGE
El elemento de cálculo (parte de éste se muestra en la figura) de la complicada máquina de Babbage para multiplicar, estaba formado por una serie de ruedas dentadas girando sobre ejes.



EL FINAL DE UNA ÉPOCA
El analizador diferencial que se muestra aquí junto con su inventor, el doctor Vannevar Bush, es un gigantesco computador moderno construido en 1930 en el MIT, para resolver ecuaciones diferenciales. Un modelo posterior, transición a la era de la electrónica, reemplazó muchos de los engranajes y de los ejes que se ven por interruptores eléctricos.

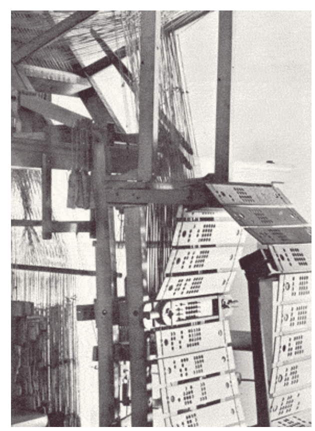
9. El maravilloso lenguaje del "sí o no" de las fichas perforadas

La ficha perforada, emblema de la época de los computadores electrónicos, fue inventada hace casi 250 años, al ser utilizada en un telar para acelerar el tejido de tela con dibujos. Pero las fichas perforadas realmente empezaron a tener importancia en 1890, cuando se utilizaron en un computador mecánico para poder manejar las cifras del censo de los Estados Unidos.

Hoy, la ficha perforada es un instrumento tradicional del computador electrónico. Los datos se registran en las fichas agujereándolas en lugares específicos. Estos agujeros son "leídos" por los computadores casi de la misma forma que el telar sigue a su plantilla de tejedura: la corriente eléctrica del computador atraviesa o no la ficha en determinado lugar, lo cual depende de si hay allí un agujero.

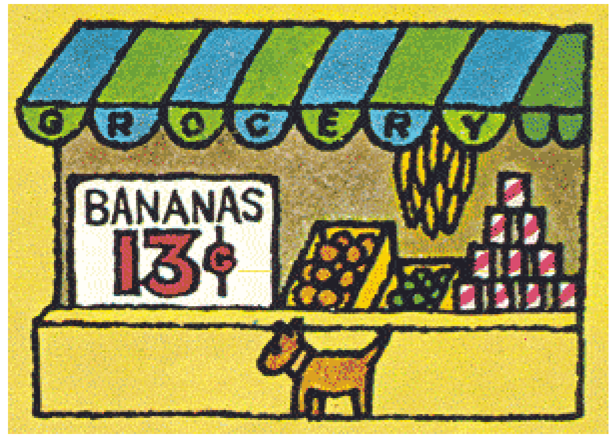
Puesto que el computador se limita a esta respuesta de si ha penetrado o no, los números que se introduzcan en él deben ser perforados en las fichas. Se han ideado códigos para las fichas perforadas incluyendo el código binario básico que funciona sobre el sistema de números binarios que se explica a continuación. Los números binarios están representados en las fichas por agujeros y espacios.

TEJIENDO CON FICHAS
En 1728 un ingeniero francés inventó este telar automático. Una cadena sin fin de fichas perforadas fue preparada para que girara pasando por las agujas del telar. Sólo las agujas que coinciden con los agujeros pueden penetrar y sus hilos forman el diseño.



LA PERFORACIÓN A MÁQUINA
En 1890 Herman Hollerith, un ingeniero americano, había perfeccionado la primera máquina de preparación de datos para utilizar fichas perforadas. Los agujeros tenían que taladrarse uno a uno, pero en 1916 se patentó un invento para solucionar el problema.

EL SISTEMA DECIMAL PARA CONTAR El conocido sistema decimal para contar necesita solamente 10 símbolos, 0 y los dígitos 1 al 9, para escribir cualquier número por grande que sea. Todos los números en este sistema son construidos a base de bloques valorados en 1,10 y potencias de 10 (tales como 100, que equivale a 10 x 10; 1.000, que equivale a 10 x 10 x 10; etc.). Como puede observarse en la tabla situada debajo de los bloques, para construir el número 3 son necesarios tres bloques de uno. Para construir el número 13, del corte de la ventana de la tienda de comestibles del grabado, se requiere un bloque de 10 y tres bloques de 1; 49 requiere cuatro dieces y nueve unos. Todo número decimal es un resumen de los bloques que se requieren para construirlo.



100	10	1	
		3	3
	1	3	13
	4	9	49
1	2	5	125

64	32	16	8	4	2	1	
					1	1	3
			1	1	0	1	13
	1	1	0	0	0	1	49
1	1	1	1	1	0	1	125

EL SISTEMA BINARIO PARA CONTAR

El sistema binario utiliza bloques que valen 1, 2 y potencias de 2 (tales como 4, que es 2 x 2; 8, que es 2 x 2 x 2; etc.). Construir el número 3 con bloques binarios requiere un bloque 1 y un bloque 2, por lo tanto se escribe 11. Escribir el 13 en forma binaria para la tienda de comestibles requiere un bloque 8, un bloque 4, ningún bloque 2 y un bloque 1, escribiéndose así 1101. El número 49 precisa un 32, un 16, cero 8, cero 4, cero 2 y un 1, se escribe 110001. En el lenguaje del sí-o-no de los computadores electrónicos, cuando el sistema binario escribe 100 como 1100 100, realmente dice: «Un bloque de 64, sí; bloque de 32, sí; bloque de 16, no; bloque de 8, no; bloque de 4, sí; bloque de 1, no».

10. Computadores: Máquinas universales para la era electrónica

En 1946, el primer computador electrónico, el ENIAC de la Universidad de Pensilvania, hizo 1500 sumas en tres décimas de segundo. Pero lo que era velocidad de relámpago en el decenio de 1940, resulta lento en el de 1970, cuando algunos computadores podrían hacer cinco millones de sumas en ese mismo tiempo. El secreto radica en la electricidad que, a diferencia de los lentos engranes y palancas de los computadores mecánicos, pasa por microcircuitos de transistores casi a la velocidad de la luz. En los computadores digitales como el ENIAC o los del sistema 370 de la IBM, la información se transforma en códigos eléctricos. El código emplea el sistema binario, cuya notación de "unos" y "ceros" simulan el apagar y encender la corriente eléctrica.

Los computadores no sólo son notables por la rapidez con que hacen operaciones sencillas: también pueden realizar varias tareas en el mismo instante. Trabajando en terminales distantes, diferentes operadores pueden introducir información en la unidad de memoria o recibirla por líneas telefónicas arrendadas, mientras otros pueden resolver complicados problemas con el mismo computador.

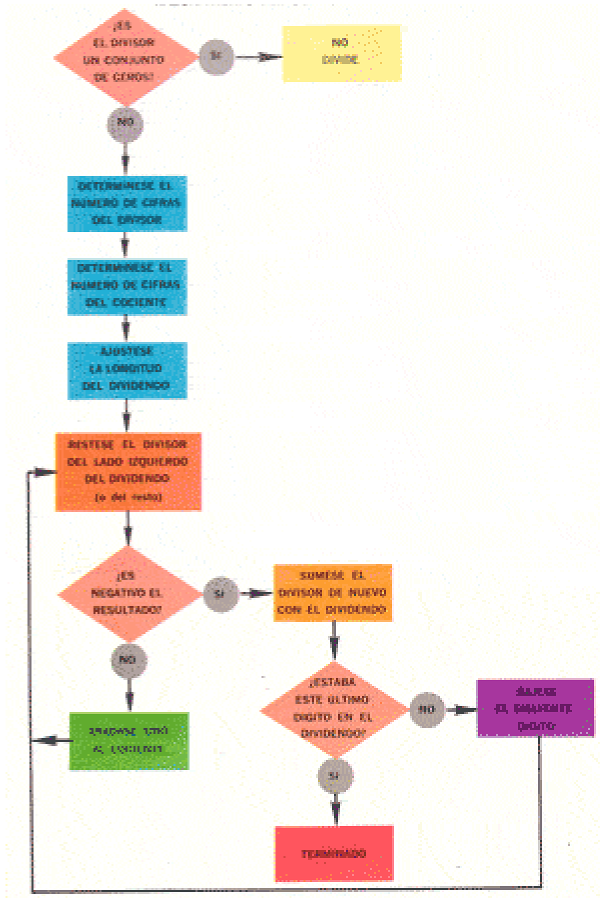
Pero, aunque parezca sobrehumano, un computador no hace nada que no pudiera hacer un hombre, si tuviese tiempo. Todavía los seres humanos deben preparar los problemas antes que el computador pueda aplicar sus "procesos de pensamiento", descritos en las páginas siguientes.

SOLUCIONES TODO EL DIA
En la sala de computadores del Centro de Sistematización de Datos del Condado de Nassau, Nueva York, un operador (derecha, primer término) da instrucciones a uno de los dos computadores del centro. La información se introduce por medio de lectores de fichas perforadas (izquierda, primer término) y conductores de cinta, como el de la izquierda, que atiende un empleado (camisa púrpura). Los datos se almacenan en datos o cintas de los muebles blancos (derecha). Las soluciones del computador aparecen en impresores como el del centro, a la izquierda, atendido por un ayudante (camisa amarilla). En otros puntos del condado hay otros terminales de entrada y salida. Para aprovechar toda su capacidad, la sala de computadores funciona las 24 horas del día, durante todo el año.

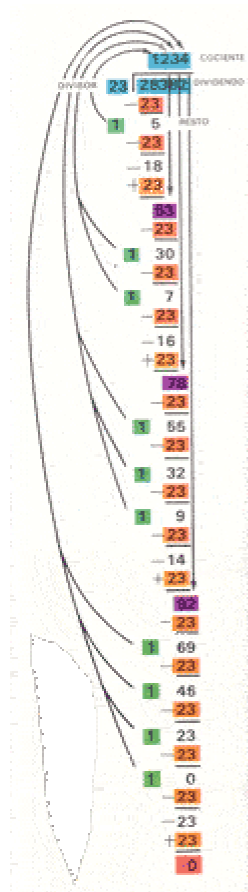
11. En un computador: división por medio de la sustracción

Un computador al que se le ordena que divida 28.382 por 23 tiene que seguir un camino de razonamiento que se le ha programado para realizar las operaciones aritméticas necesarias.

Para seguir el procedimiento se deben leer juntas las columnas de razonamiento y de operaciones aritméticas, paso a paso, haciendo coincidir los colores. Las operaciones aritméticas consisten en restar repetidamente el divisor, 23, del dividendo, 28.382. Estas restas se muestran a la derecha en forma de pequeños cuadros de color naranja. Cada vez que puede hacerse satisfactoriamente una sustracción, la máquina agrega un 1 (cuadros verdes) al cociente. Cuando ocurre que no es posible la resta, se borra y se agrega un nuevo 23 al resto negativo (cuadros naranja pálido), se registran en el cociente las unidades acumuladas y se inicia una nueva secuencia. Se baja un nuevo número del dividendo y se añade al resto; empieza de nuevo la resta. (Adviértase que las unidades que resultan de esta nueva secuencia se agregan al cociente un lugar más a la derecha.) Cuando se han bajado todos los números del dividendo y se han anotado todas las restas que han podido realizarse, el problema se ha terminado.



Razonamiento del computador

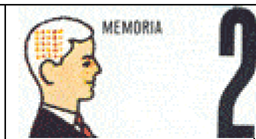
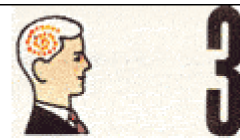
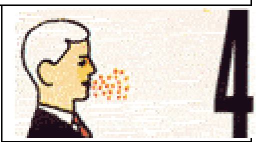
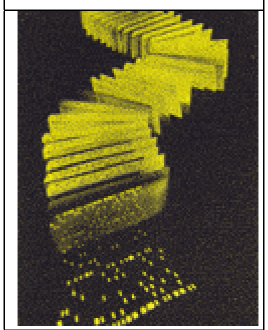
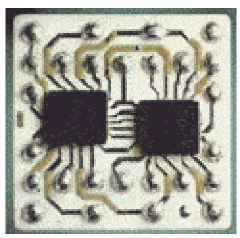
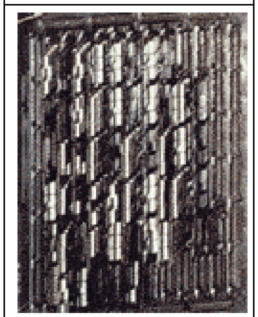
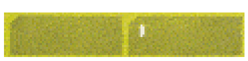
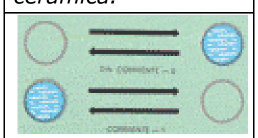
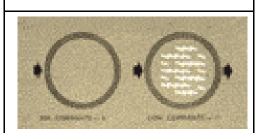


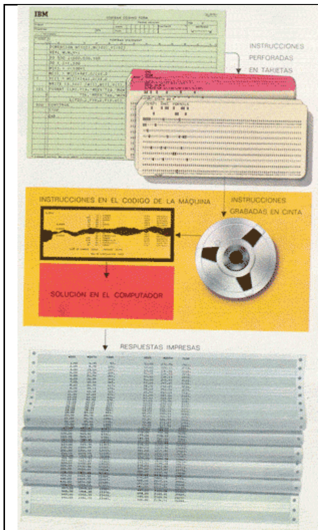
Operaciones del computador

12. Instrucciones detalladas para guiar a un cerebro complejo

Todo problema que soluciona un computador debe primero ser descompuesto por un programador humano en pasos sencillos que pueda resolver la máquina con su lenguaje de sí o no. El programador escribe el problema en las palabras, numerales y símbolos del "lenguaje" del computador. Pero éste no puede aceptar -y menos resolver- el problema en esta forma. Se le puede representar con agujeros perforados en una ficha. La presencia o ausencia de un agujero indica la información: código Binario. Se transfiere el de las fichas a una cinta magnética, que indica la información mediante la presencia o ausencia de áreas magnetizadas, y la almacena para uso futuro. En los nuevos sistemas se puede prescindir de las fichas e introducir directamente la información en la cinta.

Antes de que pueda empezar el cálculo final, se necesita otra traducción. El computador tiene que convertir las instrucciones de la cinta magnética en su propio lenguaje especializado. Es una tarea puramente mecánica, para la que cada computador se ha programado una vez por todas. A la derecha, partes de la serie de instrucciones necesarias para resolver un problema. A la izquierda se diagrama simbólicamente cómo se realiza un proceso elemental en ese procedimiento: la división. Cada paso debe indicarse en detalle; se supone que cuando el divisor es cero no puede haber división, pero el computador no da nada por supuesto.

<table>
<tr><th colspan="4">Las cuatro fases del "pensar" de un computador</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Al igual que el cerebro humano, al computador se le han de dar el problema y la información que necesita para solucionarlo. A esto se llama «alimentación».</td>
<td>Toda la información que un computador necesita para solucionar un problema y la forma de utilizar la información se almacena en las unidades de memoria.</td>
<td>El computador soluciona el problema. En forma distinta al cerebro humano, actúa por repetición, con la lógica suministrada por un programador humano.</td>
<td>La voz del computador, su resultado, da las respuestas en varias formas: fichas perforadas, cintas perforadas, cinta magnética, hojas escritas a máquina.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Las fichas perforadas son un medio muy común de proporcionar información al computador. Una ficha puede contener, en forma de código, 96 informes o más.</td>
<td>La memoria está formada por 10.000 módulos con circuitos transistorizados, encajados en delgados discos de silicio, montados en un azulejo de cerámica.</td>
<td>La unidad de elaboración, como la memoria, consiste en tableros de circuitos que contienen módulos interconectados. Los tableros están en marcos metálicos.</td>
<td>Impresores rápidos, activados por los mensajes del computador, escriben hasta 300.000 caracteres por minuto, que son el equivalente de unas 2.000 líneas.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Una ficha utilizando el código binario registro el 1 si la corriente penetra en un agujero, el 0 si no lo hay.</td>
<td>En los discos, la información se almacena por transistores pareados que regulan la corriente eléctrica.</td>
<td>Los transistores de la unidad de elaboración reciben y despachan rápidamente la notación binaria.</td>
<td>Una sección de la hoja impresa da los resultados, en este caso datos en clave para la previsión del tiempo.</td>
</tr>
</table>

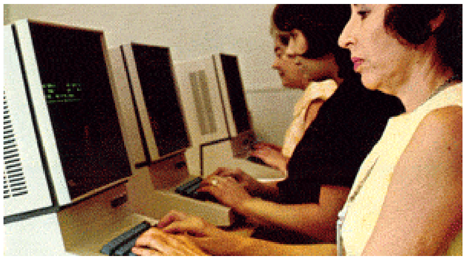


LA RUTA DE UN PROBLEMA
En el problema representado aquí, se pidió al computador que hiciera una tarea de rutina: calcular los salarios mensuales y anuales con los salarios semanales. El programador escribió primero el problema en el lenguaje algebraico apropiado (llamado Fortran) y lo mecanografió en una hoja de código. Luego se perforaron las instrucciones en las tarjetas, se pusieron en el computador y se registraron en cinta magnética. El computador tradujo la versión de las tarjetas perforadas a su propio lenguaje, hizo los cálculos necesarios y finalmente dio las soluciones en hojas escritas en máquina.

13. Un computador común para acelerar la tarea de una comunidad

Ante la pasmosa tarea de dar todos los servicios que exige la sociedad moderna, los órganos de la comunidad y del gobierno recurren cada día más a los computadores. Como las nuevas máquinas pueden servir a muchos amos a la vez, ha resultado más eficaz y económico compartir un computador o centro de sistematización de datos, unido a terminales remotos mediante líneas telefónicas.

Uno de esos centros es el del condado de Nassau, en los suburbios de Nueva York, que tiene una población de 1,4 millones de habitantes, un presupuesto de 600 millones de dólares y los problemas propios de una urbe. Dos computadores del Sistema 370 de la IBM en Mineola, Long Island, sirven a más de 30 departamentos diferentes con más de 2200 programas distintos. De ellos, 15 o más pueden usar las máquinas al mismo tiempo, examinando pagos de impuestos, pagos de seguridad social, resolviendo problemas de ingeniería de caminos, tabulando los resultados de las elecciones. Aquí vemos cómo usan sus terminales algunos de los principales departamentos: la policía, los tribunales, el hospital y el colegio de la comunidad.



MODERNIZACIÓN DE LOS TRIBUNALES
Los empleados que manejan las terminales del Palacio de Tribunales del Condado introducen los datos sobre los acusados. La información, almacenada en discos magnéticos en la sala de computadores del condado, ayudará a hacer más expeditos los procesos.

INVESTIGANDO A UN SOSPECHOSO
En la jefatura de policía del condado, un patrullero interroga al computador central acerca de una persona buscada por las autoridades, escribiendo el nombre del sospechoso en una terminal. La respuesta aparece a la vez en la pantalla y la hoja impresa.

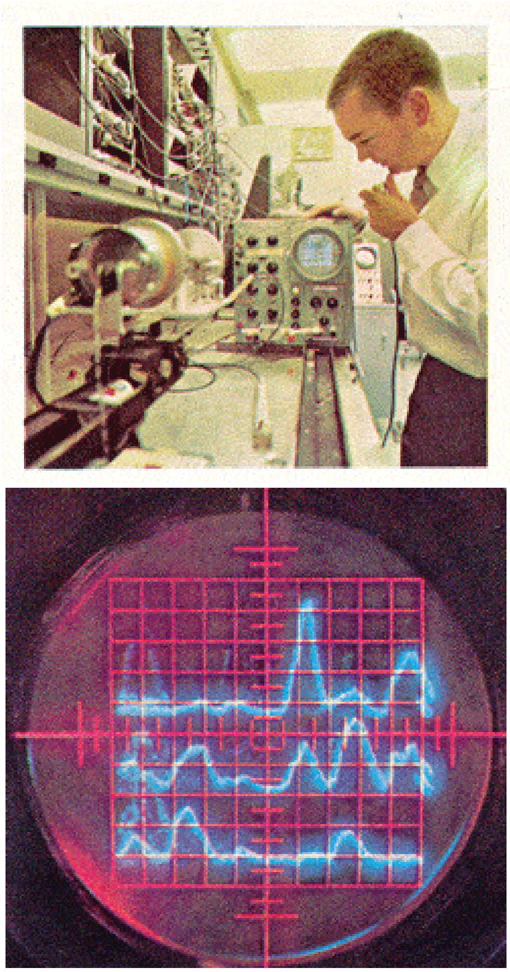
EL CONTROL DE LOS PACIENTES
La información sobre los pacientes -nombre, edad, estado, fecha de entrada y salida se escribe en una terminal del Centro Médico del Condado de Nassau. Los médicos del hospital usan esta información.

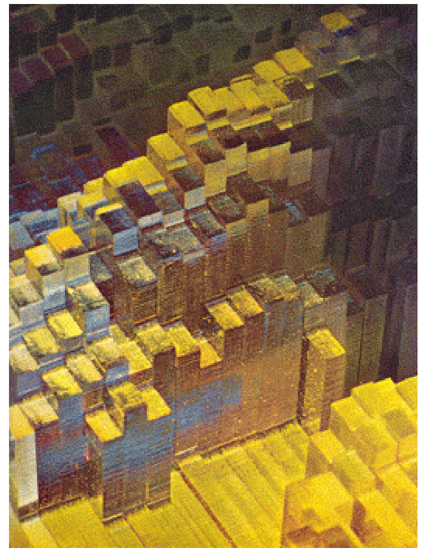
APRENDIZAJE DE UN PROGRAMADOR
Los estudiantes del Colegio de la Comunidad del Condado de Nassau que estudian los computadores, son adiestrados por el computador del condado. Cuando el estudiante introduce programas en una de las terminales, en la pantalla se ven correcciones y explicaciones.

14. Máquinas inteligentes que actúan casi como un ser humano

Los computadores parece que están asumiendo cada vez más y más las funciones humanas. Escriben música, componen poesía, valoran carteras de acciones e incluso juegan al tan intelectual juego del ajedrez. Los expertos están tratando ahora de hacerlos más parecidos a los hombres al entrenarles para que respondan a la voz humana. Un gran obstáculo es que los tipos de sonido que emiten los hombres, son tan distintivos como sus huellas digitales; cuando el computador del futuro "oiga" una palabra hablada tendrá que eliminar sonidos peculiares de la voz y retener solamente la pronunciación fonética. Se expresan temores de que a medida que los computadores adquieran una forma parecida a los seres humanos "las máquinas se apoderarán de todo".

EL REY DEL AJEDREZ
Un computador que juega al ajedrez hace sus movimientos en hojas que llevan impreso un modelo de tablero de ajedrez (izquierda). Los jugadores no deben temer que los eclipsen los computadores. Los programas planean buenos movimientos, pero les falta el talento de la estrategia general, signo del maestro



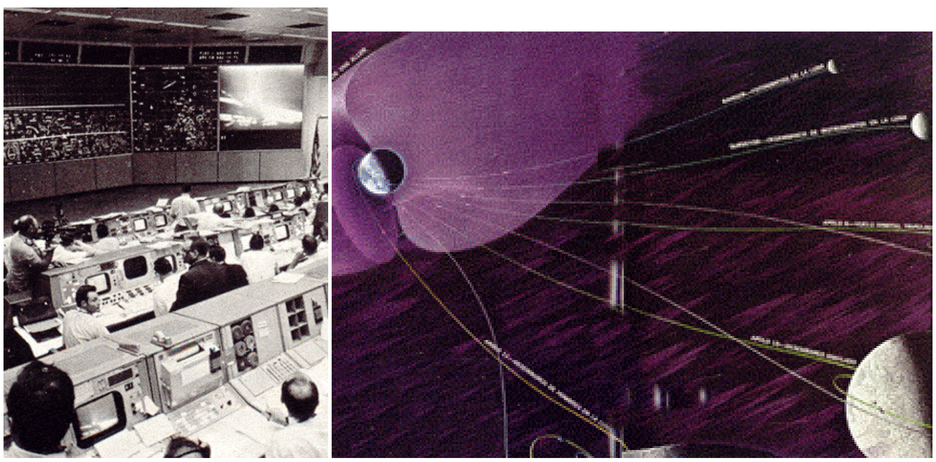


LA CURVA DE UNA FRASE
Un ingeniero de sonido que estudia los problemas de construcción de computadores que actúen al dictado, dice «Estados Unidos» en un micrófono (arriba). Esto crea un modelo único (abajo), en la pantalla de un osciloscopio. Estas ondas estaban en constante movimiento pero en la actualidad las oscilaciones las «materializan» en modelos de palabras.

LA FORMA DE UNA PALABRA
A partir del modelo de una palabra hablada en el osciloscopio, los ingenieros pueden construir un modelo plástico tridimensional es la palabra «cinco»). A los computadores se les puede enseñar a que busquen estos sonidos básicos.

15. El hombre ha ido a la luna y regresado de ella gracias a los computadores

Los problemas matemáticos planteados por un programa para desembarcar hombres en la Luna habrían sido insolubles hace poco más de diez años. El programa americano a la Luna, expuesto aquí en sus cinco etapas, requiere millones de sumas y restas para calcular los efectos de los constantes cambios de gravitación de la Tierra, la Luna y el Sol. El calcular todo esto con lápiz y papel supondría para los seres humanos varios siglos. Los cálculos del vuelo a la Luna se hacen por medio de computadores electrónicos en los centros de la tierra y en las naves espaciales; los computadores calculan las fuerzas que actúan en un cohete dirigido, controlan el vuelo y hacen los ajustes del rumbo. Todo esto es resultado de la mayor rapidez. Lo que empezó llevando al hombre más allá del número 1, lo ha llevado más allá de la Tierra.



SIGUIENDO AL APOLO

Siguiendo a los astronautas del Apolo 11 (pantalla de TV, el computador de control del vuelo analiza los datos que se ven en la pantalla grande.

Capítulo 2
El modélico pensamiento de los antiguos griegos

Contenido:

1. *Introducción*
2. *Una pirámide de demostraciones*
3. *La luna y la cabeza de un alfiler*
4. *Legado para un pianista de jazz*
5. *La diablura de una raíz cuadrada*
6. *El infinito y la tarta de manzana*
7. *Los dones y las limitaciones de Platón*
8. *El caso de las innumerables reses*
9. *El final de una bacanal*
10. *Una cartera: Los grandes maestros de las matemáticas*
11. *Los matemáticos "puros": practicantes de un elegante arte*
12. *Especialistas en aplicar lo abstracto*
13. *Las matemáticas como servidores públicos y como misioneros*
14. *Navegantes trazando rutas al espacio exterior*
15. *Matemáticas anticuadas y la bomba de hidrógeno*

1. Introducción

FORMAS PURAS DE LOS SÓLIDOS
Los griegos fueron los primeros en dedicarse a las matemáticas como arte propiamente dicho. Su invención de las formas puras y abstractas constituye la base de la geometría de Euclides. Al costado hay algunas de estas formas, cuyos nombres derivados del griego utilizamos aún: pirámide, cono, prisma, hexaedro, cilindro y cubo.

Las matemáticas puras, las matemáticas por las matemáticas, sin tener como meta ninguna finalidad práctica- empezaron cuando el hombre pensó por primera vez en los números como tales números, y cuando pensó en las formas como tales formas, prescindiendo de sus características. Pero estas matemáticas puras iniciales no eran de un tipo lógico y sistemático como las que conocemos en la actualidad. Los olvidados genios de Mesopotamia que inventaron el sistema de base 60 apenas se detuvieron a ponderar las conexiones entre sus descubrimientos o a investigar profundamente los procesos de pensamiento por los que llegaron a aquéllos. Las tablas cuneiformes y los rollos de papiros en los que ellos y otros pueblos antiguos anotaban sus resultados matemáticos están tan desprovistos de razonamiento como las recetas de los libros de cocina. Sume esto o reste aquello, dicen, y encontrará la verdad. Un famoso texto egipcio, el Rind Papyrus, se describe a sí mismo como «direcciones para saber todas las cosas dudosas», y son reglas dadas en forma arbitraria.

Cuando los primitivos griegos se trasladaron al sur de la Península Balcánica para invadir, estudiar y finalmente subyugar las civilizaciones del Oriente Medio, pasaron a heredar el saber matemático que se había estado acumulando durante siglos. Los fascinó y los amedrentó, pero también los dejó insatisfechos. ¿Por qué eran ciertas las «direcciones dudosas»? ¿Qué significaban? Con su escepticismo y razón, los griegos, por primera vez, formularon conscientemente los dos procesos mentales vitales para el progreso matemático: la abstracción y la demostración.

La abstracción es el arte de percibir una o varias cualidades comunes en cosas distintas y formar una idea general partiendo de ellas. Abstraemos, por ejemplo, cuando se nos aparecen como edificios las iglesias, los ranchos y los rascacielos; cuando se nos aparecen como círculos las ruedas de carro, los neumáticos de automóvil y los «hula hoops».

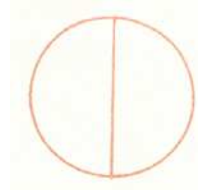
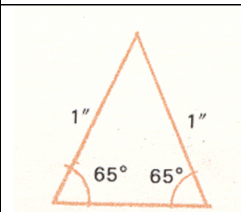
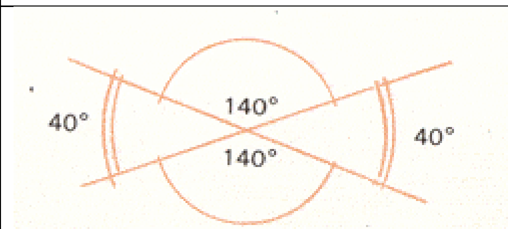
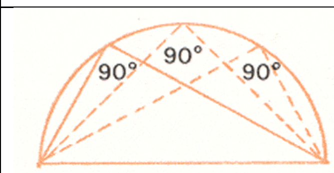
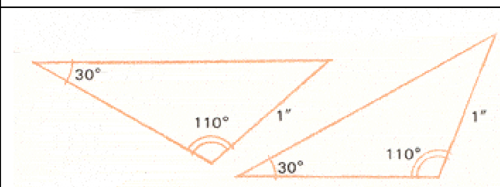
La demostración es el arte de argumentar desde las premisas hasta la conclusión de forma tal que no se pueda encontrar ningún error en ninguna etapa del argumento. Los griegos distinguieron entre dos clases de premisas: las premisas generales, que denominaron axiomas, y las premisas específicas de las matemáticas, a las que denominaron postulados. Pero a fin de poder disponer de premisas para empezar, invocaron otro proceso mental denominado inducción. Mientras la abstracción revela un denominador común en las cosas diferentes -por, ejemplo, los gatos y los perros son animales-, la inducción lo revela en la misma clase de cosas. A partir de nuestra observación de los perros, hacemos la inducción de que todos los perros ladran; o de nuestra observación de la raza Doberman pinscher, inducimos que todos los Doberman pinscher son perros. Utilizando la información de estas dos premisas, podemos, mediante un proceso de razonamiento conocido con el nombre de deducción, probar que todos los Doberman pinscher ladran. Esta conclusión ineludible, o teorema, también puede tener un corolario, una proposición que necesariamente se desprende de ella. Un corolario en este caso sería: El Doberman pinscher de mi vecino ladra. Los griegos idearon todavía otra técnica para obtener una demostración, el método que llamamos en terminología latina *reductio ad absurdum* (reducción al absurdo). A través de este probamos la validez de una premisa al suponer deliberadamente que lo opuesto és cierto y demostrar después que esta premisa opuesta no tiene validez. Supóngase que al señor Smith le dicen que su perro ladra constantemente. Empieza con dos premisas: que todos los perros son animales y que los perros que ladran constantemente no pueden comer ni dormir. De este último grupo de premisas deduce que algún perro no come ni duerme. Esta conclusión, no obstante, es absurda puesto que contradice la anterior que todos los perros deben comer y dormir. Smith entonces examina de nuevo las cuatro premisas. La única de la que puede dudarse es la de que algún perro ladra constantemente. Puesto que le condujo a una conclusión absurda, debe ser falsa, y la opuesta de ésta -que ningún perro ladra constantemente- debe ser cierta.

Como puede verse a partir del viaje mental de Smith, los principios de la demostración griega no son realmente más que una formalización de los procesos de pensamiento que utilizamos cuando tratamos de presentar un argumento en forma ordenada. La forma de razonar de Smith es, naturalmente, mucho menos rigurosa y menos exhaustiva de lo que sería cualquier razonamiento matemático. Pero el matemático, a pesar de que utiliza conceptos no tan palpables como un perro que ladra, sigue utilizando las mismas reglas básicas de la abstracción y la deducción. Abstrae, por ejemplo, cuando reconoce que los números 6, 52 y 200 son divisibles por dos. Utiliza la *reductio ad absurdum* al examinar la premisa, por ejemplo, de que una fracción desconocida -denominada fracción reducida a su mínima expresión. Si prueba algebraicamente que cada una de las incógnitas, numerador y denominador, es un número par, prueba que su premisa es «absurda», ya que una fracción con dos números pares no está reducida a su mínima expresión.

2. Una pirámide de demostraciones

Con anterioridad a los griegos, los matemáticos no esperaban que nadie se interesara en las batallas mentales que habían tenido que librar para alcanzar un resultado: una fórmula, por ejemplo, de la cantidad de piedra que se requiere para construir una pirámide. Los griegos no se contentaron simplemente con comprobar que un resultado era operante. Querían explicar el por qué de un modo lógico y corto.

El escribir la demostración se convirtió en un arte en el que resultaba una cuestión de orgullo ahorrar al máximo las etapas del razonamiento y, aun así, no omitir nada. Los matemáticos griegos acumularon un repertorio de teoremas demostrados, cada uno de los cuales podía utilizarse sin volverlo a demostrar para formular algún teorema más adelantado. Además, todos los teoremas podían colocarse, hilera sobre hilera, en una pirámide invertida de conocimiento en constante expansión. El punto de apoyo de la pirámide podía hacerse coincidir con la experiencia cotidiana a través de unos axiomas evidentes por sí mismos: la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta o dos líneas rectas sólo pueden cortarse una vez.

<table>
<tr><td colspan="2">EL COMIENZO DE LAS MATEMÁTICAS CLÁSICAS
El primer griego que estableció directrices para el desarrollo de la geometría en términos abstractos, independientemente de cualquier aplicación práctica a la que pudiera destinarse, fue Tales. Enunció las cinco proposiciones sencillas de abajo que las generaciones posteriores utilizan como base de las matemáticas clásicas.
Tales fue una prematura personificación de la actual teoría geriátrica que dice que el retirarse de los negocios no es una tontería.</td></tr>
<tr><td>UN CIRCULO DE DOS PARTES IGUALES
Que un círculo es bisectado por un diámetro fue demostrado por Tales, aunque los egipcios también tuvieron conocimiento de ello.</td><td></td></tr>
<tr><td>UN TRIÁNGULO ISÓSCELES
En un triángulo isósceles -un triángulo que tiene dos lados iguales- los dos ángulos opuestos a éstos son iguales.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>INTERSECCIÓN DE LINEAS RECTAS
Al cortarse dos líneas rectas, se obtienen cuatro ángulos. De dichos ángulos, los que son opuestos, son iguales.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>LOS ÁNGULOS EN UN SEMICIRCULO
Todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto. Se dice que Tales sacrificó un toro por haber hecho tal descubrimiento.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>TRIÁNGULOS CONGRUENTES
Dos triángulos son congruentes -es decir, iguales en todo- si tienen iguales un lado y dos ángulos.</td><td>
</td></tr>
</table>

A medida que las matemáticas progresaron, el así denominado nivel de rigor continuó aumentando, como el nivel de agua. Debido a ello, los matemáticos modernos han encontrado supuestos ocultos en alguna de las demostraciones griegas. Incluso han señalado algunas limitaciones en el propio método axiomático. Han tenido que idear otros grupos de axiomas sobre los cuales construir las nuevas ramas de las matemáticas. Pero el sistema fundamental griego de la abstracción y de la demostración permanece intacto. Toda rama de las matemáticas modernas, en todo lo posible, está organizada según este sistema.

3. La luna y la cabeza de un alfiler

El trampolín de la revolución trascendental de los griegos en el pensamiento fue la geometría. Con su propensión artística natural, fueron atraídos instintivamente por la pulcritud y el atractivo visual de esta matemática de los puntos, las líneas, las áreas y los volúmenes. Tanto los babilonios como los egipcios habían utilizado una geometría rudimentaria, ideada para el deslinde de terrenos y la medición de los edificios, simplemente como operaciones de tipo práctico de recuento y medición. Los griegos realizaron un planteamiento mucho más abstracto. Creyeron que una forma en particular tiene ciertas propiedades constantes innatas, que son independientes de su tamaño. Así, un triángulo rectángulo de 45° -que tiene dos lados iguales- puede extenderse hasta la Luna o puede caber en la cabeza de un alfiler, pero en cualquiera de los casos continúa siendo un triángulo rectángulo de 45° (isósceles).

El primero de los griegos en aferrarse a esta posibilidad fundamental para la abstracción en geometría -y vislumbrar el sueño griego según el cual el conocimiento se erigiría en sólidas pirámides invertidas de demostraciones a partir de unos cuantos axiomas elementales- fue probablemente Tales de Mileto, un magnate de la industria del aceite de oliva que operaba a lo largo de las costas del Asia Menor entre los años 600 al 550 a. de c. En sus viajes tomó contacto con el conocimiento de las viejas matemáticas y de la astronomía, y cuando por fin se retiró se dedicó a ellas como diversión. Las cinco proposiciones que se cree que demostró, eran tan simples como para indicar que estaba tratando conscientemente de establecer los fundamentos de la geometría en términos básicos inamovibles.

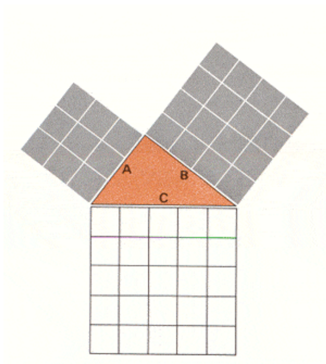
La ambición de Tales no se habría colmado de no haber sido por otro griego quien, según se cree, estudió con él: Pitágoras, un hombre de una personalidad magnética y poderosa. La leyenda dice que a sugerencia de Tales, Pitágoras pasó años viajando, tratando de aumentar sus conocimientos matemáticos. Entre las fuentes que se dice buscó se hallaban los sacerdotes de Zoroastro, quienes pasaron a custodiar el conocimiento matemático bajo el imperio persa. Después, una vez hubo aprendido todo cuanto pudo, Pitágoras, alrededor del año 540 a. de c., fundó una secta semirreligiosa, semimatemática, en Crotona, ciudad griega situada en el empeine de la bota de Italia. Junto con las matemáticas, inculcó a sus discípulos la veneración a los números; a creer en la reencarnación y la transmisión de las almas de hombre a hombre y del hombre a la bestia; a no comer nunca judías; a permanecer siempre anónimos, y a escribir el nombre de la hermandad pitagórica en todo escrito o descubrimiento.

Entre las enseñanzas de Pitágoras que más se recuerdan están, naturalmente; el teorema que dice que en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre el lado más largo -la hipotenusa- es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados más cortos. Los babilonios habían descubierto este teorema con mil años de anterioridad, pero se le atribuye a la escuela pitagórica el ser la primera en demostrarlo. Sigue siendo enormemente útil para la ciencia. Y es de interés vital para muchos de nosotros; por ejemplo, los carpinteros lo usan para estar seguros de que las habitaciones que pavimentan son rectángulos perfectos.

4. Legado para un pianista de jazz

Pitágoras hizo una segunda contribución altamente práctica, que figura en toda ejecución de un pianista de jazz o de un cuarteto de cuerda. Se trata de su descubrimiento de las matemáticas que subyacen en la escala musical. Pitágoras averiguó que existía una maravillosa conexión entre la armonía musical y los números enteros con los que contamos: 1, 2, 3, 4, 5, etc. Pulse una cuerda y haga sonar una nota, después pulse una cuerda igual de tensa y doble de larga que la anterior y se oirá una nueva nota, justamente una octava armónica por debajo de la primera. Empezando por cualquier cuerda y considerando la nota que produce, se puede bajar la escala aumentando la longitud de la cuerda según simples fracciones que pueden expresarse mediante las relaciones de los números enteros. Por ejemplo, 16/15 de una cuerda que da el Do dan la nota baja siguiente Si; 6/5 de ésta dan La; 4/3 de ésta, Sol; 3/2 de ésta, Fa; 8/5 de ésta, Mi; 16/9 de ésta, Re, y exactamente dos de ésta vuelven a dar el Do de octava más baja.

Pitágoras descubrió las relaciones entre los números enteros, entre Do, Fa, Sol y el Do inferior y entre sus equivalentes en cualquier escala. Llegó a la convicción de que la armonía, la belleza, la naturaleza, pueden expresarse por medio de relaciones entre números enteros. Incluso creyó que los planetas, al girar sobre sus órbitas, deben producir una armonía celeste basada en los números enteros: la denomina «música de las esferas».



LA APLICACIÓN DE UN TEOREMA

La expresión en forma de diagrama de la más famosa de las enseñanzas de Pitágoras, es: el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo (C) es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los dos catetos (A y B). Suponiendo que A, B y C miden respectivamente 3, 4 y 5 m, podemos hallar el área del cuadrado C, 25 metros cuadrados, al sumar las superficies A y B (9 m^2 más 16 m^2).

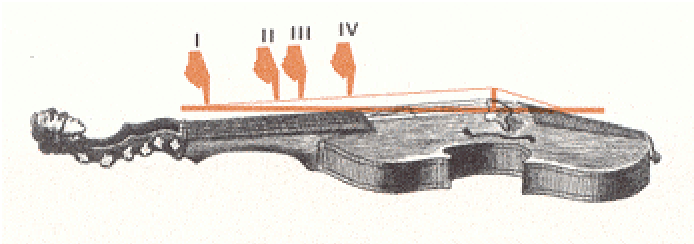
Los pitagóricos quedaron tan prendados del incomparable poder de los números enteros, tanta certeza tenían de que todo el universo estaba construido a base de estos números enteros, que llegaron a clasificarlos en categorías tales como «perfectos» y «amigables». También denominaron femeninos a los pares y masculinos a los impares, a excepción únicamente del número uno, que lo consideraron como el generador de todos los números. (El símbolo para el matrimonio era el número 5, suma del primer número femenino, el 2, y el primer número masculino, el 3.) Después, en el despertar de esta bonita fantasía, tuvo lugar un soberano descubrimiento tan poco pitagórico que la hermandad trató de suprimirlo.

5. La diablura de una raíz cuadrada

El descubrimiento perturbador fue un nuevo tipo de número -el que denominamos «número irracional». La característica del número irracional es que independientemente de todo se mantiene obstinadamente sin fin. Este rasgo irritante surge a menudo en lo que denominamos una raíz cuadrada-, la cantidad que, cuando se multiplica por ella misma, da el número dado. La raíz cuadrada de cuatro (simbólicamente escrita como √4 es un magnífico 2; √9 es 3. Pero una raíz cuadrada irracional se transforma en una fracción decimal con una serie sin fin de dígitos que no se repiten a partir de la coma decimal. Por ejemplo, √2 es 1,41421... y así hasta el infinito, √3 es 1,73205... hasta el infinito. Lo más perturbador es que las raíces cuadradas irracionales son frecuentes.

El supuesto del triángulo rectángulo servirá de ejemplo. Un triángulo rectángulo cuyos catetos miden tres y cuatro unidades de longitud, y cuya hipotenusa es un número exacto de cinco unidades de longitud, es excepcional. Por cada uno de este tipo de triángulo de lados 3-4-5, 5-12-13 ó 7-24-25, hay innumerables triángulos rectángulos «imperfectos» tales como 1-1-√2 ó 1-2-√5 ó 2-√5-3. Supongamos que se está midiendo un campo cuya superficie tiene la forma de un triángulo rectángulo con dos lados iguales, entonces el tercer lado no será exacto - tanto si se mide en milésimas de pulgada o de centímetro. Independientemente del número de veces en que se subdivida la longitud de la hipotenusa, nunca se obtendrá una subdivisión que sea igual a una subdivisión de la longitud de uno cualquiera de los catetos.

Los pitagóricos se dieron cuenta que en la mayor parte de los triángulos rectángulos las relaciones irreducibles entre las longitudes de los lados no podían expresarse en función de los números enteros, ni incluso si se escogiera para intentarlo todos los números enteros y todas sus fracciones -desde uno a un trillón o desde 1/1 a una trillonésima-. Este descubrimiento desalentador afectó a todo el curso del pensamiento matemático griego. Hizo abandonar, efectivamente, toda esperanza de que la medición pudiera utilizarse como un puente entre la geometría y la aritmética de los números enteros. Los griegos empezaron a limitarse a la geometría de las formas, que se refería, no a la medición, sino sólo a la forma. Por lo tanto, podían dibujar, e incluso medir, ciertos números irracionales, tales como: √2 ó √3, como una hipotenusa definida en un determinado triángulo rectángulo. Estos números podían encerrarse dentro de figuras rectilíneas delimitadas por líneas rectas, triángulos, cuadrados y pirámides.



LAS MATEMÁTICAS DE LA MÚSICA
Pitágoras descubrió que los intervalos musicales están regidos por relaciones entre números enteros. La posición I determina una longitud que da Do grave, una octava por debajo del Do natural; II, 3/4 de longitud de la curva dan el Fa por encima del Do grave; III, con 2/3 se obtiene Sol; IV, 1/2, da Do natural.

UN FILÓSOFO DE MUCHAS FACETAS

Estos grabados de madera italianos del siglo XV representan a Pitágoras demostrando sus ideas de la armonía a través de distintos ensayos con campanas y vasos, con tensiones de las cuerdas y longitudes de columnas de aire.

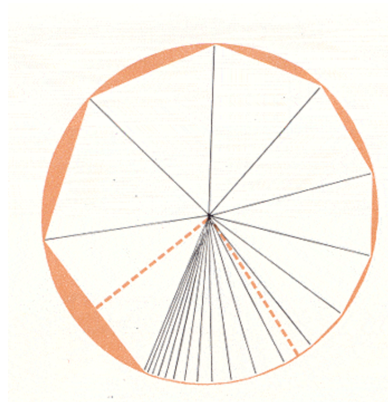
Pero ni los números irracionales ni el concepto de infinito podían quedar fuera ni siquiera de la geometría de las formas más elemental. Después de los triángulos ambos conceptos resurgen de nuevo en el problema del círculo. La relación de la circunferencia de un círculo con su diámetro es en sí misma un número irracional, 3,14159..., que denominamos pi, o simbólicamente π. (Se cree que la primera letra de la palabra griega *peripheria* - que significa «periferia» - inspiró el símbolo π. Cualquiera que sea su origen, la cantidad que representa ha sido calculada con más de cien mil decimales, y sabemos que nunca resultará exacta). Los griegos no reconocieron toda la extensión de la irracionalidad de π y, por lo tanto, perdieron mucho tiempo tratando de resolver el gran problema que este hecho hizo imposible

- construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado, o sea, literalmente hablando, trataron de «cuadrar el círculo».

6. El infinito y la tarta de manzana

La mejor forma para poder calcular el área de un círculo consiste en considerarlo como suma de un número infinito de triángulos infinitamente estrechos colocados alrededor del centro del círculo como pequeños pedazos de tarta de manzana. La altura de cada triángulo infinitamente estrecho es la misma que el radio del círculo. La suma de las bases infinitamente cortas de todos los triángulos es la misma que la circunferencia del círculo. Y puesto que el área conjunta de todos los triángulos debería ser igual a la mitad del radio por su circunferencia, el área del círculo debe ser igual a la mitad del radio por la circunferencia.

LA MEDICIÓN DEL CIRCULO



Cuantos más pequeños sean los triángulos que se inscriban en un círculo, más perfectamente lo recubrirán, como se observa por la disminución de las áreas coloreadas del grabado adjunto. Además, a medida que estos triángulos se reducen, su altura (línea de trazo discontinuo) se aproxima más a la longitud del radio y sus bases casi descansan en la circunferencia. Al observar que la altura pasaba a ser el radio y que la suma de las bases igualaba a la circunferencia, los griegos aplicaron la fórmula del área de un circulo (1/2 de la circunferencia x el radio).

No había nada de erróneo en esta conclusión. Era operativa, aplicable, pero el tratar de demostrarla a través de rigurosas etapas lógicas fue una travesía intelectual tan ardua como la odisea de Ulises. A medida que un triángulo se va estrechando infinitamente, exactamente, ¿cuándo deja de existir y empieza a comportarse como si tuviera la forma de un trozo de tarta? Cierto que no asume la forma de un trozo de tarta propiamente hasta que se ha estrechado infinitamente, y entonces la verdad es que ya no es algo, sino nada. ¿Cómo puede sumarse un número infinito de nadas para producir algo?

Estas molestas objeciones a la lógica de la división del círculo en un gran número de partes fueron expuestas - probablemente con júbilo - por la escuela eleática de filósofos, una escuela que se originó en Elea, próxima a Crotona, y a los pitagóricos. Las matemáticas no fueron un simple pasatiempo para los griegos; sus problemas fueron discutidos abiertamente. Lo que visto retrospectivamente parece una ininterrumpida marcha de progreso hacia un mayor conocimiento, fue una guerra intelectual parecida a una discusión de taberna. Las armas eran argumentos sofisticados. Su resultado final fue el triunfo de la demostración.

Los eleáticos estaban profundamente interesados en la comprensión científica -no tan sólo de los triángulos y de los círculos, sino de todo el cosmos. Su mayor representante fue Zenón, maestro en obtener descubrimientos que provocaran la perplejidad, esto es, la paradoja - una proposición que, aunque lógicamente válida, se escapa a los ojos del sentido común. Zenón quedó fascinado por la idea del infinito. Acertadamente presintió que la ciencia no podía aferrarse a la realidad, a menos que tomara en consideración las formas en que el infinito se presenta en cualquier parte de la naturaleza. Planteó una pregunta sencilla referente al movimiento y enunció una paradoja célebre en la actualidad. ¿Cómo es posible para un punto en movimiento pasar a través de un número infinito de posiciones en un tiempo finito? Si el ligero Aquiles hiciera una carrera con una tortuga y a la tortuga se le da una ventaja inicial de un palmo, ¿cómo podría Aquiles, a través de la rigurosa lógica griega, alcanzarla jamás? Cuando Aquiles ha avanzado un palmo, la tortuga también ha caminado digamos una décima de palmo. Y cuando Aquiles ha recorrido tal décima parte, la tortuga ya está a una distancia mayor.

UNA PARADOJA
Zenón confundió en gran manera a sus colegas pensadores al señalar que el heroico Aquiles, por más aprisa que corriera, no podía alcanzar a una tortuga con una ventaja inicial, puesto que, cuando alcanzara el punto de la tortuga, A, la tortuga se habría desplazado a B. Cuando llegara a B, la tortuga se habría trasladado a C; de

esta forma, arguyó Zenón, la tortuga siempre estará situada delante, aunque solamente sea por un pelo.

Todo el mundo sabe, partiendo de la experiencia, que Aquiles puede alcanzar a la tortuga, pero ¿cómo puede probarlo por medio de etapas lógicas que no requieran una gran cantidad de páginas para demostrarlo? Los matemáticos modernos tienen formas de eludir el problema y los griegos también las tenían. Uno de los primeros sabios de la geometría, probablemente Eudoxo, facilitó la demostración en controversia acerca del área de un círculo mediante dos líneas subsidiarias de razonamiento, con las que demostró que si el área de un círculo es bien mayor o menor que la mitad de su circunferencia por el radio, se implicaban contradicciones - contradicciones que reducen ambas alternativas a absurdas. (Por lo tanto, una vez más, *reductio ad absurdum*).

Por la misma época que Eudoxo se estaba apuntando este tanto sobre los eleáticos y el infinito, el antiguo mundo griego estaba siendo absorbido por las casi infinitas conquistas de Alejandro Magno. Cuando el estruendo de las armas se había apaciguado, surgió una nueva capital de Grecia en Alejandría, Egipto. Y allí, alrededor del año 300 antes de Cristo, el más famoso de todos los maestros de la geometría, Euclides, se dispuso a recoger los teoremas de sus predecesores y a organizarlos en un todo unitario.

Euclides no fue propiamente un gran innovador, pero fue un soberbio organizador de los resultados matemáticos alcanzados por Tales, Eudoxo y otros sabios de la edad de oro de la geometría griega, tales como Demócrito, Hipócrates de Quíos y Arquitas. Euclides tuvo la gran habilidad de volver a escribir sus demostraciones en términos sucintos y claros. Simplificados de esta forma, están contenidos en su obra maestra, los Elementos, uno de aquellos libros únicos, como la Biblia, que parece refundir los mejores esfuerzos de las mentes creadoras en un todo unitario e inspirado. Es una obra de una lucidez y estilo tan terminantes que algunos eruditos la consideran la colección más coherente de pensamientos rigurosamente razonados que nunca haya establecido el hombre. En la antigüedad se difundieron extensamente en forma de manuscrito. Desde la invención de la imprenta, miles de ediciones se han publicado. Hasta hace un siglo era el libro de texto de geometría de bachillerato más usado.

Los Elementos contienen trece libros o capítulos, que describen y demuestran una gran parte de todo lo que sabe la raza humana, incluso en la actualidad, acerca de las líneas, los puntos, los círculos y las formas sólidas elementales. Toda esta información la dedujo Euclides, a través de la más aguda lógica, a partir de 10 simples premisas - 5 postulados y 5 axiomas (expuestos a continuación) -. A partir de estas premisas, Euclides construyó, no tan sólo la geometría que se enseña en las escuelas normalmente hoy en día, sino también una gran cantidad de matemáticas de otro tipo. Sus capítulos en torno a las longitudes lineales y a las áreas dan abundantes métodos geométricos para resolver muchos problemas que hoy en día se consideran como álgebra. Su tratamiento del atormentado concepto de Zenón en torno al infinito y de la técnica para sumar áreas comprendidas en arcos de círculo, implican ideas que ahora se estudian en el cálculo infinitesimal. Su discusión de los números primos, números que no pueden ser divididos exactamente, a excepción de por sí mismos, es ahora un estudio clásico de la «teoría de números».

LOS AXIOMAS DE EUCLIDES

- *Las cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.*
- *Si se suman los iguales con los iguales, las sumas son iguales.*
- *Si se restan los iguales de los iguales, los restos son iguales.*
- *Las cosas que coinciden mutuamente son mutuamente iguales.*
- *El todo es* siempre mayor que la parte.

LOS POSTULADOS DE EUCLIDES

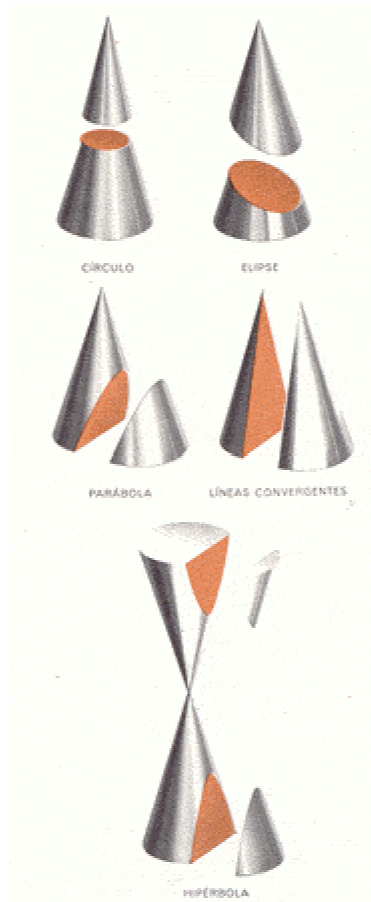
- *Por dos puntos cualesquiera pasa una línea recta.*
- *Un segmento de recta puede ser trazado de modo continuo sobre una línea recta.*
- *Tomando un punto cualquiera como centro puede trazarse un círculo con un radio igual a una línea recta finita (segmento).*
- *Todos los ángulos rectos son iguales.*
- *Dadas una línea recta y un punto exterior a ésta, hay a través de este punto una y tan sólo una paralela a la línea dada*.

Después de Euclides, los matemáticos sólo podían ascender -fuera de las regiones normalmente consideradas como geometría griega - a la atmósfera rarificada de lo que se conoce popularmente por matemáticas superiores. Inspirados por los Elementos, los dos matemáticos más eminentes del siglo siguiente iban a lograr tantos resultados nuevos y a suministrar tantas fórmulas útiles como reunieron todos los griegos pre-euclidianos juntos, uno fue Apolonio, cuyos descubrimientos relativos a las denominadas secciones cónicas, contribuyeron posteriormente en forma muy importante al desarrollo de la astronomía, de la ciencia militar de la balística y -finalmente de los modernos cohetes dirigidos. El otro fue Arquímedes, cuya brillantez en las matemáticas iba unida a un talento para la mecánica que le convirtió en el padre de la ingeniería práctica.

7. Los dones y las limitaciones de Platón

En la medida posible, tanto Apolonio como Arquímedes efectuaron sus investigaciones matemáticas superiores dentro de la disciplina rigurosa impuesta en la geometría por el renombrado filósofo ateniense Platón. Debido a pensar en términos del ideal puro, el abstracto total, Platón se dedicó a la geometría; le gustaba la forma en que podía abstraer de una rueda de carro el concepto de un círculo inmune al tiempo y al cambio. Debido a su prestigio, pudo transmitir su entusiasmo a sus conciudadanos, dando, por lo tanto, un elevado puesto dentro de la consideración pública a los que practicaban la geometría. Pero al mismo tiempo que les confería este carácter distintivo, también les puso una difícil restricción de trabajo. Enjuiciando con espíritu crítico, al modo filosófico, los nuevos descubrimientos mecánicos y las matemáticas aplicadas, Platón insistió en que las demostraciones geométricas se lograran sin ningún otro auxilio que una regla y un compás. Este requisito, que no se originó en Platón, pero que se estimuló a partir de él, fue exigido a todos los problemas geométricos elementales y, cuando fue posible, a problemas más difíciles.

(Debido tanto a su abstracta concepción de las matemáticas como a la limitación de la regla y el compás, algunos matemáticos todavía consideran a Platón con cierto recelo. El gran lógico inglés del siglo XIX Augustus De Morgan notó cáusticamente que las palabras que se supone Platón inscribió en las puertas de su academia - «Que no entre ningún ignorante de la geometría» - no reflejaban precisamente que la geometría se cultivaba de puertas adentro, al igual que un aviso que dice no olvidarse de traer bocadillos... no constituiría la promesa de una buena comida.)



LAS SECCIONES CÓNICAS DE APOLONIO. Apolonio descubrió que se obtenían determinadas curvas, o cónicas, al cortar mediante una superficie plana un cono circular en diversas posiciones. Un corte paralelo a la base del cono da lugar a un circulo, un corte oblicuo a una elipse.
Un corte paralelo a una línea (generatriz) del cono da lugar a una parábola. Un corte a través de la cúspide da lugar a dos rectas que se cortan. Cortando el cono y su imagen en la parte superior resulta una hipérbola.

Apolonio hizo su contribución a la historia de las matemáticas al investigar todas las peculiaridades más importantes de una serie de graciosas curvas que describió en un libro llamado Cónicas. Las denominó cónicas debido a que las vio como secciones realizadas por una superficie llana o plana cuando intercepta la superficie de un cono. Depende de cómo se corte el cono para que las secciones resultantes sean círculos, elipses, parábolas o hipérbolas. (Algunas de éstas se muestran arriba).
Después investigó las propiedades de cada sección cónica y mostró de qué forma están interrelacionadas. Aunque en las matemáticas puras todas estas ingeniosas creaciones no requieren, ninguna justificación, han pasado, no obstante, a quedar

doblemente justificadas por el hecho de que las secciones cónicas son los caminos que siguen los proyectiles, los satélites, las lunas o las tierras bajo la influencia de la gravedad.

Amigo y rival de Apolonio fue Arquímedes, quien fue un poco más brillante y mucho más creador, tanto que dentro de la profesión se le conceptúa, con Newton y Gauss, como uno de los tres grandes matemáticos de todos los tiempos. Todo lo que hizo Arquímedes parece tener un espíritu tan moderno en la actualidad como cuando lo creó. No obstante, creó todo lo que hizo dentro de los estrechos límites de la disciplina de Platón, sin ninguna abreviación algebraica para catalizar su lógica ni incluso un sistema de notación conveniente para escribir grandes números y realizar complicadas operaciones aritméticas

La mayoría de los griegos no tenían realmente ninguna forma sencilla de escribir grandes números. Arquímedes se enfrentó con esta gran desventaja en un tratado científico, el Contador de Arena, en el que se establecía un sistema de números basado en la miríada griega, o 10.000. Los números hasta una miríada de miríadas, o cien millones, los llamó «el primer orden de números». Los números hasta una miríada de miríadas multiplicados por sí mismos una miríada de miríadas - $100.000.000^{100.000.000}$, los denominó «números del primer período». Prosiguió hasta hacer que este número tan grande se multiplicara por sí mismo una miríada de miríadas de veces, llegando a una cantidad tan enorme que en una notación de un sistema con base 10 se escribiría por medio del número uno seguido de ochenta millones de miles de millones de ceros. Señaló que es un número completamente adecuado a cualquier finalidad.

8. El caso de las innumerables reses

Los números grandes, asustaban tan poco a la despejada mente de Arquímedes que, dice la leyenda, era capaz de incordiar a sus compañeros matemáticos con algunos de los más horrendos acertijos matemáticos jamás expuestos. «Si eres diligente y sabio, ¡Oh, extranjero!, calcula el número de reses del sol que, en cierta ocasión, pacían en los campos de Trinacria (Sicilia).» Por «reses del sol» Arquímedes quería decir aquéllas pertenecientes a Hyperión, el dios sol, y en una forma directa prosiguió describiendo el ganado y los distintos colores de las vacas y los toros que había allí. El problema pasó a tener dos posibles respuestas. O bien el número de reses era 5.916.837.175.686, o bien tan sólo pueden contarse con un número dígito de 206.545 cifras que nadie, ni siquiera Arquímedes, ha tenido jamás la longevidad suficiente para calcular.

EL ÁMBITO DE LAS MATEMÁTICAS GRIEGAS Los lugares que guardan relación con las luminarias matemáticas de la antigua Grecia son, de Oeste a Este, Elea (Zenón), Crotona (Pitágoras), Siracusa (Arquímedes), Mileto (Tales) y Alejandría (Euclides, Apolonio e Hipatia).

La realización de la cual Arquímedes estuvo más orgulloso, fue el descubrimiento de cómo calcular el volumen de una esfera. Averiguó que el volumen de una esfera es igual a dos terceras partes del volumen del cilindro circunscrito más pequeño. (A petición suya, el diagrama de la esfera y el cilindro que él elaboró fue esculpido en su tumba cuando murió en el año 212 a. de c.; el orador romano Cicerón, contó que hizo limpiar la hiedra que la cubría cuando hizo una peregrinación a la olvidada sepultura un siglo y medio después). Para demostrar que un cilindro tiene a su vez un volumen que excede en una mitad al volumen de su «esfera inscrita», Arquímedes tuvo que aplicar la misma técnica de los cortes infinitamente pequeños que los primitivos griegos habían utilizado para el área del círculo.

Después tenía que demostrar por el método de *reductio ad absurdum* que si más o menos de las dos terceras partes del cilindro circunscrito igualaba el volumen de la esfera, el resultado conduciría a una contradicción. Utilizó la misma técnica para demostrar qué áreas se incluían dentro de las curvas parabólicas y ciertas curvas en forma de espiral. La utilizó de nuevo para calcular el volumen que ocupa una sección cónica cuando gira alrededor de su eje.

Debido a esta tendencia práctica de su mente, Arquímedes era físico e ingeniero además de matemático. Los que no saben mucho de él, lo recuerdan como un profesor distraído que corría desnudo por las calles dula ciudad siciliana de Siracusa, donde vivió, gritando «Eureka, Eureka! », que quería decir «¡lo he hallado!». Lo que realmente había descubierto era un hecho físico, una ley básica de la ingeniería hidráulica. Cualquier persona que toma un baño se da cuenta de que un sólido sumergido en un líquido desaloja su propio volumen de aquel líquido. Pero Arquímedes descubrió que un sólido que flota en un líquido desaloja su propio peso de aquel líquido y, en general, que un sólido sumergido en un líquido pierde exactamente tanto peso como el del líquido que desplaza.

La forma en que Arquímedes pasó a ocuparse de este problema fue explicada posteriormente por el arquitecto romano Vitruvio. El rey Hierón de Siracusa había facilitado a uno de sus joyeros de la corte oro para hacer una corona para él y sospechó que se había sustituido por plata parte del oro. Encargó a su amigo Arquímedes que hiciera una investigación. Arquímedes estaba ponderando el problema un día, flotando en su baño -con su propio peso en agua derramada por los bordes de la tina- cuando por primera vez se dio cuenta de su ley hidráulica. De este descubrimiento y utilizando algo de álgebra geométrica pudo averiguar cuánta plata había utilizado el joyero en sustitución de oro. Posiblemente demostró el fraude pesando cantidades de plata y oro iguales al peso de la corona, primero en el aire y después en el agua. Cualquiera que fuera el final del caso, Hierón estuvo altamente satisfecho y el joyero de la corte profundamente disgustado -o algo peor.

El trabajo de investigación de Arquímedes en torno a las coronas y a la hidráulica fue una reducida fracción de su contribución a la ingeniería práctica. Su famosa declaración, «Dadme un punto de apoyo y moveré la tierra», derivó no de la arrogancia sino de la emoción de haber encontrado una demostración de las leyes matemáticas de la palanca. También descubrió las leyes de las poleas y métodos para determinar el centro de gravedad de un objeto. La habilidad para aplicar sus descubrimientos puede juzgarse a partir del hecho -señalado por Plutarco que retuvo una flota invasora romana acorralada en el puerto de Siracusa durante tres años con devastadoras catapultas y puntiagudas zarpas de hierro ingeniadas por él, para destruir los barcos. El general romano Marcelo, después de su primera repulsa, llamó a Arquímedes «este Briareo geométrico (un monstruo mitológico de cien brazos) que utiliza nuestros barcos como tazas para vaciar el agua del mar».

9. El final de una bacanal

Desgraciadamente para los de Siracusa, Marcelo finalmente superó con táctica maniobrera a las versiones de las últimas armas de Arquímedes al subir a escondidas por la noche a una torre mal vigilada de la muralla de la ciudad, durante una de sus periódicas bacanales religiosas. Al despuntar el día los invasores se presentaron en la ciudad extendiendo la muerte y el pillaje. Contrariamente a las órdenes específicas de Marcelo, un soldado romano, al encontrar a Arquímedes dibujando meditativamente figuras geométricas en el suelo de un patio, mató al anciano. Arquímedes tenía setenta y cinco años. Si hubiera sobrevivido es bastante concebible suponer que habría encendido la antorcha de la creatividad en uno o dos romanos. En lugar de ello, su muerte señaló el principio de un oscurecimiento intelectual que asolaría el mundo durante siglos, y que llevaría prematuramente a la tumba la prodigiosa creación mental griega, la Geometría.

Los romanos se apoderaron de las armas de guerra y de la ingeniería de Arquímedes, pero dejaron su manantial de matemáticas originales totalmente oculto. Durante la corrupción mental, espiritual y física del imperio romano en los siguientes siglos, algunos griegos distinguidos hicieron lo que pudieron para conservar la tradición de Arquímedes en la investigación creadora. Entre los últimos de ellos se encontraba la hermosa e inmensamente sabia, la matemática Hipatia, que conferenció en la Universidad de Alejandría alrededor del año 400 y que atrajo grandes masas de estudiantes. Desgraciadamente fue la última de los intelectuales paganos griegos y fue asesinada por un populacho sectario cristiano. Edward Gibbon describió su final en *The Decline and Fall of the Roman Empire*: «fue arrebatada de su carroza, le arrancaron sus vestidos y la arrastraron a la iglesia y allí su carne fue separada de los huesos con afiladas conchas de ostras y sus trémulos miembros lanzados a las llamas». Las matemáticas griegas habían exhalado su último suspiro. Tenían que pasar otros mil años para que su espíritu se encendiera de nuevo.

ALGUNAS PRACTICAS ANTIGUAS PARA LA ABREVIACIÓN SIMBÓLICA

Al igual que nuestros símbolos actuales para la suma, sustracción, multiplicación y división tuvieron sus precursores, otros signos abreviados que se utilizan en la actualidad tuvieron sus modalidades en otra época. Los símbolos que utilizamos para la raíz cuadrada, la raíz cúbica y π *-*$\sqrt{}$*,* $\sqrt[3]{}$ *y* π *, representan gran simplicidad comparados con las versiones ideadas en épocas pretéritas.*

UN SÍMBOLO PARA LA RAÍZ CUADRADA.

Este signo proviene de «radix» (en latín raíz) y fue utilizado por Leonardo de Pisa en 1220. El signo actual $\sqrt{}$ *para la raíz cuadrada puede ser una deformación de la letra «r».*

UN SIMBOLO PARA LA RAÍZ CÚBICA

Tres signos radicales de estilo moderno van unidos, este símbolo fue creado en 1525 por Christoff Rudolff, matemático alemán. El signo actual, en su origen era francés.

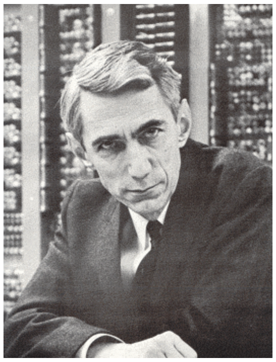
OTRO SIGNO PARA π

Esta variante para el signo de pi fue propuesta por el profesor Benjamín Peirce de Harvard en 1859. El signo actual π, una letra griega, fue utilizado en Inglaterra en el siglo XVIII.

10 Una cartera: Los grandes maestros de las matemáticas

Los matemáticos son a menudo solitarios investigadores de las materias más abstrusas, pero también trabajan con otros científicos. Colaboran para dirigir las naves espaciales a través de los cielos, investigan la naturaleza de la comunicación, desvelan los secretos de la genética. Como individuos, los matemáticos parecen participar de ciertas características. Son muy jóvenes en sus años más productivos, algunas veces entre los trece y los diecinueve. Algunos utilizan las matemáticas caprichosamente, para componer dos toneladas de melodías rítmicas, que suenan igual si se tocan hacia delante o hacia atrás, o para hacer que los computadores escriban los versos libres más recientes. Otros se fascinan por los artilugios. Claude Shannon inventó una sorprendente caja negra que, cuando se enciende el motor, se abre para que salga una serpiente verde del tamaño de la mano y después ella misma se cierra. Aquí y en las páginas siguientes, en fotografías de Alfred

Eisenstaedt, hay retratos de algunos distinguidos profesionales matemáticos de los Estados Unidos

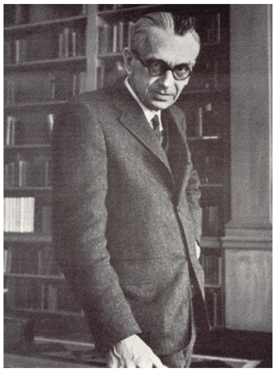


UN TEÓRICO DE LA COMUNICACIÓN.
Situado ante las centelleantes luces de un computador en el Massachusetts Institute of Technology está el profesor Claude Shannon. Utiliza el álgebra booleana para diseñar circuitos telefónicos de comunicación y es el inventor de la teoría de la información, que explica la ciencia de simular las funciones del cerebro humano. También ha creado un ratón electrónico

11 Los matemáticos "puros": practicantes de un elegante arte

En 1972 había en los Estados Unidos unos 60.000 matemáticos, comprendiendo 13.000 con títulos de doctor en filosofía. Entre estos profesionales, que trabajan en diferentes campos de aplicación, existe una pequeña minoría de 800 matemáticos "puros" como Kurt Gödel y Samuel Eilenberg, que se educaron en Europa.

La única cosa que interesa a estos hombres es extender las fronteras del conocimiento matemático del hombre. No les interesa nada la aplicación práctica de sus investigaciones. Consideran que su tarea es un arte y juzgan su valor por la elegancia de su lógica, la elegancia de su razonamiento. La elegancia matemática, como ha dicho uno de estos hombres, es "directamente proporcional al número de ideas que se pueden ver e inversamente proporcional al esfuerzo que supone el verlas". Por lo tanto, los matemáticos puros han desarrollado geometrías de dimensiones infinitas y de cero dimensiones, y han demostrado que las matemáticas no están sujetas en modo alguno a la demostración.



ANTE LAS FRONTERAS DE LA MENTE
Uno de los matemáticos más famosos en los Estados Unidos es el doctor Kurt Gödel, en el «Institute for Advanced Study» en Princeton, Nueva Jersey. Nacido en Checoslovaquia, alcanzó su primer éxito a los 25 años. Los eruditos habían sugerido la existencia de guías absolutas para averiguar la verdad o falsedad de ciertas proposiciones matemáticas. Gödel sorprendió a sus superiores al demostrar que lo que buscaban no existía. «O bien las matemáticas son demasiado grandes para la mente humana», dice, «o la mente humana es algo más que una máquina».

UN TOPÓLOGO QUE VA EN METRO
Director del «Department of Mathematics» de la Universidad de Columbia, el profesor polaco Samuel Eilenberg se tiende contemplativamente en su piso de Greenwich Village en la ciudad de Nueva York. «Algunas veces me gusta pensar tendido sobre la cama», dice, «pero principalmente me gusta pensar mientras voy en metro». Se dedica a pensar primordialmente en la topología del álgebra. Eilenberg es miembro no-francés de Bourbaki, un grupo semisecreto de eruditos que reúne un compendio de matemáticas abstractas bajo un nombre ficticio: «Nicholas Bourbaki».

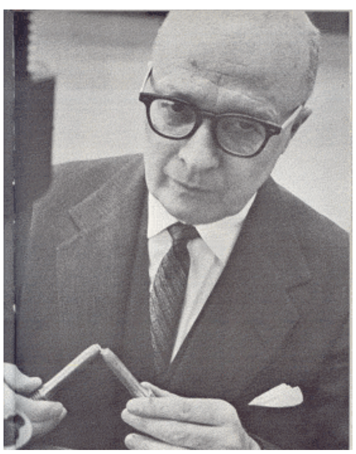
12. Especialistas en aplicar lo abstracto

Los matemáticos que se ocupan de la aplicación de su disciplina hacen volver a tierra firme las abstracciones de las matemáticas puras. Al formular los problemas físicos reales en términos matemáticos, a menudo transforman las ecuaciones puras de ayer en los planes industriales de la actualidad, en tablas actuariales o en previsiones para las votaciones. Algunas veces la solución matemática a un problema aparentemente no matemático tiene más que una simple aplicación.

Un cierto número de matemáticos puros tienden a menospreciar a sus colegas más prácticos; refleja esto el hecho de que relativamente pocas universidades de los Estados Unidos funcionen departamentos de matemáticas aplicadas. No obstante, muchos licenciados en matemáticas puras han dedicado sus conocimientos a usos prácticos; alrededor de la mitad de los matemáticos estadounidenses trabajan en la industria.

Utilizando nuevas ramas de las matemáticas, tales como la teoría de los juegos y de la información, estos expertos están realizando cambios fundamentales en los negocios y en la estrategia militar, las comunicaciones y medicina.

UN ESTADÍSTICO DE LA GENÉTICA
Un especialista matemático en genética de la Universidad de Pittsburg, «School of Public Health», el profesor Ching Chin Li, contempla una fotografía que muestra aberraciones del cromosoma de las células de un niño. El doctor Li determina hechos acerca del hombre que no se averiguan con experimentos.



COMPROBACIONES POR TENSIÓN
Uno de los fundadores del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Brown es el pulcro y serio profesor William Prager, cuya especialidad es la mecánica de sólidos. Utiliza la «máquina de pruebas universal» que comprueba la resistencia de los metales al someterlos a tensión.

13. Las matemáticas como servidores públicos y como misioneros

Los hombres que aparecen en estas páginas son excepciones a la regla general de que los matemáticos creadores son poco sociales. En su disciplina la mayoría de los científicos opinan que todo lo que les aleja de sus silenciosos escritorios y despachos interrumpe su labor principal.

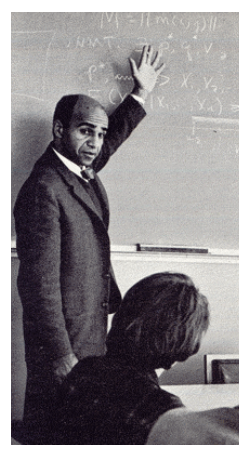
Entre las excepciones a la regla hay varios hombres eminentes que prestan sus servicios al gobierno federal en puestos importantes. Éstos incluyen a Brockway

MacMillan, subsecretario de la Fuerza Aérea, y el profesor John Tukey, miembro del comité de Asesoramiento Científico del Presidente y otros que se ocupan del ambiente.

Entre los que más se dedican al servicio público hay profesores tales como David Blackwell, que enseña estadística superior y programación dinámica en la Universidad de California. Entusiasta de la enseñanza, el doctor Blackwell realiza jiras para conferenciar, patrocinadas por la Asociación Matemática de América para promover su estudio.

El profesor John Kemey, ex director del Departamento de Matemáticas en Darmouth College, nombrado rector en 1970, también viaja por el país instando a los jóvenes al estudio de las matemáticas. Ha argumentado tan satisfactoriamente que "el hombre ignorante de las matemáticas se encontrará cada vez más limitado en su participación en las fuerzas principales de la civilización", que un sorprendente 90% de los estudiantes de su Universidad siguen voluntariamente cursos de matemáticas.

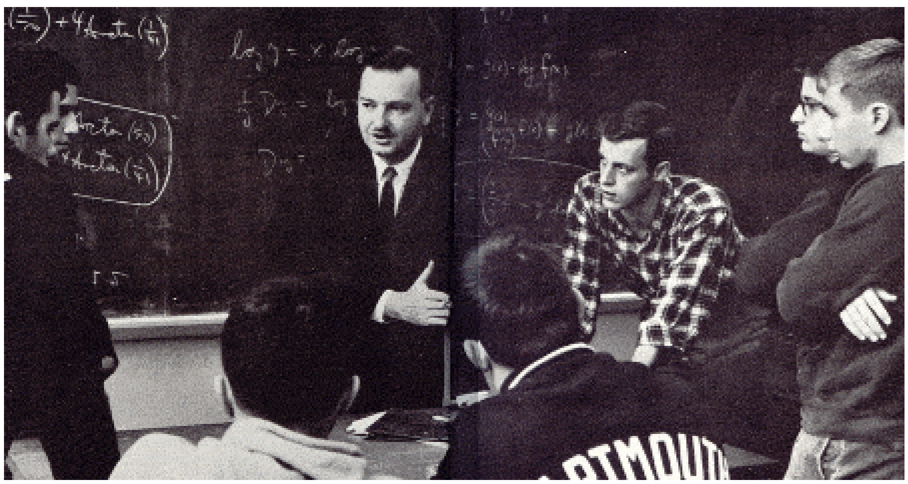
Aunque los maestros como los profesores Blackwell y Kemeny dedicaban sus mayores energías a la enseñanza, muchos miembros de las facultades preferían en el decenio de 1960 la investigación a la enseñanza en las aulas. Pero el renacimiento del interés en la enseñanza -combinado con la escasez de fondos para la investigación- invirtió la tendencia y asegura a las universidades un personal suficiente para el adiestramiento de las futuras generaciones de matemáticos.



UN CONFERENCIANTE EN LOS DESCANSOS David Blackwell, un inspirado profesor del departamento de estadística matemática en la Universidad de California, preside un seminario espontáneo, que se formó alrededor de una pizarra, durante un descanso matinal para tomar café. En la investigación aplica el análisis probabilístico y estudios estadísticos para «el problema de la investigación» para aprender, por ejemplo, la mejor manera de encontrar un producto que cure el cáncer. A pesar de su necesidad de comunicarse con los demás, el doctor Blackwell no tiene teléfono en su casa, ya que tiene ocho hijos.

CONSEJERO PRESIDENCIAL

Aunque apacible y de trato agradable, el profesor John Tukey es uno de los matemáticos más atareados del país. Ex químico que se doctoró en matemáticas, en la actualidad se especializa en estadísticas y va con frecuencia a Washington, donde ha prestado sus servicios en varios comités del gobierno. El resto de su tiempo se divide entre el Departamento de Estadística de la Universidad de Princeton, del que fue primer presidente, y los Laboratorios Bell en Murray Hill. Fue fotografiado en el laboratorio de computadores, cuando trabajaba en su Citation Index.



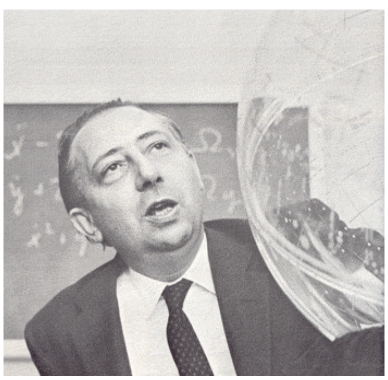
MISIONERO MATEMÁTICO

Enseñando a los alumnos de primer curso de Dartmouth, el profesor John Kemeny demuestra cómo utilizar el cálculo infinitesimal para determinar el valor de π con un número dado de cifras decimales. Con voz suave y agradable, con un don para convertir lo que suena abstruso en ameno, cree que la enseñanza aburrida promueve el que la mayoría de la gente se aparte de las matemáticas. Está preocupado debido a que los doctores en matemáticas suelen tener una especialización demasiado estrecha para ser buenos maestros, y teme que esta situación pueda persistir.

14. Navegantes trazando rutas al espacio exterior

Aparte de las universidades, el Departamento de Defensa y las industrias aéreas y de la electrónica son los que dan mayor número de empleos a los matemáticos, en los Estados Unidos. Uno de los campos importantes en que trabajan es la exploración celeste. Para un solo vuelo espacial, deben calcular alrededor de 100 trayectorias y después escoger la mejor, además de otras 20, o algo así, para una posible emergencia. Entre los miles de factores que tienen que tratar están las posibilidades de colisión con los meteoritos, las rutas más seguras a través de la radiación, y el peso y proporción de consumo de combustible. El cálculo actual de cada trayectoria supone para un computador unos segundos, pero sólo después de que cinco hombres han trabajado cuatro o cinco meses para facilitarle la información adecuada.

Hasta que los matemáticos no han terminado, los ingenieros no pueden proseguir con la construcción de las naves espaciales y el lanzamiento del vuelo. La importancia de las matemáticas fue subrayada en el primer vuelo del Mariner a Venus. Un diminuto error tipográfico en una ecuación introducida en un computador logró que fracasara todo el vuelo.



UN PERFECCIONADOR DE PREGUNTAS Escudriñando cifras en el laboratorio de computadores está Richard Bellman, profesor de ingeniería eléctrica en la Universidad del Sur de California y asesor de la Rand Corporation. Su especialidad matemática es la programación dinámica, que prepara a un computador para que continúe hallando respuestas a medida que varían los datos del problema que trata. Ejemplos típicos lo son la conducción minuto por minuto de un satélite o el análisis día a día del mercado de valores. La dificultad, dice el doctor Bellman, está en formular un buen problema.

EL EXPERTO EN «LOS TRES CUERPOS» Examinando una esfera celeste transparente está el joven especialista en mecánica espacial Victor Szebehely, de la Universidad de Texas, a quien le encanta predecir un fenómeno en los cielos, por deducción, y dejar que otro lo observe en realidad. «Si no puedo observarlo», dice Szebehely airosamente, «no admito que no existe; digo que puede ser que no sepa cómo observarlo». Considera su contribución más importante su estudio del «problema de los tres cuerpos» -la Tierra, la Luna y una nave espacial- que cambian constantemente de posición cada uno con respecto al otro. Hasta hoy no hay una fórmula para todos los tríos celestes. Recientemente ha ampliado sus trabajos a la mecánica celeste de más de tres cuerpos en el espacio: es el llamado «problema de cuerpos».

15. Matemáticas anticuadas y la bomba de hidrógeno

A partir de los comienzos de la era atómica, los matemáticos han estado tan profundamente ocupados en la física nuclear como los propios físicos. Los varios cientos de matemáticos reclutados para el proyecto bélico Los Álamos, para el desarrollo de la bomba atómica, tenían a su disposición sólo una máquina IBM, un prototipo rudimentario de los posteriores computadores. Con un moderno computador de gran velocidad, su trabajo se hubiera podido realizar en una centésima parte del tiempo empleado.

A pesar de esto, en el proyecto de la posguerra para el desarrollo de la bomba de hidrógeno, el doctor Stanislaw Ulam sometió "las máquinas pensantes" a una prueba. Se tenían que hacer gran cantidad de cálculos. Los datos fueron facilitados a un equipo que trabaja con el computador ENIAC - y también al doctor Ulam. Éste y un ayudante obtuvieron las respuestas antes de que las instrucciones para la ENIAC hubieran estado terminadas. Estas cifras contradijeron las primeras teorías acerca de la bomba, pero Ulam obtuvo una aproximación que era operante. El doctor Edward Teller, jefe del proyecto, señaló más tarde: "Ante una verdadera situación de urgencia el matemático todavía gana, siempre que sea realmente bueno".

UN CALCULADOR DE GRAN VELOCIDAD

Situado enfrente de un acelerador de aluminio Cockcroft-Walton, un aparato que se utiliza para estudiar protones desintegradores de Los Álamos, está el brillante teórico doctor Stanislaw Ulam. Aún en el más gentil de los matemáticos se da el desagradable defecto del orgullo. El doctor Edward Teller y él unieron sus fuerzas en desarrollar la bomba de hidrógeno. Al preguntarle si trabajó con Teller, Ulam replicó: «El Dr. Teller trabajó conmigo».

Capítulo 3
Un alfabeto para descifrar lo desconocido

Contenido:

1. *Introducción*
2. *El álgebra de la cena para cinco*
3. *En donde se adivina los años que vivió*
4. *El no conformista número negativo*
5. *Trabajo intelectual en las callejas*
6. *La magnífica herencia de las culturas antiguas*
7. *La influencia perversa de las estrellas*
8. *Unas matemáticas para granjeros, agrimensores y constructores de pirámides*
9. *Entre los antiguos una exacta cuenta de horas y días*
10. *Después de la "Edad Oscura" florecimiento de la Ciencia de los Números*

1. Introducción

«Ah, el total y su séptima parte, hacen 19.»

Extraña palabrería ésta, indicadora de algún oculto ritual, pero la repetimos más a menudo de lo que creemos. Esta breve frase, descubierta en un papiro egipcio que tiene 3.600 años, expone uno de los primeros problemas algebraicos que se sabe solucionó el hombre. El explosivo sonido «ah» se utiliza, no como una exclamación, sino simplemente para designar «un montón» o «cantidad». Empleamos su equivalente cada vez que decimos: «Supongamos que x es igual a…».

El papiro de «ah» fue conocido por los intelectuales de Occidente hace un siglo. Henry Rhind, un anticuario escocés que estaba tuberculoso, lo compró en 1858 en una tienda en la ciudad de Luxor, a orillas del Nilo, donde pasaba el invierno a causa de su salud. Denominado el papiro Rhind en su honor, es especialmente interesante, ya que pone en evidencia que los hombres, en el año 1700 a. de c., ya se ocupaban de la clase de problemas que hoy resolvemos con el álgebra. A partir de la época de los faraones, el objeto básico del álgebra ha permanecido invariable: hacer posible la solución de un problema matemático en donde hay un número desconocido. La incógnita se expresa por un símbolo abstracto que se utiliza hasta que puede establecerse su valor numérico. A fin de precisar el problema y simplificarlo, se establece una ecuación, una proposición de qué es igual a qué.

El venerable problema egipcio de «ah, el total, y su séptima parte, hacen 19» puede transcribirse rápidamente en términos del siglo XX. Una persona tiene que rellenar una declaración de sus ingresos estimados. Sabe que sus impuestos actuales deben ser $1.900. Pero decide que si los valora algo por debajo a primeros de año, el Servicio de Impuestos Interno no lo considerará un asunto federal. Utilizando el simbolismo algebraico, que ahorra el tiempo maravillosamente, y el compendio de reglas lógicas del álgebra moderna, se dice asimismo:

«Sea x el número de cientos de dólares que declararé en concepto de impuestos. Después el problema consiste el hallar x de forma tal que x más un séptimo de ésta sea igual a 19». Expresa todo el problema por medio de una ecuación

$$x + x / 7 = 19 \text{ («un séptimo de x es x/7»).}$$

Después, casi automáticamente, aplica el axioma de que los iguales multiplicados por los iguales permanecen iguales, y multiplica ambos miembros de la ecuación por 7 para llegar a una nueva ecuación,

$$7x + x = 133$$

Esto a su vez le da $8x = 133$, por lo tanto $x = 133/8$, y finalmente, $x = 16\ 5/8$, o expresado de otra forma, 16 5/8 cientos de dólares -unos impuestos calculados en 1.662,50 dólares.

Los antiguos egipcios también obtuvieron la respuesta 16 5/8 aunque sin el tipo de ecuación simbólica que utilizamos en la actualidad.

Más de un ciudadano va felizmente por la vida sin jamás tener la necesidad de solucionar una ecuación algebraica desde que deja la escuela. Pero en el vasto y complicado mundo más allá de su puerta, dichas ecuaciones son indispensables para reducir complicados problemas a términos simples. Una empresa se debate con una ecuación cuando decide cuánto tiempo ha de conservar una máquina que se deprecia cada año en tantos o cuantos dólares. El álgebra se utiliza para determinar cómo debería actuar un cronometrador de forma tal que una bomba que se lanza desde una altura de 3.000 metros, por ejemplo, estalle 150 metros por encima del objetivo. Pocos científicos pueden ni siquiera hablar sin símbolos algebraicos para ampliar lo que dicen. En los tablones de anuncios de las oficinas, en las servilletas de las cafeterías o en la arena caliente de la playa, escriben ecuaciones, como resúmenes de las experiencias pasadas, o como instrumentos con que dominar las posibilidades de la naturaleza.

Los procedimientos del álgebra moderna son tan concisos como las normas de un reglamento militar. Escriba el problema como una ecuación en términos de x, la incógnita. Sistemáticamente ordénense todos los términos que contienen x en un miembro de la ecuación. Después combínelos y redúzcalos por medio de la aritmética simbólica hasta que quede una x en un miembro y un número conocido en el otro. Las transformaciones que deben realizarse para reducir los distintos términos que tienen x en una sola x pueden ser intrincadas y laboriosas. Algunas veces resulta útil descomponer el problema en varios subproblemas. Algunas lo es el sustituir una combinación de las x por una nueva incógnita unitaria - una y o una z - que puede ser transportada como un cheque de viaje y transformada después en dinero, x, efectivo, al término del viaje.

Las principales dificultades del álgebra se plantean debido a que algunos problemas incluyen no tan sólo la x, sino también x^2 o x^3. Las ecuaciones sencillas que comprenden sólo la x - y ninguna potencia superior de x - son denominadas ecuaciones de primer grado, o lineales («lineales» que significa «uni-dimensionales»). Las ecuaciones de segundo grado - que no contienen ninguna potencia superior a 2 - son denominadas cuadráticas (de «cuadrado», o «número elevado al cuadrado»). Las ecuaciones de tercer grado son denominadas cúbicas, las de cuarto grado, cuárticas. Más allá de las cuárticas hay ecuaciones de grado quinto, sexto o de grado superior.

2. El álgebra de la cena para cinco

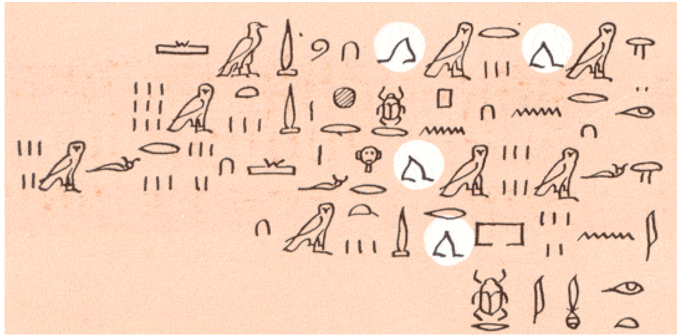
La mayoría de los problemas cotidianos en álgebra -cómo convertir una receta para cuatro en una cena para cinco - pueden ser representados a través de ecuaciones lineales. Las cuadráticas se presentan principalmente en los problemas bidimensionales, tales como los que se refieren a las áreas, de qué anchura puede construirse una acera alrededor de una superficie rectangular de una extensión determinada, dada una cierta cantidad de cemento. Las cúbicas se presentan en los problemas tridimensionales, tales como los que se refieren al volumen, qué cantidad de metal se necesita para construir un tanque de aceite esférico de una capacidad de un millón de litros. Las cuárticas y las ecuaciones de grado superior se necesitan para complejos problemas científicos, tales como encontrar la tasa constante de reproducción por la que una bacteria engendrará un número dado de descendientes en n generaciones - una ecuación denominada «de grado n», que no es el «último grado» para los matemáticos, sino únicamente un grado indeterminado.

Para simplificar las cosas en conjunto, todas las ecuaciones de un determinado grado se consideran como una familia. Cada familia de ecuaciones tiene su propia «ecuación general» representativa. En ésta, una letra del final del alfabeto - x, y o z - representa el número desconocido, mientras que las letras del principio del alfabeto -a, b, c - representan los números que se supone se conocen, pero que no están todavía especificados. Toda ecuación cuadrática, por ejemplo, puede ser representada por una sola ecuación general

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Al resolver esta relación puramente simbólica, los algebristas han encontrado que la solución para x es siempre

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



UN ANTIGUO CÁLCULO

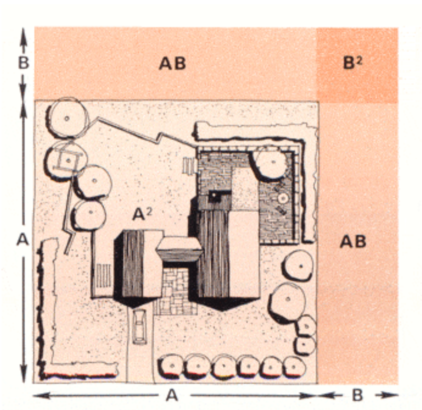
Este problema es del papiro Rhind, uno de los documentos matemáticos más antiguos. Dice: «2/3 sumados y 1/3 restados: hacen 10. Hallar 1/10 de este 10: el resultado es 1: el resto, 9.2/3 de 9, es decir, 6, se añaden; total, 15. Una tercera parte es 5. Era 5 lo que se había restado: resto, 10». Traducción: x + 2/3x - 1/3(x + 2/3x) - 10. En el simbolismo egipcio, las piernas que andaban hacia la izquierda significaban «sumar», a la derecha «restar».

En ésta, el signo (más o menos) significa que hay dos soluciones en toda ecuación cuadrática - una que puede hallarse sumando, la otra restando, en aquel punto particular del cálculo.

No es sorprendente que las soluciones de las familias de las cúbicas y de las cuadráticas sean sucesivamente más complicadas. En lo que se refiere a las ecuaciones de grado superior al cuarto, no se han elaborado soluciones generales en modo alguno. De hecho, los matemáticos han probado que las ecuaciones superiores al cuarto grado no pueden solucionarse, por métodos algebraicos, con toda generalidad. Por medio de técnicas de aproximación y un computador electrónico pueden hallar la solución de un problema específico referente a una ecuación de grado superior, pero no pueden escribir una fórmula algebraica exacta para esta solución.

La solución de las ecuaciones en el álgebra se simplifica enormemente por los signos y los símbolos que se utilizan; sirven de simplificación para establecer con un buen nivel de confianza tanto los problemas como las etapas lógicas para hallar las soluciones. Es sorprendente, en vista de la antigüedad del álgebra, que la ventaja de los símbolos tardara mucho en descubrirse. Fue el filósofo matemático francés del siglo XVII René Descartes, quien primero utilizó a, b y c para representar los números conocidos y quién, con un talento gálico para la lógica, decidió que la otra parte del alfabeto debería de facilitar los símbolos para lo desconocido. Fue también Descartes quien empezó a escribir x = en lugar de xx, o x' en lugar de xxxxx.

Antes de que se desarrollara una notación algebraica, y antes del nacimiento de la idea de que las ecuaciones podían clasificarse y que cada tipo de ecuación tenía una solución general, los problemas del álgebra tenían la misma fascinación que tienen los acertijos. Para el matemático antiguo, explorando su tierra, recién descubierta, cada problema era un palacio inesperado que se hallaba solo en medio de una selva inextricable.



EXPANSIÓN ALGEBRAICA

Supóngase que el plano para una nueva casa de campo hizo tomar la decisión al propietario de agrandar su cuadrado perfecto de tierra (cuyo lado es a metros) por b metros hacia el norte y hacia el este. ¿Cuánto mediría la nueva área $(a + b)^2$? Si construyera el diagrama de arriba vería, al sumar las dimensiones de todas las pequeñas áreas, que la respuesta era $a^2 + b^2 - 2ab$.

Hallar el cuadrado de (a + b) fue uno de los primeros problemas algebraicos tratados por los griegos hace 2.000 años, utilizando métodos geométricos visuales muy parecidos a éste.

Hoy, al contemplar los sucintos resultados de los primeros descubridores algebraicos, no tenemos ninguna forma de saber qué caminos tomaron para llegar a sus palacios y por qué. Los primeros intelectuales que explicaron totalmente sus métodos para resolver problemas de álgebra -lineales, cuadráticos y cúbicos - fueron los incomparables griegos. Pero escribieron sus soluciones con palabras y diagramas únicamente - un proceso largo y en ocasiones confuso.

3. En donde se adivina los años que vivió

Después, en el crepúsculo de la era griega, apareció un hombre singular, Diofanto, quien ha sido conocido por el «Padre del Álgebra». En lo que respecta a las fechas de su nacimiento y fallecimiento, sólo sabemos que aproximadamente fueron entre los años 100 y 400. No obstante, debido a un peculiar suceso, sabemos de modo preciso cuánto tiempo vivió - 84 años -. Tenemos información debido a que uno de sus admiradores describió su vida en términos de un acertijo algebraico (véase cuadro). Puesto que la ecuación utilizada para solucionar este acertijo es de un sencillo tipo lineal, el propio Diofanto la hubiera mirado con desprecio.

EL ÁLGEBRA SOLUCIONA UN ACERTIJO
Poco se sabe acerca de la vida de Diofanto, el padre griego del álgebra, a excepción de su edad al morir. Ésta se ha conservado en el famoso acertijo que tiene 1.500 años. El acertijo divide la vida de Diofanto en segmentos, cada uno de los cuales es una parte de su total, representado por x. La ecuación completa es
$x - x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 = 3x/28 = 9$ *y finalmente, 84 años*

A Diofanto se le recuerda como el padre del álgebra puesto que fue el primero en abreviar sus pensamientos sistemáticamente con símbolos de su propia creación y debido a que resolvió lo que se conoce por ecuaciones indeterminadas o «diofánticas». Las ecuaciones indeterminadas no contienen suficiente información para ser resueltas con números específicos, pero sí suficientes para adscribir la respuesta a un tipo determinado. Por ejemplo: María tiene un año más que 10 veces la edad de Juan. ¿Cuál es la edad de María? Evidentemente, si Juan tiene 1 año, 2, 3, 4... 100, María tiene 11, 21, 31, 41,... 1.001... La ecuación que liga a sus edades,

$$x = 10y + 1$$

parece trivial al primer golpe de vista, pero da lugar a dos grupos de números enteros que van desde $x = 10y + 1$ hasta el infinito. Al utilizar estos grupos infinitos de números los matemáticos pueden estudiar las propiedades de varios tipos de números enteros tales como los impares, los pares, los primos o los cuadrados perfectos y obtener algunas de las reglas básicas que siguen los números al hacer artificios con ellos.

El análisis de los números desarrollados a partir de las ecuaciones diofánticas recibe el nombre de «teoría de números» y es la más pura de las ramas puras de la matemática actual. Su desarrollo por parte de Diofanto ayudó a los algebristas a considerar una ecuación como una forma de categorizar todos los números de un tipo dado más bien que como una relación únicamente entre los números de un problema específico.

Durante la Edad Media y las edades de ignorancia y superstición una sucesión de matemáticos hindúes y musulmanes transmitieron el álgebra desde un oasis de cultura - un sultanado o califato - al siguiente. No crearon muchos conocimientos nuevos en el proceso, pero por lo menos a través de la práctica despojaron el arte de las ecuaciones de su aura de misterio. En 825 al-Khowarizmi, el mismo sabio de Bagdad que había publicado el sistema posicional de base 10 para la escritura de los números, escribió el primer tratado claro de álgebra. El título de esta obra fue *al-jabr w'al-muqabalah*, «el arte de unir las incógnitas simultáneamente para encontrar una cantidad conocida». La palabra clave *al-jabr*, o «unir» dio lugar a la palabra álgebra. En la Edad Media, «algebraico» indicaba a un hombre que unía los huesos o a un especialista en ecuaciones.

El problema más destacado que dejaron pendiente Khowarizmi y sus predecesores fue cómo interpretar los números negativos - inferiores al cero. ¿Quién tuvo jamás en sus manos menos que nada? En la actualidad el novato en álgebra aprende la llamada «ley de los signos» - que un número positivo de veces un número positivo es igual a más, que un número negativo de veces un número negativo, es igual a más, y que un número de veces positivo un número negativo es igual a menos: Los hindúes, se cree, fueron de los primeros en percibir las posibilidades de estas combinaciones y en darse cuenta que, al resolver una ecuación cuadrática, puede obtenerse una respuesta negativa. Debido a que 2 X 2 y - 2 X - 2 son ambos iguales a 4, por ejemplo, la ecuación $x^2 = 4$ no tiene tan sólo la solución obvia $x = + 2$, sino también la solución $x = - 2$.

4. El no conformista número negativo

Debido a que es difícil captar la idea de los números negativos, pasó mucho tiempo antes de que se les permitiera la entrada en los dominios de las matemáticas y del sentido común. Uno de los primeros en darles abierta consideración fue un matemático italiano, Leonardo de Pisa, llamado también «Fibonacci», que vivió aproximadamente del 1170 al 1250. En una ocasión, mientras comprobaba un problema financiero, vio sencillamente que no podía resolverse si no era en términos de un número negativo. En lugar de quedarse indiferente ante este número, consideró su cuadrado y lo describió como una pérdida financiera. «Este problema - escribió - ha mostrado que es insoluble, a menos que se admitiera que el primer hombre tenía una deuda.»

Los números negativos pueden, naturalmente, ser interpretados de otras muchas formas. Miden distancias inversas a lo largo de una carretera, temperaturas por debajo de cero, tiempos anteriores al presente o minutos anteriores a la hora. En general son números con una flecha de dirección en ellos, una flecha que señala hacia detrás del cero. Por lo que se refiere a los modernos matemáticos, los números negativos no necesitan ser interpretados en modo alguno; simplemente son útiles abstracciones.

A pesar del reconocimiento hipotético de Fibonacci de que una ecuación podría tener una solución negativa, la mayoría de matemáticos continuaron considerando los números negativos con un frío escepticismo hasta el siglo XVI.

UN CUADRADO MÁGICO PRIMITIVO
Un pasatiempo matemático favorito es inventar cuadrados «mágicos». El cuadrado de la derecha, ideado por el pintor alemán Alberto Durero e incorporado a su famoso grabado «Melancholia», está dispuesto en forma tal que las filas verticales, horizontales y diagonales suman 34. Las cuatro casillas centrales dan un total de 34. Durero también logró introducir en las dos casillas centrales, de la parte inferior, la fecha 1514

En este siglo, la época del Renacimiento, las matemáticas también disfrutaron una nueva explosión de creatividad. La concepción del hombre referente a los números empezó a extenderse más allá de los números y de los dígitos con los que podía contar guijarros en una playa. Empezó a considerar a los números como creaciones de su propia mente; eran ficciones, tal vez, pero ficciones que algún día permitirían distinguir las partículas atómicas y dar nombre a puntos en el espacio y en el tiempo. Esta intuición surgió unida a la investigación de la ecuación cúbica o de tercer grado, ecuación que dio la casualidad que representaba el problema matemático principal de la época.

En el siglo XVI se habían hallado soluciones generales para las ecuaciones lineales y cuadráticas, pero no para las cúbicas, una ecuación poco común que incluye la potencia x^3. Pero en 1550 se había alcanzado la conquista de las cúbicas a través de varias aproximaciones independientes. Y, al aplicar estas fórmulas generales a las ecuaciones particulares, sus descubridores no pudieron dejar de observar, con considerable inquietud, que los números comprendidos en el procedimiento no siempre eran positivos.

5. Trabajo intelectual en las callejas

Los hombres que perfeccionaron las cúbicas, italianos todos, constituyeron un grupo de matemáticos tan pintoresco como nunca se dará en el marco de la historia. La mayoría de ellos eran autodidactas, muy poco alejados de la actividad contable, de la resolución de problemas de interés compuesto y de problemas de seguros. Habiéndose elevado por encima del simple cálculo práctico, los grandes algebristas italianos constituían en su mayor parte un grupo sagaz y oportunista, que se encontraba en su elemento tanto entre dos tramposos jugadores de cartas y los espadachines que frecuentaban las callejas del Renacimiento como en las cátedras de Universidad, a las que aspiraban y algunas veces ocupaban. Para dar publicidad a sus proezas de agilidad mental sostuvieron entre sí competiciones para la solución de problemas. Para hacer doblemente difícil su deporte, algunas veces hacían una bolsa común y la depositaban en manos de un tercero, el ganador se lo llevaba todo.

En esta atmósfera combativa estalló la guerra en torno a la ecuación cúbica. La chispa pudo haber sido encendida, sin querer, por un padre franciscano, Luca Pacioli, quien en 1494 publicó un compendio de álgebra, la *Summa de Arithmetica*. Con ella transmitió el álgebra inventada hasta la fecha, y terminó con la irritante observación de que los matemáticos no podían todavía solucionar ecuaciones cúbicas por métodos algebraicos.

El primer hombre en recoger el desafío de Pacioli en torno a las cúbicas fue Scipione del Ferro, el hijo de un fabricante de papel, que llegó a ser catedrático de matemáticas en la Universidad de Bolonia. Habiendo encontrado la primera solución general para todas las ecuaciones cúbicas de la forma simplificada:

$$x^3 + ax = b$$

Del Ferro mantuvo en secreto su descubrimiento, posiblemente para confundir a los adversarios durante las competiciones. Pero en sus últimos días confió su solución a un estudiante, Antonio Fior, quien la utilizó en una disputa de álgebra con un rival, Nicolo Fontana, llamado Tartaglia, o el «Tartamudo».

En la época de la contienda con Fior, Tartaglia había pasado a ser uno de los más sagaces solucionadores de ecuaciones en Italia, y había ideado un arma secreta propia: una solución general para las cúbicas del tipo

$$x^3 + ax^2 = b.$$

Como resultado, cuando Fior le dio un grupo de ejemplos específicos del tipo $x^3 + ax = b$, le respondió con ejemplos del tipo $x^3 + ax^2 = b$. Durante el intervalo concedido para obtener las respuestas, tanto Tartaglia como Fior trabajaron ardorosamente, pero cuando se acabó el tiempo y llegó el día de hacer el cómputo, Tartaglia había solucionado los problemas de Fior y éste no había solucionado los de Tartaglia.

Como nuevo e insigne calculador de Italia, Tartaglia pronto se encontró enfrentado con un antagonista más fuerte -Girolamo Cardano-, hijo ilegítimo de un abogado y a su vez padre de un asesino. Cardano era un astrólogo que hacía horóscopos para los reyes, un médico que visitaba sus enfermos y un escritor científico de cuya pluma emanaron montañas de libros. Fue también un jugador inveterado, siempre balanceándose al borde de la prisión. Pero Cardano siempre salía bien parado. El Santo Padre lo pensionó y Tartaglia le dio la solución de la ecuación cúbica. Cardano la obtuvo con una adulación superior a la capacidad del Tartamudo para rechazarle.

Aunque Cardano juró mantener secreta la solución de Tartaglia de la cúbica, la publicó unos cuantos años después, en 1545, en un tratado monumental sobre ecuaciones, su *Ars Magna* (Gran Arte). Tartaglia, que había estado a punto de escribir su propio libro, pasó el resto de su vida despotricando de Cardano por su estafa. No obstante, el libro de Cardano reconocía el descubrimiento de Tartaglia. También hizo pasar a la historia al alborotador y blasfemo Lodovico Ferrari, que murió a la edad de 43 años, envenenado por su propia hermana. Así como Tartaglia había solucionado la cúbica, de la misma forma Ferrari, cuando todavía estudiaba con Cardano, solucionó las de cuarto grado, o cuárticas. Al descubrir la obra de ambos hombres, Cardano en su *Ars Magna* pudo dar al mundo las soluciones generales de las cúbicas y las cuárticas, divulgando los dos avances algebraicos más trascendentales desde la muerte de Diofanto, unos 1300 años antes.

En el *Ars Magna*, Cardano aceptó formalmente el concepto de los números negativos y enunció las leyes que los rigen. También anticipó otro tipo nuevo de número que denominó «ficticio» o «sofisticado». Tal fue la raíz cuadrada de un número negativo, que es incluso más difícil de comprender que un número negativo propiamente, ya que ningún número real multiplicado por sí mismo da un número negativo: En la actualidad los matemáticos denominan a la raíz cuadrada de un número negativo, como un número «imaginario»; cuando dicha cantidad se combina con un número real, como $1 + \sqrt{-2}$, el resultado se llama número «complejo». Los matemáticos posteriores han mostrado que los números complejos pueden tener toda clase de aplicaciones: dan soluciones a las ecuaciones a que hacen referencia, por ejemplo, a los «estados» de las partículas atómicas en la física atómica.

UN CUADRADO PARA UN CABALLO
El matemático del siglo XVIII Leonhard Euler construyó un cuadrado en el que cada fila horizontal da un total de 260; al detenerse a la mitad de cada uno resulta 130. Aún más intrigante es que un caballo de ajedrez, que empieza sus movimientos (líneas rojas) desde la casilla número 1, puede pasar por las 64 casillas en orden numérico.

UN CUADRADO PERFECTO
Benjamín Franklin creó un cuadrado mágico lleno de trucos (derecha). Cada fila suma 260; deteniéndose a la mitad de cada una da 130. Trazando una línea diagonal de puntos se obtienen 260. Las cuatro esquinas más los cuatro números de en medio dan 260. La suma de cuatro casillas da 130, así como también la suma de cuatro números cualesquiera equidistantes diametralmente del centro.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Como muchos de los conceptos de las matemáticas se aceptan como puras abstracciones. La advertencia de Cardano en torno a su importancia, no obstante, estuvo más que justificada cuando el genio matemático del siglo XIX Carl Friedrich Gauss demostró que toda ecuación tiene exactamente tantas soluciones positivas, negativas o complejas como el grado justo de la ecuación. Cada ecuación de primer grado tiene una solución, toda ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, toda ecuación de tercer grado tiene tres soluciones, toda ecuación de grado n tiene n soluciones. Esta satisfactoria simetría constituye el «teorema fundamental del álgebra».

En gran parte debido a Cardano, las matemáticas salieron de su paso a través de los burdeles del Renacimiento, enormemente enriquecidas. Los italianos habían mostrado que podían hacerse nuevas incursiones más allá de los conocimientos de las épocas antiguas. La deducción rigurosa y la demostración no siempre requerían preceder al descubrimiento. Los matemáticos europeos reavivaron el versátil espíritu de Arquímedes.

6. La magnífica herencia de las culturas antiguas

Las matemáticas tuvieron su duro comienzo hace 50 siglos en las civilizaciones del Oriente Medio. Para los babilonios y los egipcios fue un instrumento útil, esencial en la vida cotidiana. Los astrónomos calcularon los movimientos del sol y la luna para poder diferenciar las estaciones y llevar la cuenta de las cosechas y las festividades. Los hombres aprendieron a medir y a contar de forma tal que pudieran medir los rebaños y comerciar sus productos. Con la geometría podía calcularse el volumen de un granero cilíndrico; con la aritmética, el valor del grano que contenía. En

Egipto - escribió Heródoto - la tierra se repartía «asignando a cada uno trozos cuadrados de terreno de un mismo tamaña» entre todos los que pagaban renta. Si la tierra de un hombre se inundaba, se calculaba su pérdida y pagaba renta «en proporción al tamaño reducido de su tierra». Pronto los hombres de esta región emprendieron aventuras matemáticas de creciente complejidad. Y en el arte y en los instrumentos de cada período, como en la miniatura persa de la página de la derecha, dejaron tras sí unas fascinantes pruebas de su progreso matemático.

MATEMÁTICOS DEL ISLAM
Al tratar de representar el recorrido de las estrellas, los astrónomos del Islam medieval hicieron uso de las matemáticas más inteligibles que el mundo había conocido hasta aquella fe
cha. Esta ilustración persa del siglo XVI muestra un grupo de astrónomos trabajando en su observatorio con una colección de aparatos: compases, un globo terrestre, astrolabios y un reloj.

PRIMITIVOS ASTRÓLOGOS CRISTIANOS
Esta miniatura francesa del siglo XIII frontispicio de un libro de salmos, representa a tres monjes medievales practicando las técnicas astronómicas recientemente importadas del Islam. El hombre del centro divisa una estrella por la barra de un astrolabio mientras que un ayudante lee en las tablas astronómicas y un escribiente anota las observaciones

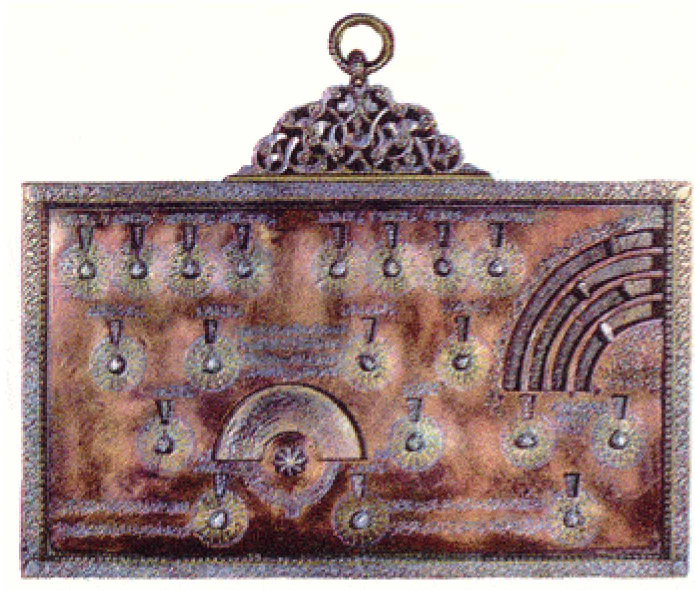
7. La influencia perversa de las estrellas

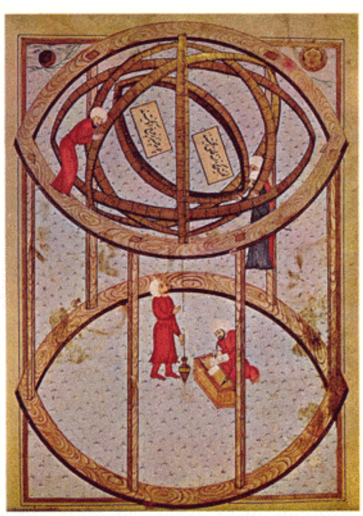
Desde los tiempos más remotos, los matemáticos han dirigido su mirada a los cielos. Los astrónomos del Islam de la Edad Media, que aprendieron la forma de construir instrumentos matemáticos en los libros griegos, ya habían establecido observatorios y representado los movimientos de las estrellas y planetas.

No obstante, a medida que la cultura matemática se filtró en la Europa renacentista, amante de la ciencia pero todavía vinculada a la superstición, una profunda división empezó a aparecer entre la verdadera ciencia de la astronomía y la falsa ciencia de la astrología. "Dios no creó los planetas y las estrellas con la intención de que dominaran al hombre", comentó el gran físico suizo Paracelso en 1541, "sino para que, igual que otros seres, le obedecieran y sirvieran".

MAPA MUSULMÁN DE LOS CIELOS
Este astrolabio del siglo XIII está grabado con un mapa estelar que puede hacerse girar para encontrar la posición de las estrellas en cualquier noche. En su lado opuesto hay una barra movible para fijar el ángulo del sol y las estrellas, a fin de determinar la latitud y la hora.

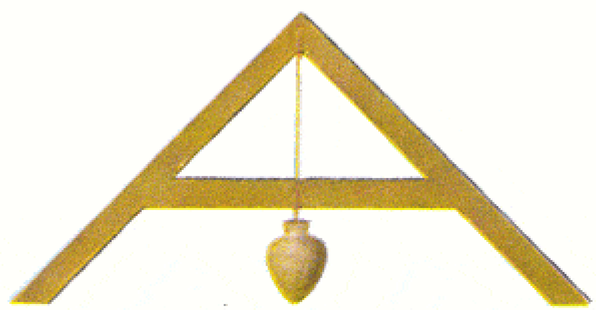
ASTROLOGÍA SIN ESTRELLAS
Utilizando un calculador geomántico como el de arriba, los musulmanes del siglo XIII podían hacer un horóscopo basado en el azar más bien que en la observación. Se echaban suertes y los resultados, marcados en el disco, daban las posiciones arbitrarias de los planetas.





LA INCLINACIÓN DE LA TIERRA
Alineando los anillos superiores de una esfera armilar (izquierda) con varios cuerpos celestes, los astrónomos musulmanes del siglo XVI calculaban el tiempo del día o del año, medían la inclinación del eje de la tierra o la altura del sol. Es una copia de un modelo griego

INGENIERÍA PARA LOS MUERTOS
Esta plomada, utilizada por los constructores egipcios para hallar la vertical al cortar o al colocar ladrillos o piedras, fue también un amuleto colocado en las tumbas en señal de buena suerte después de la muerte. Las piedras de la Gran Pirámide, tienen sólo una variación media respecto a una línea recta de 2 mm. y se unieron con una aproximación de 2 mm.



8. Unas matemáticas para granjeros, agrimensores y constructores de pirámides

Entre los antiguos pocos consiguieron dejar un recuerdo más impresionante de realizaciones prácticas que los egipcios. Sus pirámides masivas fueron grandes realizaciones de ingeniería y también obras maestras de sabiduría matemática. Utilizando instrumentos tales como el que se reproduce arriba, los constructores egipcios hicieron que los cuatro lados de la Gran Pirámide de Cheops estuvieran situados directamente al norte, sur, este y oeste, con asombrosa exactitud. Dentro de las pirámides son más evidentes las proezas matemáticas de los egipcios. Murales como los que aquí vemos demuestran el gran número de formas en que se utilizaron las matemáticas.

CONTABILIZACIÓN DE LO COTIDIANO

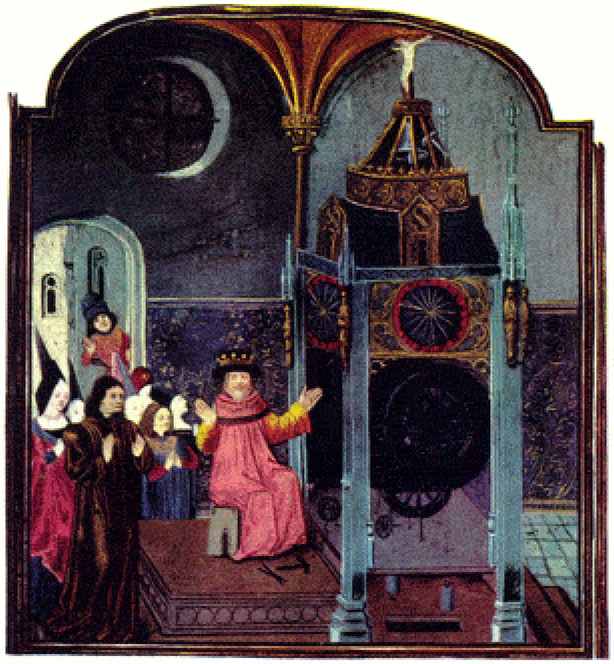
La sección de arriba de un mural de 3.000 años (parte superior) muestra a los agrimensores llevando una cuerda de 12 nudos equidistantes. Transformando dicha cuerda en un triángulo rectángulo, es útil para fijar lindes de los terrenos. La parte inferior del mural muestra cestos de grano llevados al almacén y a los escribientes haciendo las cuentas.

Los egipcios eran muy fuertes en geometría. Tenían fórmulas sencillas para hallar el volumen de los sólidos, como una pila de grano y los cestos para transportarlo (mural de arriba). Y aunque comparadas a la grandeza olímpica de la geometría griega, las matemáticas egipcias fueron poco más que una herramienta, eran una herramienta sumamente afilada.

LA GRAN CASTA DE CONTABLES
Los egipcios consideraron tan importantes las matemáticas que sus misterios fueron confiados a una clase hereditaria privilegiada de escribientes. El fragmento de un mural representa un escribiente en su mesa. La sección inferior muestra al escribiente desplegando un nuevo papiro, así como a unos ansareros, uno de los cuales llena los cestos de gansos.

9. Entre los antiguos una exacta cuenta de horas y días

La civilización y los horarios van de la mano, los horarios significan control del tiempo, y por lo tanto matemáticas.



LA GRAVEDAD GUARDA LAS HORAS Los espectadores miran con sorpresa el extraño reloj mecánico que aparece en esta miniatura francesa del siglo XV. La invención de dichos instrumentos fue una proeza de la tecnología. La mayoría de los relojes mecánicos medievales como éste obtenían su fuerza por medio de un peso suspendido cuyo descenso gradual hacía girar una serie de ruedas.

Desde un principio, el tiempo estaba vinculado a los movimientos de los cuerpos celestes. El cálculo de la duración del día, a partir de la rotación de la tierra, era sencillo; el cálculo del número de días en un año, por la revolución de la tierra alrededor del sol, era más complicado. A pesar de esto, 3.000 años antes de Jesucristo los babilonios habían dividido el año en 360 días -logro matemático relativamente adelantado. Los calendarios egipcios eran incluso más exactos, con un año de 365 días y, más tarde, provisión para un año bisiesto cada cuatro años. Hasta los tiempos modernos, los calendarios eran propiedad únicamente de la iglesia y la nobleza; muchos de ellos estaban hechos a mano y estaban decorados artísticamente como el Libro de Horas.

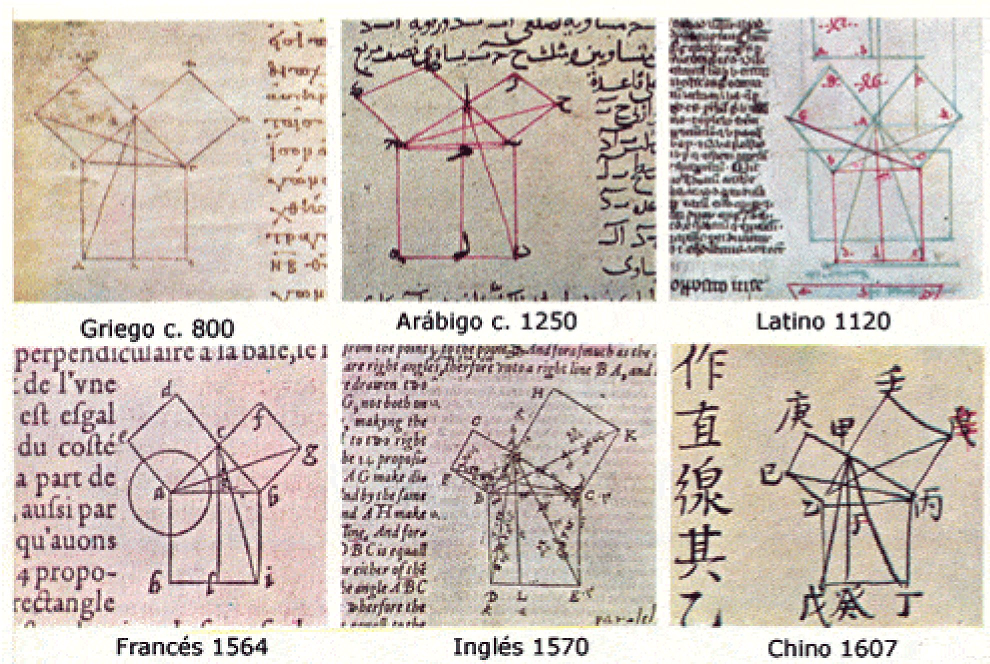
LIBRO DE ORO DE LAS HORAS Esta lámina adornada con dorados pertenece al calendario más famoso del mundo, el Libro de las Horas del siglo XV del Duque de Berry. La influencia matemática de los musulmanes era muy manifiesta en Europa, como puede verse por los signos numéricos hindú-arábigos para los 30 días de noviembre (anillo interior del semicírculo). Los tres anillos siguientes predicen las lunas nuevas durante 19 años. Los tres anillos exteriores contienen signos astrológicos.

Nadie sabe cuándo el hombre descubrió por primera vez que la sombra de un palo podía medir los movimientos del sol a través del cielo, pero ciertamente fue con anterioridad al año 1500 a. de c. Después del primitivo reloj de sol vinieron los relojes de agua, los relojes de arena y las velas. Pero la necesidad en los días nublados de un control del tiempo que no requiriese constante atención, no fue satisfecha hasta el siglo XIV, con la invención del reloj mecánico.

UN RELOJ DE SOL DE BOLSILLO
El reloj transportable del siglo xv de la izquierda venía equipado con un compás debajo la tapa central. Esferas más complicadas muestran cómo progresaba la tecnología; sus accesorios comprendían un ajuste para distintas latitudes y una plomada para nivelación.

10. Después de la "Edad Oscura" florecimiento de la Ciencia de los Números

En la época de los griegos, las matemáticas habían llegado a constituir un cuerpo de conocimientos tan vasto que ya no podía transmitirse verbalmente. Los griegos escribieron cientos de libros, tratándolas por primera vez como cuestión que por sí misma valía la pena estudiar, no simplemente como un instrumento de aplicación. En los siglos de ignorancia que siguieron, gran parte de este tesoro matemático se perdió. Pero se conservó lo suficiente para que los intelectuales de la última parte de la Edad Media, de nuevo lanzados a la investigación científica, desenterrasen a los clásicos antiguos y los tradujeran a muchas lenguas.



UN TEOREMA EXTENDIDO POR EL GLOBO

El teorema de Pitágoras, expuesto por primera vez hace más de 2.000 años, era conocido en todo el mundo civilizado en el siglo XVII. En la parte superior izquierda hay un texto griego de la demostración de Euclides, y cinco traducciones. Los chinos estaban familiarizados con el teorema en tiempos de Pitágoras.

ANSIA DE EDUCACIÓN DE LOS EUROPEOS

Este tapiz francés del siglo XVI muestra a «La Señora Aritmética» enseñando a jóvenes nobles a calcular, utilizando los contadores de mesa, manipulados igual que las fichas del ábaco. En esta época los jóvenes europeos, saliendo de la ignorancia medieval, concurrían a las nuevas escuelas en busca de educación. Un enlace feliz entre curvas y cantidades

Capítulo 4
Un enlace feliz entre curvas y cantidades

Contenido:

1. *Introducción*
2. *Una sesión en una estufa*
3. *Aplicación de la trigonometría a la astronomía*
4. *Filosofía con un sombrero con plumas*
5. *Las matemáticas de la belleza en la naturaleza y en el arte*
6. *Agradable geometría en las creaciones naturales*
7. *La regla dorada de la arquitectura del mundo*
8. *La perspectiva es la geometría del artista*
9. *Productos de una técnica progresiva*
10. *El legado de la naturaleza a los constructores*

1. Introducción

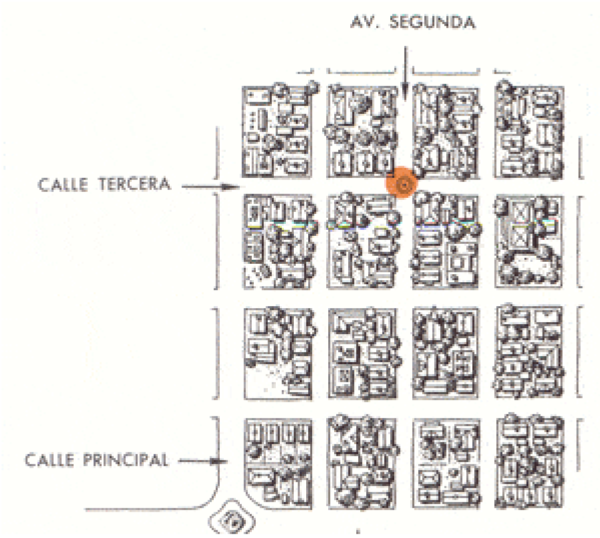
En el año 1616 un joven aristócrata francés llamado René Descartes se licenció en Derecho en la Universidad de Poitiers y se dispuso a rehacer el mundo. Estaba profundamente descontento de lo que había aprendido de los académicos, todavía esclavos de los pensadores de la antigüedad. Descartes desdeñó la filosofía de los antiguos por su evidente insuficiencia de verificación. «Vi, señaló más tarde, que había sido cultivada durante mucho tiempo por hombres distinguidos, pero que a pesar de ello no hay ni una sola materia dentro de su esfera que no esté todavía en discusión. »

COMO LOCALIZAR LOS PUNTOS DEL GLOBO
El mapa alemán del siglo XV de arriba, basado en los principios expuestos por Ptolomeo en el año 150, es uno de los primeros que utilizó líneas curvas de latitud y longitud. En la geometría analítica, desarrollada en el siglo XVII, se utilizan «trazados» similares para localizar los puntos en una superficie plana.

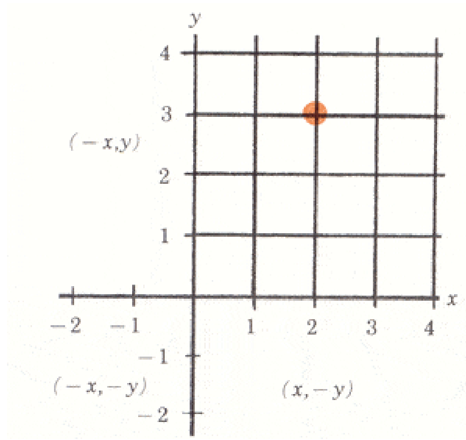
Descartes confiaba en que podría remediar todo este enredo. Aunque tal ambición era poco común en un muchacho de 20 años, en su caso sí iba a tener un resultado muy poco común. Iba a hacer todo cuanto soñó, y a refundir el pensamiento humano como sólo lo han hecho un grupo de hombres en el curso de la historia. Lo que todavía es más desusado, iba a llevar a cabo su resolución por medio de una filosofía fresca que surgió de las matemáticas. Ésta fue la «geometría analítica», que unificó toda la aritmética, el álgebra y la geometría anteriores en una técnica unitaria - una técnica consistente en considerar los números como puntos en un gráfico, las ecuaciones como formas geométricas y las formas como ecuaciones -. La geometría analítica se transformó en los cimientos sobre los que se construyeron la mayor parte de las matemáticas superiores actuales y gran parte de las ciencias exactas.

El mundo al que salió Descartes en el invierno de 1616 se reavivó con ideas frescas e intrépidas hazañas: los protestantes proclamando sus austeros patrones de conciencia individual; naciones rivales proyectando imperios en el extranjero; los comerciantes holandeses de pieles haciendo tratos en Manhattan; los colonos ingleses luchando para sobrevivir en Jamestown. Los amantes del teatro en Londres lamentaban la reciente muerte de Shakespeare. Monteverdi estaba componiendo las primeras grandes óperas mundiales. William Harvey había justamente iniciado las conferencias en que describía el corazón, no como un centro de emociones, sino como una bomba para la sangre. Kepler estaba preparando la publicación de la tercera y última de sus leyes. La idea de que el sol es el centro del sistema solar - propugnada por el astrónomo polaco Copérnico - había sido precisamente calificada de herejía por la Santa Iglesia en Roma; Galileo, ocupado con el telescopio que acababa de descubrir había sido prevenido de que cesara en su entusiasta apoyo de la idea.

En medio de esta amplia onda de creatividad, el joven Descartes llegó al convencimiento de que el mundo necesitaba una fórmula que disciplinara el pensamiento racional y unificara el conocimiento. Se dispuso a encontrarla en el «conocimiento de mí mismo» y en el «gran libro del mundo». Después de probar brevemente los placeres de París, se convirtió en caballero de armas del príncipe holandés de Nassau y después del duque alemán de Baviera. Mientras fue soldado pasó la mayor parte del tiempo, como él mismo dice, «con la cabeza y las orejas en el estudio de las matemáticas, rama del conocimiento que le encantaba... debido a la certidumbre de sus pruebas y la evidencia de sus razonamientos». En el espacio de dos años, a la edad de 22, empezó a desarrollar su «geometría analítica». En un año más había ideado también «el discurso del método», que iba a hacerle famoso como filósofo.



CÓMO ENCONTRAR UNA FUENTE
Este mapa demuestra en forma gráfica cómo la intersección de dos calles puede localizar un lugar. Sin peligro de confusión, dos amigos pueden citarse diciendo simplemente: «Nos vemos en la fuente que está en la Avenida Segunda y la Calle Tercera».



ALLÍ ESTA EL PUNTO
Un trazado de líneas similar sitúa un punto en una superficie. Los matemáticos dicen que el punto que se ve aquí está en 2, 3. El primer número representa la distancia a lo largo del eje horizontal, o eje de la x, y el segundo la distancia a lo largo del vertical o y

2. Una sesión en una estufa

Este «método» acudió a su mente durante un solo día de revelación en un campamento militar a orillas del Danubio. Era un día frío y Descartes lo pasó meditando en una habitación pequeña y caliente conocida en aquellos tiempos por una «estufa». Lo que formuló en la estufa y elaboró subsiguientemente, fue la doctrina de que todo el conocimiento - tanto pasado como futuro - debía de elaborarse en términos de razonamiento matemático. Descartes propuso que los intelectuales contemporáneos dejaran de fiarse tan profundamente de las ideas antiguas y que empezaran de nuevo. Indicó la necesidad de que trataran de explicar toda la naturaleza a través de un esquema científico deductivo. Éste - consideró- debía empezar con variedades axiomáticas simples y proseguir hasta los conceptos difíciles. «Las largas cadenas de razonamientos simples y fáciles a través de los cuales los geómetras están acostumbrados a alcanzar las conclusiones más difíciles de sus demostraciones -escribió - me habían llevado a imaginar que todas las cosas de cuyo conocimiento son capaces los hombres están mutuamente conectadas entre sí de la misma forma.»

Esta visión de Descartes sigue siendo la ambición de la ciencia moderna. Pero el propio Descartes tuvo dificultad en establecer los axiomas básicos de los que tenía que partir su gran diseño. Cuanto más buscaba verdades fundamentales, menos las encontraba. Al final no pudo encontrar ninguna a excepción de la simple afirmación, "*Cogito, ergo sum*" - «Pienso, por lo tanto, existo» - con la que quería decir que no podía hallar bases mejores para empezar a comprender el mundo real que la habilidad del hombre para utilizar su propia mente.

Hasta 18 años después de la revelación en la estufa, Descartes no compartió su filosofía con el público. Realizó una prueba provisional en un libro y después voluntariamente la suprimió, como deferencia a su fe católica, ya que suscribía con ella las ideas herejes de Copérnico en torno al universo. Finalmente, después de repetidas sugerencias de los amigos, Descartes, en 1637, publicó el Discurso sobre el método para dirigir correctamente la razón. Obra fundamental en filosofía, inmediatamente le situó como uno de los grandes pensadores de la época.

Descartes concluyó *El Método* con tres ejemplos concretos sobre cómo podía ser aplicado. Los dos primeros pretendían explicar el comportamiento de las lentes y el movimiento de los astros. El tercero fue una nota marginal de 106 páginas, *La Geometría*, a la que los matemáticos todavía se refieren afectuosamente por su nombre en francés, *La Géométrie*. Este extenso apéndice constituía, según el filósofo inglés del siglo XIX, John Stuart Mill, «el mayor paso unitario jamás realizado en el progreso de las ciencias exactas». Es extraño que Descartes enterrara esta joya al final de su libro. En los tres siglos siguientes la geometría analítica iba a dejar atrás la filosofía como base para la creación de la ciencia que había soñado Descartes. Y a pesar de esto él, propiamente, nunca la continuó más allá de su breve original.

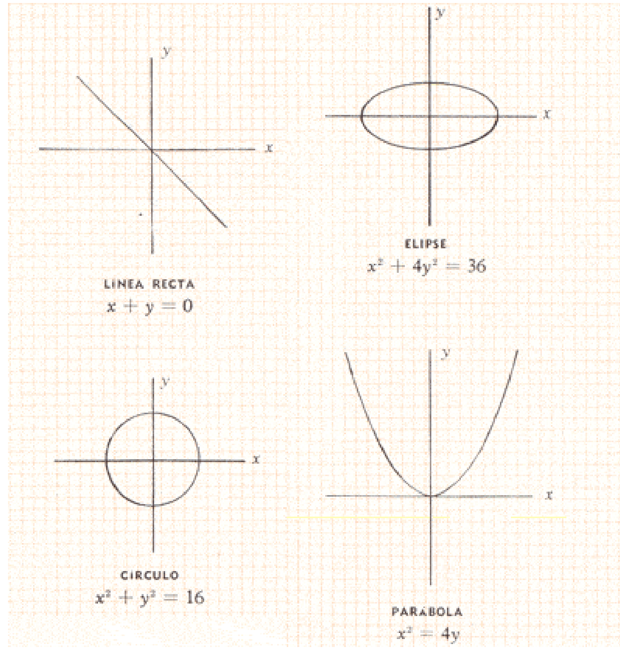
La Géométrie propugnaba la idea de que un par de números pueden determinar una posición en una superficie: un número como una distancia medida horizontalmente, el otro como una distancia medida verticalmente. Esta idea se ha convertido en familiar a quien utiliza papel cuadriculado, lee el plano de una calle o estudia las líneas de latitud y longitud en un atlas. El papel cuadriculado no se había inventado en la época de Descartes, pero el concepto del gráfico propiamente, con su utilización de líneas cruzadas para fines de referencia, estaba contenido en su obra. Descartes mostró que con un par de líneas rectas que se corten como varas de medir se podía construir toda una red de líneas de referencia, en las que los números se podían designar por puntos; que si las ecuaciones algebraicas eran representadas como secuencias de puntos, aparecerían como formas geométricas; y que las formas geométricas, a su vez, podían traducirse en secuencias de números representadas por ecuaciones. En honor a Descartes denominamos a las primitivas líneas que se cortan, el sistema de «coordenadas cartesianas» en el que la línea vertical se conoce por *el eje y*, y la línea horizontal por *el eje x*. La forma en que funciona el gráfico cartesiano en términos de un plano de calles, puede verse en los esquemas anteriores.

A través del concepto de coordenadas con que expuso su geometría analítica, Descartes dio a los matemáticos nuevo enfoque para el tratamiento de la información matemática. Mostró que todas las ecuaciones de segundo grado, o cuadráticas, cuando se representaban como puntos unidos, se convertían en líneas rectas, círculos, elipses, parábolas o hipérbolas - las secciones cónicas en las que Apolonio había derrochado tanto ingenio unos 1900 años antes -. Cuando la ecuación $x^2 - y^2 = 0$ se representa gráficamente, se transforma en dos líneas rectas que se cortan, la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ se transforma en un círculo, $x^2 - y^2 = 9$ en una hipérbola, $x^2 + 2y^2 = 9$ en una elipse, y $x^2 = 9y$ en una parábola. Lo que es más, Descartes prosiguió hasta demostrar que la ecuación general que representaba a todas las cuadráticas

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

se transforma inevitablemente en una curva cónica cuando se la representa.

LA REPRESENTACIÓN DE UNA ECUACIÓN
Las representaciones de la derecha muestran algunas formas geométricas familiares con las ecuaciones a que dan lugar. Para representar una ecuación: hágase x = a un número; resuélvase la ecuación para y; fíjese un punto en el papel determinado por valores de x e y como se explica anteriormente. Hágase x igual a otro número, hállese y, sitúese este punto en la página. La línea que une muchos de estos puntos es la gráfica de la ecuación.



Al ir más allá de las ecuaciones cuadráticas, Descartes estableció que cada clase de ecuaciones da lugar a toda una nueva familia de curvas -cardioides, conchoides, foliums de pétalos, helicoides, lemniscatas. El grado de una ecuación determina el número máximo de puntos de intersección que la curva representativa de la ecuación puede tener con una línea recta. Una curva de primer grado -es decir, una línea recta puede cortar a otra línea recta sólo una vez. Una curva cónica de segundo grado puede ser cortada por una línea recta sólo en dos puntos. Las curvas cúbicas, las cuales una línea recta sólo puede cortarlas tres veces, tienen a menudo forma de S. Las curvas de cuarto grado, con cuatro posibles puntos de intersección, pueden tener la forma de una W o un número 8. Incluso la figura femenina, con su forma de reloj de arena, puede expresarse algebraicamente con una ecuación.

Las curvas que representan a una ecuación de un cierto grado tienen muchas características comunes - tantas, de hecho, que cada una caracteriza por sí misma una clase de curvas y hace que un matemático pueda hablar de una curva de «quinto grado» o de «séptimo grado» a un colega y suscitar un gran conjunto de características geométricas específicas, peculiares a todos los miembros de la familia de curvas en cuestión.

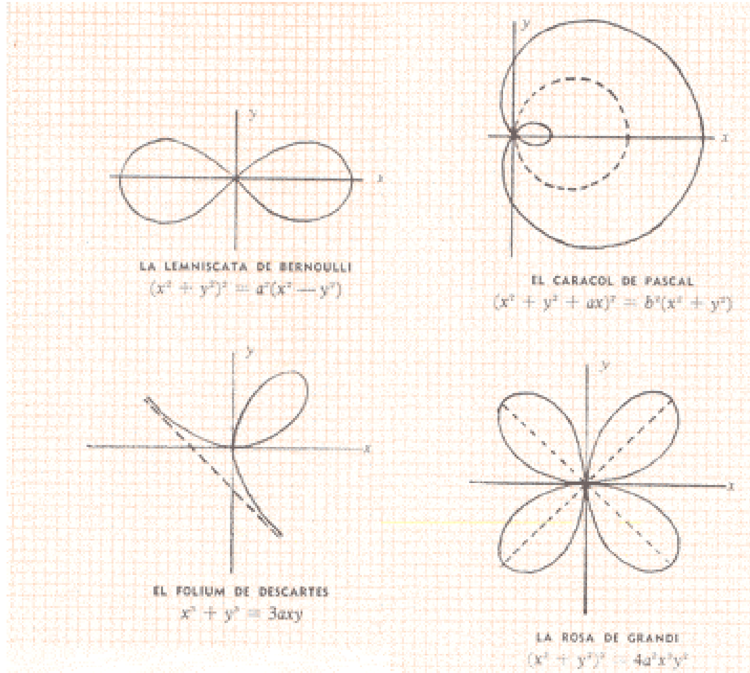
Gracias a la geometría analítica, cada ecuación puede convertirse en una forma geométrica y toda forma geométrica en una ecuación, Algunas formas, ciertamente, pueden ser representadas solamente por ecuaciones indefinidamente largas y algunas ecuaciones representan formas difíciles de visualizar llenas de discontinuidades y puntos múltiples. No obstante, toda forma geométrica tiene su equivalente en forma algebraica.

En su contenido totalmente comprensivo del conocimiento matemático pasado, la geometría analítica iba a crecer mucho más allá de la breve presentación de Descartes, y no iba a tocar nada de las matemáticas sin transformarlo. Ramas del pensamiento matemático que parecían diferentes fueron conducidas ahora a su vertiente principal. Una fue la antigua técnica de la trigonometría, otra la reciente creación de los logaritmos.

3. Aplicación de la trigonometría a la astronomía

La trigonometría -el estudio de los triángulos- había servido, desde los primitivos babilonios hasta justamente antes de Descartes, como un auxiliar puramente práctico de la agrimensura, la astronomía y la navegación. Los astrólogos y los navegantes necesitaban calcular distancias no mensurables con regla o con cinta métrica. La trigonometría les permitió realizar tales cálculos aplicando determinadas reglas básicas acerca de las relaciones entre los lados y los ángulos de cualquier triángulo, por grande o pequeño que fuera. Estas relaciones, o proporciones, fueron establecidas inicialmente por los griegos para analizar los arcos de los círculos. El primer hombre que se sabe empleó estas relaciones fue el astrónomo Hiparco, quien las utilizó alrededor del año 140 a. de J. para encontrar distancias en línea recta a través de la bóveda celeste.

CURVAS DE FORMAS ESPIRALES
Estas caprichosas curvas con nombres peculiares son ejemplos de exhibicionismo matemático por parte de los matemáticos Bernoulli, Descartes, Etienne Pascal y Grandi, y tienen poco valor práctico. A pesar de esto cada una de las curvas es un gráfico real de la ecuación de abajo y se traza precisamente de la misma forma que las figuras más simples de la página anterior.



En la actualidad las tres relaciones más utilizadas se refieren al triángulo y son denominadas seno (abreviatura, sen), coseno (cos) y tangente (tg). Lo que estas relaciones representan exactamente, y la forma en que se aplican para talar un árbol sin exponerse a romper el tejado, puede verse en las páginas siguientes.

Las relaciones representadas por el seno, coseno y tangente de un ángulo varían en valor numérico a medida que varía la abertura de los ángulos. Los griegos calcularon dichos valores y los dispusieron en tablas trigonométricas que los matemáticos más tarde perfeccionaron y ampliaron. Estas tablas fueron, durante mucho tiempo, una mera forma de matemáticas aplicadas, de los navegantes celestes y terrestres. Después, el notable algebraico francés, Francis Vieta, que precedió a Descartes en medio siglo, hizo una observación vital. Percibió que una relación o razón trigonométrica podía utilizarse para resolver una ecuación algebraica; que, en efecto, una serie de números de una tabla podían representar los valores sucesivos tomados por una incógnita. La proposición de que «el seno del ángulo x es y» puede también escribirse así

$$y = \text{sen } x$$

una ecuación válida, digamos, como $y = x^2 + 7x$. La forma en que el descubrimiento de Vieta amplió el alcance de la trigonometría se aclaró aún más cuando Descartes introdujo su técnica de los gráficos. Una ecuación tal como y = sen x podía ahora representarse de hecho, punto por punto, para crear una curva en un papel; incidentalmente, constituye una línea ondulada sin fin - el equivalente gráfico del flujo y reflujo de la corriente eléctrica en un cable de corriente alterna.

Al igual que con la trigonometría, el sistema cartesiano alcanzó y absorbió la parte externa de las matemáticas que todo estudiante de bachillerato conoce por el nombre de «logaritmos». Un logaritmo es el «exponente» de un número, que indica a qué potencia debe de elevarse el número a fin de producir otro número dado. Al familiarizarse con los logaritmos, pueden ahorrarse gran cantidad de operaciones aritméticas. Esta fue precisamente la intención del inventor de los logaritmos, John Napier, barón de Merchiston, el mismo que utilizó por primera vez la coma decimal en su contexto moderno.

Este modesto e incansable escocés concibió la idea de los logaritmos cuatro décadas antes de que Descartes publicara su Método. Después de más de 20 años de cálculos, Napier mostró, en esencia, que todo número - independientemente del número de dígitos que contenga - puede expresarse en términos del número 10 elevado a tal y cual potencia. De la misma forma que 100 es 10^2, 56 es $10^{1,74819}$ y 23 es $10^{1,36173}$. Además, cuando los exponentes de estos dos últimos 10 se suman, el resultado es una nueva potencia de 10, $10^{3,10992}$, que al hacer la operación resulta 1.288, o 56 multiplicado por 23. Al restar el menor de estos dos exponentes de 10 del mayor resulta $10^{0,38646}$ que al hacer la operación es el número que resulta de dividir 56 por 2,43478.

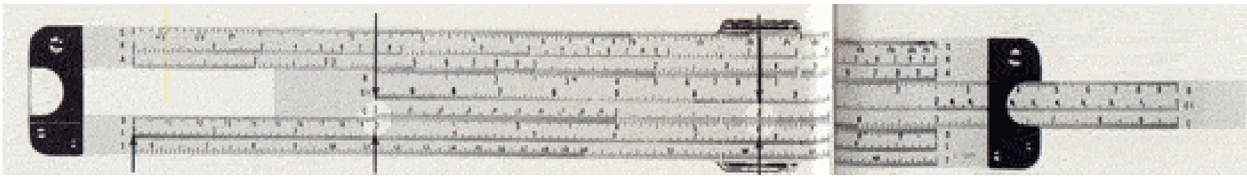
UN TRIBUTO MAL EXPRESADO
En 1937, Francia hizo una emisión de sellos de correo en honor a René Descartes, en el 300 aniversario de su invención de la geometría analítica. La primera edición (arriba) por error denominó la obra principal de Descartes «Discours sur la méthode», teniéndose que cambiar en una segunda edición por su título correcto «Discours de la methode» (abajo). Se imprimieron tantos sellos equivocados que su valor para los coleccionistas no es superior al de los de la versión corregida.

Los matemáticos lo han enunciado en las «leyes de los exponentes»: la suma de los exponentes es equivalente a la multiplicación, y la resta de éstos es equivalente a la división. Napier arregló sus cálculos logarítmicos en tablas apropiadas.

Para calcular 56 multiplicado por 23 no se precisa más que un lápiz y un pedazo de papel o, a lo sumo, la ayuda manual para abreviar cálculos conocida por la regla de cálculo, artilugio que consiste en un par de reglas divididas en escalas logarítmicas y unidas de forma tal que una pueda deslizarse sobre la otra (ilustrado abajo).

Donde el sublime trabajo de Napier mayor resonancia adquiere es en las laboriosas y largas computaciones - cuando, por ejemplo, un economista divide 503.443.000.000 dólares, nuestro producto nacional bruto en 1960, por nuestra población en aquel año, 179.323.175 habitantes.

El desarrollo del sistema cartesiano hizo posible trazar curvas para las relaciones logarítmicas tales como y = log x con tanta facilidad como lo hizo para las relaciones trigonométricas, tales como y = sen x. Al hacer posible que tales ecuaciones, así como todas las ecuaciones algebraicas, se expresaran por medio de líneas y puntos visibles y viables, el gráfico cartesiano, en efecto, captó y suavizó las cambiantes relaciones entre cantidades interrelacionadas. De este triunfo derivó un concepto fundamental para todas las matemáticas superiores: la idea de «variables» y «funciones».



UNA REGLA DE CALCULO

Las reglas de cálculo son, en efecto, tablas logarítmicas compactas que facilitan la rapidez en el cálculo. En este ejemplo, para multiplicar dos por tres, el índice 1) de la escala C se sitúa sobre el 2 de la escala D de abajo, la línea marcada en el plástico deslizante se sitúa sobre el 3 de la escala C. La respuesta, o sea 6, aparece en el lugar en que la línea fija del plástico deslizante cruza la escala D

Si x e y pueden relacionarse a través de una ecuación o gráfico, se denominan «variables»: es decir, una cambia de valor cuando varía la otra. Las dos tienen lo que se conoce por relación funcional; la variable cuya variación procede del cambio de la otra variable se denomina una «función» de aquella otra variable.

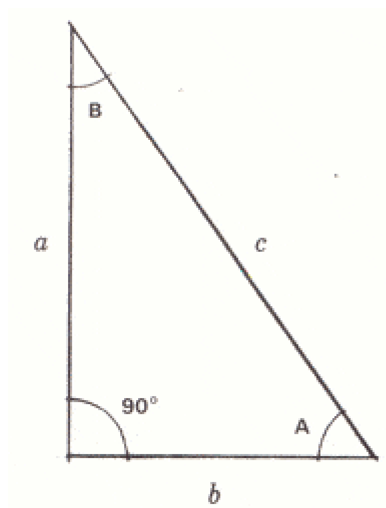
LA MEDICIÓN DEL TRIÁNGULO

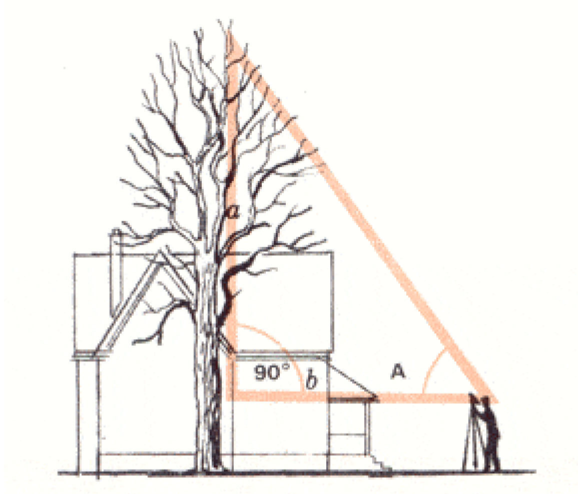
La tabla de abajo muestra que el seno, coseno y tangente de los ángulos pequeños de un triángulo rectángulo son relaciones entre los lados de un triángulo. Por lo tanto conociendo dos lados, o un lado y un ángulo, es posible fijar todos los de un triángulo.

$$\text{sen}\,A = \frac{a}{c} \qquad \text{sen}\,B = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad \tan B = \frac{b}{a}$$





UNA TANGENTE DE GRAN UTILIDAD
Para medir la altura de un árbol se precisa la fórmula de la tangente de arriba. Hállese el ángulo A con un teodolito y la distancia B con una cinta. La tangente de A es igual a a dividido por b. La solución 'de la ecuación da la altura del árbol por encima del teodolito.

Un sen, o cos, o una tangente de un ángulo, es una función de aquel ángulo; de forma análoga, un logaritmo es una función del número que representa. En una ecuación, y es una función de x si los valores de y varían cuando lo hacen los de x.

Aunque aparentemente de interés remoto para todos, excepto el matemático, la idea de variables y funciones ha pasado a ser ubicua. Si se muestra que la humedad del aire viene afectada por la temperatura, es una función de la temperatura. La presión sanguínea de un gerente, que sube a cada cumpleaños, es una función de su edad. La distancia recorrida por su coche es una función del tiempo y de la velocidad.

Más allá de dar ímpetu al concepto de variables y funciones, más allá de hacer posible un alcance más completo a los anteriores descubrimientos matemáticos, la contribución básica del sistema cartesiano a las matemáticas fue esencialmente filosófica. Al permitir una amplia intercambiabilidad de puntos de vista, dio lugar a la libertad matemática conocida ahora por «análisis», que abarca la mayor parte de las matemáticas superiores inventadas desde la época de Descartes.

Un algebraico que se embarca en una de sus salidas más abstractas y termina dudando acerca de su dirección, puede trazar curvas para sus ecuaciones, aclarando más de esta forma las x y las y. El que practica la geometría, por otro lado, puede realizar largas cadenas de razonamientos con una rapidez considerable manipulando las formas como ecuaciones.

En toda cuestión de aplicaciones concretas, todo cambio y movimiento en la naturaleza puede considerarse ahora en forma de doble contenido cual es el de la ecuación o la curva. El constructor de un puente puede expresar la curva de un cable flojo como una ecuación y, a través de sus x e y, aumentar la comprensión sobre las tensiones del puente. El científico experimental puede transformar todas las interrelaciones y fluctuaciones que mide en la naturaleza en conjuntos de números que pueden ser representados sobre papel. Si, después de repetidas pruebas de un solo experimento, obtiene la misma curva y ecuación, puede llegar a formular una ley que vale la pena de interpretar por medio de palabras e ideas. Una vez comprendida totalmente, puede combinarse con otras fórmulas para sugerir nuevas posibilidades acerca de la naturaleza.

4. Filosofía con un sombrero con plumas

El hombre que abrió la puerta a las matemáticas superiores, paradójicamente, no se dedicó personalmente mucho tiempo a las matemáticas. En lugar de ello, Descartes, dedicado profesionalmente a la filosofía, decidió reconstruirla según sus propias luces. De regreso a París, después de la guerra, resultaba una figura excéntrica, con una espada al cinto, un sombrero con plumas. Por haber invertido su herencia hábilmente, vivió sin preocupaciones, padeció de mala salud y jamás se levantó antes de las once de la mañana. Los admiradores le molestaban; estuvo siempre buscando paz y tranquilidad para poder pensar. Se dedicó a investigaciones sobre la fisiología humana, cadáveres de animales, glaciares, meteoros, arco iris y altitudes de las montañas. Antes de la publicación de su Método insinuó que había hallado un medio de hacer al hombre omnisciente.

Aburrido de París, Descartes se fue a Holanda. Allí, en 1637, su monumental obra finalmente vio la luz de la imprenta. Durante el largo tiempo que duró su publicación, otro matemático, el teórico del número Pierre de Fermat, había desarrollado independientemente una buena parte de geometría analítica por su cuenta. Pero Fermat también tardó en escribir sus ideas y, por lo tanto, al final, a Descartes no se le despojó del reconocimiento de su invención.

Sólo el fraile francés padre Mersenne, que realizó la función de cámara de compensación científica de la época, y transmitió todas las comunicaciones de Descartes a los colegas filósofos y matemáticos, siempre sabía su dirección.

Descartes terminó de una forma tan desastrosa, en su aspecto tragicómico, como las trágicas muertes de Arquímedes e Hipatia. Durante su estancia en Holanda su popularidad, de un modo u otro, llegó a oídos de la reina Cristina de Suecia.

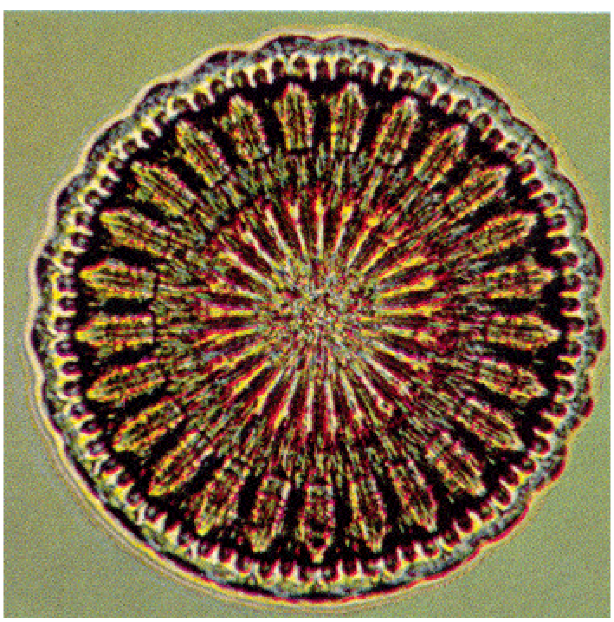
Descartes rechazó a esta amazona del Norte durante un año entero, pero cuando ella le mandó un barco de guerra a buscarlo, el halago era demasiado para él y subió valientemente a bordo. Cristina tenía grandes esperanzas en él. Iba a ayudarle a fundar una academia sueca de artes y letras y él iba a instruirla privadamente en filosofía. Liberalmente le concedió un período de tres semanas de aclimatación y después le arrastró - demasiado atemorizado para protestar mucho - a su temible régimen de propio mejoramiento. En cada una de las crudas mañanas del invierno escandinavo, antes de que apuntara el alba, en la enorme librería de su palacio en la que sólo la mitad tenía calefacción, Descartes trató de reunir su entumecido ingenio y exponer las investigaciones de la filosofía y las matemáticas. Pero el inveterado intelectual de las once de la mañana duró exactamente once semanas. Después, a la edad de cincuenta y cuatro años cogió la gripe y murió, demostrando así que los cuidados que se prodigó durante toda la vida eran acertados y los de la testaruda reina equivocados.

Era el año 1650, cuando los colegas de Descartes habían empezado ya a descarnar los huesos de *La Géométrie*. En aquella fecha un muchacho de ocho años llamado Isaac Newton hacía volar cometas con faroles para asustar a los habitantes de los pueblos del norte de Witham en Lincolnshire, Inglaterra. Y aquel niño, transcurridos unos años, iba a transformar la geometría analítica en las matemáticas más prácticas que jamás se inventaron - el cálculo, las matemáticas del movimiento.

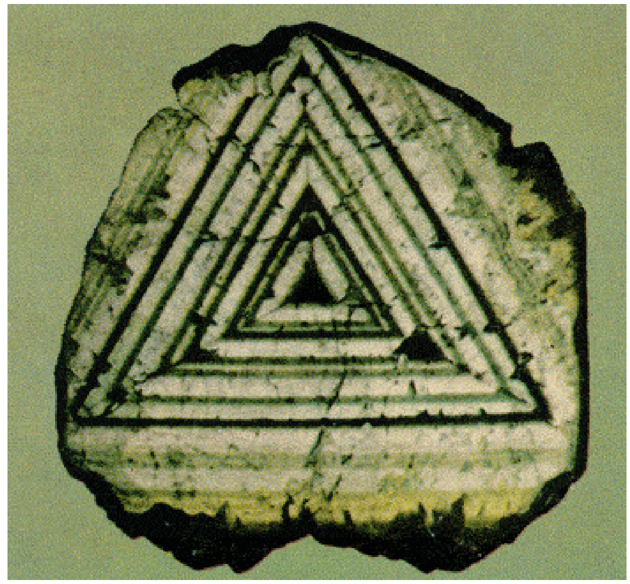
5. Las matemáticas de la belleza en la naturaleza y en el arte

En el siglo XIII, Santo Tomás de Aquino formuló una verdad fundamental de la estética: «Los sentidos se deleitan en cosas debidamente proporcionadas». Santo Tomás estaba expresando la relación directa y frecuentemente mensurable que existe entre la belleza natural y las matemáticas, una relación que hace referencia tanto a la belleza natural como al arte del hombre. Parece que nada en la naturaleza sea tan pequeño o aparentemente insignificante que no merezca una agradable simetría, según resulta evidente en los capullos de ipomea, formados por dos hermosas espirales. Además, hay otros innumerables ejemplos, los interminables y hermosos hexágonos de los copos de nieve, la hermosa espiral geométrica del caracol de mar, los cubos perfectos que se encuentran en los cristales minerales. En lo que al hombre se refiere, parece reaccionar ante formas que siguen rígidas reglas geométricas.

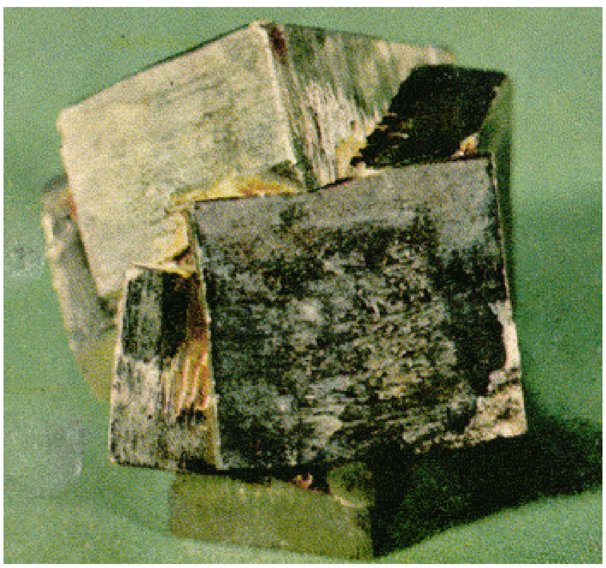
DOS SACACORCHOS VIVIENTES
Un par de delicadamente coloreados capullos de ipomea crecen en espiral a la luz del sol como dos diminutos sacacorchos de cera. Las espirales, tanto en las plantas como en los animales, parecen ser una de las formas preferidas por la naturaleza. No obstante, las graciosas circunvoluciones de estos capullos son tan sólo un estado transitorio de la flor.



UNA PLANTA CIRCULAR
La diatomea, una planta marina microscópica que tiene la belleza mosaica de un ventanal de cristales de colores, es un círculo casi perfecto.



UNA JOYA TRIANGULAR
La sección transversal de una turmalina semipreciosa de Madagascar, revela la estructura prismática de la piedra, con varios triángulos concéntricos.

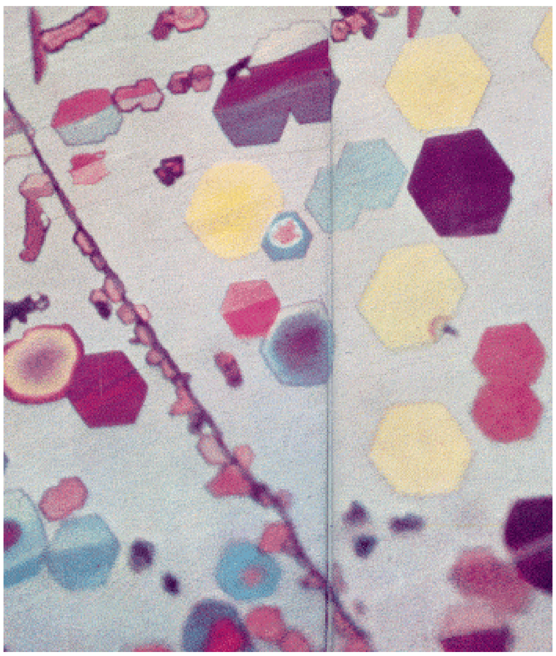


UN CRISTAL EN FORMA DE CUBO Una muestra de pirita, o disulfito de hierro, se presenta en forma de hexaedros unidos. La sal de mesa también está formada por cristales cúbicos.

La estrella de mar es un pentágono. Hay algunas de seis puntos.

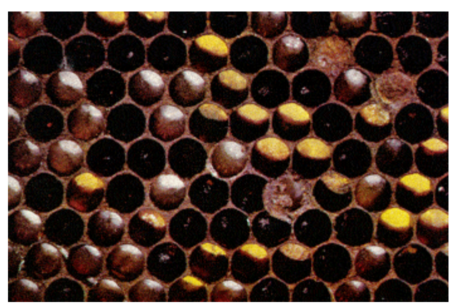
6. Agradable geometría en las creaciones naturales

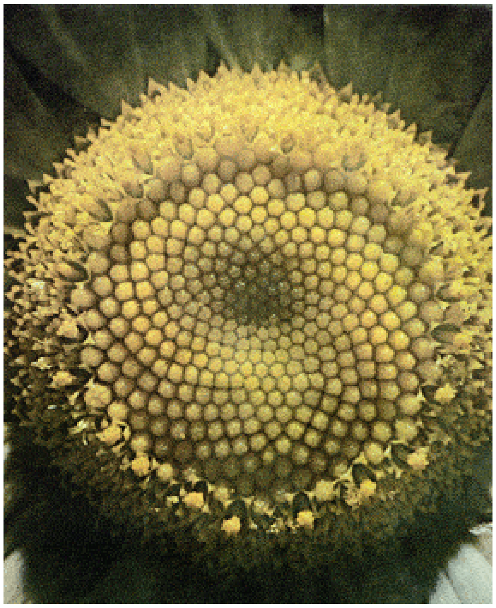
La naturaleza parece recrearse en la creación de diversas formas geométricas. Sus figuras se presentan en forma de círculos, triángulos, cubos, hexágonos e incluso estrellas. Pero éstas constituyen los principios más simples y sencillos. El mineral de cuarzo común, por ejemplo, a menudo se presenta en forma trapezoidal triangular, es decir, una estructura de cristal vulgarmente formada por una disposición triangular, cuyas caras individuales tienen cuatro lados. Los cristales de nieve en forma de hexágono pueden agruparse para formar un copo de nieve de gran complicación.



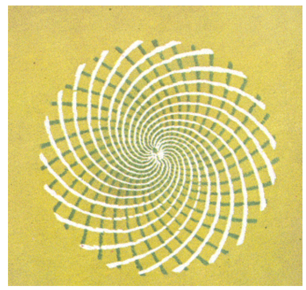
NIEVE DE SEIS LADOS
Una notable fotografía muestra varios cristales de nieve en forma de hexágono antes de que empiecen a juntarse para constituir así los copos.

CELDAS DE SEIS LADOS
La sección transversal de un panal está formada por una serie de hexágonos, que no tan sólo son fuertes, sino que permiten una cabida máxima...

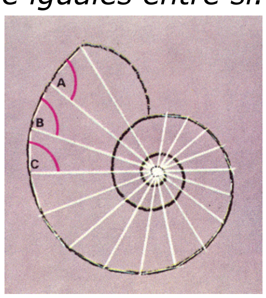




UNA FLOR EN FORMA DE ESPIRAL
El diagrama revela la espiral doble en el centro de una margarita, a la derecha. Se forman dos grupos opuestos de espirales que giran gracias a la disposición de los florósculos individuales en el centro. Hay 21 espirales en el sentido de las agujas del reloj y 34 en sentido opuesto. Esta proporción de 21:34 corresponde a la misteriosa serie de Fibonacci.



UNA CONCHA EN FORMA DE ESPIRAL
La sección de una concha de caracol nautilos muestra sus compartimentos. Sólo la parte extrema constituye el hogar del animal en todo momento. En conjunto la espiral negra interseca todos los radios blancos exactamente con un mismo ángulo, de forma tal que los ángulos A, B, C, etc., alrededor de la concha, son siempre iguales entre sí.



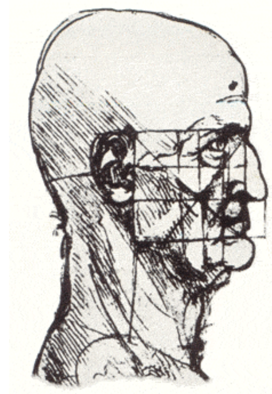
Misteriosas matemáticas de las espirales naturales La naturaleza nunca se ha contentado con las formas simples, sino que ha creado toda clase de intrincados diseños matemáticos, incluyendo una variedad de espirales Por ejemplo, la concha del caracol nautilos es una espiral logarítmica o de ángulos iguales como puede apreciarse en el diagrama, la curva de la espiral siempre intercede los avanzados radios con un ángulo fijo. Las espirales logarítmicas también se presentan en la curva de los colmillos de los elefantes, los cuernos de los corderos salvajes. Las espirales están formadas por los diminutos florósculos en el núcleo de los capullos de las margaritas. El ojo ve estrellas espirales como dos grupos distintos, girando en el mismo sentido y en el opuesto al de las agujas del reloj. En las escamas de las piñas se encuentran disposiciones similares de espirales opuestas (5 en una dirección, 8 en la otra).

Este fenómeno resulta ser muy misterioso debido a su relación con una sucesión matemática determinada conocida por el seudónimo de su descubridor medieval, Leonardo ("Fibonacci"), de Pisa. La serie Fibonacci se obtiene empezando por 1 y añadiendo los dos últimos números para obtener el siguiente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc. La relación espiral de la margarita 21:34 corresponde a los números adyacentes de la serie Fibonacci, al igual que la de la piña 5:8.

7. La regla dorada de la arquitectura del mundo

Los números de Fibonacci, además de mantener una curiosa relación con la botánica, también parecen ejercer una extraña influencia en el arte y en la arquitectura. La relación entre dos números adyacentes cualesquiera después del 3 es alrededor de 1:1,6. Ésta es la denominada Relación Dorada, o Sección Dorada, que ha intrigado a los expertos durante siglos. La relación, expresada en forma más precisa por 1:1,618, se manifiesta en pentágonos, decágonos y en los círculos, pero notablemente en el Rectángulo Dorado, figura cuyos dos lados guardan entre sí la relación mágica.

Se dice que el Rectángulo Dorado es la forma geométrica más satisfactoria: se han encontrado ejemplos en todas partes, desde los edificios de la antigua Grecia a las obras maestras del arte. En los últimos años la validez de su conexión con la belleza ha sido ampliamente debatida. No obstante, como claramente indican los cuadros de estas páginas, el Rectángulo Dorado se ve a menudo en el arte.



SIMETRÍA EN UNA CARA

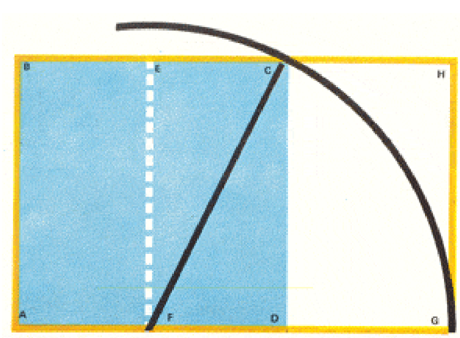
En el dibujo de Leonardo da Vinci, probablemente un autorretrato, el artista ha cubierto el retrato con un cuadrado subdividido en rectángulos, algunos de los cuales se aproximan a los Rectángulos Dorados. No se sabe si el enrejado sigue las proporciones de la cara, pero en cierta ocasión ayudó a ilustrar un libro que hacía referencia a las propiedades de las proporciones doradas.

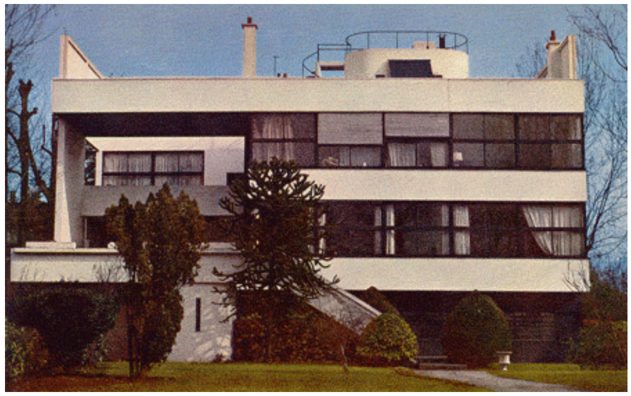
EN UN TEMPLO ANTIGUO

El Partenón de Atenas (a la izquierda) encaja dentro de un Rectángulo Dorado casi exactamente una vez incorporado su ruinoso frontón (arriba). Ya en el siglo V a. de c., los constructores griegos tenían conocimiento del equilibrio armonioso de la Relación Dorada.

EL RECTÁNGULO DORADO

La construcción geométrica de un Rectángulo Dorado parte de un cuadrado (en azul) que posteriormente se divide en dos partes a través de la línea de trazo discontinuo EF. El punto F sirve ahora de centro de un círculo cuyo radio es la diagonal FC. Se traza un arco de círculo (CG) y la línea de la base AD se extiende hasta cortarlo. Ésta pasa a ser la base del rectángulo. El nuevo lado HG se traza ahora formando ángulos rectos con la nueva base hasta hallar la línea BH. Si se suprime el cuadrado original, lo que queda continúa siendo un Rectángulo Dorado.



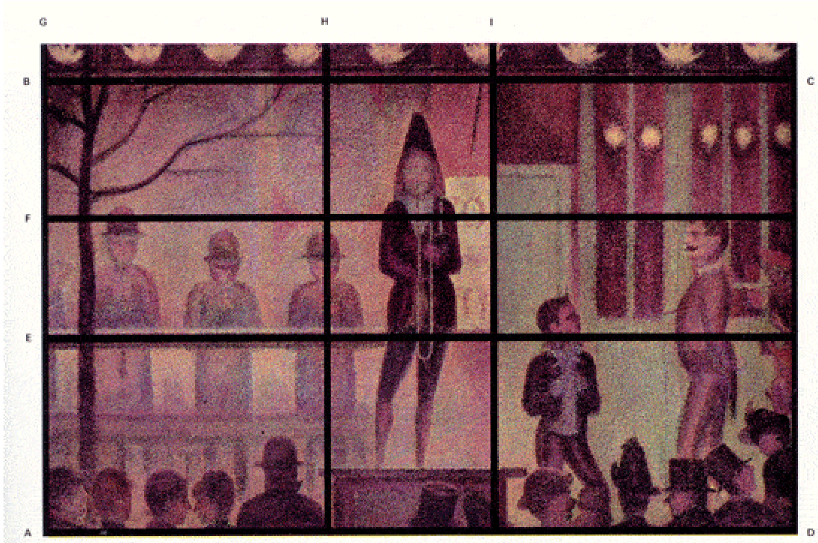


EN UNA MODERNA VILLA

Esta casa en las afueras de París representa el uso consciente del Rectángulo Dorado. El rectángulo existe no tan sólo en el diseño completo de arriba, sino también verticalmente en el área a la izquierda de las escaleras. Le Corbusier es el arquitecto constructor.

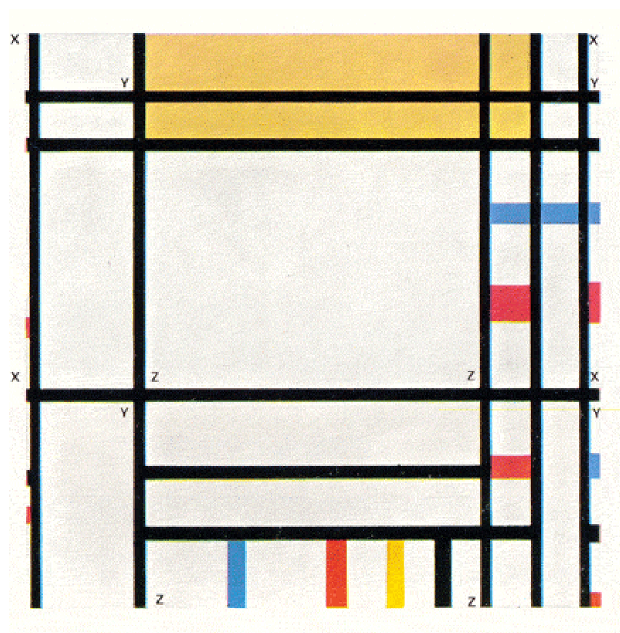
«LOS PASATIEMPOS» DE DA VINCI

San Jerónimo, un lienzo inacabado de Leonardo da Vinci pintado alrededor del 1483, muestra al gran erudito con un león tendido a sus pies. Un rectángulo Dorado (línea negra) encaja tan perfectamente en San Jerónimo que algunos expertos creen que Leonardo intencionadamente pintó la figura para que encajara en aquellas proporciones. Una consideración semejante estaría a tono con el interés del artista por las matemáticas.



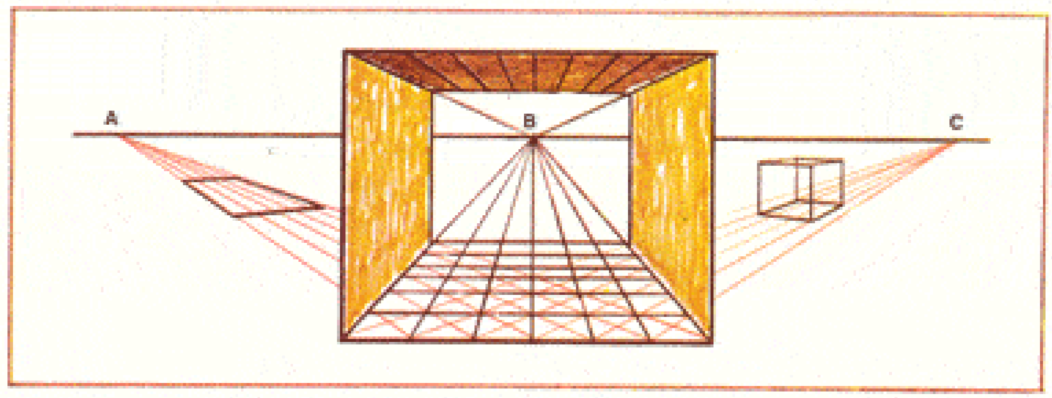
LOS PUNTOS DORADOS DE SEURAT
«La Parade», pintura del puntillista francés Georges Seurat, contiene numerosos ejemplos de proporciones Doradas. Un Rectángulo Dorado casi perfecto se halla comprendido entre los puntos A, B, C y D. Las Secciones Doradas (es decir, las líneas divididas según la relación mística de 1 a 1,618) se encuentran en las relaciones entre GF y FA, FE y EA, GH y HI. Según un experto, Seurat «.utilizó en sus lienzos la Sección Dorada».

LOS CUADROS INVISIBLES DE MONDRIAN «Plaza de la Concordia», una abstracción lineal de Piet Mondrian incorpora Rectángulos Dorados sobrepuestos. Al menos tres pueden verse fácilmente, uno de ellos indicado en cada uno de sus vértices por la letra X, otro por la Y y el tercero por la Z. Probablemente pasan inadvertidos; el propio Mondrian era impreciso en lo que se refiere al diseño de sus cuadros, manifestando únicamente que su propósito era la «destrucción del volumen».



UNA ESCENA SIN PERSPECTIVA
En esta representación del siglo XII, que no tiene perspectiva matemática alguna, el castillo se encuentra empequeñecido por los guerreros. Los barcos, que se supone se hallan muy distantes en el horizonte, parecen ser tan grandes como los situados en primer término.

Las escaleras de Santa Maria della Salute, de Canaletto, es una obra maestra de perspectiva el cuadro de la parte superior. El punto principal de alejamiento se determina prolongando la línea del muelle.

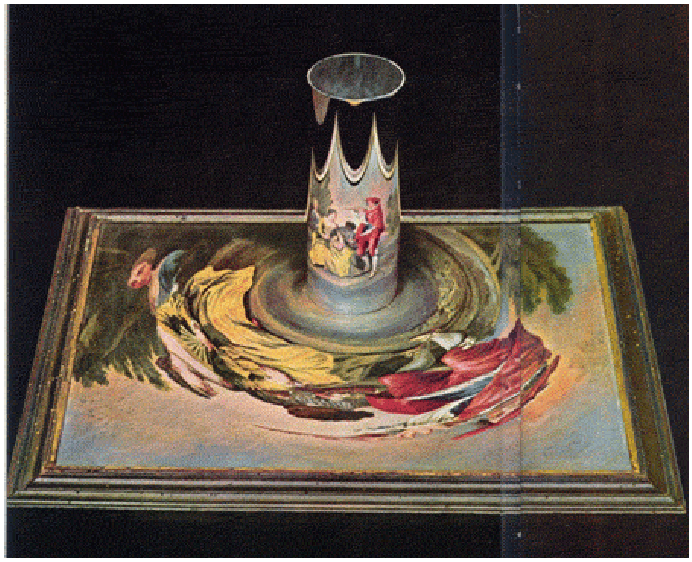


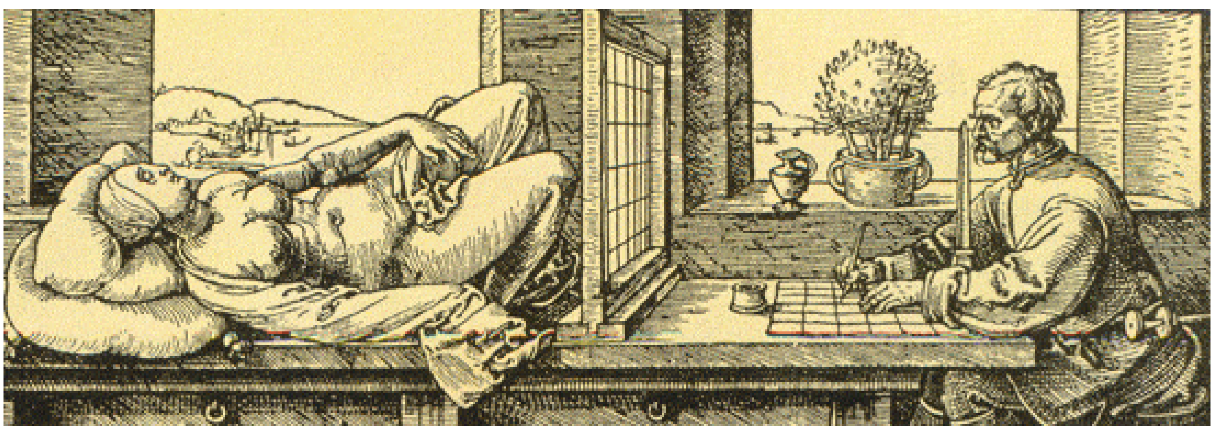
UN PLANO PARA LA PERSPECTIVA
La regla de la perspectiva óptica empieza con la línea del horizonte (ABC). Un punto, el B, se fija como el punto principal más alejado y todas las líneas que parten directamente del observador se hace que converjan en aquel punto. Todas las demás líneas, excepto las que son verticales y paralelas al horizonte, tienen sus propios puntos individuales de alejamiento. Para el rectángulo de la izquierda es el punto A; para el hexaedro de la derecha, el C.

8. La perspectiva es la geometría del artista

En medio de la fascinación por las matemáticas en la época del Renacimiento, los pintores empezaron a darse cuenta del importante papel que desempeña la geometría para alcanzar la perspectiva óptica. Hasta entonces, la pintura había sido principalmente "conceptual", dándose al tema principal un tratamiento prominente, como en la escena de la parte superior izquierda. No sólo la idea de perspectiva sino que incluso la propia palabra, fueron ampliamente utilizadas durante el Renacimiento. Deriva de la palabra latina "visto a través de" reflejando el concepto de que un cuadro con un foco óptico era una "ventana en el espacio".

PERSPECTIVA CON DISTORSIÓN
La habilidad técnica para representar la perspectiva se lleva a extremos en la visión reflejada de este cuadro del siglo XVIII El cuadro en sí está distorsionado por completo. Pero cuando se mira por un espejo en forma de tubo de quinqué las imágenes toman forma. El proceso denominado anamórfosis fue popular desde el año 1550 hasta 1850. Los secretos de la técnica son desconocidos. El artista tal vez no miró directamente al lienzo, sino que realizó sus distorsiones guiado solamente por los reflejos de su obra en el espejo.





Un grabado en madera de Alberto Durero muestra un artista estudiando un escorzo.

9. Productos de una técnica progresiva

Los primeros intentos de una perspectiva matemática resultaron del ferviente clima intelectual forjado en la Florencia del siglo XV. Pero desde entonces la técnica para crear una realidad sólida sobre lienzos planos se extendió rápidamente por Europa entera. El primer gran exponente de la perspectiva al Norte de los Alpes fue Alberto Durero. Este gran artista alemán imaginaba el lienzo como una pantalla de vidrio. En el grabado de arriba muestra cómo puede copiar un artista literalmente en papel cuadriculado la imagen que observa a través de un vidrio rayado igualmente. En el

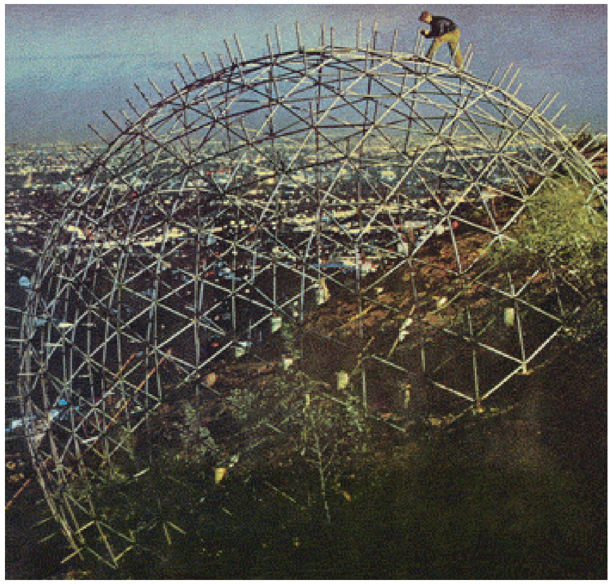
1700 las leyes de la perspectiva eran tan conocidas que los artistas se divertían con obras exhibicionistas tales como la de la izquierda, e incluso bromeando con su arte (abajo)

LA DISTORSIÓN DE LA PERSPECTIVA «Perspectiva falsa» es la parodia de William Hogarth en 1754 del empleo inadecuado de la perspectiva. El pescador mete el anzuelo en un canal distante, y a la mujer que sale de la ventana no le es difícil encender la pipa del hombre situado en la distante colina.

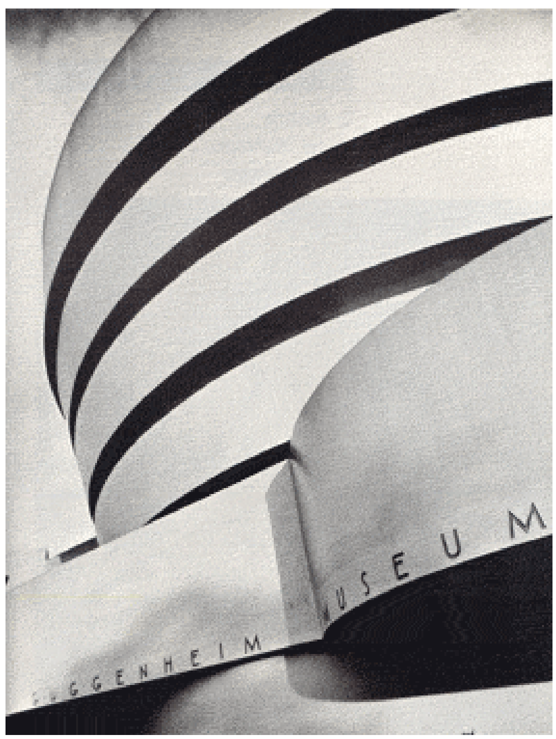
10. El legado de la naturaleza a los constructores

Puesto que la naturaleza hace mucho tiempo creó las formas geométricas más básicas, las creaciones propias del hombre son inevitablemente imitativas. La gran contribución del hombre, ha sido el uso imaginativo de estas diversas formas. El arquitecto Frank Lloyd Wright, por ejemplo, muestra la espiral en forma de caracol nautilo en su proyecto de un museo.

Y Buckminster Fuller, en sus famosas cúpulas, utilizó miles de simples triángulos equiláteros, unidos para conseguir la ruta más corta y más fuerte -la geodésica- a través de la superficie de la cúpula. El resultado es un enlace entre las matemáticas y la belleza.



Una esfera hecha a base de triángulos equiláteros compone la cúpula geodésica para esta casa cerca de Los Ángeles



UNA VITRINA EN FORMA DE ESPIRAL

Las líneas curvas del Museo Guggenheim de Nueva York ascienden en forma de espiral en sólido hormigón. Por medio de este diseño en espiral, el arquitecto Wright pudo alcanzar en una base de 30 m de diámetro, una rampa ascendente de más de 400 metros.

Capítulo 5
El dominio de los misterios del movimiento

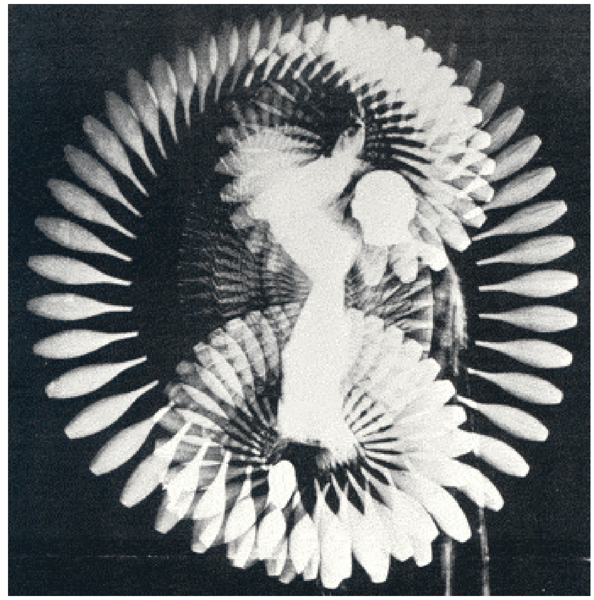
Contenido:

1. *Introducción*
2. *Una definición para los que hacen régimen*
3. *El sencillo obsequio de Galileo*
4. *Una cubeta de infinitesimales*
5. *Saludo a la garra de un león*
6. *El cálculo: una forma de sondear el mundo cambiante*
7. *Funciones: representación de las variaciones en un mundo en transición*
8. *Aproximación: división de una curva para aislar un movimiento y medir un momento*
9. *La proporción de la variación: forma de medir la aceleración y la desaceleración*
10. *La convergencia: regla elástica para medir lo inmensurable*
11. *La integración: determinación de los totales por medio de rectángulos*

1. Introducción

Nada en el mundo es inmune al cambio. La roca más dura en el más seco de los desiertos se dilata o se contrae con el cambio de la luz solar. Los bloques de acero para medir en el *National Bureau of Standards*, aunque se encuentren almacenados en bóvedas subterráneas a una temperatura controlada, están sujetos a fluctuaciones estacionales en su longitud que se cree son producidas por la radiación de las paredes circundantes. Todo crece o se contrae, se calienta o se enfría, cambia de posición, de color, de composición, incluso tal vez hasta de lugar.

LA POLARIZACIÓN DEL MOVIMIENTO
Esta fotografía tomada a una gran velocidad, de un hombre haciendo girar garrotes indios, fue realizada por el profesor Harold Edgerton, del M.I.T. En forma análoga, el cálculo se utiliza para «aislar» movimientos complejos en el sentido matemático, y analizar un proceso cambiante fase por fase.



Aunque el proceso de cambio es inevitable y vital para comprender las leyes de la naturaleza, es difícil de analizar. Por ser continuo no ofrece ningún punto sencillo que la mente pueda aislar y controlar. Durante siglos desconcertó a los matemáticos. Algunos primeros pasos, ciertamente, se dieron hacia una matemática del movimiento. Los griegos lo hicieron así cuando se imaginaron las curvas como trazos realizados por puntos en movimiento, y cuando analizaron las líneas curvas, paso a paso, por medio de la técnica de dividirlas en segmentos infinitamente pequeños. Así lo hizo Descartes cuando pensó en los términos de una ecuación como funciones entre variables y, sobre todo, cuando facilitó una posibilidad para representar figuras gráficas de las situaciones y relaciones fluidas. Pero en su mayor parte el mundo de las matemáticas se pobló de figuras de cera, formas y números que permanecían absolutamente invariables.

Posteriormente, en 1665 y 1666, el incomparable Isaac Newton, de Inglaterra, realizó una prodigiosa creación mental, denominada en la actualidad cálculo, que, por primera vez, permitió el análisis matemático de todo movimiento y cambio. En el cálculo, Newton combinó la técnica de la división en partes pequeñas de los griegos y el sistema gráfico de Descartes para crear un maravilloso y automático instrumento mental con el fin de operar en una ecuación para llegar a los infinitésimos. El cálculo probó su efectividad tan rápidamente que en unos cuantos años su creador lo utilizó para establecer las leyes del movimiento y de la gravitación. Debido a su habilidad en probar los fugaces misterios del movimiento, el cálculo en la actualidad se ha convertido en el nexo principal entre la ciencia práctica y el conjunto de pensamientos matemáticos. Todo avión, todo aparato de televisión, todo puente, toda bomba, toda nave espacial le deben un poco de gratitud.

Las distintas clases de cambio que puede analizar el cálculo son tan diversas como el armario de una reina. Si los factores que comprenden cualquier situación fluida pudieran ponerse en términos de una ecuación, entonces el cálculo puede abarcarlos y descubrir las leyes a que obedecen. La variación en estudio puede ser tan dramática como la velocidad acumulada en un cohete dirigido al dejar su base o tan lenta como la pendiente variable de la carretera de una montaña. Puede ser tan visible como los kilos que se añaden a la que en un tiempo fue una esbelta cintura o tan invisible como los altibajos de la corriente en una línea de potencia.

Puede ser tan sonora como el *crescendo* de un concierto de Beethoven o tan silenciosa como la supuesta fuerza de la corriente del agua embalsada.

El cálculo analiza todas estas situaciones al invocar dos procesos matemáticos nuevos - son las primeras operaciones fundamentales que hay que añadir a las leyes de la adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Estas nuevas operaciones son denominadas diferenciación e integración, siendo ésta la inversa de aquélla, casi en la misma forma que la sustracción es la inversa de la suma o la división de la multiplicación. La diferenciación es una forma de calcular la tasa de variación de una variable en una situación en relación a otra en cualquier punto de un proceso.

El método actualmente empleado en la diferenciación es dividir una pequeña variación en una variable por una pequeña variación en otra; dejar que estos cambios vayan disminuyendo hasta acercarse a cero; después - y ésta es la clave - hallar el valor a que tiende la relación entre ellos a medida que las variaciones pasan a ser indefinidamente pequeñas. A este valor es a lo que los matemáticos llaman un «límite», y es la respuesta que buscan, el resultado final de la diferenciación, la tasa de variación en cualquier momento o punto. La integración opera al revés que la diferenciación; considera a una ecuación en términos de tasa de variación y la convierte en una ecuación en términos de las variables que hacen la variación.

Por medio de la diferenciación, un matemático puede profundizar en la situación de un fluido hasta que encuentre algún factor constante que refleje la acción de una ley constante de la naturaleza.

MATEMÁTICAS Y CASA DE LA MONEDA
Aunque fue un genio matemático, Isaac Newton se dedicó al estudio teológico y, en los últimos años, al cargo de gobernador de la Casa de la Moneda. Desarrolló su versión del cálculo en 1665 pero no publicó sus descubrimientos hasta 1704.

En esta forma, Newton y teóricos posteriores, hicieron un descubrimiento que todavía no es fácil de comprender para los no versados. Este descubrimiento fue que el factor constante en muchos procesos de la naturaleza es la tasa en que varía la tasa de variación. El descifrar esta aparente redundancia puede parecer inútil.

UN GENIO EN MUCHAS DISCIPLINAS Gottfried Wilhelm von Leibniz fue un genio universal que ganó diversos grados honoríficos en leyes, religión, política, historia, literatura, lógica, metafísica y filosofía especulativa. Publicó su versión del cálculo en 1684.

Pero todo el que conduce está familiarizado con la tasa de variación de una tasa de variación. La velocidad del coche es una tasa de variación de la distancia con respecto al tiempo. Al acelerar o disminuir la velocidad, la propia velocidad del coche cambia, y varía en una proporción -aceleración o disminución - que constituye la tasa de variación de la tasa de variación. En la naturaleza, la gravedad actúa de forma tal que hace que un objeto que cae, se mueva en una tasa que aumenta en proporción constante. En los procesos que comprenden verdaderos movimientos físicos, Newton definió esta proporción de una tasa como aceleración. Y denominó a la gravedad que lo causaba una fuerza. Definió la fuerza en general como algo que hace acelerar a un objeto. Al aplicarse por medio del cálculo, esta definición -establecida hace tres siglos- ha permitido a los científicos el poder identificar las tres fuerzas fundamentales del cosmos: la fuerza de gravedad, la fuerza del magnetismo, o carga eléctrica, y la fuerza que une los núcleos atómicos.

En contraste con el papel espectacular que ha desempeñado el cálculo en descubrir los secretos del universo, la nomenclatura en torno a la diferenciación y la integración es tristemente prosaica. El cambio relativo de una y o x, hallada por la diferenciación, se llama una derivada -una derivada de y con respecto a x, que se escribe *dy/dx*, o de x con respecto a y, que se escribe *dx/dy*. Lo opuesto a una derivada, hallada por medio de la integración, se denomina una integral y se simboliza por ∫, una S anticuada, que era una abreviación, originalmente, para la «suma» o «adición». Al efectuarse la integración en una ecuación escrita en términos de derivadas, convierte otra vez la ecuación en una en la que x e y se han despojado de sus disfraces de tasa de variación y han recobrado una apariencia algebraica normal.

2. Una definición para los que hacen régimen

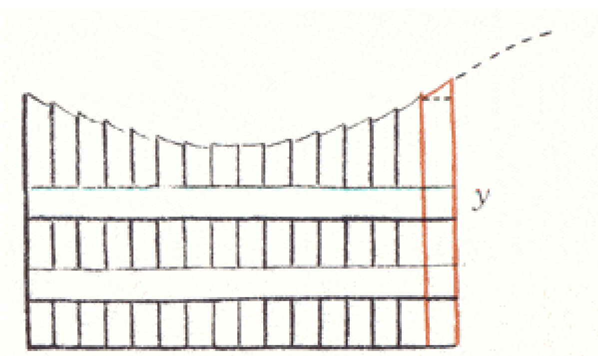
Los resortes y jeroglíficos que acompañan a las técnicas del cálculo pueden parecer desquiciados, pero las ideas que hay detrás de ellos pueden reconocerse fácilmente. Por ser una tasa de variación, una derivada significa, simplemente, la velocidad de un proceso: tantas millas por hora o metros por segundo si se refiere a una variación de posición; tantas libras por semana si se refiere al éxito de un régimen; tantos genios por nacimiento si se refiere a las estadísticas del cociente de inteligencia. La integral correspondiente a cada una de estas derivadas serían los kilómetros recorridos, las libras perdidas o los genios que se han producido.

Cuando se la utiliza abstractamente en una ecuación, una derivada puede concebirse más rápidamente en términos de la curva que representa esta ecuación en un gráfico. En cualquier punto, la curva está creciendo o decreciendo en una tasa de tantas unidades de y por cada unidad de x. Esta pendiente hacia arriba o hacia abajo es exactamente el equivalente geométrico de la tasa de variación -la derivada- de y con respecto a x. Los ingenieros a menudo expresan la pendiente de una colina, la inclinación de un tejado o la verticalidad de la ascensión de un avión en términos idénticos: es decir, tanta altitud alcanzada por unidad de distancia horizontal atravesada. Pero en estas aplicaciones la pendiente se concibe como si se midiera en un tramo definido. Con el cálculo, la derivada se concibe como una pendiente instantánea en un punto aislado de la curva.

Que este concepto alusivo a la pendiente instantánea no es una ficción producto de la imaginación matemática puede verse en una granada de artillería a medida que describe un arco hacia el objetivo. En cualquier momento determinado la granada se mueve en una dirección definida. Esta dirección es una pendiente instantánea con respecto al suelo, una tasa de variación en la altitud de la granada con respecto a su posición horizontal. En términos gráficos, la velocidad de la granada moviéndose hacia arriba y hacia abajo, puede considerarse también como una pendiente instantánea en una curva.

Un matemático normalmente escribiría dicha derivada -la velocidad de ascenso o descenso, o la tasa de variación en distancia vertical - como dy/dt, en la que t representa el tiempo. Lo opuesto de una derivada, una integral, puede visualizarse también a través de un gráfico. Supóngase que y es igual a alguna expresión de x y que esta ecuación se representa como una curva. Entonces la integral de y es el área entre la curva y la línea horizontal, o eje, situada debajo de aquélla.

El porqué esto es así puede verse al imaginar que el área bajo la curva está cubierta por una valla de estacas con una parte superior ondulada. A medida que se construye la valla cada nueva estaca se suma al área de la valla.

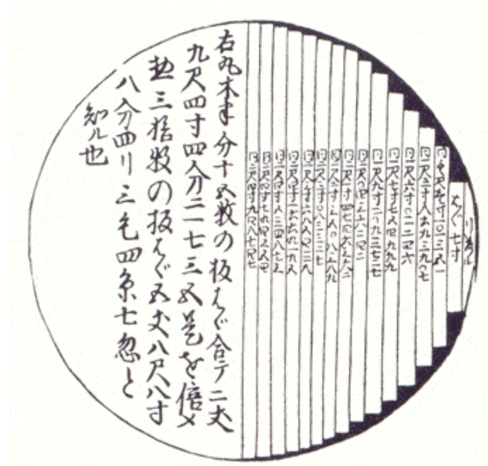


INTEGRALES EN FORMA DE ESTACAS
Una valla de estacas es una sencilla clave para la integración. El área que añade una nueva estaca equivale al rectángulo x X y. Pero esto no deja más que la parte superior de la estaca. El cálculo soluciona el problema haciendo que las estacas se estrechen de forma tal que la parte superior resulta despreciable.

De hecho, la altura de cada estaca añadida es una medida de la proporción en que crece el área de la valla; una estaca de 1,80 m., por ejemplo, añade un área doble que la de una estaca de 0,90 m. La integral de la tasa de variación, por lo tanto, debe ser el factor real en la situación que varía, es decir, el área de la propia valla. El equivalente geométrico de cada estaca es simplemente la altura de una curva - la vertical, u ordenada y de cada punto de una curva. La integración de y debe dar el área total bajo la curva.

LA SUMA APROXIMADA
El matemático suizo del siglo XVIII Leonhard Euler propugnó el uso de la sigma griega en el cálculo como símbolo para la suma de un número «finito» de rectángulos como aproximación al área limitada por una curva.

LA INTEGRAL INFINITA
Leibniz popularizó el uso de una S alargada como símbolo para representar en el cálculo una integral, suma compuesta de un número infinito de triángulos infinitamente diminutos que miden el área limitada por la curva.



CÁLCULO ORIENTAL PRIMITIVO Un cálculo japonés, que se atribuye tradicionalmente al matemático del siglo XVII Seki Kówa fue denominado «yenri» (principio del círculo). La ilustración, relativa a una integración imperfecta, fue trazada en 1670 por uno de sus discípulos. Mide el área del círculo por medio de varios rectángulos.

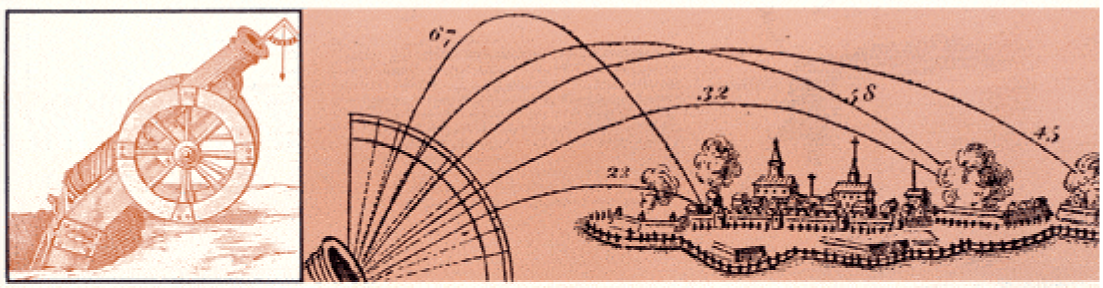
Muchas de las aplicaciones más prácticas del cálculo derivan de la habilidad de la integración para sumar las estacas de longitud y, así como para la determinación de áreas. A través de ésta, un matemático puede determinar el volumen de todas las posibles formas irregulares, tales como el fuselaje de aviones, o tanques para el almacenamiento del aceite; también puede hallar las áreas de superficies curvilíneas - cantidad de plancha para la carrocería de un coche, o superficie de ascensión en las alas de un jet.

Existe una dificultad muy importante en el proceso de integración - una dificultad tan enorme y tan recurrente que la mayor parte de computadores de mayor tamaño en la actualidad han sido construidos especialmente para poder solucionarla -. Este es el problema de las llamadas «condiciones de los límites». Al medir el área de una valla de estacas, las condiciones de los límites se establecen por medio de las dos estacas que señalan los dos extremos de la valla. Pero no existen extremos para muchas de las curvas que representan ecuaciones. El área bajo este tipo de curva puede ser indefinidamente grande. Para limitarla, el matemático elige el equivalente a los postes extremos para señalar la parte determinada de área en la que está interesado. Entonces integra la ecuación representada por la curva entre estos dos vértices. A menudo el sistema adecuado para interpretar dicha ecuación no puede si no es integrándola y las condiciones de límites necesarias para integrarla no pueden hallarse a menos que se sepa cómo interpretarla. Para evitar este callejón sin salida, el científico, en efecto, escoge arbitrariamente lugares para las estacas y deja que un computador imprima docenas de laboriosas soluciones, que le dan una percepción de la naturaleza de la ecuación y del proceso de variación que simboliza.

Para elaborar las reglas del cálculo, Newton visualizó lo que sucedería si un punto en el gráfico de una curva se desplazara hacia un punto cercano.

A medida que empieza el desplazamiento, la pendiente media de la curva entre los dos puntos es el número de unidades de y que les separa verticalmente, dividido por el número de unidades de x que les separa horizontalmente. A medida que el desplazamiento prosigue, ambas distancias en esta fracción disminuyen hacia cero y desaparecen finalmente. Pero esto no quiere decir que la fracción en sí desaparezca. Una relación de 1:2, por ejemplo, no tiene por qué pasar repentinamente a ser cero sólo porque su numerador y denominador se hagan indefinidamente pequeños. La última vez que se supo de ellos, el numerador puede fuera una billonésima y el denominador 2 billonésimas, pero la relación entre ellos todavía continuaba siendo de 1 a 2.

Al hallar el valor a que tiende una fracción a medida que el numerador y el denominador tienden a cero, se le denomina hacer «el paso al límite». Si el numerador es igual a la mitad del denominador, el límite es un medio. Si el numerador es igual 10 veces el denominador, el límite es 10. A medida que se aproximan dos puntos de una curva, las distancias vertical y horizontal entre ellos guardan la misma proporción, por más pequeñas que se hicieran éstas, debido a la relación entre y y x expresada en la ecuación original de la curva. A medida que se aproximan, por lo tanto, la relación de sus distancias tiende hacia un límite definido que puede valorarse en términos de y y x.



DETERMINACIÓN DEL MÁXIMO MILITAR
Un hecho curioso en el terreno bélico, es que para obtener el máximo alcance un cañón, la boca debe fijarse a un ángulo de 45°. Si un cañón se eleva por encima de los 45°, la trayectoria se desperdicia a través de un camino elevado, mientras que por debajo de los 45°, la gravedad impulsa el artefacto hacia el suelo. El cálculo hizo posible analizar las distintas trayectorias, demostrando que la más efectiva era la de 45°.

Este límite, 1/2 ó 10 o cualquiera que sea, es la pendiente de la curva en el lugar preciso en que ambos puntos coinciden -la tasa de variación de la y con respecto a la x, o dicho de otra forma, la derivada de y con respecto a x-. El sutil mecanismo de razonamiento que permitió a Newton diferenciar ecuaciones y hallar la derivada o valor del límite de la relación -expresado por dy/dx o dy/dt- es el proceso fundamental del cálculo. En forma sucinta puede expresarse así: en una situación en desarrollo, la diferencia entre el estado de cosas en un momento dado y el estado de cosas en el próximo momento es un índice de la tendencia de la situación; y si la relación de las variaciones netas que tienen lugar entre los dos momentos se valora por medio de un límite al que se llega cuando el intervalo entre los dos momentos se supone que tiende a cero, entonces este límite muestra con qué rapidez ocurren los cambios. La lógica del cálculo puede aplicarse a momentos del tiempo, puntos de una curva, temperatura de una situación de gas o en cualquier situación en general que puede relacionarse a través de ecuaciones.

5.3 El sencillo obsequio de Galileo

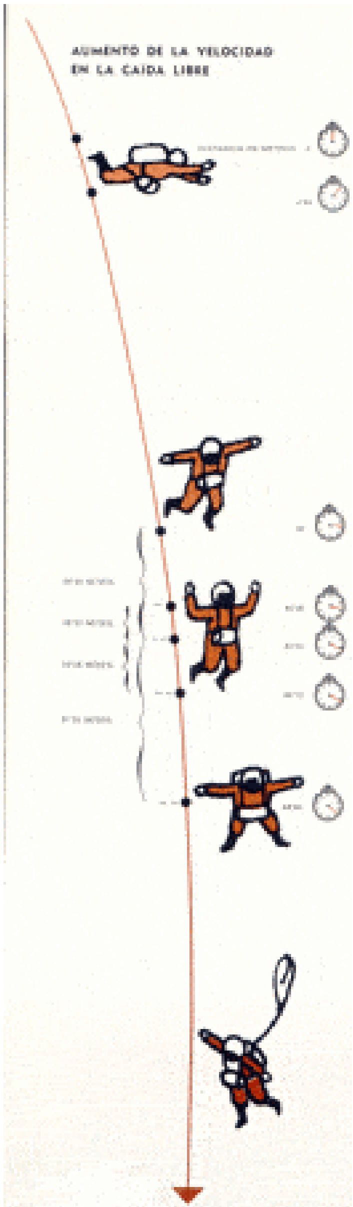
La forma en que operan estas reglas, y la justificación de su enorme utilidad, pueden ilustrarse mejor al aplicarlas a la sencilla y clásica ecuación

$$y = 16\ t^2$$

expresada en una forma mucho más sencilla por Galileo Galilei. Esta breve y modesta expresión es una de las más útiles en toda la física, debido a que muestra la forma en que actúa la gravedad sobre cualquier objeto que caiga libremente. Dado que todos los movimientos y cambios en la tierra están muy influenciados por la gravedad, la ecuación del libre descenso tiene indirectamente su importancia en innumerables acciones humanas, desde dar un paso o tirar una pelota de tenis a levantar una jácena o poner un astronauta en órbita.

Calcular el tiempo que emplea un objeto en caer desde una altura determinada es el método más directo para calcular los efectos de la gravedad. Fue esta técnica la que utilizó Galileo, alrededor del año 1585, para llegar a esta ecuación de la caída libre. Según la leyenda, Galileo dejó caer pequeñas balas de cañón desde las columnatas de la torre inclinada de Pisa. Según su propia descripción, utilizó los medios menos imaginativos para cronometrar unas bolas de bronce a medida que descendían por una rampa. Los experimentos de Galileo llevaron a la ecuación de la caída libre, y = 16 tz, en la que y representa la distancia recorrida y t el tiempo transcurrido en segundos después de la iniciación de la caída.

Al diferenciar esta ecuación dos veces -a fin de eliminar sucesivas manifestaciones de cambio e inconstancia- Newton descubrió la naturaleza esencial de la gravedad.



LA MEDICIÓN DE UNA CAÍDA LIBRE

Un paracaidista en una caída libre aumenta la velocidad en cada momento. El cálculo determina esta proporción. En el primer período señalado con una llave desciende a un promedio de 26,40 m. por segundo durante medio segundo, en el período siguiente 31,20 m. En dos periodos más cortos, desciende 28,32 m y 29,28 m por segundo. Las proporciones en disminución finalmente convergen en 28 m por segundo exactamente en tres segundos.

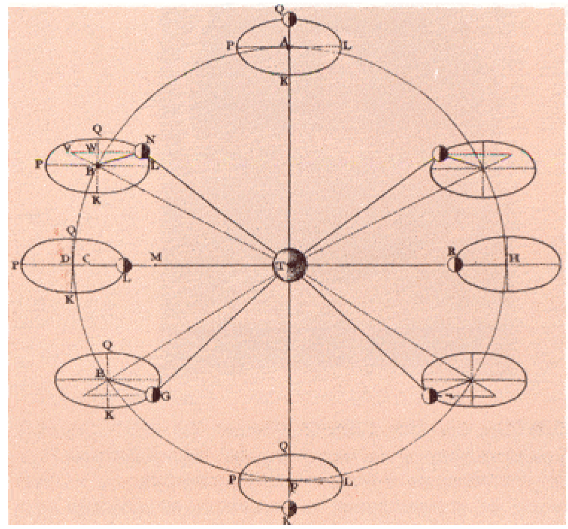
Al diferenciar la ecuación una vez, halló que la velocidad con que cae un saltador en cualquier momento es igual a 9,6 multiplicado por el número de segundos que ha tardado en caer. Al diferenciar la ecuación por segunda vez, halló que la aceleración del saltador -la relación de aumento en su velocidad- es siempre 9,6 m. por segundo, cada segundo. El hecho de que en la ecuación de libre caída la aceleración sea igual a un número constante, 9,6, indica el final de la trayectoria. Este 9,6 no requiere que se diferencie más; no varía, y su proporción de variación es cero. Todo objeto que cae libremente cae a la tierra con una aceleración constante de 9,6 m por segundo, cada segundo.

Al comprobar este hecho por medio del cálculo, Newton fue capaz de fijar sus visiones matemáticas mucho más allá de la tierra y deducir la ley de la gravedad universal -uno de los resultados más importantes que jamás alcanzaran las matemáticas. Es la ley que rige el movimiento de todos los cuerpos celestes- desde los seres humanos en órbita a sistemas enteros de estrellas.

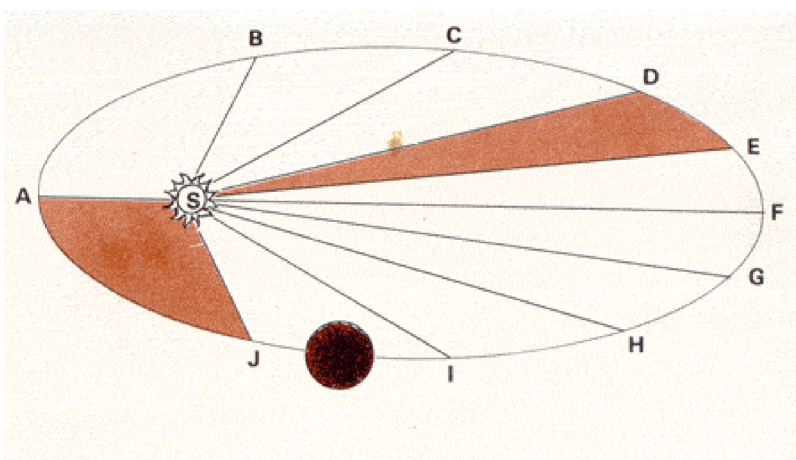
Al contemplar atemorizados lo que una pequeña deducción podía lograr en la mente de Isaac Newton, pensadores de épocas posteriores lo han considerado como el más grande de los físicos y uno de los más grandes matemáticos que jamás haya conocido el mundo. Albert Einstein escribió: «La naturaleza para él era un libro abierto cuyas letras podía leer sin esfuerzo». El propio Newton dijo: «No sé cómo puedo parecer al mundo; pero aparezco ante mis ojos como un muchacho jugando en la playa, y entreteniéndome con un guijarro más liso o una concha más bonita, mientras que el gran océano permanece por descubrir ante mí».

Newton empezó a utilizar su extraordinaria inventiva mientras que todavía era un chiquillo, para hacerse juguetes, incluyendo una clepsidra de madera que, de hecho, registraba el tiempo, y un molino de harina movido por una rata. No obstante, su brillantez no brotó hasta que leyó a Euclides a la tardía edad de 19 años. Dice la historia que se precipitó con impaciencia sobre la relativamente abstrusa *Géométrie* de Descartes. A partir de entonces su progreso fue meteórico. Cinco años después, había elaborado ya las operaciones básicas del cálculo - las reglas de integración y diferenciación, que denominó las leyes del «cálculo diferencial».

Newton reunió su gran invento y lo aplicó en una forma preliminar a los problemas del movimiento y de la gravitación en un esfuerzo supremo de creatividad durante dos años, que vivió en el campo durante la epidemia de peste que asoló a Inglaterra en 1665 y 1666. En retrospectiva parece como si todo el marco de la ciencia moderna surgiera de su mente tan milagrosamente como un genio de los cuentos árabes de dentro de una botella. Pero como el propio Newton dijo, «él estaba colocado sobre los hombros de gigantes». Muchos hombres se han debatido con los mismos problemas; fue su genio quien fundiera sus inspiraciones separadas. Los procesos gemelos de la diferenciación e integración en el cálculo, por ejemplo, fueron arraigados en dos preguntas clásicas de la antigüedad griega: cómo construir una tangente y cómo calcular un área que está rodeada en uno de sus lados por una curva. El problema de la tangente o línea de «contacto» era equivalente al problema de hallar la pendiente de una curva en cualquier punto y, por lo tanto, al de hallar la derivada de una ecuación. El problema del área era equivalente al problema de integrar la ecuación que da la tasa de crecimiento de un área.



PAGINA DE UNA OBRA MAESTRA
Los grandes problemas científicos de la época de Newton hacían referencia a los movimientos de los cuerpos celestes. Al elaborar esta obra como lo hiciera Kepler, según mostramos abajo Newton desarrolló un sistema del movimiento planetario y, durante este proceso, inventó el cálculo. Sus descubrimientos se publicaron en su «Principia». Arriba se muestra una página de esta monumental obra representando las órbitas de la tierra y de la luna.



UN PRODUCTO DEL CALCULO PRIMITIVO
Kepler utilizó un cálculo geométrico primitivo para diseñar sus tres leyes del movimiento planetario. En la segunda ley, ilustrada aquí, probó que un planeta varía su velocidad en relación a su distancia respecto al sol, y la línea que une el planeta con el sol describe áreas iguales en tiempos iguales. Por tanto, el tiempo que dura el recorrido del planeta desde un punto al siguiente es el mismo y las áreas ASJ y DSE son iguales

4. Una cubeta de infinitesimales

Al considerar toda curva como una sucesión de infinitos segmentos pequeños, o toda área como una acumulación de infinitas partes pequeñas, los griegos - particularmente Arquímedes - habían solucionado un número de problemas específicos en torno a las tasas de variación. Los matemáticos de los siglos XVI y XVII utilizaron también métodos infinitesimales, aunque raras veces a través de las rigurosas pruebas griegas.

Kepler, por ejemplo, utilizó los infinitesimales para dar a los viñateros una fórmula para calcular el volumen de las cubas. En la época de Descartes, y en los quince años siguientes a su muerte, su compatriota Pierre de Fermat y el inglés John Wallis, habían empezado a utilizar los infinitesimales en los útiles moldes analíticos de ecuaciones. Después, alrededor del año 1663, el profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow, pasó a ser el primer hombre en darse cuenta de que el problema de la tangente y el problema del área son dos caras de la misma moneda.

Cuando Newton empezó por primera vez a unificar todas estas profundizaciones preliminares en la única y bien articulada estructura del cálculo, mostró a Barrow algunos de sus primeros resultados. Barrow se entusiasmó tanto que generosamente hizo saber en Cambridge que Newton había hecho lo que él fracasara en hacer. Años después, en 1669, cuando se retiró, cooperó para que nombraran a Newton su sucesor en la cátedra de matemáticas en la Universidad.

MENTOR DE UN GENIO
El matemático y teólogo inglés Isaac Barrow fue profesor de Newton en Cambridge. Ayudó al joven genio a construir el cálculo y también laboró para conseguir que aquél le sucediera en la cátedra.

A partir de entonces llegaron a Newton honores e inspiraciones en un caudal continuo. En las cuatro décadas siguientes formuló la ley de la gravitación y la utilizó para explicar los movimientos de los planetas, la luna y las mareas; analizó el espectro de color de la luz, construyó el primer telescopio (que reflejaba), desarrolló innumerables experimentos de alquimia; trató de reconciliarse con las Escrituras sobre la época, 4004 a. de c., que corrientemente se aceptaba como la fecha de la creación de Adán; actuó como miembro del Parlamento; fue nombrado gobernador de la Casa de la Moneda Británica; caballero por la reina Ana en 1705 y le eligieron presidente del club científico británico, la Royal Society, desde 1703, hasta su muerte en 1727.

Aunque es bastante extraño, Newton reveló sus monumentales descubrimientos a sólo unos cuantos colegas. Se ha dicho que siempre estuvo demasiado ocupado con nuevas ideas para hallar tiempo de escribir las viejas, y que le desagradaban en grado sumo las luchas y las críticas que se originaban inevitablemente en aquellos días en torno a las manifestaciones científicas. Después, también, no era demasiado hablador. Mientras estuvo en el Parlamento su única declaración fue una petición para que abrieran la ventana. En una ocasión, el astrónomo Edmund Halley fue a verle para preguntar si sabía qué camino tomaría un planeta alrededor del sol, en el supuesto de que la única fuerza que le influyera fuese una fuerza que disminuye en relación al cuadrado de su distancia respecto al sol. Newton dio la respuesta inmediatamente: la trayectoria sería elíptica.

Cuando se le preguntó cómo lo sabía, explicó que casualmente había elaborado el problema años antes, siendo un estudiante de grado. En otras palabras, había elaborado una de las leyes fundamentales del universo y no lo había dicho a nadie; alentado por Halley para que volviera a crear sus cálculos originales, siguió hasta producir su obra maestra, la Principia.

La Principia de Newton se reconoce generalmente como la obra científica más influyente, conclusiva y revolucionaria que jamás apareciera impresa. En ésta, no tan sólo explicó por qué el sistema solar opera de la forma en que lo hace, sino que también estableció las leyes de la dinámica que todavía son los ingredientes principales de la física de la ingeniería práctica.

AGUIJÓN A UN AUTOR
El catedrático de Oxford John Wallis inventó el signo oo para designar el infinito; cooperó en el desarrollo del cálculo y aguijoneó a Newton para que publicara «estas nociones sobre las derivadas».

La mayor parte de estas leyes las elaboró Newton por medio del cálculo, pero, al igual que Arquímedes antes que él, prefirió presentar su trabajo como una extensa demostración griega, redactada casi totalmente en términos de la geometría clásica. Ni siquiera las hábiles instigaciones de Halley pudieron convencer a Newton para que publicara su cálculo, hasta que otro matemático, el alemán Gottfried Wilhelm

Leibniz, hubiera vuelto a crear toda la maquinaria mental. Leibniz inventó el cálculo diez años después de Newton, en 1675, y en 1684 publicó su versión veinte años antes de que Newton se decidiera a dar la primera explicación de su propia versión.

DETRACTOR DE NEWTON
Johann Bernoulli, uno de los ocho matemáticos que produjo una notable familia suiza en tres generaciones, fue leal a Leibniz y odió a Newton. Hizo también mucho para extender el cálculo en Europa.

Al igual que Newton, Leibniz tuvo tanto éxito y fue tan práctico como las matemáticas que descubrió. Hijo de un acomodado catedrático de universidad, aprendió griego y latín a la edad de 12 años, asistió a la universidad, se graduó en leyes y siguió hasta llegar a ser consejero de reyes y princesas.

DEFENSOR DE LEIBNIZ
Jacob Bernoulli, hermano de Johann, fue también un defensor de Leibniz. Aplicó el cálculo a los difíciles problemas de mecánica e introdujo el cálculo de las variaciones.

Viajó por toda Europa investigando linajes dudosos para establecer los derechos de los pequeños príncipes a los tronos vacantes. Formuló muchos de nuestros modernos principios del poder de la política internacional - incluyendo la frase «equilibrio de poderes» -. En sus viajes a París, estudió álgebra y geometría analítica bajo la dirección del gran físico de óptica Christian Huygens. Y mientras viajaba en misiones diplomáticas, creó nuevas matemáticas simplemente como entretenimiento, incluyendo su propia versión del cálculo.

Aunque Newton consiguió mucho más con el cálculo que Leibniz, éste tuvo una notación superior para aquél - una que pulió tan cuidadosamente que todavía la utilizamos en la actualidad -. Fue Leibniz quien primero escribió las derivadas así: *dy/dx o dx/dy* , formas que sugieren las mediciones en forma de fracción de la tasa de derivación a las que hacen referencia. (Newton escribió la derivada de y, como $\dot{y}$ y, la derivada de x como $\dot{x}$. Los puntos en el simbolismo de Newton llevaron a los estudiantes del siglo XIX en Cambridge a protestar contra «los puntos» de la notación inglesa y a defender las «d» de la notación continental.)

Desgraciadamente, Newton y Leibniz, en sus últimos años, se embrollaron en una disputa patriotera en torno a quién fue el primer descubridor. El resultado fue que los intelectuales en el continente, apoyados por la notación de Leibniz, prosiguieron hasta desarrollar el cálculo mucho más, mientras que los matemáticos ingleses, con el estorbo de la menos feliz notación ideada por Newton, se encontraron en un atolladero.

5. Saludo a la garra de un león

La supremacía de la aproximación continental no surgió, sin embargo, mientras vivió Newton. Por lo menos dos veces después de haberse desencadenado la rivalidad, Leibniz y sus seguidores expusieron problemas con los que esperaban dejar patidifuso a Newton. Cada vez Newton obtuvo las respuestas en una sola tarde después de regresar a casa de su trabajo en la Casa de la Moneda. Uno de estos problemas era uno particularmente demoníaco: hallar la forma de la curva bajo la cual se deslizara una cuenta bajo la influencia de la gravedad para moverse desde un punto superior a uno inferior en el menor tiempo posible. El problema era importante por ser de los primeros ejemplos de «problemas de máximos y mínimos» que en la actualidad ocupan a los matemáticos - maximizar la productividad industrial o minimizar la cantidad de combustible requerida para alcanzar la luna -. Newton solucionó el problema en una noche y transmitió su solución. Al recibirse, Johann Bernoulli, el discípulo de Leibniz que había expuesto el problema, según se dice, manifestó *«Tanquam ex ungue leonem»* que traducido libremente significa «reconozco al león por sus garras».

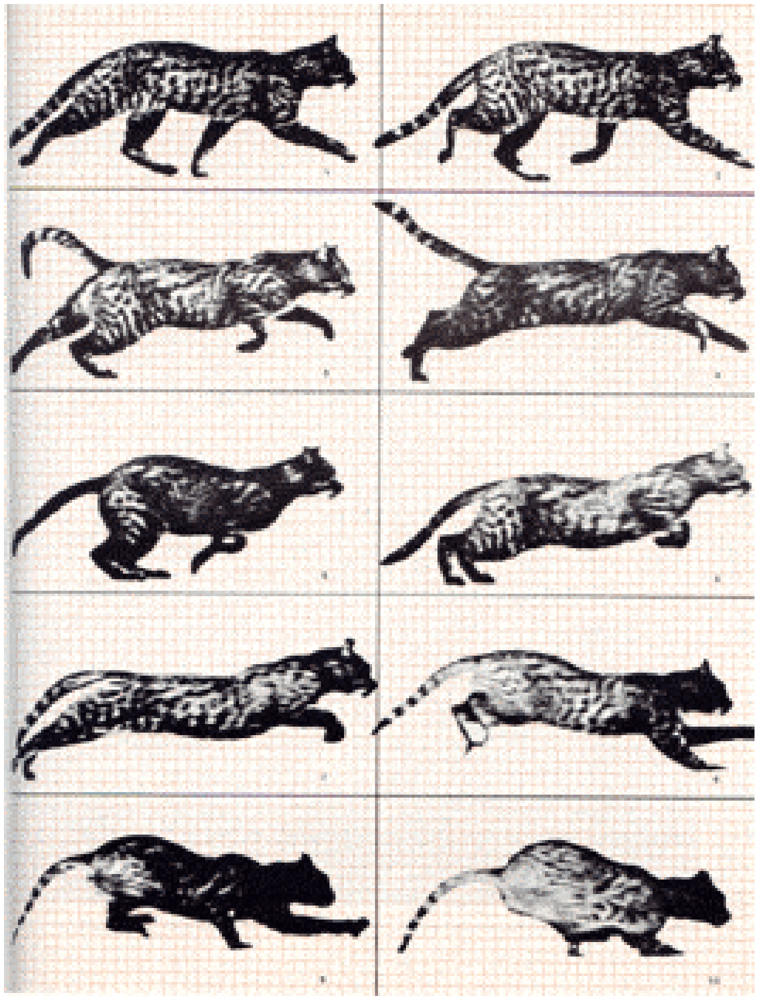
Los lógicos de la siguiente generación criticaron agudamente tanto a Newton como a Leibniz por haber utilizado los equivalentes de infinitesimales - por haber añadido cosas no existentes para crear las partes de las áreas y por haber transformado las tasas de variación en pendientes instantáneas medidas prescindiendo totalmente del tiempo.

El metafísico irlandés George Berkeley, en un ensayo titulado *«El analista»*, examinó la lógica del «cálculo diferencial» de Newton y concluyó: «No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera nada: ¿no podemos llamarlas los fantasmas de cantidades difuntas?».

Los matemáticos del siglo XIX iban a satisfacer tales críticas al invocar nuevos estándares de rigor para el cálculo. Pero mientras resistió la prueba del éxito, funcionó. Al utilizar el cálculo, los científicos explicaron todo proceso natural como una secuencia de acciones y reacciones, de causas y efectos. La naturaleza, no obstante, no puede determinarse por medio de este sencillo procedimiento mecánico. Todo el mundo sabe que hay accidentes en las fuerzas que producen el movimiento. Pero las leyes de estos accidentes son también matemáticas y los matemáticos contemporáneos de Newton y Leibniz estaban elaborando las leyes de la probabilidad.

6. El cálculo: una forma de sondear el mundo cambiante

Cuando los grandes matemáticos del siglo XVII Isaac Newton y Gottfried Wilhelm von Leibniz, desarrollaron el cálculo como una forma para medir el movimiento, estaban, en cierto modo, introduciendo en las matemáticas el principio de las películas de cine. De la misma forma que una película de cine consiste en la repetición de fotografías de un objeto, el cálculo transforma el movimiento en «naturaleza muerta» que puede ser observada «figura por figura».



DETENCIÓN DEL SALTO DEL GATO
La famosa secuencia de fotografías fue tomada en 1887 por Eadweard Muybridge, inventor de un prototipo de máquina de dibujos animados. Estas fotografías muestran que un movimiento puede descomponerse en pequeños incrementos de variación. En forma análoga, el cálculo trata al movimiento como un número infinito de «instantes».

Al inventarse el cálculo, los matemáticos podían tratar a un objeto en movimiento como un punto describiendo una trayectoria a través del espacio y, «deteniendo la acción», calcular la velocidad del objeto y la aceleración en un momento específico. La tierra en que vivimos está en movimiento como también lo están las moléculas del aire que respiramos. Por medio del cálculo estos movimientos pueden definirse a pesar de que no pueden verse. Aunque algunas de sus abstracciones son tan difíciles como cualquier cosa en matemáticas, el cálculo está basado en algunas ideas simples que se explican a continuación.

Un carpintero de Munich, que pesa 125 kgs., consume al día lo que hay sobre la mesa; muestra él peso en función de las calorías.

7. Funciones: representación de las variaciones en un mundo en transición

La noción de "función", común a muchas ramas de las matemáticas, es básica para el cálculo. Cuando un punto se mueve a lo largo de una trayectoria, la distancia que recorre depende del tiempo que emplea. En general, una variable es una función de otra si la variación de una depende de la otra, al igual que la estatura de un muchacho es una función de su edad.

Esta relación puede normalmente escribirse como una ecuación o representarse por medio de una línea recta o curva, en un gráfico.

El cálculo puede entonces utilizarse para analizar la gráfica de una función y, por tanto, el movimiento físico o el cambio.

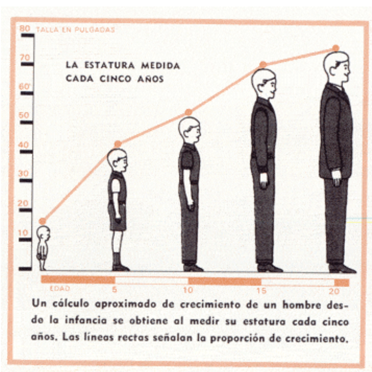
El análisis de las funciones es importante ya que todo en el mundo sufre alguna de transición. Los metales se dilatan al calentarse: por tanto la longitud de una barra de hierro es una función de su temperatura.

Si se conoce su longitud cuando se enfría, la longitud al calentarse puede determinarse cuando se conoce su temperatura.

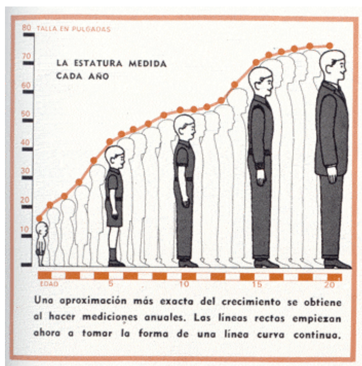
Una función de uso cotidiano es el coste de enviar una carta por correo especial. Su peso determina la cantidad de sellos; es decir, el número de sellos es una función del peso.

Otras funciones útiles en la era espacial son las relaciones de la velocidad de un satélite con el diámetro de su órbita, y las relaciones de la necesidad de oxígeno de un astronauta con su fortaleza.

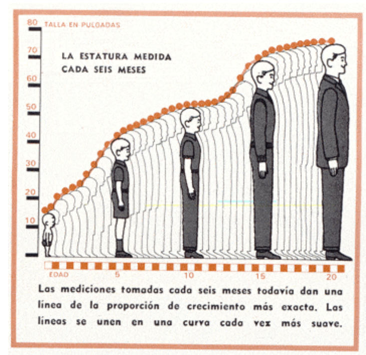
El volumen del feliz glotón en la página anterior es una función de las seis comidas diarias. Las otras fotografías en estas dos páginas muestran funciones comunes.



Un cálculo aproximado de crecimiento de un hombre desde la infancia se obtiene al medir su estatura cada cinco años. Las líneas rectas señalan la proporción de crecimiento.

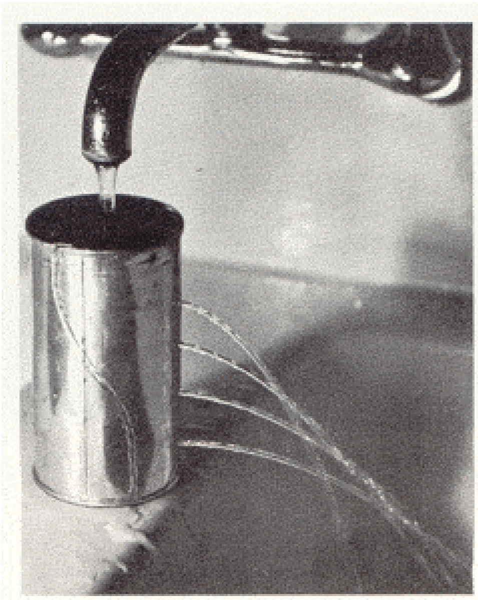


Una aproximación más exacta del crecimiento se obtiene al hacer mediciones anuales. Las líneas rectas empiezan ahora a tomar la forma de una línea curva continua.



Las mediciones tomadas cada seis meses todavía dan una línea de la proporción de crecimiento más exacta. Las líneas se unen en una curva cada vez más suave.

La estatura es función de la edad. Los dibujos muestran intervalos de cinco años, la variación de la pendiente de la línea indica que la proporción varía con la edad.

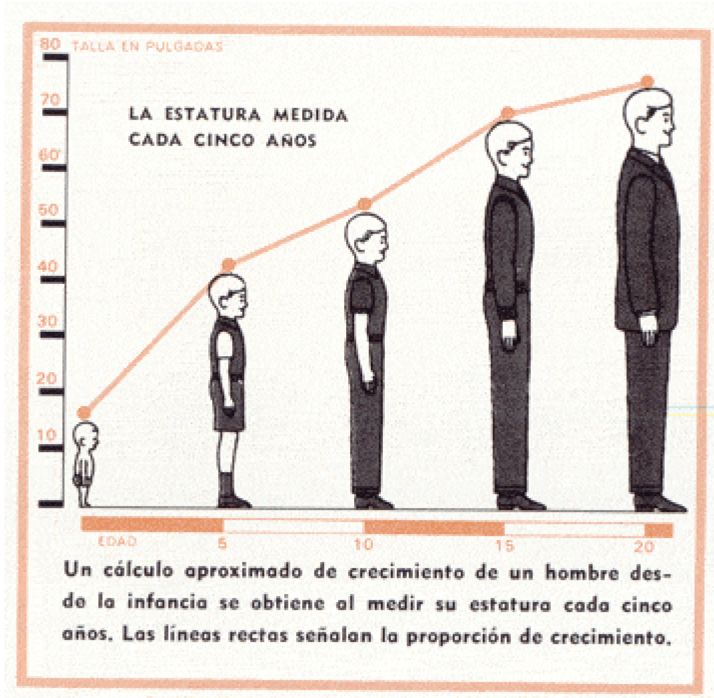


LA PRESIÓN EN LA PROFUNDIDAD
El agua que mana de los agujeros de un pote de lata demuestra que la presión varía con la profundidad. La presión en los agujeros inferiores hace que el agua salga en una trayectoria plana: la presión menor en los agujeros superiores produce un chorro más débil.

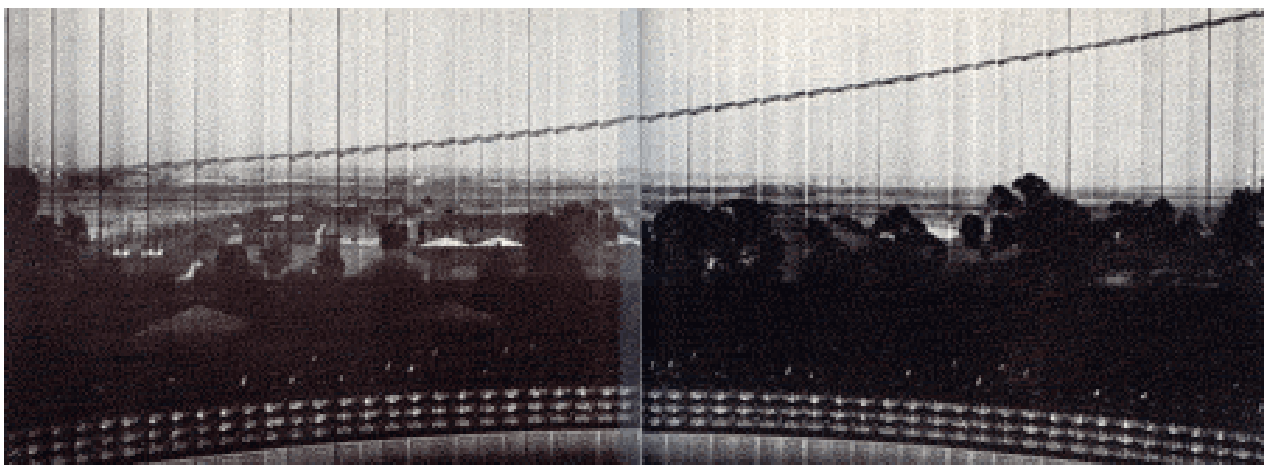
El número de personas es una función de la estación. Caney Island, llena en verano (izquierda), está casi desierta en invierno.

8. Aproximación: división de una curva para aislar un movimiento y medir un momento

El cambio es inherente al mundo físico: las cosas "toman forma", crecen, se mueven, se aceleran. La mayor parte de los cambios se manifiestan a través de proporciones desiguales: un avión toma velocidad y se eleva más aprisa al término de su ascensión que al principio. De la misma forma que es posible determinar la relación media de ascensión de un avión, también es posible hallar la relación media de ascensión sobre cualquier intervalo pequeño, o "parte estructural" del proceso. Pero el cálculo puede ir más allá, puede hacer que estas partes estructurales se hagan tan pequeñas que cada una de ellas se aproxime a un punto particular.



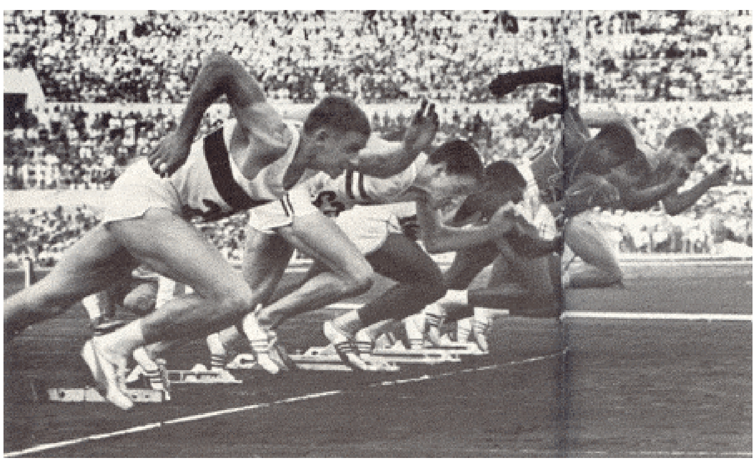
Un cálculo aproximado de crecimiento de un hombre desde la infancia se obtiene al medir su estatura cada cinco años. Las líneas rectas señalan la proporción de crecimiento.



Una cámara especial con la que pueden hacerse dos fotografías por segundo, muestra el recorrido aproximado de un avión

Las mediciones tomadas cada seis meses todavía dan una línea de la proporción de crecimiento más exacta. Las líneas se unen en una curva cada vez más suave.

LA TENSIÓN DE LA ACELERACIÓN
Esta sorprendente sucesión de figuras muestra un visible efecto de una tasa de variación: la cara descompuesta del coronel John Stapp, doctor de las Fuerzas Aéreas, investigando los efectos físicos de la aceleración al ir en la plataforma de un cohete. La fotografía de la izquierda muestra a Stapp antes de que inicie su viaje. Las dos fotografías siguientes le muestran cuando la plataforma adquiere velocidad. Las últimas fotografías de la secuencia le muestran impulsado hacia adelante a medida que se frena la plataforma.

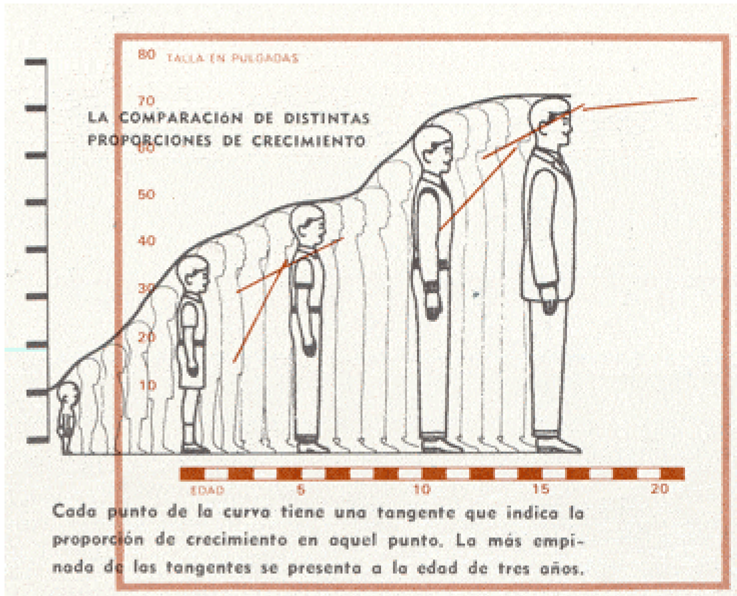


EL COMIENZO DE LA ACELERACIÓN
Los corredores que compiten en los Juegos Olímpicos de 1960 aceleran al separarse de la salida. Dentro de tres a cuatro zancadas, los corredores irán a velocidad máxima, o sea que la aceleración disminuye a cero. Al principio, la velocidad es pequeña y la aceleración grande

9. La proporción de la variación: forma de medir la aceleración y la desaceleración

"Todo cuanto nace", escribió el poeta romano Ovidio, "lleva en su seno las semillas del cambio". Entre las muchas clases de cambio en el mundo altamente mecanizado de hoy en día, uno de los más familiares es la aceleración, que está vivamente ilustrada en los semblantes descompuestos del pasajero en la plataforma del cohete de arriba, y en los tensos músculos de los corredores lanzándose a una carrera de 100 metros.

La aceleración exacta, o la "proporción de cambio de la velocidad", en cualquiera de los momentos que se muestran arriba pueden determinarse al representar toda la carrera en forma de gráfico. Cuando se traza este gráfico, como en el caso del crecimiento del muchacho, se refleja cierta información en la curva: su falta de uniformidad refleja, por ejemplo, una relación de crecimiento desigual de año en

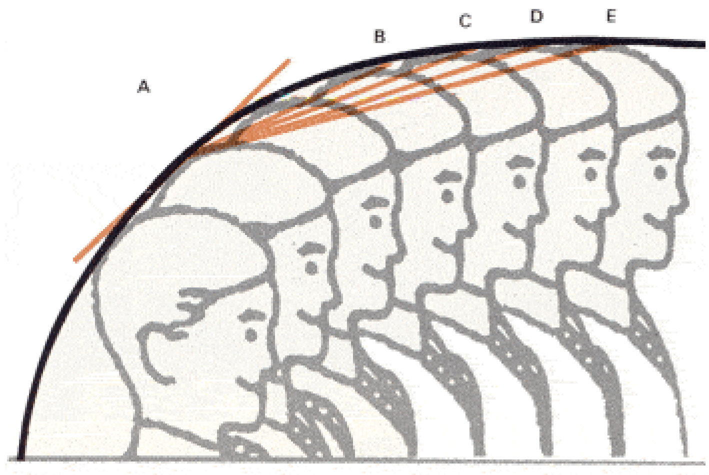


año.

La proporción de crecimiento se obtiene trazando una línea tangente a la curva, por ejemplo, tocándola en un solo punto. Si el declive de la tangente es pronunciado, la relación de crecimiento es rápida; si la tangente es horizontal, no hay crecimiento.

Cada punto de la curva tiene una tangente que indica lo proporción de crecimiento en aquel punto. La más empinada de las tangentes se presenta a la edad de tres años.

Las líneas AE, AD, AC y AB arriba, muestran promedios de crecimiento para períodos pequeños. Pero para el A, el crecimiento se muestra por la tangente en A.



10. La convergencia: regla elástica para medir lo inmensurable

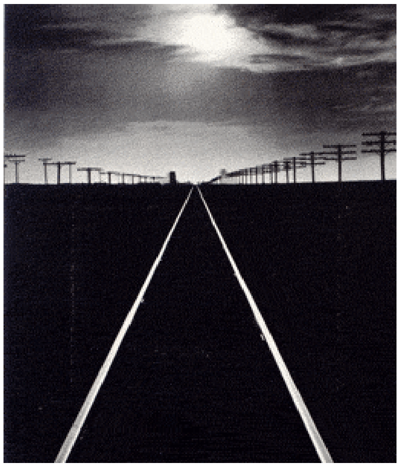
Un concepto fundamental del cálculo es la "convergencia hacia un límite", la idea de que un valor desconocido puede medirse a través de "acercamientos" por medio de aproximaciones que se hacen cada vez más pequeñas hasta que se ajustan, en efecto, a un valor preciso. Las líneas que convergen en el horizonte a la izquierda indican este método: aunque de hecho nunca se encuentran, parecen aproximarse tanto a determinado punto que, para cualquier fin práctico, puede decirse que se unen en aquel punto.

En forma similar, en la página opuesta, las imágenes del muchacho cada vez más pequeño nunca dan lugar a un punto. Pero convergen en un área tan pequeña que se considera un punto.

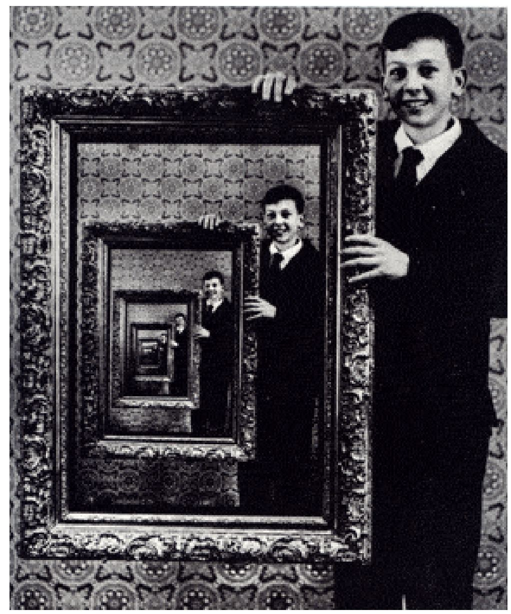
El cuadro de la parte superior izquierda ilustra cómo, al medir la tasa de crecimiento de un muchacho en un período de tiempo, el período puede hacerse disminuir hasta que se obtenga la medición de la tasa de crecimiento en un momento particular.

Probablemente el ejemplo más conocido de la convergencia es la aproximación decimal de 206 cifras en la tabla siguiente; este es el valor de π y aunque se han sacado más decimales, nadie ha llegado jamás al final de la serie.

$\pi =$ 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862
803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270
193852110555964462294895493038196442881



LA CONVERGENCIA DE LAS LÍNEAS
Dos líneas que se prolongan indefinidamente nunca se aproximan, pero en perspectiva se acercan hasta que parece como si se encontraran en el horizonte. El concepto de convergencia se utiliza en cálculo para dar valores definidos a cantidades no mensurables.

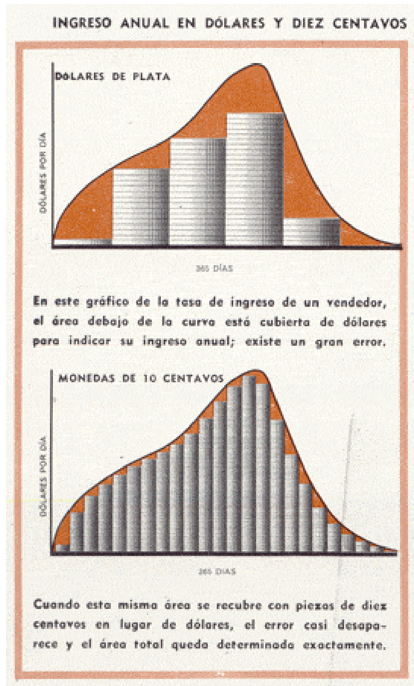


UN TÚNEL DE ESPEJOS SIN FIN
En este truco de los espejos un muchacho está retratado de forma tal que su imagen se refleja una y otra vez hasta el infinito. Cada una de las reflexiones es la mitad de la anterior; todas ellas juntas tendrían dos veces la altura del más alto de los muchachos.

11. La integración: determinación de los totales por medio de rectángulos

Cuando se presenta alguna tasa de variación física, el área debajo de la curva tiene un significado especial: representa el total de cualquier valor que represente la curva.

Así, en el gráfico de abajo referente a la tasa de ingresos de un vendedor, el área debajo de la curva es su ingreso anual. La técnica por la que se determina el área debajo de una curva se llama integración. No hay ningún método algebraico para determinar el área de una figura tan rara, pero el cálculo determina su área exacta al llenarlo de rectángulos de área conocida. Éstos nunca completan totalmente el área, pero el método de integración consiste en estrechar los rectángulos hasta que el área que queda por inscribir tienda a cero.



En este gráfico de la tasa de ingreso de un vendedor, el área debajo de la curva está cubierta de dólares para indicar su ingreso anual; existe un gran error.
Cuando esta misma área se recubre con piezas de diez centavos en lugar de dólares, el error casi desaparece y el área total queda determinada exactamente.

Unas ventanas casi rectangulares cubren el área debajo del tejado curvilíneo del auditorio de Kresge de M.I.T. en Combridge, Massachusetts. Muestra la técnica con que el área es limitada por una curva

Capítulo 6
El cálculo de las posibilidades en un mundo inseguro

Contenido:

1. *Introducción*
2. *Un comienzo por el peor de los lados*
3. *Las huellas y los niños*
4. *El soltero más feliz*
5. *El fascinante juego de la probabilidad y la posibilidad*
6. *Cálculo de los porcentajes en un antiguo pasatiempo*
7. *La clave matemática de la baraja de naipes*
8. *Ley inmutable en la que nadie puede confiar*
9. *Extraña influencia de la probabilidad en nacimientos y muertes*
10. *La relación 50-50 a que está sujeto el sexo de un bebé*
11. *Viaje matemático* desde el hecho a la previsión

LAS PROBABILIDADES DE CARA O CRUZ
El echar una moneda al aire es un ejercicio de teoría de la probabilidad que todo el mundo ha probado: decir cara o cruz constituye una apuesta justa ya que la posibilidad de uno u otro resultado es por mitad. En un número grande de tiradas los resultados tienden a nivelarse. Para que saliera cara cincuenta veces consecutivas un millón de hombres deberían tirar diez veces por minuto cuarenta horas a la semana y sucedería una vez cada nueve siglos!

1. Introducción

Además de la certeza de la muerte y del pago de los impuestos, pocos aspectos de nuestra vida eluden la influencia de la probabilidad. Un agrupamiento imprescindible de genes determina nuestra constitución física. Un encuentro imprevisto puede decidir la persona que se elija para el matrimonio o un empleo. Un paso en falso inadvertido puede llevarnos a un hospital. Para todos los hombres, desde la época en que se anotó en el Eclesiastés, «el tiempo y la probabilidad ocurren».

Incapaces de controlar la probabilidad hacemos lo mejor posible: tratamos de evaluar la probabilidad de que ocurra un suceso particular. Nuestra charla la sazonamos con los adverbios de contingencia: «normalmente..., probablemente..., tal vez». Cada vez que contemplamos un suceso que todavía no se ha convertido en hecho, automáticamente realizamos una estimación de la probabilidad.

El cálculo de probabilidades ha sido una preocupación humana desde tiempo inmemorial. Desde la mitad del siglo XVII ha sido también una seria pretensión del matemático. De sus investigaciones en la materia ha surgido toda una especialidad de su profesión -las matemáticas de la probabilidad- y una forma de calcular las posibilidades que es más aguda que las adivinanzas de los legos. Para el matemático, la probabilidad es un porcentaje. Al combinarse, las probabilidades de los sucesos particulares pueden utilizarse para valorar las posibilidades de cadenas de sucesos. Para tratar estas combinaciones, se han formulado ciertas reglas básicas; son las conocidas por el nombre de leyes de probabilidad.

Muchas de las manifestaciones más evidentes de la moderna ciencia son, en efecto, apuestas repetidas basadas en las leyes de la probabilidad. Los teóricos matemáticos de los siglos XVIII y XIX razonaron que el cálculo de Newton, debido a que analizaba en forma tan satisfactoria el cambio y el movimiento podía finalmente servir para revelar el futuro de uno o de todos los sucesos con absoluta precisión. Y de esta forma en su mayor parte avanzaron rápidamente hacia una filosofía de «determinismo mecánico». El matemático francés del siglo XVIII Pierre Simon de Laplace - que perfeccionó el análisis newtoniano del sistema solar en una gran obra titulada *Mécanique Céleste* («Mecánica de los cielos») - escribió: «Dada por un instante una inteligencia que pudiera comprender todas las fuerzas por las que la naturaleza está animada y... suficientemente vasta para someter estos datos al análisis, abarcaría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más pequeño: para ella, nada sería incierto y tanto el futuro como el pasado, estarían presentes a sus ojos».

Los científicos en la actualidad no esperan alcanzar el conocimiento inmediato que soñó Laplace. La pequeñez inefable de las partículas reveladas por los desintegradores del átomo y la inefable grandeza del universo revelada por los telescopios del siglo XX les han convencido de que nunca comprenderán al dedillo «todas las fuerzas por las que la naturaleza está animada» y, lo que es una gran tranquilidad, que nunca estarán obligados «a someter estos datos al análisis».

¡SALVÓ LA CABEZA!
Pierre de Laplace (1749-1827) utilizó el cálculo para explorar la mecánica celeste y promover la teoría de la probabilidad, que denominó «el sentido común reducido al cálculo». Empezó enseñando matemáticas en la Escuela Militar de París, en donde Napoleón era uno de los estudiantes. Durante la revolución no le cortaron la cabeza para que pudiera calcular trayectorias para la artillería.

Y, por lo tanto, los analistas modernos se han dedicado, en lugar de ello a hacer pronósticos basados en las matemáticas de la probabilidad.

Individualmente, las unidades más pequeñas de la naturaleza se mueven en una forma de azar que aparentemente no es predecible. Pero actúan en cantidades tan grandes que su comportamiento colectivo es totalmente predecible y con una exactitud conocida, una posibilidad de error conocida, que se valora por medio de probabilidad. Una población de trillones de moléculas de gas en un jarro y una población de millones de americanos detrás de los volantes pueden predecirse de la misma forma. Es imposible predecir que la molécula A hará una colisión con la molécula B o que el conductor X chocará con el conductor Y. No obstante, es posible decir aproximadamente el número de moléculas que entrarán en colisión en un segundo y aproximadamente cuántos conductores en un mes. Y la previsión permitirá que el científico alcance una conclusión, permitirá que una empresa de seguros establezca sus primas.

2. Un comienzo por el peor de los lados

Al servir a la ciencia y a los negocios, las matemáticas de la probabilidad han alcanzado un estado muy superior al de sus orígenes, que estaban ligeramente en el peor de los lados. La teoría de la probabilidad se inspiró en las preguntas de los jugadores que buscaban alguna información interna para ganar en las cartas o en los dados. Tartaglia y Cardano, ambos presentaron sagaces análisis de los problemas del juego. Pero su trabajo - tal vez demasiado relacionado con el juego para los matemáticos y demasiado matemático para los jugadores - fue olvidado en gran parte. La probabilidad en la forma que la conocemos en la actualidad, en lugar de ello, fue propugnada por un trío de franceses a mediados del siglo XVII un noble de elevada posición, el caballero De Méré y dos matemáticos esporádicos, Blaise Pascal y Pierre de Fermat.

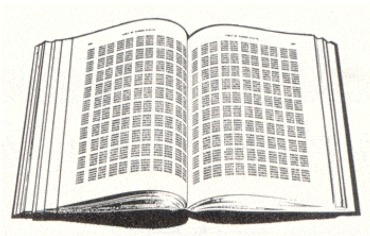
Las principales preocupaciones de Pascal eran la filosofía y la religión. Le entusiasmaba también la geometría «proyectiva» - una geometría que se refiere a los problemas de perspectiva del dibujo y a las formas de las sombras a que darán lugar las figuras geométricas. Fermat era un jurista de profesión. Como se mencionó anteriormente, creó partes de la geometría analítica independiente de Descartes, pero se le recuerda principalmente como uno de los principales teóricos del número de todos los tiempos, una reputación que ganó al quedarse en casa hasta muy tarde, a la luz de la luna, después de las sesiones en el parlamento local.

En 1651 ó 1652 De Méré y Pascal coincidieron en un viaje a una ciudad de Poitou. Al tratar de encontrar un tópico de conversación mutuamente interesante con el que distraerse en el viaje, el mundano De Méré presentó al espiritual Pascal un problema matemático que había producido grandes controversias desde la Edad Media: cómo dividir el pote en un juego de dados que tiene que interrumpirse. Pascal ponderó el problema durante un par de años y finalmente, en 1654, lo comunicó a Fermat.

En la célebre correspondencia que siguió al problema e puesto por De Méré, Pascal y Fermat empezaron por estar de acuerdo en que, en un juego de dados no acabado, las apuestas sobre la mesa deberían dividirse según las perspectivas de ganar que tiene cada jugador. Cada jugador ha apostado 32 doblones de oro (el equivalente hoy en día a unos 176 dólares de oro actual) de que el número elegido saldrá tres veces en un dado antes que lo haga el número de otro jugador. Después de que el juego haya seguido durante un rato, el número 6 de De Méré ha salido dos veces, el cuatro de su oponente ha salido una sola vez. En este instante De Méré recibe una repentina citación, ¿cómo dividir los 64 doblones de oro de la mesa? El amigo de De Méré, podría sostener que dado que sus posibilidades de conseguir dos tiradas afortunadas son doblemente probables que las posibilidades de De Méré de obtener una tirada afortunada, tiene derecho a la mitad de lo que corresponde a De Méré, es decir, 21 1/3 frente 42 2/3 de De Méré. De Méré, por otro lado, podría sostener que en la tirada siguiente del dado lo peor que pudiera sucederle sería perder su ventaja, en cuyo caso el juego estaría nivelado, y en este supuesto tendría derecho a la división exacta que corresponde a 32 doblones de oro. Si, no obstante, en su próxima tirada tuviera suerte ganaría la apuesta original y recogería la totalidad de los 64 doblones. De Méré arguye, por lo tanto, que incluso antes de la tirada tiene derecho a 32 doblones, más 16 de los que sólo tiene la mitad de la certeza. Y está en lo cierto: Pascal y Fermat lo decidieron así.

De las investigaciones de Pascal y Fermat en torno a distintas situaciones del juego ha surgido la teoría moderna de la probabilidad -las leyes de la posibilidad -. La idea de que la posibilidad está regida por leyes puede parece poco convincente. Pero en verdad las leyes de la probabilidad no impiden la posibilidad de que un individuo tenga una racha de suerte, ni niegan el valor de los presentimientos en el juego. Empiezan a actuar como leyes sólo cuando hay muchas repeticiones - al tirar muchas veces los dados, al dar muchas veces las cartas, cuando ocurren muchas colisiones de coches, al considerar las vidas de muchas personas; este aspecto de la probabilidad se conoce por la ley de los grandes números.

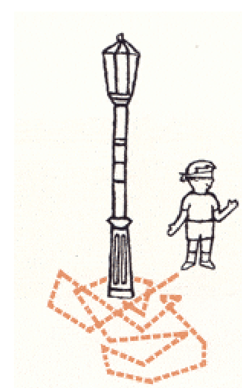
La misma ley da a un individuo sólo una posibilidad remota de tener suerte constantemente - de actuar constantemente mejor de lo que una predicción de probabilidad garantizaría. Por otro lado, una racha de buena suerte no hace disminuir la posibilidad de que un individuo tenga suerte nuevamente en cualquier ocasión determinada; un vendedor que viaja miles de kilómetros al año sin ningún accidente no incurre en un riesgo mayor cada vez que sube a un avión. Las pistas de despegue y el radar no tienen memoria, y las posibilidades de sobrevivir en un vuelo determinado son tan buenas la milésima vez como la primera.



06800	31827	80191	43585	20270	74558	48961	90052	02750	82718	27982
06801	92204	68347	84735	32061	47876	42152	89344	82877	44440	61944
06802	72608	47319	85449	66261	38104	76120	66105	86843	17467	79969
06803	71181	34112	21904	22894	46802	68360	67676	37401	50290	46941
06804	30238	58381	06203	10840	07664	84061	78870	19046	94038	74214
06805	97806	63153	46986	88540	26772	51091	60122	13542	29098	02527
06806	68901	15231	70325	54459	74210	33550	67053	03497	00764	59007
06807	51517	35148	82482	85693	34742	79244	54316	59097	05238	71302
06808	96035	69002	34342	01936	91700	87950	36445	27181	94249	35572
06809	40704	12590	78982	10013	72214	98454	63763	75478	24327	74597
06810	99130	52082	16513	04318	44844	62677	52651	92644	60732	82781
06811	71335	76694	81253	49676	62672	77020	33251	77045	66312	20038
06812	13116	26616	14165	91983	19943	51068	33249	54613	76240	99180
06813	97727	69794	70411	30598	83133	74098	05019	92651	23968	39257
06814	55499	59891	93900	73882	25113	59388	43088	23301	32577	52791

UN LIBRO DE NÚMEROS AL AZAR
Los números al azar se utilizaban en la técnica de investigación de muestras escogidas al azar. Nadie escogerá tres «cuatros» seguidos pero una secuencia de este tipo podía constituir una serie probabilística, por lo que la Corporation RAND utilizó una rueda de ruleta electrónica para preparar el libro de millones de dígitos de números al azar. Parte de una página aparece abajo.

La ley de los grandes números es aplicable hoy a la mayoría de los usos prácticos de la probabilidad. Debido a éstos, la probable exactitud de cualquier previsión aumenta con el número de casos que comprende: el número de moléculas en un recipiente de gas o el número de pólizas de seguro de accidentes suscritas. Esta es una razón por la que las primas son mucho más elevadas en las pólizas individuales hechas a la medida para cubrir un riesgo particular, que las pólizas ordinarias que pueden extenderse a un número elevado de casos distintos. Por ejemplo, un actuario de seguros puede mirar los archivos referentes al tiempo atmosférico y hallar que, por término medio, en un día del mes de abril en la ciudad de Méjico, las posibilidades de que llueva son inferiores al 2 %.



DANDO UN PASEO AL AZAR
Un muchacho con los ojos vendados que empieza a caminar partiendo de un farol, se mueve de un modo completamente irregular pero la matemática «ley del desorden» predice que mientras que siga andando, regresará al farol. Este ejemplo ilustra el «camino al azar», principio de la física moderna, utilizado por un físico de 26 años llamado Albert Einstein para describir el movimiento de las diminutas partículas suspendidas en un liquido.

Pero si un millonario mejicano desea asegurar contra el peligro de lluvia la recepción de la boda de su hija realizada al aire libre, la compañía de seguros no le dará cincuenta casos favorables contra uno, sino que sólo aproximadamente 10 a 1. Es decir, tendría que pagar alrededor de la décima parte del coste de la fiesta. Por otro lado, si un conductor hace la apuesta de 100 dólares con una compañía de seguros de que su coche no dará lugar a 300.000 dólares de daños al año, se le dará un trato mejor. Tendrá que pagar sólo un poco más de lo que corresponde a su participación en todos los daños y perjuicios que hagan colectivamente él y muchos miles de conductores como él.

3. Las huellas y los niños

Las matemáticas de la probabilidad influyen sobre muchas otras facetas de la vida moderna. Ayudan al investigador atómico a interpretar las huellas que impresionan en la película las partículas atómicas disparadas desde los ciclotrones. Ayudan al experto en cohetes a decidir qué factores de seguridad deberían construirse en los costosos sistemas de cohetes dirigidos. Ayudan a valorar a nuestros hijos en los testes de inteligencia y hacen posibles las predicciones de votos.

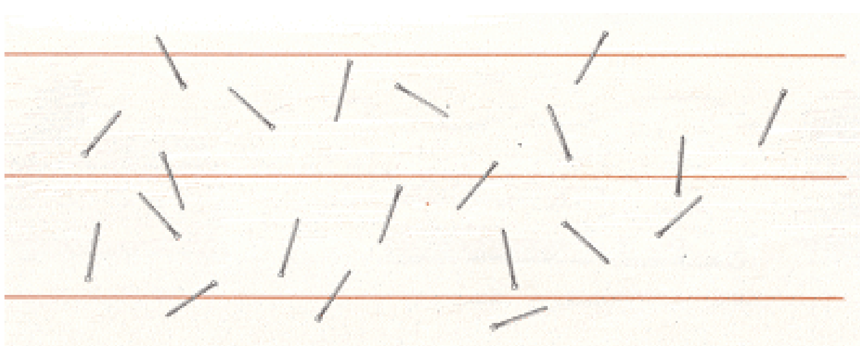
Básicamente, dos leyes son el fundamento de la probabilidad: la ley conjunta para calcular la probabilidad de dos sucesos que se presentan conjuntamente y la ley de exclusividad, para calcular entre dos sucesos la probabilidad de que ocurra uno u el otro. La ley conjunta dice que la posibilidad de dos sucesos independientes que ocurren conjuntamente es igual a la probabilidad de que ocurra uno multiplicado por la probabilidad de que ocurra el otro. Por ejemplo, la posibilidad de sacar al tirar una moneda es ½. La posibilidad de sacar cara tanto en la primera como en la segunda tirada es ½ x ½, o sólo ¼. La ley de exclusividad dice que la posibilidad de que sea cierta una cualquiera de estas dos posibilidades mutuamente exclusivas es igual a la suma - adición - de las posibilidades separadas de que cada una individualmente sea cierta. La posibilidad de sacar cara o cruz al tirar una moneda es igual a la posibilidad de sacar cara más la de sacar cruz: ½ + ½ = 1. El 1 representa la certeza, algo que aparecerá una vez en cada prueba particular.

Dado que los sucesos están a menudo relacionados y generalmente no son independientes o mutuamente exclusivos, las leyes conjunta y de exclusividad son de gran utilidad. La ley de los fenómenos conjuntos se halla modificada si la presentación del primer suceso afecta las posibilidades del segundo. Por ejemplo, la probabilidad de sacar uno de los 13 corazones en un juego de 52 cartas es 13/52 o simplemente ¼. Pero la posibilidad de sacar un corazón en la primera y segunda extracción de una baraja no es 13/52 x 13/52. Cuando se ha sacado un corazón y hay sólo 12 corazones y quedan 51 cartas para extraer, la probabilidad de que salga un corazón ha disminuido de 13/52 a 12/51. Como resultado, las posibilidades de los fenómenos conjuntos de sacar dos corazones seguidos han sido reducidas a 13/53 x 12/51. Esta modificación de la ley de los fenómenos conjuntos se denomina la ley de los sucesos condicionados.

Una observación similar es aplicable a la ley de los sucesos independientes. Si dos sucesos no son mutuamente exclusivos, las posibilidades conjuntas de que ocurra uno u el otro son iguales a la suma de sus posibilidades separadas menos la posibilidad de que ambas ocurran conjuntamente. Por ejemplo, las posibilidades del caballero De Méré de sacar o un 2 o un 3 en una tirada de un solo dado de seis caras sería 1/6 + 1/6, ya que los dos resultados son mutuamente exclusivos - no es posible que sacara ambos números en una sola tirada. En contraste, sus posibilidades de sacar un 2 en una cualquiera de las dos tiradas no sería mutuamente exclusivo; podría sacar un 2 en ambas tiradas. Como resultado, la posibilidad de los sucesos independientes de que salga un dos en una u otra tirada sería 1/6 + 1/6 modificado por la sustracción de 1/36 para representar la probabilidad de los sucesos conjuntos o dos 2 seguidos.

LA PROBABILIDAD DE QUE UN HERMANO TENGA UNA HERMANA
Si un hombre dice: «De mis dos hijos por lo menos uno es chico», ¿qué probabilidades hay de que ambos sean chicos? ¿«50-50»? No. Si se desconoce el sexo del primogénito, hay tres posibles sucesiones de hijos.
De estas tres posibles alternativas, sólo una incluye dos chicos: la probabilidad de que un tercero sea chico es una entre tres o 1/3. Si hubiéramos sabido que el primer hijo del hombre era un chico, sólo serían posibles las dos figuras de la parte de arriba, y la probabilidad de que tuviera dos chicos sería entonces una entre dos, o «50-50».

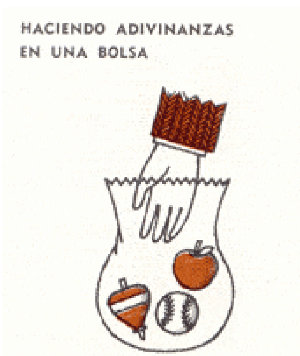
Una importante dificultad al aplicar las leyes de la probabilidad está en determinar todas las formas posibles en que puede presentarse un suceso. En los juegos de dados el problema sólo es relativamente difícil.



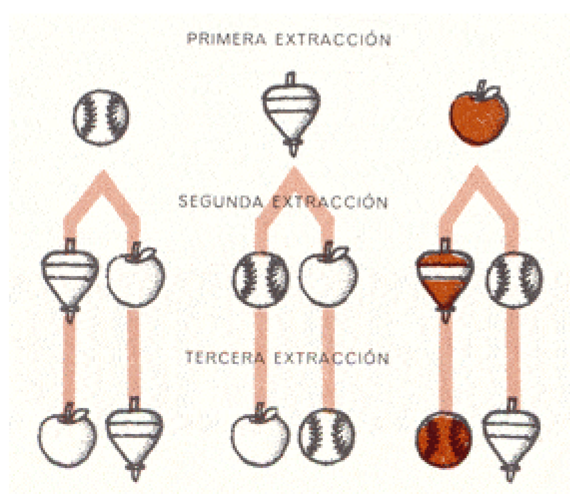
CLAVOS Y NEUTRONES
El echar clavos en un suelo construido a base de estrechos tableros ilustra una técnica de probabilidad conocida por el método de Monte Carlo, que fue instrumental para desarrollar la protección apropiada para los reactores atómicos. Al echar repetidamente los clavos es posible predecir cuántas veces un clavo dará en una hendidura. Los científicos atómicos adoptaron el método -el único válido, para

calcular las posibilidades de que un neutrón fuese parado o desviado por otro núcleo en la cubierta protectora de aquél.

Cada tirada sucesiva de un dado, o cada nuevo dado añadido a un conjunto de dados que se tiran conjuntamente, multiplica el número de posibilidades por seis. Por ejemplo, si se tiran tres dados el número total de posibilidades es tres veces seis o 216. Todas estas posibilidades son igual de probables, pero muchas son idénticas en los efectos, es decir, el 15 puede salir en forma de 3, 6, 6, o un 6, 6, 3. La única diferencia entre ellos es su orden de aparición, y los distintos órdenes de aparición deben ser considerados al valorar las probabilidades. Utilizando un ejemplo poco agradable, un hombre que acaba en un hospital con una pierna rota no le importa si primero cayó y fue cogido después por un coche o primero fue atropellado y después golpeado.



LA FORMA DE PONER LA MANO EN LA BOLSA
Si uno introduce la mano en la bolsa de arriba, ¿cuál es la probabilidad de predecir correctamente el orden en que se cogerán los tres objetos? Éste es un ejemplo para calcular las permutaciones y combinaciones.



EL ORDEN POSIBLE DE LAS EXTRACCIONES Las tres columnas de arriba muestran las formas en que podría vaciarse la bolsa. En la columna de la izquierda, la pelota se extrae primero (las posibilidades son una entre tres). O bien la peonza o la manzana deben extraerse a continuación (posibilidades: una entre dos). Si se extrae la peonza, la tercera extracción ha de ser la manzana y viceversa (posibilidades: una entre una). La probabilidad de adivinar un orden cualquiera se halla multiplicando las posibilidades de cada extracción, por *ejemplo, 1/3 x 1/2 x 1/1, que en este caso da 1/6.*

Como instrumento para ahorrar trabajo, los matemáticos han elaborado reglas que les dirán a golpe de vista cuántos órdenes o colocaciones separadas pueden formarse en cualquier conjunto de posibilidades. Un conjunto de posibilidades, las cinco cartas posibles en una mano de póquer, por ejemplo, se conoce por una «combinación». Cada una de las formas en que pueden colocarse las cartas o cada orden en que pueden sacarse, se conoce por una «permutación».

Las leyes de las permutaciones y combinaciones a través de las que los teóricos de la probabilidad hacen la vida más fácil para ellos mismos, han llegado a obtenerse por medio de ponderar los ordenamientos o colocaciones que pueden salir de una bolsa. Supóngase, por ejemplo, que un soltero es igual de amigo de una pelirroja, de una rubia y de una morena; supóngase, además, que su cuidadosa política antimatrimonial consiste en salir con cada una de las chicas cada tres salidas. ¿Cuántas permutaciones, ordenamientos de las salidas con chicas, puede realizar antes de que se repita el mismo? La primera fecha de una serie cualquiera de tres, tiene tres posibilidades. Al haber salido con una de las chicas, le quedan dos alternativas en la serie para la segunda noche. Después de la segunda salida sólo le queda una alternativa. En total tiene 3 x 2 x 1 formas de colocar la secuencia de sus salidas en un solo grupo, después de seis grupos es probable que empiece a repetirse.

Una forma más común y menos intrigante, a través de la cual el ciudadano medio realiza extracciones de una bolsa, lo constituye la mesa de juego. Cuando se da la primera carta de una baraja de 52, hay 51 posibilidades restantes; cuando se da la segunda carta hay 50 posibilidades. En total el número de alternativas en que pueden distribuirse las cartas es 52 por 51, etc., y así descendiendo hasta 1. Para ahorrar espacio, los matemáticos lo escriben simplemente como un 52 seguido por un signo de admiración llamado «52 factorial». Cinco factorial (5!) significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1, o sea, 120. Tres factorial (3!) significa 3 x 2 x 1, o sea 6.

4. El soltero más feliz

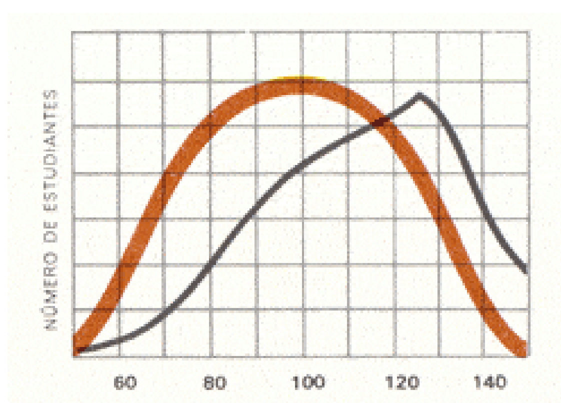
El jugador de póquer o de bridge se asemeja a nuestro mencionado soltero, a excepción de que el soltero lleva ahora una vida de complejidad celestial. Conoce a 52 chicas distintas y las escoge en grupos de cinco o 13. Si escoge en grupos de cinco, las posibilidades con que se enfrenta antes de cada elección son sucesivamente 52, 51, 50, 49 y 48 y el número total de ordenamientos de salidas posibles 52 x 51 x 50 x 49 x 48 o 52! / (52-5)!, en total 311.875.200 disposiciones distintas. Si escoge en grupos de 13 las colocaciones posibles se elevan a 52! / (52-13)!, que todavía es un número más monstruoso.

En el bridge o en el póquer un jugador no está interesado tanto en el número de secuencias que pueden darse en una mano como en el número posible de manos que resultan. En el póquer puede dar cinco cartas en 52!/(52-5)! formas, pero sólo 1/5! o 1/120 de estas formas tienen significado para él. Por lo tanto, el número total de manos que puede tener es 52! / ((52-5)! x (5!)), o 2.598.960.

De manera similar el número total de manos de bridge es 52! / ((52-12)! (13!)), en total 635,013,559,600. En general, el número de formas en que r objetos pueden sacarse de una bolsa de n objetos, prescindiendo de su colocación, es n! / r! (n-r)!

LA CURVA NORMAL

La curva en forma de campana (línea de trazo grueso de arriba) es el gráfico más corriente de la teoría de la probabilidad. Describe todas las variaciones en un grupo de sucesos o cantidades: la duración de las bombillas eléctricas, los distintos tamaños en las hojas de un árbol; las distintas estaturas en un regimiento de tropa. Si la muestra es grande y variada, la curva siempre tiene una forma de campana. Una muestra al azar del C. I. en un instituto grande, por ejemplo, da lugar a una curva en forma de campana, mostrando que la gran proporción de los C. I. se halla situada a la mitad de camino entre los resultados superiores e inferiores. Muestras pequeñas, por ejemplo, los C. I. en una escuela para superdotados, da lugar a curvas con una forma particular (línea de trazo delgado).

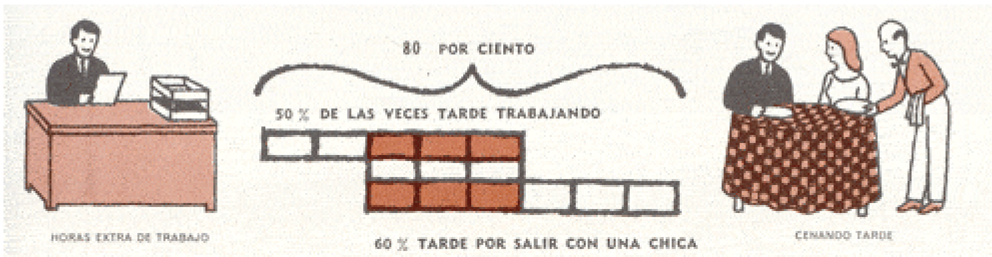


Aunque la probabilidad todavía conserva las huellas de sus orígenes deportivos, no todo son juegos de dados, de cartas, tiradas a cara o cruz. En sus formas más prácticas es el ingrediente principal de la ciencia de la estadística. Al aplicarse por medio de la estadística, da al estudiante bachillerato una idea de la realización en su futuro si va a la Universidad en vez de detenerse en el bachillerato; dice al soltero aproximadamente qué posibilidad tiene de vivir tanto como su hermano casado; dice al hermano qué posibilidad tiene de sobrevivir a su esposa. En los negocios, la probabilidad estadística se utiliza para estimar el stock que debería guardar un fabricante en sus almacenes. En las comunicaciones revela el número de conexiones - de combinaciones - que deben de hacerse en cualquier teléfono automático o red telegráfica. En la industria farmacéutica indica si los efectos que se indican de un nuevo producto son estadísticamente significativos o simplemente resultados de la casualidad.

Entre los juegos de azar y la mayor parte de estas aplicaciones más complejas y más útiles, que no tienen nada que ver con el juego, hay una diferencia fundamental. En el juego puede resultar difícil, pero siempre es posible, enumerar todos los resultados posibles de un riesgo: todos los billones de manos que pueden resultar de una baraja de cartas. Al predecir los altibajos de la vida real, no es muy posible conocer por adelantado todas las cartas de la baraja. En la probabilidad del juego, el matemático está considerando las posibilidades de las extracciones de una bolsa en la que la clase de bolas y sus proporciones relativas se conocen con anterioridad. En la probabilidad estadística, el problema es coger una muestra experimental bien seleccionada y después hacerle corresponder la probabilidad que con precisión represente todo el contenido de la bolsa.

Un instrumento básico que los matemáticos utilizan al investigar bolsas desconocidas es la curva que se ilustró más arriba. Ésta es la denominada curva de la «distribución normal», que representa lo que es normal o average en un número grande de casos observados. Una forma fácil de obtener la curva es tirar un número muy grande de veces un dado y después representar el número de veces que salen las combinaciones en relación con sus propios valores. La curva se convierte en una suave curva en forma de campana: la conocida curva C. I. o de clasificación, que se presenta en variedades innumerables en cualquier tipo de análisis estadístico.

La curva de probabilidad se reconoció y utilizó primeramente por el matemático Abraham de Moivre, un hugonote francés que había huido a Inglaterra después de la revocación del Edicto de Nantes en 1685.



UN SOLTERO EN LA CIUDAD

Si un soltero viaja con billete de abono para su trabajo en la ciudad tiene un 50% de probabilidades de quedarse en la ciudad hasta tarde para trabajar, y también un 60% de posibilidades de permanecer hasta tarde para salir con una chica, y parecería que todas sus probabilidades de estar hasta tarde en la ciudad son ¡110%! Como muestra el gráfico de abajo, sólo lo hace el 80% de sus noches -hay un 30% (área coloreada) en que trabaja hasta tarde y después sale con una chica.

Fue más desarrollada por la máxima autoridad matemática del siglo XIX, Carl Friedrich Gauss. Para representar la curva, Gauss escribió una ecuación que es de notoria utilidad al científico, ya que está construida en términos de los factores que intervienen en las situaciones experimentales. Si, por ejemplo, el científico desea saber cuál es la posibilidad de que las mediciones que ha hecho en un experimento sean, por una razón u otra, poco representativas y tal vez de poca confianza, la ecuación de Gauss le dice cuál es la posibilidad de que las mediciones estén mal en un 1 %, o en otro tanto por ciento. Como resultado el científico sabe «el límite de error probable» en su trabajo y puede actuar en consecuencia.

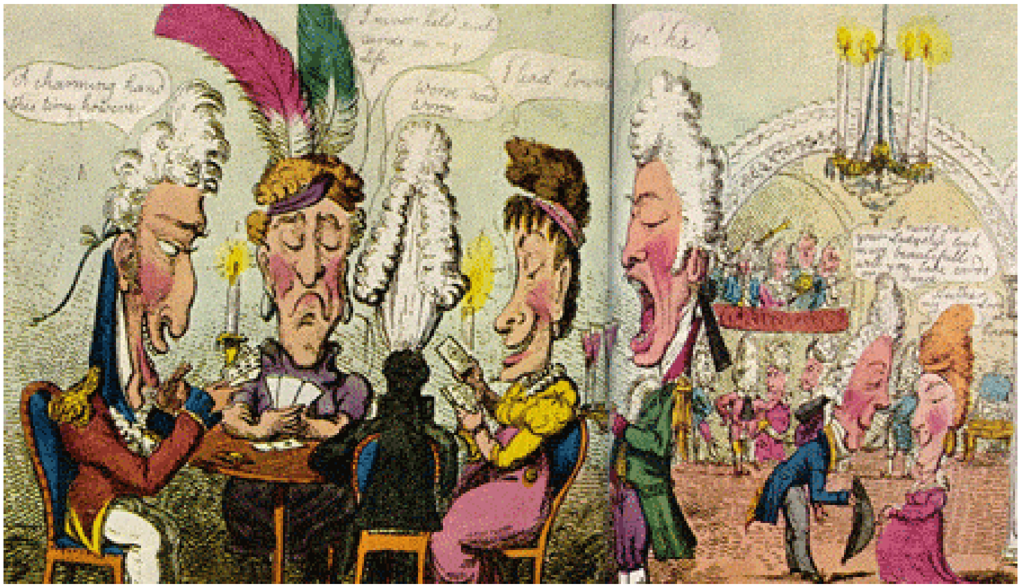
Desde la época de Gauss, los expertos de la probabilidad han elaborado otras ecuaciones y otras curvas para ciertas clases de situaciones no comprendidas por medio de la curva de distribución normal. Dichas situaciones, denominadas anormales, incluirían, por ejemplo, las posibilidades de marcar un número equivocado, o las posibilidades de que su casa resultara dañada durante un raid aéreo. La característica de juego persiste en estas aplicaciones sofisticadas de la posibilidad, pero han sido perfeccionadas para nuevos grados de utilidad y respetabilidad. En la actualidad la teoría de la probabilidad no es desconocida en las asignaturas de bachillerato. Y existe la esperanza de que los jóvenes que la absorben se conviertan, no precisamente en mejores jugadores de cartas, sino en mejores practicantes de los juegos de azar de los negocios, de la tecnología y de la ciencia.

6. El fascinante juego de la probabilidad y la posibilidad

Por un breve momento, cuando se tira una moneda al aire, ésta asume un estado de impredicción. Nadie puede decir qué cara saldrá. A pesar de esto, si se tira aquella moneda un millón de veces, con variaciones cada vez menores, saldrá cara la mitad de veces y cruz el resto. En esencia, ésta es la base de la teoría de la probabilidad, una rama de las matemáticas que se ocupa de las semejanzas, predicciones y de la posibilidad. Enunciada por primera vez hace trescientos años, las más tempranas aplicaciones lo fueron en el campo del juego, con el que todavía mantiene unos lazos muy fuertes. Pero la probabilidad (al igual que su asistenta, la estadística), se ha convertido en un instrumento moderno indispensable. Pierre Simon de Laplace, prominente en el, campo de la probabilidad, la llamó una ciencia que empezó con el juego, pero que evolucionó en «el objeto más importante de conocimiento humano».

POSIBILIDADES EN LAS APROXIMACIONES
Seis jugadores en el casino de Las Vegas prueban su suerte contra la banca, en un juego llamado «blackjack», que consiste en pedir cartas y acercarse lo más posible a 21 sin pasarse. Aunque aparentemente un juego simple, las posibilidades se acercan a lo astronómico. Un matemático pretende haber descubierto un sistema con la ayuda de un computador electrónico.

UNA EMOCIONANTE PARTIDA DE 31
Este cuadro del siglo XIX muestra toda la gama de emociones humanas, desde el júbilo hasta la desesperación, entre los jugadores en el momento en que la carta ganadora ha sido jugada. El juego (y, el nombre del cuadro) es «Trente et Un», o 31, un precursor del juego moderno de «blackjack», en que ganaba quien más se acercaba a 31 sin pasarse.



UNA MIRADA CAPRICHOSA A LOS NAIPES

La manía del juego de cartas de comienzos del siglo XIX se satiriza en este estudio del famoso caricaturista inglés George Cruikshank. Llevando pelucas complicadas y sombreros de plumas, los jugadores están pendientes de las cartas que reciben en este juego que es una forma primitiva de bridge. La sátira de Cruikshank incluye al criado con los vasos de vino.

6. Cálculo de los porcentajes en un antiguo pasatiempo

Con pequeñas variaciones en cuanto a vestuario, los satíricos cuadros de estas páginas relativos al juego serían tan actuales hoy en día como lo fueron cuando se imprimieron, hace 150 años. Pues los juegos de azar están comprendidos entre las diversiones humanas más antiguas y universales. La historia del juego se halla rodeada de dramáticos episodios.

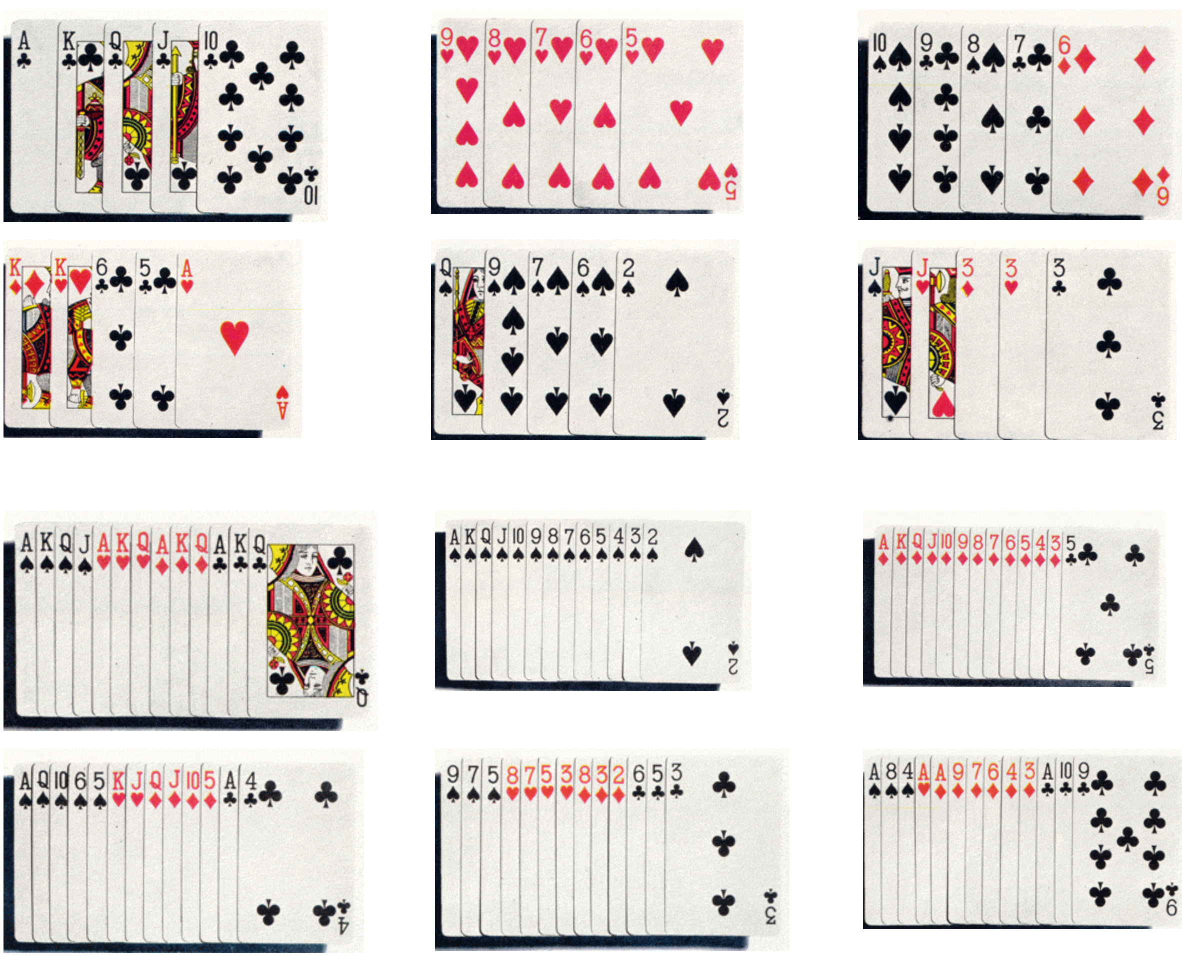
EL AMIGO DEL JUGADOR
Blaise Pascal (izquierda) con Pierre de Fermat elaboraron conjuntamente la teoría de la probabilidad, impulsados por un amigo que quería saber cómo repartirse el resto al interrumpir un juego de dados.

El drama continúa hoy en día. En los Estados Unidos cada año 15 mil millones de dólares cambian de mano legalmente – y 75 mil millones ilegalmente - en el juego. A pesar de las apuestas tan elevadas, los primeros jugadores empezaron teniendo poca noción de los porcentajes en favor y en contra. No se hizo ningún análisis matemático adecuado del juego hasta 1654, cuando dos matemáticos franceses, Pierre de Fermat y Blaise Pascal, establecieron los fundamentos de la teoría de la probabilidad. Por primera vez los caprichos de los juegos de azar podían ser reducidos en términos de certeza.

UN TEÓRICO ESPORÁDICO
Pierre de Fermat, además de participar en los honores de elaborar la teoría de la probabilidad, contribuyó a la teoría del número y dio impulso al cálculo diferencial. Pierre de Fermat era magistrado.

7. La clave matemática de la baraja de naipes

Utilizando los descubrimientos de Pascal y Fermat los matemáticos probaron que la suerte en las cartas es en gran parte una cuestión de números. Las secuencias posibles distintas en una baraja de 52 cartas es un número de 68 cifras; si todas las personas de la tierra calcularan un millón de colocaciones por segundo 24 horas al día durante 80 años, no podrían calcular una mil millonésima de una mil millonésima del uno por ciento de las posibilidades. El número total de manos de cinco cartas que pueden darse en el póquer es 2.598.960. El número de manos con 13 cartas de bridge es de 635.013.559.600. Las probabilidades en el póquer y en el bridge las calculó Oswald Jacoby.



LOS PORCENTAJES DE LA POLÍTICA
En el cuadro renacentista de la derecha se caracteriza la política internacional como un juego de azar, con los gobernantes europeos representados por cartas. Pero los juegos de cartas, y hasta la política, eran más previsibles de lo que creían estos jugadores de la época.

8. Ley inmutable en la que nadie puede confiar

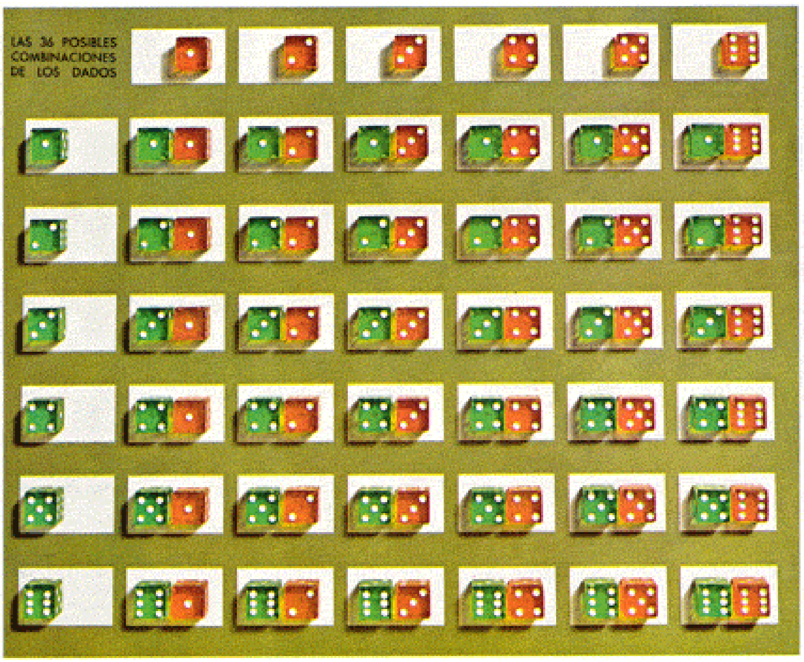
La teoría de la probabilidad se refiere solamente a lo general, nunca a lo específico. Por ejemplo, hay una posibilidad entre 38 de ganar en relación con cualquier número de la ruleta, pero ninguna garantía. Puede ganarse 10 veces seguidas; puede jugarse 100 veces y no ganar nunca.

Aparte de que rehúsa ser específica, la probabilidad se olvida de los reveses.

La colocación de los dados, muestra que las posibilidades de sacar "ojo de serpiente" (doble uno) son una en 36.

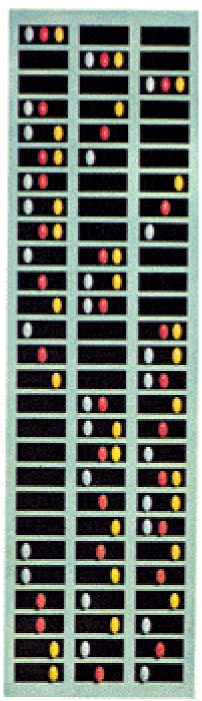
Pero si un jugador sacara "ojos de serpiente" 100 veces seguidas, esto no disminuiría un ápice la probabilidad uno entre treinta y seis de que en la tirada 101 saliera el doble uno. La probabilidad se ha comparado con un tipo de fe no demostrable y al propio tiempo inmutable.

JUGANDO A LOS ÁNGULOS DE UNA RUEDA
Una jugadora rubia hace su apuesta al girar la rueda de una ruleta en Las Vegas. La probabilidad dice que perderá, no necesariamente en esta tirada, sino a largo plazo. La casa hace apuestas de 35 contra uno. Pero de hecho hay 38 agujeros a donde ir a parar la bola (36 números más 0 y 00, visibles en el extremo del tapete). De esta forma la casa tiene una ventaja teóricamente imbatible.



CALCULO DE TIRADAS DE LOS DADOS
El par de dados de arriba muestran el conjunto de las 36 posibles combinaciones de un dado rojo y un dado verde. Las combinaciones para sacar un conjunto de 7 están en forma diagonal. Mientras que sólo hay tres posibles combinaciones de números que dan lugar a 7 (6 y 1, 5 y 2, 4 y 3), existen exactamente seis combinaciones de dados individuales: 6 verde con 1 rojo, 6 rojo con 1 verde, etc.

UNA COINCIDENCIA DE FECHAS
De los 30 espectadores de fútbol comprendidos en el marco blanco de arriba, hay une: probabilidad de más de dos a uno de que por lo menos dos de ellos cumplan los años en la misma fecha. En un grupo más grande, las posibilidades de que varios coincidan en la fecha de nacimiento son incluso superiores.



UNA MEZCLA DE FICHAS
La figura de arriba demuestra cómo se calcula la probabilidad. Empezando por las filas superiores se han colocado tres fichas de color en todas las formas posibles que pueden colocarse en tres cajas. Para determinar la probabilidad de que suceda una combinación dada de fichas' y de cajas, el número de veces que suceda una combinación de este tipo en un modelo, divídase por el total de grupos posibles, que es veintisiete. Por lo tanto, la probabilidad de que todas las tres fichas salgan en una misma caja, por ejemplo, es de 3/27.

9. Extraña influencia de la probabilidad en nacimientos y muertes

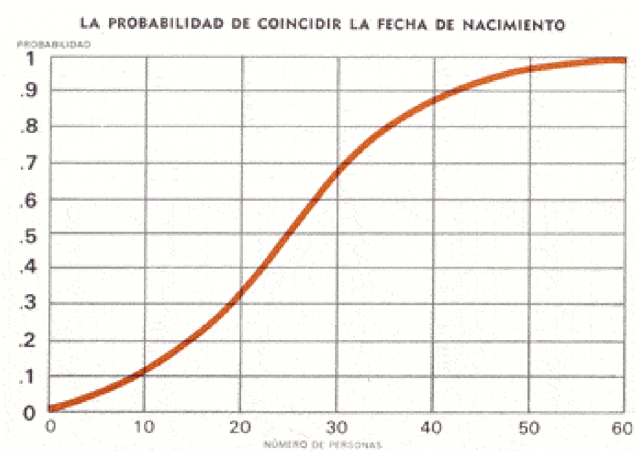
Aunque las coincidencias de nacimientos y muertes que se muestran en estas páginas pueden parecer poco corrientes, el hecho es que ocurren con una

regularidad matemática. Los matemáticos conscientes de esto han hecho, desde hace mucho, de los nacimientos coincidentes un juego de salón. El eminente matemático Warren Weaver explicó en cierta ocasión los casos favorables de dichos aniversarios dobles en una cena, y empezó después a comparar nacimientos. Llegó hasta el último comensal sin obtener ni
una sola coincidencia, pero la camarera, que había escuchado atentamente, anunció de repente que había nacido el mismo día que uno de los comensales.

MUERTES COINCIDENTES
PRESIDENTES MUERTOS EL 4 DE JULIO
Tres presidentes de los Estados Unidos, John Adams, James Monroe, Thomas Jefferson, murieron el 4 de julio: Adams y Jefferson en 1826; Monroe en 1831. Dos murieron el 8 de marzo: Millard Fillmore en 1874, William Howard Toft en 1930

NACIMIENTOS COINCIDENTES
PRESIDENTES NACIDOS EL 2 DE NOVIEMBRE
De los 34 presidentes, dos nacieron el mismo día. James Polk nació el 2 de noviembre de 1795 y Warren G. Harding en 1865. Como muestra el gráfico de abajo, la probabilidad llega hasta 0,75. En términos de probabilidad es 0,75 contra 0,25, o sea, tres a uno.

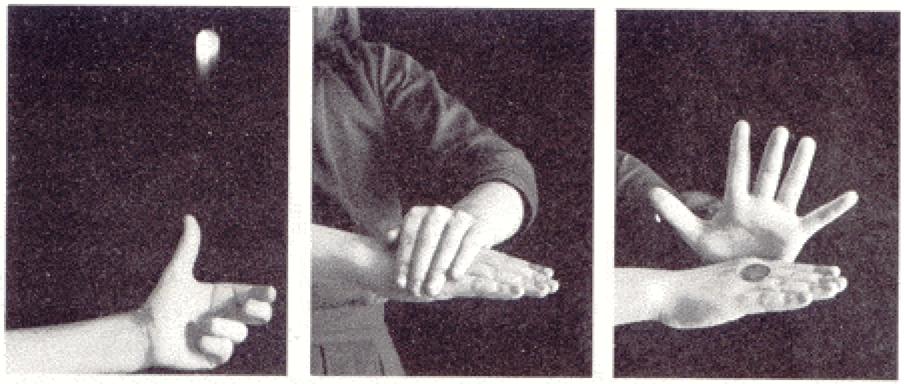
La causa de que sean ciertas estas coincidencias se muestra en el modelo de "las fichas de la caja" (página anterior).



LA CURVA DE COINCIDENCIA
Las posibilidades de que dos o más personas en un grupo tengan la misma fecha de nacimiento aumentan al crecer el grupo. Entre 10 personas, la probabilidad es de 1/10; entre 25, alrededor de 5/10. Por encima de 50, la posibilidad es casi certeza (expresada por 1).

Hay veintisiete formas de colocar tres fichas distintas en tres cajas diferentes. En forma similar, hay justamente el mismo número de formas para varias personas para situar sus cumpleaños en las 365 cajas que son los días del año.

6.10 La relación 50-50 a que está sujeto el sexo de un bebé

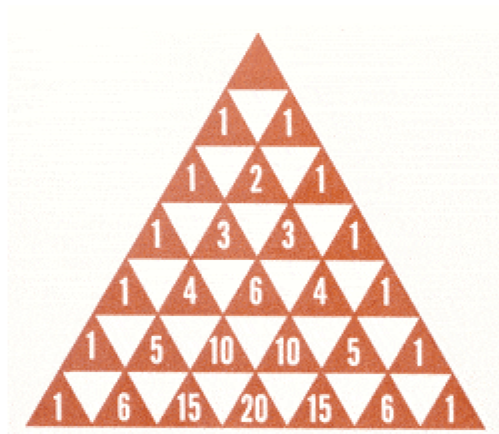


¿Cara o cruz? ¿Chico o chica? La probabilidad es de 1 a 2

Al echar una moneda al aire las probabilidades son siempre de 50 %, -cara o cruz- La misma igualdad de posibilidades ocurre al nacimiento de un bebé -chico o chica- Además, en ambos casos, las probabilidades son variables, independientemente de lo que ha sucedido anteriormente.

Si un hombre ha sacado diez caras en una sucesión de tiradas, no puede esperar sacar diez cruces para nivelar la situación. Por la misma razón los padres de las chicas de la página opuesta (inferior derecha) podrían tener la sensación de que "han de tener un chico", pero la probabilidad fija sus posibilidades.

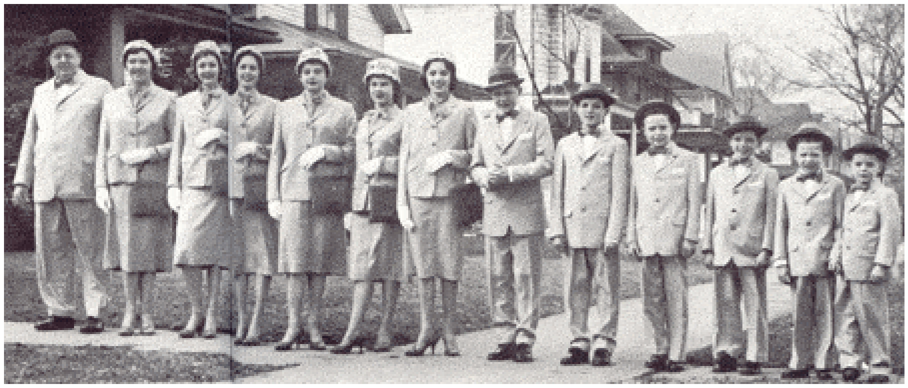
No obstante, estas probabilidades se refieren solamente a una simple tirada de una moneda o al nacimiento de un solo hijo. Las pruebas repetidas pueden originar secuencias extrañas, como las familias numerosas que aparecen aquí.



UNA TABLA TRIANGULAR DE PROBABILIDADES
El triángulo de Pascal, denominado asi en honor del pionero del siglo XVII en el campo de la probabilidad, constituye una rápida referencia para hallar las probabilidades que rigen las combinaciones más frecuentes. La suma de los números de cualquier fila da el total de colocaciones de posibles combinaciones dentro de aquel grupo. Por ejemplo, para determinar la probabilidad de cualquier combinación dada, chico o chica, en una familia de seis hijos, los' números de la fila inferior se suman primeramente, lo cual da un total de sesenta y cuatro. Los triángulos en los extremos de la fila significan las posibilidades de las combinaciones menos probables, es decir, todos muchachos o todas chicas: 1 en 64. Los segundos triángulos a partir de los extremos hacen referencia a la siguiente combinación más probable (cinco chicos, una muchacha, o viceversa). 6 entre 64. El número central, 20, hace referencia a tres muchachos y tres chicas, para los que las posibilidades son de 20 entre 64.

UNA SERIE DE 13 MUCHACHOS

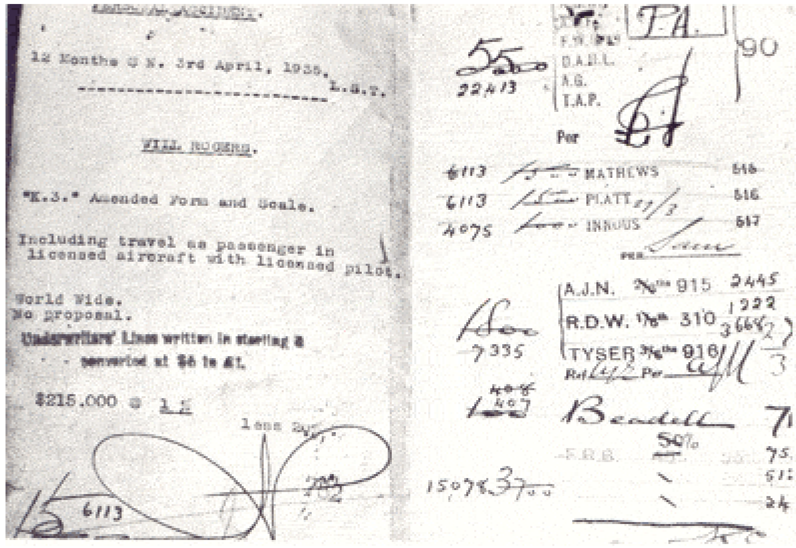
Trece hijos que pertenecen al señor y señora Emory Landon Harrison, de Johnson City, Tennesse (lado derecho), se alinean para fotografiarse descalzos en la vecindad de Nueva York. La probabilidad da 1 posibilidad entre 8.192 de que todos los hijos sean varones.



Los Thomas V. Brennan de Oak Park, Illinois, y sus hijos: cinco chicas consecutivas seguidas de seis muchachos. Las probabilidades en esta combinación de once hijos son 1 en 2.048.

UN GRUPO DE OCHO CHICAS

Las ocho bonitas hijas, todas nacidas de una misma familia, representan una relación 255 a 1 dentro de las probabilidades de familias de 8 hijos. Las posibilidades de que un noveno hijo sea chico son de 50%, y las en contra de una familia de hijas, son de 511 a 1.



12 Months G.M. 3rd April, 1935. L.S.T.

WILL ROGERS.

"K.3." Amended Form and Scale.

Including travel as passenger in licensed aircraft with licensed pilot.

World Wide.
No proposal.
Underwriters' Lines written in sterling & converted at $5 to £1.

$215.000 @ 1 %

less 2%

6113

55
22413
F.W.
D.A.B.L.
A.G.
T.A.P.
P.A.
90
Per

6113 MATHEWS 515
6113 PLATT 516
4075 INNOUS 517

A.J.N. 915 2445
R.D.W. 310 1222
TYSER 916
7335
Beadell
50%
F.R.B.
75
51
24
15078 37

LA PROBABILIDAD DE LA MUERTE
Una póliza de seguros de vida emitida a favor del difunto Will Rogers muestra un valor neto de 215.000 dólares, pagados a su viuda después de la muerte de Rogers en 1935 en un accidente de aviación en Alaska. Obsérvese la anotación marginal escrita a máquina que comprende el viaje en avión. El precio de esta cobertura especial es elevado.

11. Viaje matemático desde el hecho a la previsión

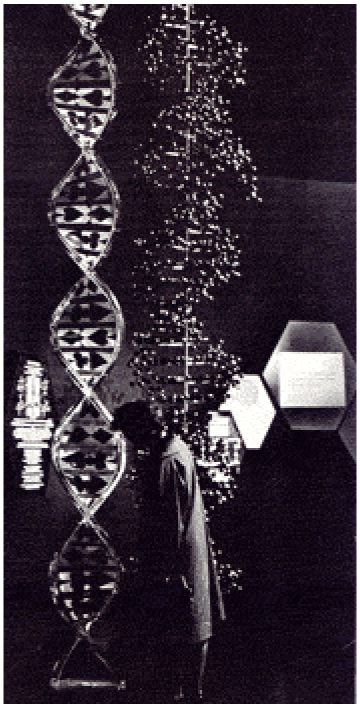
La probabilidad y su colaboradora la estadística, en un sentido, son como dos personas que van a la misma casa desde extremos opuestos de la calle. En la probabilidad los factores influyentes son conocidos, pero un resultado probable sólo se puede predecir. En la estadística el producto final se conoce pero las causas están en duda. Los dados pueden dar lugar a 36 combinaciones diferentes (página 141) y todas las probabilidades están al alcance de todo aquel que pueda cortar.

UN RETO A LAS PROBABILIDADES
Un corredor (en primer plano) se inclina ante la mesa de un asegurador marítimo en Lloyd's de Londres para discutir el riesgo de un seguro. Lloyd's es famoso por suscribir riesgos únicos para los que no se dispone de tablas adecuadas. Comprenden daños a las piernas de las bailarinas, lluvias que impiden espectáculos, e incluso la aparición del monstruo de Loch Ness.

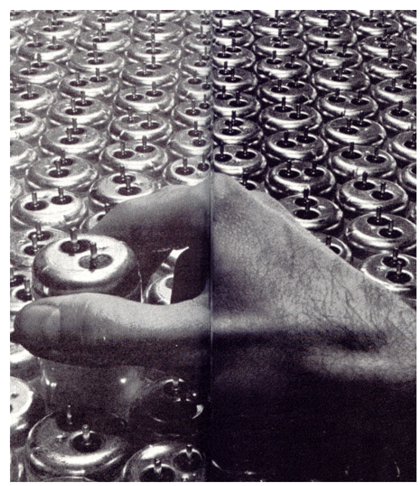
Estas páginas muestran tres ejemplos del uso de la estadística. En el seguro de vida, el actuario sólo sabe que finalmente el tenedor de la póliza morirá. Los factores que rigen el suceso al referirse a cualquier individuo dado -cuándo, por qué, cómo- constituyen un misterio fuera del alcance de la predicción. El experto de seguros debe, por lo tanto, basar sus tablas actuariales totalmente en las estadísticas de defunciones. Por lo tanto empieza con estadísticas conocidas y a partir de ellas determina las probabilidades. Como siempre ocurre en el caso de la probabilidad, cuanto mayor sea la muestra, más exacta será la predicción resultante.

El genecitista, que trabaja para descubrir los secretos de la herencia incluyendo la complicada molécula DNA, puede tratar su objetivo en forma similar. Partiendo de una muestra estadística, el científico puede hacer previsiones exactas de las características probables de un futuro ser.

Finalmente hay el uso de la denominada muestra al azar, como con las lámparas fluorescentes de la derecha. En este proceso, las características de unos cuantos elementos individuales se someten a prueba a fin de que la probabilidad pueda utilizarse para predecir las características de gran número de elementos.



LAS POSIBILIDADES HEREDITARIAS
Un visitante en la Feria Mundial de Seattle observa modelos de la molécula DNA, determinante de las características genéticas. El modelo de la izquierda utiliza cartas de juego para representar la transmisión de las instrucciones en clave. Dichas moléculas pueden unirse en 10^{24} *formas. El universo contiene sólo* 10^{26} *partículas atómicas.*



UNA MUESTRA DE LAMPARAS
Una muestra al azar para hacer una prueba de una serie de producción de lámparas fluorescentes empieza con la selección de unos cuantos tubos para representar toda la «población» en los testes exhaustivos. Las muestras al azar constituyen un uso bastante generalizado de probabilidades en la industria; se basa en escoger las muestras al azar.

Capítulo 7
Un paso lógico en el abrupto y azulado horizonte

Contenido:

1. *Preámbulo*
2. *Un Mozart de las matemáticas*
3. *Lo exótico y lo herético*
4. *Dimensiones de la cuarta a la enésima*
5. *Tres que alteraron el concepto humano del universo*
6. *Demostración de las matemáticas de Einstein*

1. Preámbulo

Los jóvenes graduados gozan diciendo a los estudiantes de primer curso que cuando un estudiante llega a dominar la aritmética, la geometría, el álgebra, la geometría analítica y el cálculo, está preparado para empezar el estudio de las matemáticas. Se refieren a las matemáticas del siglo XIX, un período en que toda la disciplina del análisis despegó hacia un abrupto y azul horizonte en el que se pierde el lego y donde incluso el matemático puede ir a tientas. Antes de 1800 los matemáticos se apoyaron en gran parte en su intuición y sentido común, visualizando sus pensamientos en términos de la geometría o de la mecánica realista. Después de 1800 empezaron a reconstruir las matemáticas con fundamentos más sólidos que el simple sentido común. Y a finales del siglo las matemáticas eran todo un edificio nuevo cuyas agujas imaginarias llegaban al cielo.

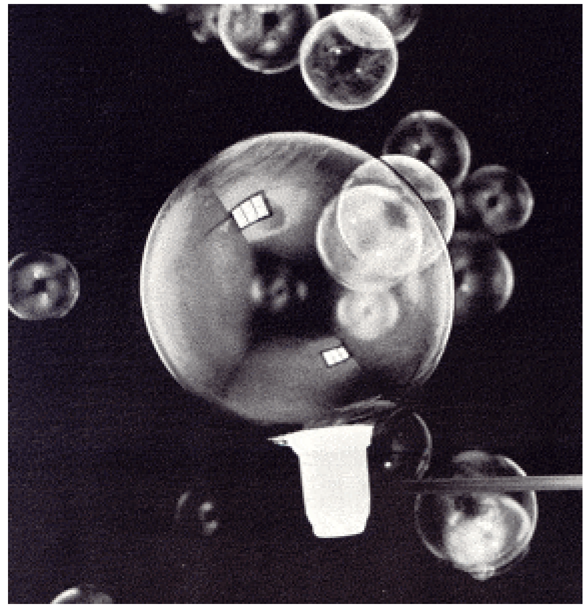
Surgieron nuevas legiones de números; los números antiguos con los que contamos se incluyeron como un solo grado. Se establecieron nuevas relaciones funcionales, éstas incluían las funciones algebraicas ordinarias, las funciones trigonométricas y logarítmicas como simples subproductos. Y las geometrías griega y cartesiana se transformaron en casos especiales de las geometrías generalizadas de n dimensiones, geometrías de superficies y formas que comprendían más dimensiones de las habituales: altura, anchura, y profundidad y que, por lo tanto, eran imposibles de representar. El álgebra clásica se convirtió en una de entre las muchas álgebras superiores, álgebras en las que se reemplazaban párrafos enteros de símbolos tradicionales por caracteres individuales manipulados según extrañas leyes, por ejemplo, que $a \times b$ no tenía necesariamente que ser igual a $b \times a$.

Al aprender todas estas curiosidades, cualquier persona sensata puede tener la sensación de que sus peores sospechas acerca de lo confusas que son las matemáticas se han confirmado. Pero en las matemáticas las proposiciones más amplias pueden ser las más útiles. Al matemático actual se le pide que solucione una enorme variedad de problemas. Cuanto más comprensivas sean sus clasificaciones, mayor es la posibilidad de que extraiga de su sombrero una ecuación adecuada para determinado trabajo.

Los matemáticos escogieron el camino de la generalidad por necesidad más bien que por elección propia. En todo el siglo XVIII habían estado ocupados explorando las regiones prácticas del cambio y la posibilidad siguiendo las directrices de los grandes innovadores del siglo XVII tales como Newton y Fermat. El prolífico suizo Leonhard Euler, creó multitud de nuevas aplicaciones para el cálculo en lo que se refiere a curvas y superficies. Los académicos franceses Joseph Louis Lagrange y Pierre Simon de Laplace pudieron elaborar, a través del cálculo, teorías comprensivas de la mecánica ordinaria y celeste, levantando con ello un vigoroso marco para la ingeniería y la astronomía modernas.

Hacia principios del siglo XIX los matemáticos averiguaron que el uso de las abstracciones que empleaban empezaba a ser insuficiente. Se presentaban problemas que desafiaban el viejo tratamiento del sentido común.

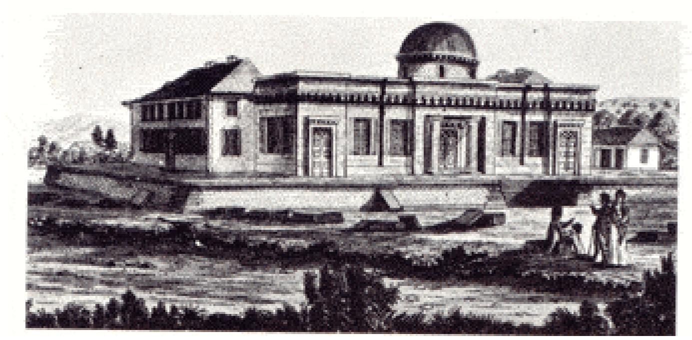
POMPAS MATEMÁTICAS
Las pompas de jabón que salen de una pipa parecen bastante distantes de los problemas cósmicos que empezaron a absorber a los matemáticos del siglo XIX pero las fuerzas que actúan sobre ellas son las más profundas de la naturaleza. Ilustran problemas de máximos y mínimos -las pompas siempre toman una forma con la menor área posible- básicos para el desarrollo de las ecuaciones diferenciales



Euler, por ejemplo, había definido una relación funcional entre dos variables en el sentido de «un tipo de curva que se describe al mover libremente la mano», con lo que quería decir simplemente una curva uniforme. ¿Pero la curva tenía que ser siempre uniforme, o podía aplicarse la palabra también a ciertas ecuaciones que representaban grupos de puntos discontinuos? ¿Las ecuaciones escritas en términos de más de tres variables podían imaginarse, tal vez, en términos de más de tres dimensiones, dimensiones más allá de las habituales de altura, anchura y profundidad? ¿Las expresiones indefinidamente largas, tales como $x + x^2 + x^3...$, lo que los matemáticos llaman «series infinitas», podían ser tratadas por medio de las reglas de la aritmética, como hasta entonces, o eran necesarios aplazamientos especiales para poder abarcar su infinidad?
Enfrentada con tales dificultades conceptuales, la mente empezó a titubear. Lagrange se desesperó tanto que abandonó las matemáticas durante un período de varios años, y, en una carta a su amigo y colega Jean Baptiste D'Alembert, en 1781, expresó la opinión de que las matemáticas estaban ahondando demasiado, con peligro de ser destruidas. D'Alembert, en cambio, no sosegó a sus alumnos, sino que les exhortó «Seguid adelante y la fe vendrá a vosotros».
En la misma época que el pesimismo se establecía en el campo matemático, Carl Friedrich Gauss, había empezado justamente a desarrollar su prodigioso talento para los números. En 1779, cuando aún no tenía tres años, el muchacho observó a

su padre, que era capataz, cómo hacía las nóminas de los albañiles. El padre cometió un error y cuando repasó los números halló que su hijo estaba en lo cierto.

Gauss es tal vez el último genio que jamás convierta en disciplina unitaria el estudio de las matemáticas; durante su larga vida aparecieron en torno suyo más matemáticas nuevas, se estima, que en todos los siglos anteriores. Gauss encauzó el nuevo movimiento hacia la generalidad, al imponer a ésta la rigidez de sus concepciones, exigiendo un pensamiento absolutamente riguroso. En sus propias innovaciones, tanto analíticas como geométricas, preparó el terreno para la relatividad y la energía atómica del siglo XX. Debido a sus investigaciones en el campo de la electricidad se le ha honrado con la palabra «gauss», una unidad de magnetismo, y también con el término naval «degaussing», que significa contrarrestar el magnetismo de un barco como previsión contra minas. Lo que es más, él y su asociado, Wilhelm Weber, inventaron y construyeron un telégrafo que funcionaba y lo utilizaron como un sistema de intercomunicación en 1883, unos dos años antes que Samuel F. B. Morse.



LA CIUDADELA DE UN GENIO Construido durante las Guerras Napoleónicas, el famoso Observatorio de la Universidad de Góttingen, Alemania, fue el escenario de las más profundas matemáticas del siglo XIX. Su primer director fue Carl Friedrich Gauss, el matemático y astrónomo más famoso de su época. Luego lo fue Bernhard Riemann, alumno de Gauss, que se aventuró en la geometría no-euclidiana y la curvatura del espacio.

Por cuenta propia, Gauss pensó en los rudimentos de la aritmética antes de que supiera hablar. A la edad de 10 años, cuando se pidió a su clase que sumaran todos los números de 1 a 100, instantáneamente escribió 5050 en su pizarra y lo entregó con una orgullosa declaración: «ahí está». Cuando los otros estudiantes entregaron sus pizarras después de un tiempo considerable y de un gran esfuerzo, nadie, a excepción de Gauss, tenía la respuesta correcta. Parece ser que Gauss había visto que cada uno de los pares de números, 1 y 100, 2 y 99, 3 y 98, 4 y 97, etc., y así hasta 50 y 51, dan un total de 101, y que, por lo tanto, el total de los pares debe ser 50 x 101.

2. Un Mozart de las matemáticas

A la edad de 14 años este Mozart matemático fue objeto de la consideración de Fernando, duque de Brünswick, quien a partir de entonces apoyó financieramente al muchacho en el bachillerato, en la Universidad y en las primeras etapas de su carrera. Utilizando al máximo su buena suerte, Gauss devoró los clásicos y las tablas logarítmicas con igual apetito, y llegó a dominar el griego, latín, francés, inglés y danés, así como la geometría, el álgebra y el cálculo. A la edad de 19 años empezó a llenar las páginas de sus apuntes con nuevas matemáticas, propias, nuevos teoremas en la abstrusa región de la teoría de los números, y esquemas radicales para generalizar los métodos de la geometría. Dejó muchas de sus creaciones medio desarrolladas y nunca se preocupó de publicarlas. Como resultado, el alcance total de sus exploraciones mentales no fue comprendido hasta que se publicaron sus papeles después de su muerte. Pero su influencia fue tal, que a otros matemáticos les irritaba la sensación de que cualquier cosa que hicieran él lo habría hecho anteriormente.

La sagacidad con que Gauss acaparaba sus tesoros se explica en parte por su pasión por la perfección. «Poco, pero selecto», era su lema, con lo que quería significar que no quería complicar las matemáticas con nada que diera lugar a un callejón sin salida o emplear su energía en algo que no fueran las ideas más prometedoras que corrían por su cabeza. Cuando la Academia de París ofreció un premio a quien pudiera demostrar un famoso teorema propuesto por Fermat, Gauss rehusó entrar en el concurso con brusquedad característica. «Confieso -escribió- que el último teorema de Fermat como proposición aislada tiene muy poco interés para mí, puesto que yo fácilmente pudiera hacer una multitud de tales proposiciones que nadie podría probar ni utilizar.» Si hubiera procedido de otro, la observación hubiera parecido jactancia. En Gauss fue simplemente una afirmación que causó la admiración y desesperación de sus colegas.

Se cree que Gauss retuvo algunas de sus ideas por miedo de que parecieran demasiado poco ortodoxas. Él no podía ver una razón a priori para que el espacio tuviera que trazarse, como si dijéramos, por medio de líneas rectas, la forma en que todo el mundo, desde Euclides, había supuesto que era. ¿Por qué, en verdad, el espacio no podía ser curvo? Después de todo, una línea medida en una sola dimensión, longitud, puede ser curva. Y una superficie medida en dos dimensiones, longitud y anchura, puede ser curva. ¿Por qué no podía ser curvo el espacio medido en las tres dimensiones: altura, anchura y profundidad? Era fácil tomar en consideración la posibilidad como una abstracción, pero era imposible visualizar el espacio resultante. Por lo tanto, Gauss se guardó su propio parecer e incluso puede que dudara acerca de la sensatez de la idea.

Gauss contribuyó a pavimentar el camino del álgebra abstracta superior por sus pensamientos en torno a una clase de números conocidos por «números complejos»: un número compuesto de un número ordinario más algún múltiplo de la unidad imaginaria, la raíz cuadrada de menos uno. Empezó a ocuparse por primera vez en estas extrañas creaciones de la mente humana en su tesis doctoral de 1799, en donde se demostró el teorema fundamental del álgebra, que toda ecuación tiene tantas soluciones como su grado, hecho que habían tratado de comprobar los matemáticos durante más de un siglo. Al demostrar el teorema, Gauss mostró que todas las soluciones de toda ecuación algebraica son, de hecho, números complejos o bien números tales como $7 + 4\sqrt{-1}$ o como $3 + 0\sqrt{-1}$, que se reduce simplemente a 3. Los matemáticos habitualmente escriben la $\sqrt{-1}$ en dichos números por i y cualquier número complejo por $a + bi$.

Posteriormente, al desarrollar los números complejos, Gauss propuso una forma geométrica de representación que iba a resultar extremadamente provechosa. Los números ordinarios pueden considerarse todos como si estuvieran a lo largo de una sola línea recta, una corriente continua sin separaciones, lo que los matemáticos llaman una «continuidad». Pero a un número complejo típico, $a + bi$ no le corresponde ningún lugar en la línea de los números ordinarios. Gauss comprobó, no obstante, que podía considerarse como si identificara un punto en un plano bidimensional; que la a en este número podía considerarse como una distancia horizontal, y la b como una distancia vertical, y que, de hecho, la expresión total a

+ *bi* podría determinar la posición de un punto en un plano exactamente de la misma forma que *x* e *y* como par de coordenadas cartesianas determinan un punto en un gráfico. Cuando dos números ordinarios se multiplican, el resultado es un salto a lo largo de la línea recta. Cuando se multiplican dos números complejos, no obstante, el resultado es un espectacular movimiento en forma de trapecio dentro de un plano bidimensional.

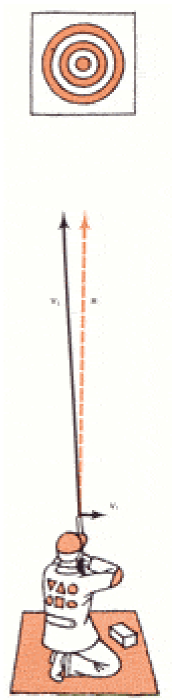
El comportamiento excéntrico de los números complejos es importante debido a que concuerda perfectamente y, por lo tanto, sirve como traducción literal del comportamiento de muchas cantidades en la naturaleza, tales como fuerzas, velocidades o aceleraciones que actúan en direcciones definidas. Cuando se ejercen dos fuerzas de direcciones opuestas sobre el mismo punto, por ejemplo, su efecto neto es una tercera fuerza con una nueva dirección. Diagramáticamente, como se muestra en la figura, la fuerza y la dirección de cada una de las dos fuerzas puede ser representada como la longitud y la dirección de un segmento lineal. Cada uno de estos dos segmentos lineales, a su vez, puede ser representado por un número complejo, y los dos números complejos al sumarse conjuntamente representan, por lo tanto, la tercera fuerza que se origina.

Los segmentos lineales que simbolizan las fuerzas, las velocidades y cosas análogas se denominan «vectores» y constituyen un instrumento esencial para la física. El hecho que éstos y los números complejos se comporten de una forma matemática análoga hace posible analizar complicadas situaciones en las que un conjunto de fuerzas están actuando a la vez, en la brújula giroscópica de un barco, por ejemplo.

Después de haber cooperado en la fundación del análisis vectorial en dos dimensiones, Gauss prosiguió, alrededor de 1819, hasta inventar un tipo de números que servirían finalmente para representar las fuerzas, las velocidades y las aceleraciones que actúan en más de dos dimensiones. Estos son los «números hipercomplejos», expresiones tales como

$$a + bi + cj + dk$$

en las que cualquiera de las unidades *i, j y k*, cuando se elevan al cuadrado, dan lugar a menos uno. La cosa más sorprendente acerca de estos números hipercomplejos es que prescinden de una regla básica de la aritmética que se consideró previamente inviolable.



CÓMO ACERTAR LA DIANA
Tirar al blanco en un día ventoso es un problema ilustrativo de los complejos reinos de matemáticas de Carl Gauss, conocido por «análisis vectorial». En este diagrama, la velocidad del viento que sopla de oeste a este está representada por la flecha, o «vector» V_1. El tirador lo compensa moviendo el rifle a la izquierda, como lo representa el «vector» V_2.
La combinación del viento y la dirección del rifle envía la bala por el «vector resultante» R.

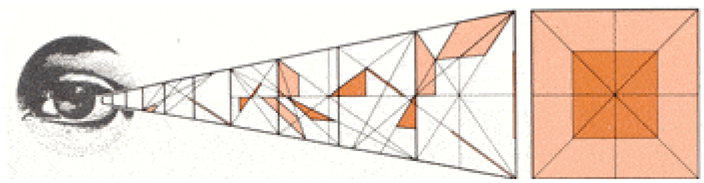
Al multiplicarse conjuntamente, dos números hipercomplejos pueden dar lugar a resultados distintos dependiendo del orden en que se tomen, el número hipercomplejo *a* multiplicado por el *b* no es siempre igual al número hipercomplejo *b* multiplicado por el *a*.

3. Lo exótico y lo herético

Alrededor del año 1840, Hermann Grassmann, un compatriota de Gauss, afrontó honradamente estas trascendentales implicaciones y elaboró un álgebra hipercompleja, un álgebra para la que inventó distintos procedimientos nuevos para la multiplicación y en la que los vectores son tratados con independencia del número de dimensiones. En las décadas que siguieron a la obra revolucionaria de Grassmann en el análisis vectorial, que todavía constituye un arduo terreno para la vanguardia matemática de la actualidad, se descubrieron otros tipos de números exóticos que desobedecían a otras sacrosantas leyes de la aritmética, la de, por ejemplo, $(a \times b) \times c$ debe ser igual a $a \times (b \times c)$. Poco después las distintas álgebras, cada una con sus propias reglas, símbolos y ecuaciones, fueron tan abundantes como las setas.

Antes de la época de Gauss, los matemáticos habían tratado *i*, la raíz cuadrada de menos uno, con un escrupuloso respeto y una cierta y sincera incredulidad. Una vez se hubieron aplicado los números complejos a las fuerzas y cosas parecidas, *i* se transformó en un auxiliar matemático. Los números complejos e hipercomplejos se incorporaron progresivamente a las ecuaciones del álgebra y del cálculo. Los matemáticos empezaron a hablar de «funciones de variables complejas» queriendo significar relaciones entre variables con valores de números complejos. Éstas se utilizan hoy día para escudriñar, a partir de determinadas y complicadas ecuaciones diferenciales, las respuestas a algunos problemas de la física.

A partir de la época en que Newton las utilizó por primera vez, las ecuaciones diferenciales han sido una gran fuente de quebraderos de cabeza matemáticos y de creación matemática. Nuevas ecuaciones que requieren nuevas soluciones están constantemente apareciendo en las investigaciones científicas. Surgen de muchas clases de problemas, pero una categoría ha sido especialmente significativa en el desarrollo del pensamiento relativo a los problemas cósmicos o atómicos. Estos son los denominados problemas de máximos y de mínimos, y derivan a partir de lo que pudiera describirse como una tendencia de la naturaleza a trabajar con la mayor sencillez posible o con el mínimo de esfuerzo posible. Un rayo de luz que llega al ojo desde un objeto visto en un espejo ha minimizado su trayectoria al incidir y alejarse del espejo formando ángulos iguales. Dos burbujas de jabón que van unidas se ajustan en forma tal que tengan la menor área posible consistente con su contenido. Como expresó un fisiólogo italiano del siglo XVIII, Giovanni Borelli : «La perpetua ley de la naturaleza es actuar con un mínimo de esfuerzo... evitar, en la medida que sea posible, los inconvenientes y las proliferaciones». La indolencia de la naturaleza o «principio del esfuerzo mínimo», como se le denomina, hace referencia tanto al equilibrio estático como al dinámico: el estado de calma sigue al bullicio o la gravedad.



VIENDO ORDEN EN EL CAOS
Hecho prisionero en la desastrosa campaña rusa de Napoleón en 1812 el matemático francés Jean Víctor Poncelet venció el aburrimiento de su prisión al alinear muchas visiones desorganizadas no-euclidianas en una nueva rama de las matemáticas, la geometría proyectiva. Su propósito: estudiar las propiedades de las formas geométricas cuando se ven a distancia. Ejemplo: Cuando el ojo mira a una pirámide que contiene una disposición aparentemente caótica de cartas de colores (abajo izquierda), ve un modelo ordenado, (abajo derecha), debido al ángulo en que se proyecta el «caos» desde el espacio al ojo

El cálculo se refiere a todos los problemas de equilibrio, y a los de maximizar y minimizar a través de la misma técnica. Considérese una fuente de ensalada, por ejemplo. El punto más profundo de la fuente es el punto de altitud mínima o de máxima profundidad. Éste es también la posición de equilibrio, el punto de energía mínima al que tenderá finalmente una bola lanzada en la fuente cuando deje de dar vueltas arriba, abajo y alrededor. En este punto los lados de la fuente dejan de tener pendiente: la tasa de variación de la altitud es cero.

Al hacer las tasas de variación igual a cero, los matemáticos tratan de hallar las trayectorias mínimas o máximas que utiliza la naturaleza para alcanzar sus fines. Las ecuaciones diferenciales que resultan son las ecuaciones más importantes de la ciencia práctica. Al integrarse se transforman en fórmulas analíticas ordinarias revelando los caracteres que se encuentran detrás de la máscara del cambio, variables tales como la posición, la temperatura, el peso o la carga eléctrica.

En las manos de un ingeniero, el principio de maximizar y minimizar a través de las ecuaciones diferenciales puede aplicarse a situaciones específicas incluso antes de que ocurran. Al diseñar un puente, por ejemplo, puede imaginarse el puente ya construido y después buscar el estado de equilibrio que alcanzará cuando los vientos soplen a la velocidad de 300 kilómetros. Si el equivalente matemático de «supóngase que la tasa de variación es igual a cero» resulta ser una ecuación sin solución, significa que el puente no encontrará ningún punto de apoyo sino que se romperá ante la presión del viento. Después de poner más vigas y cables en el puente el ingeniero puede probar de nuevo, experimentando mentalmente, con el viento y el acero a través de la maravillosa agencia de las ecuaciones diferenciales.

Probablemente la ecuación diferencial más popular que jamás se diseñara es una ecuación «diferencial parcial» que fue expuesta por Laplace. Tiene la siguiente estructura:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Por más oculta que aparezca, esta ecuación ha sido utilizada de hecho para describir la estabilidad del sistema solar, el campo eléctrico alrededor de una carga de electricidad o la distribución estable del calor en una cacerola debajo de la parrilla. Tales son las rápidas abstracciones de las matemáticas.

Nadie pregonó o practicó el ideal de ser versátil y general en las matemáticas de forma más persuasiva que Gauss. Primero se hizo famoso, no obstante, por medio de un hecho de computación puramente práctico. En 1801 el astrónomo italiano Joseph Piazzi accidentalmente vio el primero de los planetas menores o asteroides. Conocido en la actualidad por Ceres, este «conjunto de cosas sucias», como Gauss lo denominó, rápidamente se evadió de su descubridor y desapareció en las brillantes secciones del cielo cerca del sol. El descubrimiento del supuesto nuevo planeta había causado agitación en casi toda Europa. El haberlo «perdido» tan pronto sólo contribuyó a la emoción. Los desdichados astrónomos se enfrentaron con la gigantesca tarea de calcular sus posiciones a partir de unos pocos puntos de referencia. Los cálculos parecían enormemente difíciles para todo el mundo, a excepción de Gauss. Sumergiéndose en las tablas logarítmicas que había memorizado, apareció unas pocas semanas después con una predicción teórica de la órbita completa de Ceres. Cuando apareció el pequeño planeta por el otro lado del sol, los astrónomos lo encontraron cuando y donde les había dicho Gauss.

Después de este triunfo, las sociedades cultas cubrieron de honores a Gauss. En 1807 aceptó la dirección del observatorio en su propia *alma mater*, la Universidad de Göttingen, Alemania. Allí presidió la comunidad matemática de Europa hasta su muerte unos cincuenta años después. Mientras tanto, no obstante, no publicó jamás nada acerca de una extraña idea geométrica que le había fascinado desde su juventud precoz. Ésta e a un pensamiento afín al concepto de un espacio curvo. Gauss creía que las nuevas formas de geometría bidimensional podían desarrollarse a partir de un extraño axioma nuevo, el de que por un punto exterior a una línea dada se puede trazar más de una línea paralela a dicha línea. Dicho axioma iba totalmente en contra de Euclides y del sentido común, a la proposición que, por un punto exterior a una recta una y tan sólo una línea, puede trazarse paralela a aquélla. No obstante, en sus últimos años Gauss vio aplicar su idea de las reglas no-euclidianas del paralelismo a sectores del espacio curvo.

Mientras que Gauss anticipó el cataclismo de la geometría, otros lo llevaron a cabo. En 1832 recibió una carta de un viejo amigo de colegio, Farkas Bolyai, que quería la opinión de Gauss sobre las ideas poco ortodoxas de su hijo Janos. Al abandonar el postulado de Euclides relativo al paralelismo, Janos había construido un tipo de geometría no-euclidiana que denominamos en la actualidad «hiperbólica», una geometría que puede utilizarse para describir las propiedades de las figuras en una superficie en forma de trompeta, en oposición a la superficie plana de Euclides.

A la pregunta del señor Bolyai, Gauss contestó que el joven Janos tenía una excelente idea, pero, por haberla ponderado durante muchos años, no podía elogiarla sin vanagloriarse.

UN RUSO REVOLUCIONARIO
Conmemorando el 100 aniversario de la muerte de Nikolai Lobachevsky, se emitió este sello ruso en el año 1956. Lobachevsky fue el primer matemático que publicó un trabajo relativo a la geometría no-euclidiana, -aunque Gauss, había elaborado la nueva geometría en Alemania, hacía unos 35 años. A petición de Gauss, Lobachevsky recibió el homenaje de la Real Sociedad de Göttingen.

Janos Bolyai se descorazonó comprensiblemente ante esta respuesta y, cuando se enteró inmediatamente después que el matemático ruso Nikolai Lobachevsky había tenido también la idea de la geometría no-euclidiana, abandonó las matemáticas.

4. Dimensiones de la cuarta a la enésima

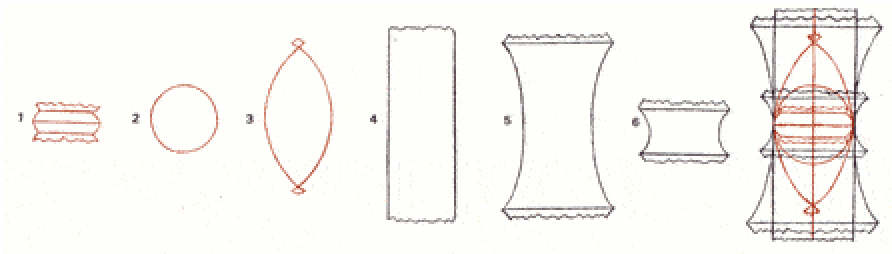
El siguiente joven innovador no-euclidiano que llegó hasta Gauss lo pasó mucho mejor. Éste fue Bernhard Riemann, quien estudió bajo la dirección de Gauss en Góttingen. Cuando estuvo a punto de dar su conferencia de iniciación como profesor, sometió, según la tradición, tres posibles temas. En el caso especial de Riemann, Gauss pasó por alto los dos primeros y pidió que Riemann conferenciara sobre su tercer tema. Este tema era nuevo, repleto de controversias y de peligros y sin euclidianismos. Pero después de un trabajo intensivo Riemann dio una conferencia en la facultad de Filosofía de Góttingen en la que sin utilizar ni una sola figura o fórmula, propugnó un concepto radicalmente nuevo de la estructura del espacio geométrico. Probablemente nadie lo comprendió, pero, para Gauss, Riemann iba encaminado a los mundos de la cuarta, quinta, sexta y enésima dimensiones.

La geometría de Riemann de muchas dimensiones, así como es difícil de apreciar en términos visuales, es bastante fácil de concebir cómo una posibilidad abstracta: como una simple progresión a partir de una línea en el espacio unitario de la longitud, a un plano en el espacio «bidimensional» de anchura y longitud, a un sólido en el espacio «tridimensional» de altura, anchura y profundidad, y de aquí a espacios de más dimensiones, por ejemplo, de altura, anchura, profundidad y tiempo.

Para poner su idea multidimensional en órbita, Riemann, apoyándose en parte en conceptos desarrollados por Gauss, generalizó las propiedades de las curvas y superficies de forma tal que pudieron aplicarse a los espacios. Puede obtenerse una apreciación del noble vuelo mental de Riemann a partir de un solo ejemplo detallado referente a la muy importante propiedad geométrica de la «curvatura». La curvatura de una curva es la proporción en que curva. Una medida de esta proporción es la medida del círculo oscilador en un punto. Si el círculo que más se acerca a la curva en este punto es muy pequeño, entonces la curva se cierra poco a poco y tiene una pequeña curvatura.

La curvatura de una superficie se define casi de la misma forma que la curvatura de una curva. En cualquier punto de una superficie la curvatura no tiene por qué ser la misma en todas direcciones. Una montaña, por ejemplo, tiende a disminuir su pendiente en proporciones distintas. La cúspide, no obstante, puede interpretarse como el punto de intersección de un número infinito de curvas que ascienden por un lado y descienden por el otro. En la cúspide una de estas curvas tendrá una curvatura superior que las demás y otra tendrá una curvatura inferior a las otras. Gauss había averiguado que la curvatura en un punto cualquiera de la superficie puede definirse útilmente como el producto de las curvaturas mayor y menor de todas las líneas que constituyen la superficie en aquel punto. Este producto se llama en la actualidad «la curvatura gaussiana».

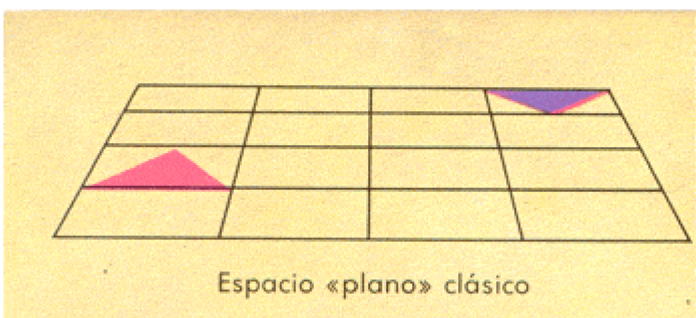
Si un punto en una superficie está situado en el equivalente a un puerto de montaña en donde el terreno, hacia el este y oeste se inclina hacia arriba, y el terreno al norte y al sur se inclina hacia abajo, entonces el mínimo de curvatura hacia abajo es una curvatura hacia arriba, en otras palabras, una curvatura negativa hacia abajo. Por la definición de Gauss, la superficie de curvatura en un punto del puerto debe ser el producto de una negativa y una positiva - por lo tanto negativa -. Un ejemplo de una superficie con curvatura negativa es la silla de montar del Oeste de los Estados Unidos. Una superficie de curvatura positiva es una que siempre da vueltas para encontrarse a sí misma, como la cáscara de un huevo.



UN NIDO DE ESPACIOS
Los conceptos radicalmente nuevos de espacio curvo proyectados por Bernhard Riemann se representan en las seis superficies curvas de abajo. Las superficies 1, 2 y 3 están curvadas en la misma dirección que la superficie de una esfera y se dice que tienen «una curvatura positiva». Mientras que el cilindro (4) va curvándose en una de sus dimensiones, es recto en la otra y tiene matemáticamente una curvatura 0. Las figuras 5 y 6 muestran la misma «curvatura negativa». Riemann anidó estos espacios concéntricamente para indicar progresión de curvatura desde positiva a negativa.

Gauss había encontrado también que la curvatura de una superficie puede definirse no sólo en términos de una persona que mira a la superficie desde el exterior sino equivalente en términos de mediciones realizadas dentro de la delgada superficie propiamente. Riemann amplió esta última idea acerca de la curvatura de la superficie hasta dar una descripción matemática exacta de la curvatura del espacio. Al realizar este aterrador pensamiento abstracto, se apoyó en gran parte en un análisis exhaustivo que realizó utilizando la red de referencias de los sistemas coordinados. En el sistema cartesiano, las líneas de referencia son líneas rectas en un plano. En la esfera de la tierra las líneas de referencia son las de la latitud y longitud. En un huevo pudieran ser círculos, en una dirección, y óvalos en la otra. En el reflector de un faro de carretera de un coche, pudieran ser círculos en una dirección y parábolas en la otra.

Riemann se dio cuenta de que toda superficie o espacio de su geometría superior podía trazarse por medio de distintas redes de curvas de referencia. Y halló que las ecuaciones escritas en términos de un sistema de coordenadas a menudo podían ser ampliamente simplificadas al escribirse en términos de un conjunto distinto de curvas de referencia. Uno de los más prácticos conjuntos de curvas de referencia está formado por las llamadas «geodésicas». Una geodésica es simplemente el camino de la distancia más corta entre dos puntos. En un espacio plano una geodésica es un segmento de línea recta. En una esfera es un arco de un círculo máximo análogo al que siguen los jets intercontinentales. En una superficie irregular en forma de lámpara o en un espacio curvo, prácticamente puede ser cualquier tipo de curva. Al manipular ecuaciones diferenciales elaboradas para minimizar las distancias, Riemann halló que podía trazar redes geodésicas de líneas de referencia y seguir la curvatura de cualquier espacio desde tres dimensiones hasta n dimensiones.



EL ESPACIO CON SENTIDO COMÚN DE EUCLIDES
Éste es el plano tan conocido de Euclides en donde no hay curvas y en el que las líneas rectas forman los caminos más cortos, y los triángulos, cuyos ángulos siempre suman 180 grados, pueden moverse sin distorsión. Gauss sugirió que este plano era un caso de la geometría, aplicable a las superficies curvas.

En esta atrevida geometría, Riemann pareció prescindir del sentido común, pero el arte del análisis ganó mucho en destreza. Al igual que en el enlace entre el álgebra y la geometría plana realizado por Descartes, las ecuaciones con muchas variables encuentran ahora sus correspondientes geométricos, y los nuevos símbolos de la geometría superior se convirtieron en útiles colaboradores de las ecuaciones. Y en todo momento las ideas en la parte inferior de todo el marco de elaboración eran simples como las de curvatura: definiciones realistas que demostraron tener validez en el mundo tangible de reducida dimensionalidad.

Gauss murió en 1855, poco después que naciera la geometría multidimensional. Pero las ideas que se habían incubado en su mente durante 50 años fueron desarrolladas por Riemann y sus sucesores, para convertirse en los métodos prácticos que manejara Einstein 50 años después al dar al hombre moderno orientaciones sobre la estructura del universo.

5. Tres que alteraron el concepto humano del universo

El pequeño muchacho lleno de aplomo de la página opuesta, que tan sólo tenía ocho años cuando se hizo el cuadro, mostraba ya señales de llegar a ser el genio matemático que, como parte de un gran triunvirato, iba a alterar algún día la visión humana del cosmos. A los 17 años Carl Friedrich Gauss puso en duda audazmente las reglas de la geometría de Euclides, señalando que muchas no son válidas para las superficies curvas. Posteriormente le fascinaron los complejos problemas de la medición de estas superficies. Pero quedó para el alumno de Gauss, Bernhard Riemann el ampliar totalmente los límites de la geometría tradicional, postulando espacios curvos de tres dimensiones y, finalmente, fantásticos espacios de cuatro y más dimensiones. Cincuenta años más tarde, el físico Albert Einstein llevó el proceso a un enorme clímax al emplear estas abstracciones y al utilizarlas en su Teoría de la Relatividad para describir el universo.

UN MATEMÁTICO INCIPIENTE
Carl Friedrich Gauss está retratado en 1785, probando una cereza cuando era alumno en la escuela de Santa Catalina en Brünswick, Hanover, Alemania. Siempre precoz, a la edad de tres años había corregido la nómina de su padre; en la escuela impresionó tanto a sus maestros que se le enseñaron las matemáticas superiores y le facilitaron textos de álgebra.

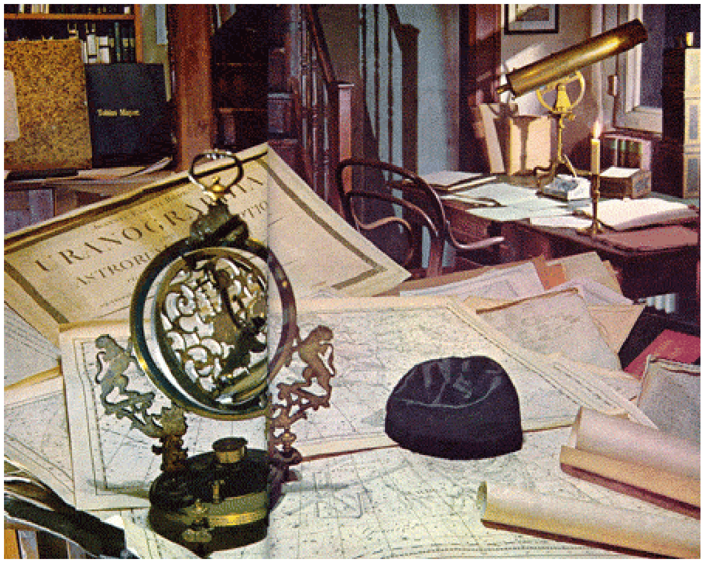
La infatigable mente de un hombre versátil en las matemáticas

El genio en multitud de aspectos, Carl Friedrich Gauss, tenía muchas aficiones que incluían las matemáticas, la astronomía y la física. Halló la fórmula para calcular las órbitas de los asteroides, hizo descubrimientos en la teoría electromagnética e inventó un telégrafo. Contribuyó a la teoría del número, teoría de funciones, probabilidad y estadística.

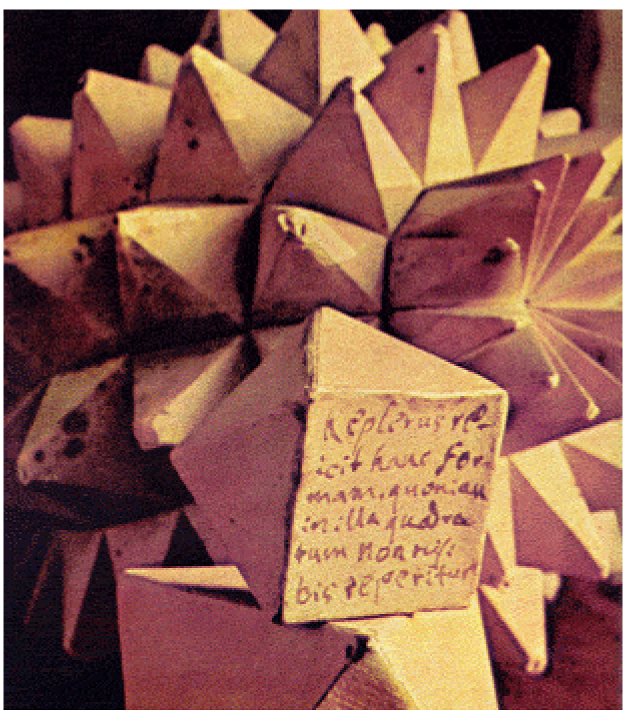
Después de concebir, cuando todavía era un muchacho, la teoría no-euclidiana, Gauss hizo poco para desarrollar la idea. Siguió otra línea de investigación: la difícil tarea de medir las superficies de las curvas. Los dos conceptos vitales permanecieron dormidos durante años, esperando al matemático imaginativo que los fusionara en una sola y poderosa teoría.

UN CIENTÍFICO Y SUS INSTRUMENTOS

Gauss, aparece arriba tal como lo pintó Christian Jensen. En 1807 fue nombrado primer director del Observatorio de Göttingen y contribuyó a convertirlo en el centro científico y matemático más influyente de Europa.



Una exposición en Göttingen (abajo) muestra artículos que utilizó Gauss: una "auranografía", o atlas de estrellas, una brújula astronómica y un birrete. Los telescopios están al fondo.



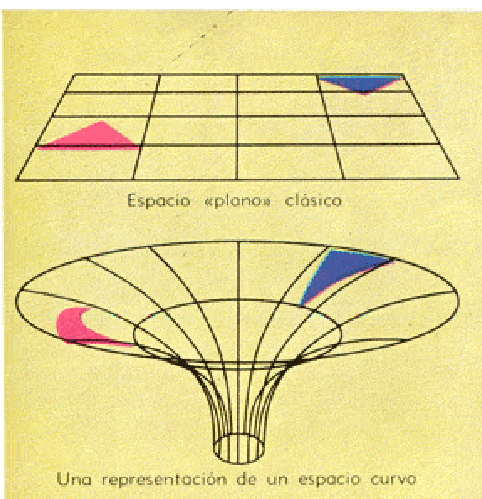
MODELOS DE LOS CIELOS
Gauss utilizó estos modelos en Göttingen para ilustrar los estudios astronómicos. En la parte delantera se halla una forma que consideró el ilustre Kepler, -y, según la inscripción latina que hay en ésta, finalmente rechazó, mientras trataba de elaborar su teoría de que el plano del cosmos era expresable en formas geométricas elementales. La forma de erizo del fondo es un modelo conceptual del sistema solar. Cada anillo de puntas representa la órbita de un planeta. Gauss alcanzó fama al calcular la órbita del recién descubierto Ceres

Mágica unión de doctrinas a cargo de un discípulo

A medida que se hacía viejo, Gauss hizo un descubrimiento que algún día iba a incorporarse a sus grandes hallazgos. El descubrimiento de la brillante mente de su alumno Bernhard Riemann.

En su conferencia de introducción antes de llegar a ser profesor adjunto en Göttingen, Riemann, que por entonces tenía veintiocho años, sometió tres posibles temas a Gauss. Este escogió el tercero relativo a los supuestos básicos que subyacen en toda la geometría.

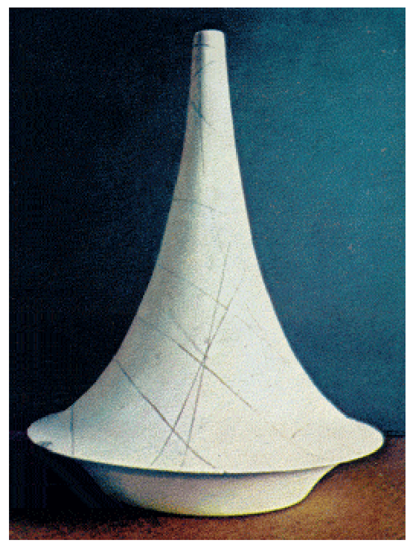
En la histórica conferencia que resultó, Riemann escogió las ideas del vigoroso Gauss referentes a la geometría no-euclidiana y las unió a algunos principios de la última obra de Gauss sobre la medición de las superficies curvas. De la combinación de las dos formó un importante sistema de "geometría diferencial" que reveló formas generales para realizar las mediciones en un espacio de cualquier curvatura y de un número cualquiera de dimensiones. Mientras el viejo Gauss escuchaba a su discípulo se dice haber proferido una exclamación de complaciente comprensión. Para el mundo en conjunto, no obstante, se necesitarían cincuenta años antes de que se notara el impacto de la geometría de Riemann.



EL ESPACIO LIBRE DE RIEMANN
Riemann se ocupó de los espacios curvos, cuyas características se muestran en la figura inferior. En dicho espacio las trayectorias más cortas entre puntos son líneas curvas, los triángulos se modifican al moverlos y la suma de sus ángulos, en lugar de ser 180 grados, varía cuando los triángulos se trasladan.

UNA VIDA CORTA PERO PROVECHOSA
Bernhard Riemann, al igual que su maestro, llegó a ser director del Observatorio de Göttingen desde el año 1859 al 1866, fecha en que murió. Hizo importantes contribuciones en muchos campos, incluyendo la topología, la teoría de las funciones, y la física matemática

.

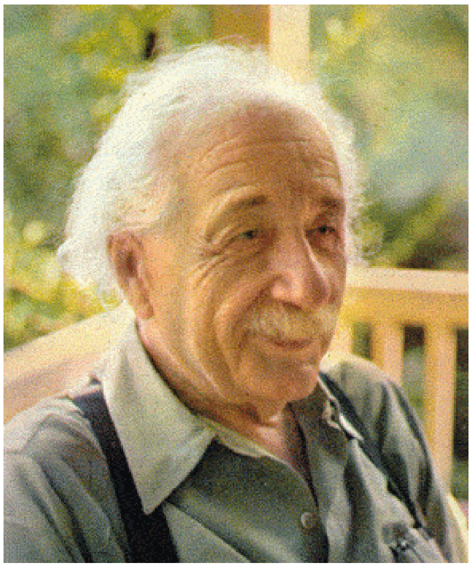


ESFERA QUE SE TUERCE HACIA DENTRO
Este modelo de una superficie curva, que refleja un concepto de Riemann, se denomina una seudoesfera, es decir, una esfera falsa. Los triángulos de su superficie pueden moverse sin alargarse, pero en el proceso los triángulos se tuercen, lo cual no sucede en una esfera real.

Nacimiento de una idea que conmovió al mundo

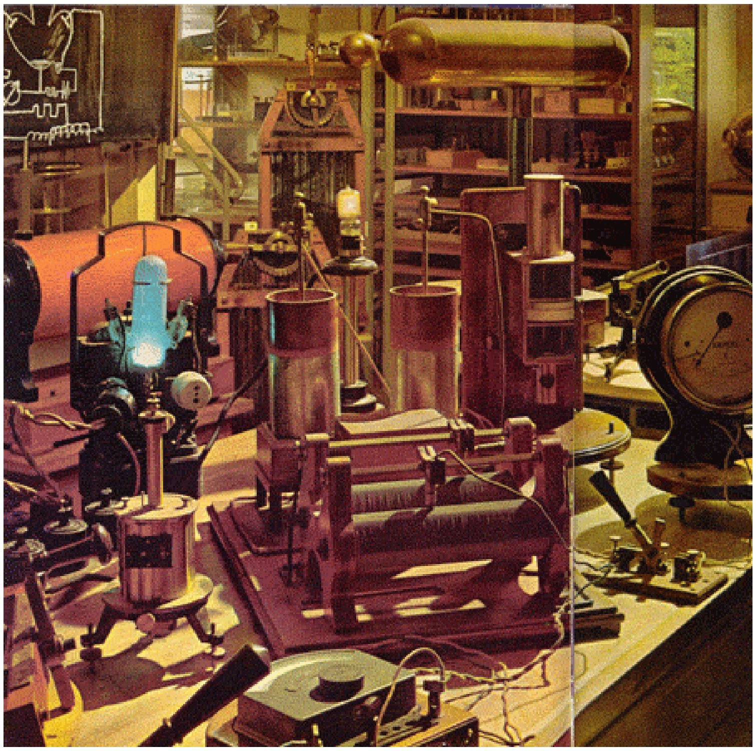
Todas las noches, un escribiente desconocido, llamado Albert Einstein se ponía a reflexionar en una oficina suiza de patentes acerca de algunas observaciones científicas desconcertantes, indicaciones de que el universo no se portaba exactamente como decían las leyes de Newton. La velocidad de la luz, por ejemplo, parecía ser constante en todas las observaciones experimentales, por aprisa que se movieran la fuente de la luz o el observador. Para explicarlo, Einstein elaboró una extraña teoría llamada "Relatividad" que decía que el tiempo, la longitud y el peso no eran absolutos, sino que variaban con la velocidad.

Aplicando ideas de Gauss y Riemann, Einstein también sugirió la existencia de un universo curvo de cuatro dimensiones -un cosmos en el que se añadía una cuarta dimensión, el tiempo, y en el que la presencia de la materia influía en la curvatura. Incluso para los científicos fue un difícil concepto, pero les fascinó como posible respuesta a los hasta entonces insondables misterios.

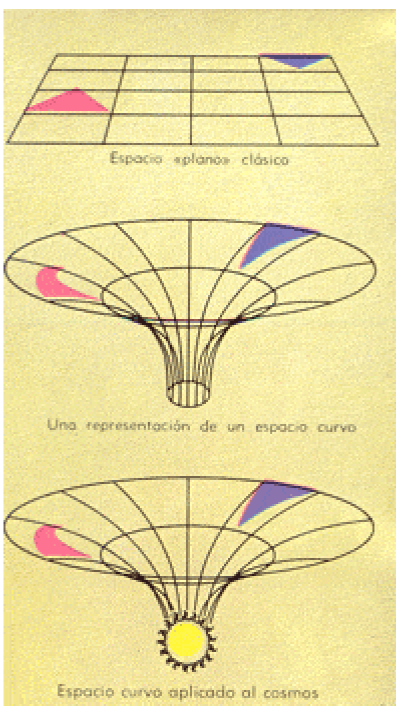


EL AUTOR DE LA RELATIVIDAD
Poco antes de su muerte en 1955, se ve a Einstein en el porche de su casa en Princeton, Nueva Jersey. Aquí elaboró su teoría del campo unificado, una extensión de la relatividad.

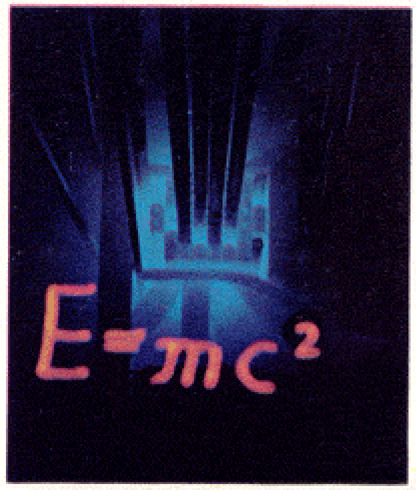
LUGAR DONDE NACIÓ LA RELATIVIDAD.
Esta es una vista de la casa de Einstein en Berna, donde después de su trabajo cotidiano en la Oficina de Patentes Suizas, tocaba música y elaboraba su Teoría de la Relatividad.



EL LABORATORIO DE UN GRAN HOMBRE En su laboratorio de la Escuela Politécnica de Zurich, Suiza (izquierda), rodeado de viejos aparatos para los experimentos de física, Einstein obtuvo sus primeros conocimientos de alguno de los fenómenos que iba a unificar en sus atrevidas teorías. Aunque nacido en Alemania, estudió allí entre 1896 y 1899, intentando enseñar física y matemáticas para tener más tiempo para su propia investigación. Pero no pudo encontrar plaza en Suiza.



EL ESPACIO CÓSMICO DE EINSTEIN
Un cuerpo celeste tal como una estrella (bola de color amarillo) puede considerarse como el centro de una sección del espacio curvo de Riemann. Según la relatividad, la masa de la estrella crea la curvatura y es esta curvatura lo que causa los efectos de la gravedad.



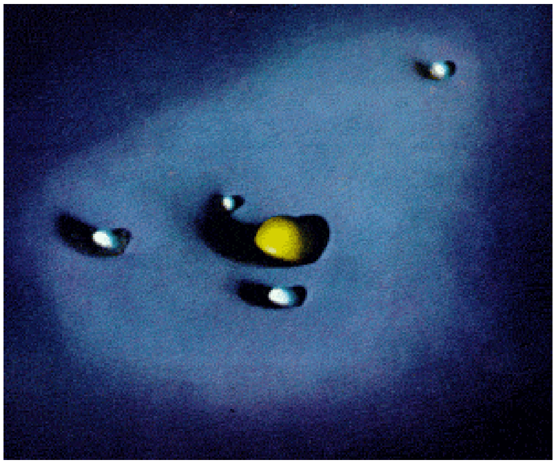
OBTENCIÓN DE ENERGÍA DE LA MATERIA
El fulgor purpúreo del reactor atómico (arriba) y la bola de fuego de la bomba H (derecha) son frutos de una ecuación de la Relatividad, $E = m \times c^2$, que dice que la materia y la energía son equivalentes. Se puede obtener energía (E) igual a la cantidad de materia (m) multiplicada por el cuadrado de la velocidad de la luz (c). Medio kilo de cualquier materia contiene suficiente energía para impulsar un barco durante cien viajes a través del Atlántico.

6. Demostración de las matemáticas de Einstein

En raras ocasiones se ha mostrado más efectivo el poder de las matemáticas que a través de la relatividad. Aunque los matemáticos ya hace mucho tiempo aceptaron abstracciones tales como infinitos o raíces cuadradas de números negativos, la Relatividad parecía oponerse a la experiencia cotidiana y a la física: Pero unificaba tan limpiamente todos los hechos observados que los científicos quedaron intrigados. Entonces, a medida que se obtenía una mayor evidencia su curiosidad se transformó en convicción.

Para el lego, la demostración más inolvidable fue la que confirmó la veracidad de una ecuación de la relatividad indicando que la materia y la energía son formas de la misma cosa. La evidencia se obtuvo con explosiones como la de abajo.

Sin embargo, las partes de la relatividad basadas en las matemáticas de Gauss y Riemann tienen consecuencias todavía más radicales para el científico: proporcionan un cuadro nuevo de todo el universo. De estas ecuaciones, Einstein hizo ciertas predicciones físicas que los científicos se pusieron a verificar. Los rayos de luz parecen torcerse; las órbitas de los planetas tienen extrañas desviaciones que la física no puede explicar.



NUESTRO ABOLLADO SISTEMA SOLAR
Un modelo en barro muestra cómo el sol (amarillo) y los planetas que le rodean, todos crean sus espacios curvos en el espacio como ya decía la teoría de Einstein. Éste predijo que a causa de su curvatura, los rayos de luz que pasan cerca de los cuerpos celestes se torcerían. Algo muy parecido sucede a una nave espacial; su trayectoria oscila a través de las «depresiones» del cosmos, como si fuera una pelota de golf.

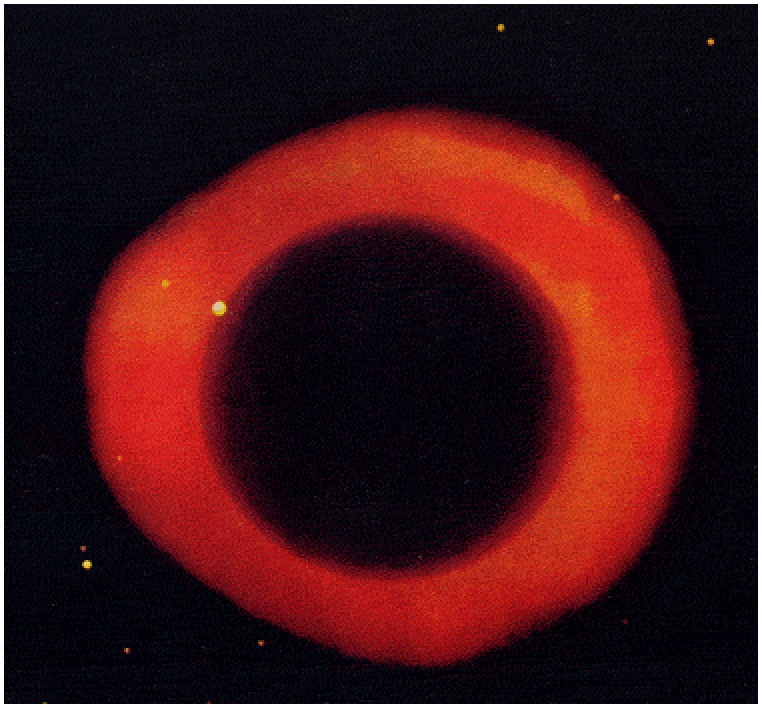
Capítulo 8
Las matemáticas en la actualidad: hechos, dudas, sueños

Contenido:

1. *Las matemáticas en el siglo XX siguen creciendo sin fin.*
2. *Una máquina cósmica del juego del millón*
3. *La forma de un sea lo que fuere*
4. *Acercamiento a un adversario cambiante*
5. *La topología: las matemáticas de la distorsión*
6. *Un mundo de variaciones topológicas*
7. *La "división" de una tira de Möbius*
8. *Colorear un mapa: el enigma de los topólogos*
9. *Puentes antiguos y la moderna teoría de la red*
10. *Raro comportamiento de una superficie "transformada en sí misma"*
11. *Las nuevas matemáticas: revolución en las aulas*

1. Las matemáticas en el siglo XX siguen creciendo sin fin.

El número de matemáticos, de unos 60.000 en 1972, ha aumentado en varios cientos desde 1900. Grandes empresas tales como IBM, Bell Telephone y General Electric, mantienen centros de investigación rodeados de césped, donde se paga a grupos de matemáticos para que piensen y nada más. En el Pentágono abundan los doctores en matemáticas. Los computadores electrónicos -esos esbirros de las matemáticas- se utilizan ahora en los centros vitales de la sociedad: en los centros de mando de los cohetes dirigidos y buques de guerra, en el Ministerio de Hacienda, en las oficinas de las líneas aéreas, en la Bolsa de Nueva York.



LAS PRUEBAS ESTELARES DE UNA TEORÍA La fotografía planetaria del lado opuesto simboliza la primera verificación de la Teoría General de la Relatividad de Einstein, un descubrimiento físico del siglo xx basado en la brillantez de las matemáticas del siglo xix. Durante el eclipse de 1919, que se reconstruye aquí, los científicos descubrieron que la luz de las estrellas se torcía cuando pasaba el sol, según predecía la Relatividad.

Las matemáticas, en síntesis, son el centro de la vida moderna. Nunca jamás, anteriormente, una torre de marfil proyectó, durante tanto tiempo, una sombra sobre la vida cotidiana. Al mismo tiempo, paradójicamente, sus iniciados no se han arrepentido de su afición por lo abstracto. Se han familiarizado con el abrupto y azulado horizonte jalonado por los matemáticos del siglo XIX. Y se asocian con abstracciones de abstracciones, «covariantes» y «contravariantes» «grupos de transformación» y números «transfinitos» «deformaciones discontinuas» y «espacios topológicos».

Estas excursiones en la pura fantasía matemática, aunque no parecen nada prácticas, tienen una forma peculiar de llevar la delantera a la ciencia física, de suministrar ecuaciones que se apliquen a los hechos antes que la ciencia halle los hechos que se apliquen a las ecuaciones. Esto ha sucedido tantas veces -y también ha fracasado en tantas otras- que muchos matemáticos se consideran a sí mismos como formuladores de posibilidades más bien que como descubridores de la verdad. La licencia impartida por esta visión del «arte por el arte» ha terminado en una pródiga inventiva. Los matemáticos de hoy en día se han desbocado de golpe en todas direcciones, haciendo conquistas con gran rapidez.

Los eruditos que han tratado de seguir esta agitada expansión nos aseguran que estamos viviendo en la Edad de Oro de las Matemáticas; estiman que en el último siglo se han creado casi tantas nuevas matemáticas como en todos los siglos anteriores juntos. Las estadísticas lo confirman. Según un reciente censo de las críticas en Revistas matemáticas, el número de trabajos publicados por matemáticos creadores se duplicó de 1940 a 1950, se duplicó de nuevo de 1950 a 1960, y volvió a duplicarse con exceso de 1960 a 1970; en otras palabras, aumentó un 800 por ciento en 30 años. Nicolás Bourbaki, seudónimo del supersabio que representa el esfuerzo colectivo de un grupo de intelectuales franceses, ha publicado casi 40 volúmenes de una enciclopedia sobre los fundamentos de las matemáticas modernas, y todavía no se ve el fin.

Tanto en alcance como en antigüedad, las matemáticas modernas desafían a la descripción fácil. En general, no obstante, se han desarrollado dentro de dos líneas: por un lado éxito y conquista -la habilidad para solucionar problemas-, por el otro investigaciones de espíritu y contemplación -una incertidumbre en lo referente a la naturaleza y, finalmente, las últimas abstracciones matemáticas.

El genio inglés George Boole

Por el lado contemplativo, dos de los desarrollos más notables son la teoría de conjuntos y la lógica simbólica. La teoría de conjuntos, entre otras cosas, facilita un nuevo tipo de aritmética para el tratamiento del infinito, la lógica simbólica representa un intento de reducir todo el razonamiento matemático a una notación matemática. Tanto la teoría de conjuntos como la lógica simbólica se hallan estimuladas por una tercera forma de matemáticas, la teoría de los grupos, que desempeña un papel unificador en el análisis y revela asombrosas similitudes entre los distintos dominios matemáticos.

P	Q	P Te llamaré esta noche	V Te llamaré esta noche o mañana	Q Te llamaré mañana	P Te llamaré esta noche	■ Te llamaré esta noche y mañana	Q Te llamaré mañana
C	C	Llamo esta noche	Cierto	Llamo mañana	Llamo esta noche	Cierto	Llamo mañana
F	C	No llamo esta noche	Cierto	Llamo mañana	No llamo esta noche	Falso	Llamo mañana
C	F	Llamo esta noche	Cierto	No llamo mañana	Llamo esta noche	Falso	No llamo mañana
F	F	No llamo esta noche	Falso	No llamo mañana	No llamo esta noche	Falso	No llamo mañana

SÍMBOLOS PARA FRASES: EL ÁLGEBRA BOOLEANA

El genio inglés George Boole desarrolló una lógica simbólica para aclarar la difícil lógica aristotélica. Su sistema se utiliza mucho. La idea básica de Boole era que si las simples proposiciones de la lógica podían representarse por medio de símbolos precisos, las relaciones entre dos proposiciones podían leerse en forma tan exacta como una ecuación algebraica -de hecho creó la rama de las matemáticas conocida por álgebra booleana-. El cuadro de encima ilustra un sistema booleano simple. Las letras P y Q a lo largo de la línea superior representan las breves frases de abajo; la V y el pequeño cuadrado negro representan las conjunciones «o» e «y» respectivamente, gracias a las cuales se combinan las frases cortas. Leyendo por filas a través de la tabla, las proposiciones P y Q son verdaderas y falsas según se indica en la clave coloreada de la izquierda. Si una P verdadera y una Q falsa, por ejemplo, «dan lugar» a una frase completa verdadera o falsa se muestra a través de la columna verdadero-falso en el centro de cada tabla. La tabla por debajo de la primera frase «P o Q» -P V Q- muestra que la frase es siempre cierta a menos que P y Q sean falsos. La tabla debajo de la segunda frase, «P y Q» -P y Q- muestra que la frase es siempre falsa a menos que tanto P como Q sean ciertas. Esta tabla se conoce por el nombre de «tabla de la verdad» y, aunque los resultados en este caso parece que derivan del sentido común, dichas tablas pueden ayudar a resolver abstrusos debates filosóficos.

Entre sus principales conquistas, las matemáticas del siglo XX cuentan con dos reinos completos y nuevos: la teoría del juego y la topología. La teoría del juego es el análisis de la estrategia, bien sea en el apasionante juego de los negocios o en el frío juego de la guerra. La topología es el estudio de las propiedades de las formas geométricas que no varían cuando las propias formas se alargan, doblan o se ponen al revés.

De todos los triunfos de las matemáticas, el más espectacular ha sido la Relatividad, la cual, al preceder a nuestra era atómica, ha probado irrevocablemente el espantoso poder que las matemáticas pueden ejercer sobre la vida cotidiana. El creador de la Relatividad, Albert Einstein, llegó a ser una de las más grandes personalidades de nuestra época. Como tal contribuyó a unir la amplia distancia entre las matemáticas y el público.

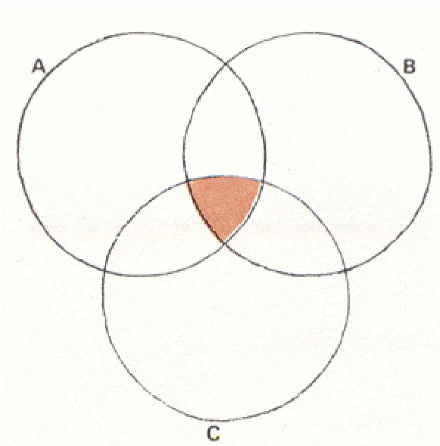
La Teoría de la Relatividad, la obra maestra de Einstein, está en realidad formada por dos teorías: la Relatividad Especial y la Relatividad General, la primera publicada en 1905, la última en 1916. Ambas teorías están basadas en la premisa de que todas las mediciones científicas son relativas al marco de referencia del observador: que no hay ningún centro fijo en el cosmos para que los científicos empiecen, partiendo de éste, a medir distancias y a describir con precisión dónde y cuándo exactamente sucede cada cosa en el espacio.

En efecto, la Relatividad Especial constituye una forma nueva de escribir ecuaciones de la mecánica de Newton para corregir sus inadecuadas descripciones de la energía y de los objetos - galaxias distantes o partículas atómicas -, que se mueven casi a la velocidad de la luz, 300.000 km por segundo. La portentosa ecuación del poder nuclear,

$$E = m \times c^2$$

(que significa que la energía, E, en un pedazo de materia es igual a la masa, m, de la materia multiplicada por el cuadrado de la enorme velocidad de la luz, c) derivó de la Relatividad Especial como un corolario.

La Relatividad General perseguía el mismo fin que la Relatividad Especial, pero con una gran fuerza. En la Relatividad Especial, Einstein había examinado las leyes newtonianas de forma tal que fueran aplicables a los cuerpos que se mueven de prisa y que van a velocidades constantes a lo largo de líneas rectas. En la Relatividad General amplió sus ecuaciones de forma tal que fueran aplicables a los cuerpos que viajaban a velocidades cambiantes a lo largo de líneas curvas. Las así denominadas «ecuaciones de campo» de la Relatividad General no tan sólo abarcan todo estado posible de movimiento sino que también describen todo el comportamiento de nuestro universo y todos los universos imaginables.



RESPUESTAS SUPERPUESTAS
En este «diagrama de Venn» desarrollado por John Venn en 1880, las áreas sustituyen conjuntos de cosas: el cálculo A representa «personas que son francesas», el B «personas que son generales» y el C «personas que llevan medallas». Las relaciones entre estos conjuntos se leen en el diagrama. El área de color representa generales franceses con medallas. Dichas ilustraciones de «la teoría de conjuntos», se utilizan en la actualidad para enseñar a los niños.

Einstein pudo alcanzar dichas fórmulas sólo porque él adoptó las totalmente hipotéticas, aparentemente inútiles ideas de Riemann acerca del espacio geométrico curvo. Según Einstein el espacio real por donde andan los hombres y las estrellas buscan sus trayectorias es, en verdad, curvo. La evidencia de que el espacio es curvo cerca del sol empezó a acumularse casi de golpe después de la publicación de la Relatividad General. En 1919 los astrónomos que observaban los eclipses en sus viajes por el Brasil y el África Occidental hallaron que los rayos de luz estelar que pasaban cerca del borde del sol se doblaban ligeramente y, por lo tanto, hacían que sus progenitores estelares aparecieran ligeramente desplazados en el cielo. No mucho después, los descubrimientos astronómicos referentes a un progresivo cambio en la órbita de Mercurio y un enrojecimiento de luz en ciertas estrellas confirmaron también las ideas de Einstein en torno a la curvatura del espacio.

Para realizar sus sueños, Einstein dispuso la materia movible y la energía del cosmos dentro de un marco matemático de cuatro dimensiones tres para el espacio y una para el tiempo. Incluyó el tiempo, ya que había hallado en la Relatividad Especial que el tiempo y el espacio son inseparables, que el tiempo en que ocurre un suceso no es independiente del movimiento del observador. En las posteriores especulaciones de Einstein, materia y gravedad son manifestaciones una de la otra; así, puede considerarse que la materia es una infusión de la gravedad, cuya intensidad varía de un punto a otro. En la Teoría del Campo Unificado, Einstein intentó explicar las fuerzas eléctricas y magnéticas.

2. Una máquina cósmica del juego del millón

Es la presencia de la gravedad en la continuación lo que da lugar a la curvatura del espacio. El efecto es algo parecido al que crean los pequeños imanes situados debajo de la superficie de juego de algunas máquinas del millón. Cuando los imanes se desconectan, la superficie actúa como un plano inclinado, pero al encenderse, la superficie se comporta como si estuviera llena de colinas y valles. En la máquina cósmica del millón de Einstein, la materia y la energía desempeñan el papel de bolsas e imanes, siguiendo la forma del espacio a medida que se mueven.

LA LÓGICA EN EL PAÍS DE LAS MARAVILLAS. Lewis Carroll era el seudónimo del matemático de Oxford, Charles Dodgson, autor de «Las aventuras de Alicia en el País de las Maravillas» y el mejor de los retratistas de niños en la Inglaterra victoriana. Aunque Dodgson sólo firmaba su nombre verdadero en sus obras matemáticas, a los matemáticos les ha intrigado la cantidad de lógica simbólica (lado opuesto) que se encuentra en fantasías como «Alicia» y «A través del espejo».

(Los matemáticos insisten en que las descripciones de este tipo no deben tomarse demasiado literalmente. Cuán traidoras pueden ser queda ilustrado en una anécdota que se refiere a Einstein y un teórico ruso que disertaba sobre la Relatividad.

UN TRÁGICO PRODIGIO
Evariste Galois, un joven rebelde francés, suspenso constantemente en los exámenes y que se peleaba con los profesores, fue encarcelado por amenazar la vida del rey y murió finalmente en un duelo por una ramera. Aunque murió a la edad de 20 años, se había dado a conocer ya como uno de los matemáticos más originales que hayan existido.

Queriendo simplificar, el ruso comparó una de sus ecuaciones «con una taza y un platillo en su vuelo en el espacio». En este punto, la historia prosigue, Einstein se puso en pie protestando, y después de un intercambio de ecuaciones con el ruso volvió a su asiento. Cuando hubo terminado, los oyentes se agruparon alrededor de Einstein deseando saber lo que había sucedido. «Esta situación que describía - explicó Einstein - dijo que era como una taza y un platillo, pero en realidad era como dos tazas y dos platillos en el espacio.»)

Al tratar de cuestiones difíciles del cosmos - o en realidad del átomo - las matemáticas abstractas han sido obligadas a una utilidad casi surrealista. Esto en sí mismo ha constituido una fuente de entretenimiento para los matemáticos, pero también una fuente de discusiones. ¿Cómo seguir creando más matemáticas del mismo alcance? ¿Cómo juzgar las líneas de análisis que se revelarán en el futuro?

Los matemáticos no conocen ninguna respuesta a este predicamento, algunos trabajan bajo el credo «Piense concretamente». Otros inventan por el placer de su arte solamente. En gran parte, la diferencia filosófica entre las dos escuelas tiene poca influencia en sus verdaderos métodos de trabajo. Ambas tratan de expresar sus creaciones en los términos más generales posibles, para marcar amplios aspectos de posibles problemas específicos. Y ambas tratan de evitar que las definiciones insípidas y los razonamientos defectuosos penetren furtivamente entre sus abstracciones, a las que no pueden aplicar los testes normales de la experiencia.

3. La forma de un sea lo que fuere

Para explorar los laberintos donde pueden agacharse los futuros gigantes del conocimiento, los matemáticos modernos iluminan su camino por medio de la teoría de los grupos y la lógica simbólica mencionada anteriormente. La teoría de los grupos y de los conjuntos, son utilizadas ambas para comparar los instrumentos de las distintas ramas de las matemáticas y para hacerlas todo lo intercambiables que sea posible. Un conjunto es una reunión cualquiera de entes. Un grupo es un tipo particular de conjunto de números, símbolos, puntos, líneas, movimientos, átomos, unidades de energía o un «sea lo que fuere» indefinido. Se distingue de cualquier otro viejo conjunto por tener que obedecer ciertas reglas con respecto a algunas operaciones tales como la suma y la multiplicación. Por ejemplo, la sucesión de dos miembros cualesquiera del conjunto cuando se combinan a través de la operación, debe de permanecer en el conjunto -el «4» producido por la unión del «2» y el «2» es también un número entero-. Además, cuando se combinan varios números de un conjunto, la forma en que están ordenados no debe afectar al resultado - por ejemplo, a(bc) debe ser igual (ab)c.

La teoría de los conjuntos fue desarrollada por el matemático alemán Georg Cantor como una técnica para «anatomizar el infinito». Durante el siglo XIX había habido continuos intentos para definir procesos infinitos tales como la diferenciación y la integración en términos de una aritmética simple. El sentimiento era que si todos los procesos y símbolos podían definirse así, habría menos dificultad para razonar con precisión sobre ellos. Como dijo un matemático, Leopold Kronecker : «Los números enteros son obra del buen Dios. Todo lo demás es obra del hombre».

Fue el triunfo de Cantor, en la teoría de los conjuntos, distinguir órdenes distintos de infinito en distintos conjuntos infinitos. Comparó los conjuntos infinitos al aparejar sus miembros, dos a dos, como los animales del arca de Noé. A través de este método aparentemente simple, alcanzó conclusiones sorprendentes. Por ejemplo, todas las fracciones pueden ser aparejadas con un conjunto infinito de números enteros. Los dos conjuntos infinitos son, por lo tanto, «iguales»; a pesar de esto, el conjunto de todas las fracciones incluye el conjunto de todos los números en virtud de términos tales como 2/1 ó 6/2, en otras palabras, aunque los dos conjuntos son iguales, uno contiene al otro como un «subconjunto». A través de la misma técnica, Cantor averiguó que otras series infinitas - todos los puntos en la línea de un segmento, por ejemplo, no pueden aparejarse con los números enteros. En pocas palabras, no pueden contarse. Cantor halló otros órdenes de infinito - otros «números transfinitos» que todavía son más infinitos -. Creó una aritmética para tratar dichos conjuntos infinitos - un arma tal con la que los matemáticos podían dividir su antiguo mito en torno al infinito en varias fases lógicas.

Aunque los conjuntos son más inclusivos que los grupos, la teoría de los grupos ha sido denominada el arte supremo de la abstracción matemática.

UNA VISIÓN SIMBÓLICA A TRAVÉS DEL ESPEJO DE ALICIA

La famosa Alicia de Lewis Carroll se enreda en más de una jungla de palabras en el país de las maravillas, al otro lado del espejo, pero gran parte del enredo verbal puede eliminarse a través de la afilada hoja de la lógica simbólica. Antes de que esto pueda hacerse, no obstante, las frases en cuestión deben de traducirse a términos de símbolos matemáticos apropiados. Un sencillo ejemplo es cuando el Caballero Blanco dice a Alicia que ha escrito una canción, y

«...o bien los hace llorar o si no».
« ¿O si no, qué?», pregunta Alicia.
«O si no, no... », dice el Caballero.

El doctor Ernest Nagel, catedrático de Filosofía en la Universidad de Columbia, ha *traducido esta conversación en lógica simbólica que comprende la siguiente notación simbólica especial:*

$\in x$ *significa que «existe una x tal que...»*

$\equiv$ *significa «si y tan sólo si...»*

$\supset$ *significa «si... entonces...»*

$\vee$ *significa «o...»*

~ *significa «no» y hace que la proposición que le sigue sea negativa.*

Utilizando esta notación, y abreviando la canción del Caballero (KS) haciendo que y represente cualquier canción, z cualquier persona que escucha y t un tiempo cualquiera, los lógicos podrían traducir el galimatías del Caballero de esta forma:

(x) (y) (z) (t) ((y es un KS x es un KS).

(z oye al Caballero contar x en el momento t ((x hace que llore z en el momento t $\supset$

$\vee$ *((x hace que llore z en el momento t))).*

Mientras que este enredo de símbolos puede parecer incomprensible, tiene un claro significado para el lógico. La lógica simbólica ha sido utilizada con éxito para señalar el camino del significado de las argumentaciones vagas o complejas en derecho y metafísica.

Su principal pionero fue un trágico joven francés del siglo XIX, Evariste Galois. El pobre Galois preparó la teoría de los grupos para las ecuaciones. Guardó el contenido de la obra de su vida en un documento de treinta y una páginas casi ininteligibles, escrito de prisa en la última noche de su vida, cuando sólo tenía veinte años. A la mañana siguiente murió en un duelo por causas políticas y una chica que apenas conocía.

La teoría de los grupos llega al fondo de lo que sucede cuando se efectúa un tipo de operación matemática con distintos elementos, o cuando se realizan sucesivamente diferentes operaciones con un elemento unitario. A través de este análisis deja al descubierto modelos estructurales básicos de las matemáticas. Un innovador agobiado por las dificultades puede algunas veces utilizar la teoría de los grupos para pasar a otras ramas de las matemáticas y poder seguir adelante con su obra. La teoría también ayuda a los científicos cuando observan modelos oscuros por naturaleza. Se ha utilizado, por ejemplo, para analizar configuraciones de moléculas y cristales - disposiciones importantes en la química de los genes humanos o en los «sólidos circuitos» de la electrónica moderna.

UN MAESTRO DE GRANDES FIGURAS
David Hilbert, desde su puesto de catedrático de matemáticas en Göttingen, Alemania, influyó todo el mundo de las matemáticas. Su obra abarcó los problemas de dos siglos, variando desde el álgebra del siglo XIX a la lógica moderna y la física matemática. Entre sus estudiantes se encontraban algunos de los que posteriormente iban a ser importantes figuras, tales como Enrico Fermi, Robert Oppenheimer y John von Neumann. Hilbert creía que todas las ideas matemáticas eventualmente encajaban «armoniosamente». Y su credo era que todo problema matemático puede liquidarse «o bien en forma de respuesta... o demostrando la imposibilidad de su solución».

Todo tipo de objetos matemáticos se comporta como grupo. Por ejemplo, un triángulo equilátero puede descansar sobre cualquiera de sus tres lados y continuar pareciendo lo mismo. Las rotaciones a que da lugar el triángulo, desde una de estas posiciones a la otra constituye un grupo.

Lo que es más, este grupo tiene una contrapartida estructural en un cierto grupo de permutaciones y en un grupo formado por las soluciones de una ecuación cúbica determinada. Los tres grupos son realizaciones de un solo «grupo abstracto». Por lo tanto, el mismo grupo abstracto abarca casos referentes a tres reinos distintos, la geometría, la aritmética de las disposiciones y el álgebra.

Los hábiles cambios que realiza la teoría de los grupos en un tipo de creación matemática para transformarlo en algún otro tipo distinto se conocen por «transformaciones». Una ecuación algebraica se transforma cuando, por ejemplo, toda x en ésta es reemplazada por una $y - 5$. Una figura geométrica en un plano se transforma cuando se alarga o cuando se proyecta su sombra en una superficie distinta o en un tipo distinto de espacio. Fue un grupo de transformaciones algebraicas, ideado por un físico holandés, Hendrik A. Lorentz, para tratar diversos problemas de electricidad, el que utilizó Einstein para construir su Relatividad Especial.

Durante las transformaciones, algún aspecto de una ecuación o de una forma geométrica puede permanecer obstinadamente inalterado. Estas sólidas islas se denominan «invariantes». Puede que no sean más perceptibles que el centelleo invariante en el ojo de un actor de una compañía de teatro, pero los matemáticos los buscan y se aferran a ellos. Una idea de su importancia se puede obtener de una definición de la teoría de los grupos de la geometría como «el estudio de las invariantes de las configuraciones geométricas bajo grupos de transformaciones».

La más introspectiva de las súper matemáticas que ayudan a los analistas del siglo XX a hallar su sendero, es la lógica simbólica: una notación para señalar y manipular todo tipo de proposiciones para llevar a los *sequiturs* y a los no *sequiturs* a una revelación extremadamente despiadada. A través de la lógica simbólica -cuyas manifestaciones pueden probarse en el extracto de Lewis Carroll- los matemáticos se han propuesto una tarea ímproba: clasificar y analizar los pensamientos que se hallan comprendidos en cada rama de las matemáticas, con el propósito de identificar los axiomas y procedimientos que cada uno tiene por base y de reducir todas las pruebas posibles a los esqueletos más simples. Por medio de este plan los resultados deberían ser absolutamente abstractos y sus proposiciones lo más abreviadas posible, tales como «si se supone el axioma A entonces se desprende el teorema B», que en una trascripción en lógica simbólica se escribiría así

$$A \supset B,$$

o «si se supone A o B entonces resulta el negativo de C», se escribiría así:

$$A \vee B \supset \sim C.$$

Se han realizado varios esfuerzos monumentales para traducir todo el razonamiento matemático en dicha abreviación, en especial los tres tomos de símbolos de la *Principia Mathematica*, publicados por Alfred North Whitehead y Bertran Russell entre 1910 y 1913.

La lógica simbólica ha producido uno de los teoremas más curiosos e influyentes de todas las matemáticas modernas. Ésta es la demostración de Gödel, una línea de razonamiento extremadamente abstracta que muestra que no puede construirse ninguna rama útil de las matemáticas sobre un conjunto consistente de axiomas sin suscitarse problemas sin solución dentro del marco de los propios axiomas. Es como si alguna propiedad estructural de un triángulo rectángulo jamás pudiera verificarse por medio de los axiomas euclidianos que condujeron a la formulación del teorema de Pitágoras. Para la aritmética, la demostración de Gódel muestra que todas las relaciones posibles entre los números enteros no pueden deducirse de ningún conjunto de supuestos básicos. Las relaciones posibles o «verdades» acerca de los números son tan ilimitadas como el propio desfile de números. Para las matemáticas en conjunto, la implicación es que la disciplina nunca será completa.

Kurt Gödel - en la actualidad miembro del Instituto para Estudios Superiores en Princeton - elaboró su notable teorema en 1931 a la edad de 25 años. Lo demostró a través de lo que denomina «una prueba de existencia», un tema que demuestra que algo existe sin producir necesariamente ese algo para su inspección. El teorema de Gödel se toma o con antipatía o con alborozo. Los que están más afectados son los matemáticos «formalistas». Los más contentos son los de espíritu libre que no puede soportar el pensamiento de que las matemáticas pudieran jamás estar bien esquematizadas. Entre éstos uno de los más famosos fue John von Neumann, que desempeñó un papel primordial en el desarrollo de la bomba atómica. Von Neumann en cierta ocasión dijo «Gran parte de la inspiración matemática proviene de la experiencia y apenas es posible creer en la existencia de un concepto absolutamente inmutable del rigor matemático disociado de toda experiencia humana».

4. Acercamiento a un adversario cambiante

Una de las principales contribuciones de Von Neumann, la teoría de los juegos, es uno de los desarrollos más prácticos de nuestra época. Propugna complicadas leyes de estrategia: cómo adoptar las mejores variaciones en el juego para evitar la derrota ante un adversario cambiante; cómo sacar el mejor partido de una mala situación o evitar lo peor de una buena, al enfrentarse con un competidor muy racional y analítico.

La teoría de los juegos ha sido utilizada en una gama de aplicaciones. Ha contribuido a determinar el espacio de tiempo más ventajoso que debiera observar una empresa de discos entre la presentación al público de dos grabaciones de éxito segurb; ha sido utilizada en un contrato «cielo-azul» o «piense» propuesto, no hace mucho tiempo, por la Oficina de Investigación Naval americana. En un juego que no ofrece ninguna perspectiva clara de ganar, la teoría de los juegos puede mostrar cómo hallar la estrategia que se acercará más para conseguir tablas.

UN GIGANTE DE NUESTRA ÉPOCA
John von Neumann, cuya «teoría matemática de los juegos» se utiliza en la actualidad en las decisiones empresariales y en la estrategia de la guerra fría, se hizo famoso por solucionar en su cabeza problemas que para otros matemáticos requerían coger papel y lápiz o incluso un calculador. Los colegas a veces se preguntaban, medio en serio, si la «rápida iluminación» de su intelecto no sugería «una especie superior al hombre». Su mente exclusiva, finalmente, le separó de los demás hombres: después de un accidente de automóvil en Princeton, explicó: «Los árboles de la derecha me estaban pasando en sucesión ordenada a 60 millas por hora. De repente uno de ellos se puso en mi camino».

Como resultado de esto la idea de la minimización de las máximas pérdidas - denominados «mini máximos» o «puntos de silla» de Von Neumann - ha sido utilizada por ambos lados en la guerra fría, y puede contribuir al retraso indefinido de la tercera guerra mundial.

Entre la difícil lógica abstracta de los formalistas y las igualmente difíciles teorías de los adeptos de Von Neumann en las matemáticas modernas, se encuentra la sombra de los computadores electrónicos de gran velocidad. Diariamente, partiendo de elegantes fórmulas, se traducen las matemáticas en prosaicas hojas de instrucciones que los computadores digieren por medio de la fuerza mecánica bruta. Un computador puede solucionar problemas que dejarían a un Newton o a un Gauss con la boca abierta, y solucionarlos con un número cualquiera de decimales, por medio de esquemas de aproximación puramente pragmáticos.

Mientras tanto los matemáticos puros van ascendiendo cada vez más arriba hacia nuevos cielos de abstracción. Lo que están alcanzando nadie de nosotros lo sabe realmente, ya que los equivalentes de la Relatividad y la energía atómica -que pueden salir a partir de las matemáticas actuales puede ser que no se comprendan durante varias décadas.

En lo que al propio futuro se refiere, está bien descrito por André Weil, uno de los colaboradores franceses en la obra de Bourbaki : «El gran matemático del futuro, así como el del pasado, huirá del camino muy trillado. Es gracias a inesperados *rapprochements*, que nuestra imaginación no hubiera sabido cómo llegar hasta ellos, que él solucionará, al darles otro giro, los grandes problemas que le dejaremos como legado».

5. La topología: las matemáticas de la distorsión

En las regiones más avanzadas de las matemáticas modernas, algunas de las mejores mentes de hoy están trabajando en un extraño mundo de formas fascinantes, improbables. Este campo se conoce por topología. Es un tipo especial de geometría referida a las posibilidades de que las superficies puedan hacerse retorcer, doblar estirar o bien deformar, de una forma determinada en otra. Algunas veces los topólogos se ocupan de superficies que nadie podría construir, algunas veces conciben formas que parecen imposibles, por ejemplo; una superficie con una sola cara. A los topólogos les gusta escoger una parodia de Hiawatha, sobre un indio que hizo unos mitones de peluda piel: «Para poner dentro el lado caliente /Puso fuera el lado de dentro de la piel / y Para poner fuera el lado frío/Puso dentro el lado caliente del lado del pelo». Al dar la vuelta a los mitones, el indio realizaba una maniobra topológica.

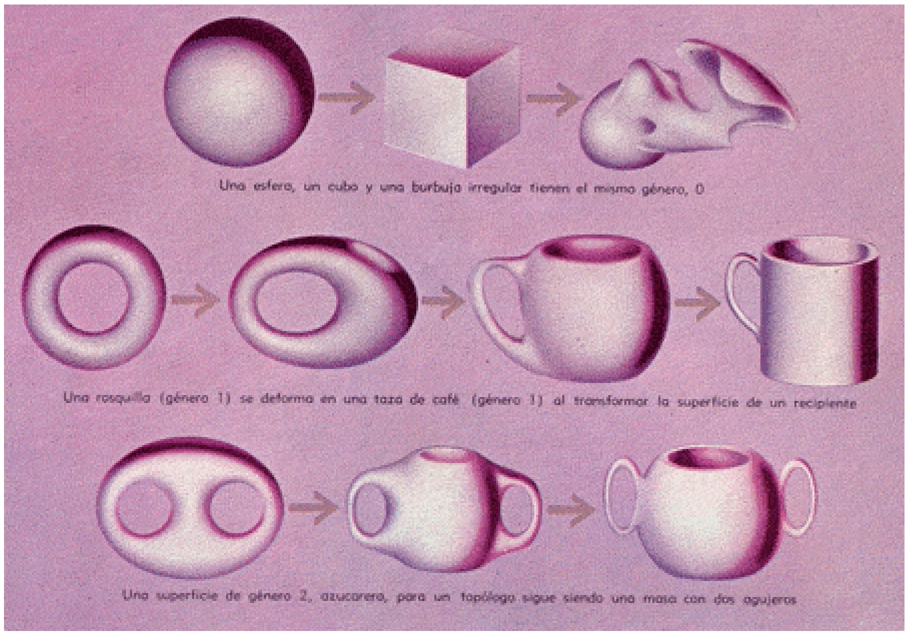
SEMBLANTES TOPOLÓGICOS
Al topólogo lo definen como un hombre que no sabe la diferencia entre una rosquilla y una taza de café. Pero así como no le es posible transformar una rosquilla en una taza, puede demostrar que rosquilla y taza son topológicamente iguales, lo cual significa decir que en teoría, por lo menos, una puede transformarse en la otra, como se mostró anteriormente

6. Un mundo de variaciones topológicas

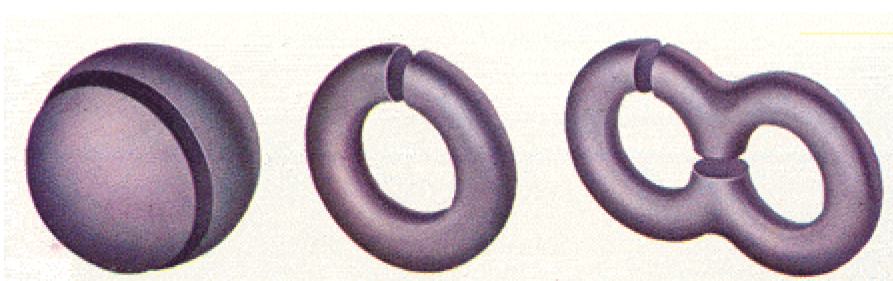
La mayor parte de los objetos en estas páginas, tales como la esfera (abajo) que se transforma en primer lugar en un cubo y después en una masa sin forma, o como el imposible neumático elástico de la página derecha, están realizando lo que los topólogos llaman transformaciones. Éstas son variaciones en la forma de una superficie que dejan inalteradas ciertas propiedades básicas. Para un topólogo una figura transformada así no ha variado en forma alguna.

Cuando un chiquillo coge una bola de barro, y la transforma en una caja y después en un disco, está realizando transformaciones topológicas similares a las que se ilustran en ésta y en las páginas siguientes. Lo que ha hecho es deformar la bola de barro sin romperla.

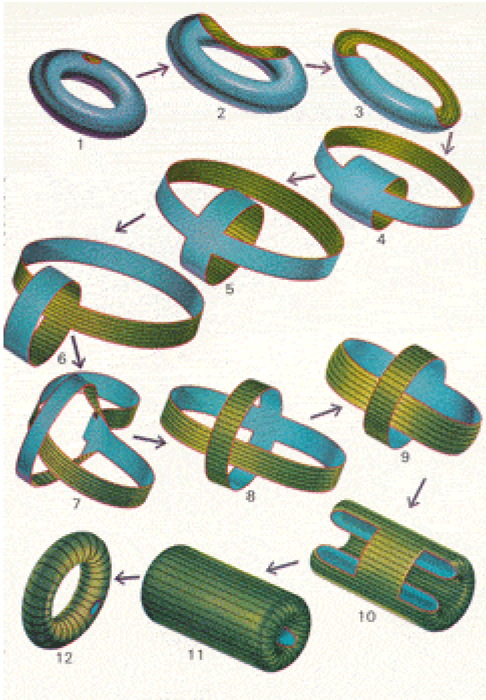
Todas las transformaciones topológicas demostradas abajo comprenden una propiedad denominada "el género". Éste se define por el número de agujeros que tiene el objeto o, como dicen los topólogos, por el número de cortes circulares cerrados sin intersección o completamente circulares que pueden hacerse en dicha superficie sin romperla en dos partes.



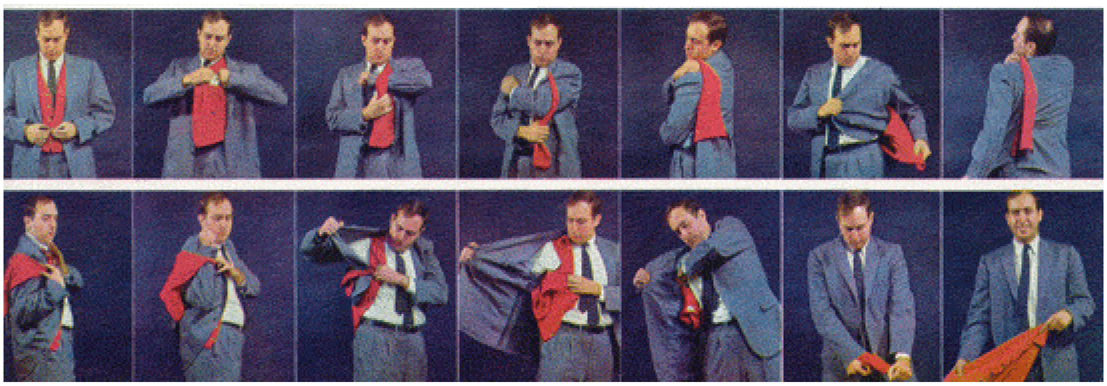
REALIZANDO TRANSFORMACIONES
En las tres filas de variaciones topológicas de arriba, los objetos pueden transformarse uno en el otro al retorcerlos, doblarlos o darles otra forma. Pero una esfera no podría transformarse en rosquilla o una jarra para leche en un cubo, sin hacer o eliminar un agujero.



LA DETERMINACIÓN DEL GÉNERO
Las tres figuras ilustran el género. No se puede hacer ningún corte alrededor de la esfera sin dividirla; por tanto su género es 0. Sólo se puede hacer un corte en una rosquilla sin dividirla: su género es 1. Una figura de 2 agujeros tiene género 2

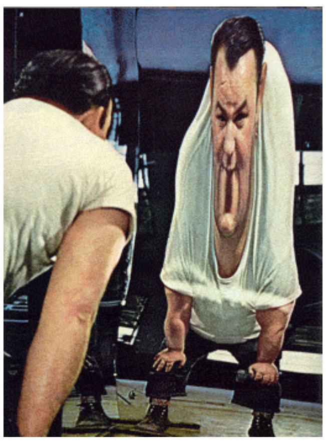


DANDO LA VUELTA A UN NEUMÁTICO
En un ejercicio de imaginación topológica, un neumático que pueda estirarse infinitamente puede dársele la vuelta sin que se rompa. Primero (parte superior izquierda) el agujero de la válvula (señalado en rojo) se abre estirándola. La abertura después se hace sucesivamente más ancha hasta que hay más agujero que neumático. Al torcerlo dos veces (pasos 6 y 7) se da la vuelta al neumático



GIROS TOPOLÓGICOS
Sacarse un chaleco sin tener que sacarse la chaqueta es un movimiento simple aunque arduo. Los cuadros de abajo muestran el esfuerzo de un hombre por sacarse su chaleco. Desde un punto de vista topológico el chaleco jamás estuvo dentro de la chaqueta.

EL GÉNERO DE CUATRO OBJETOS COTIDIANOS
El amplio conjunto de objetos familiares cuyas superficies pueden identificarse topológicamente, se ilustra en esta página. Arribo, de izquierdo a derecha, se hallan superficies de género 0, 1, 2 o tres o más. Abajo hay un grupo de formas distintas, codo una de las cuales puede transformarse topológicamente. Las superficies del mismo género tienen igual color.



TOPOLOGÍA DE UNA CARA
Deformada en el espejo de la "casa de los misterios" la cara del hombre y su reflejo son las mismas: un punto y su vecindad en una, corresponden a un punto y su vecindad en otra

LA TIRA DE MÖBIUS CON UN SOLO LADO
Una tira de Möbius se hace fácilmente con una tira lisa de papel corriente: primero se da media vuelta a la tira y después se unen los extremos para obtener un anillo cerrado.

«DIVISIÓN» DE UNA TIRA DE MÖBIUS
Cuando se hace un corte por la mitad de una tira de Möbius podría esperarse dividir la tira en dos. Pero cuando se traza una línea alrededor de la tira (arriba) y la tira se corta a lo largo de la línea, el resultado no es dos tiras sino una tira de dos lados. Una tira de Möbius sólo tiene un borde; el corte añade un segundo borde, y un segundo lado.

7. La "división' de una tira de Möbius

Los topólogos disfrutan creando formas extrañas y objetos raros. Entre los más curiosos de éstos se halla la superficie de un lado, introducida por el matemático alemán y astrónomo Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868). En un artículo, Möbius describía su superficie de papel como una tira que tiene "un solo lado". Esta tira de un lado, difícil de imaginar pero fácil de construir (arriba) tiene toda clase de propiedades inesperadas.

Otro matemático alemán, Felix Klein (1849-1925), siguiendo las directrices de Möbius, ideó una botella con una sola superficie (lado opuesto). Dicha botella, de cortarse por la mitad de su longitud, se transformaría entonces en dos tiras de Möbius.

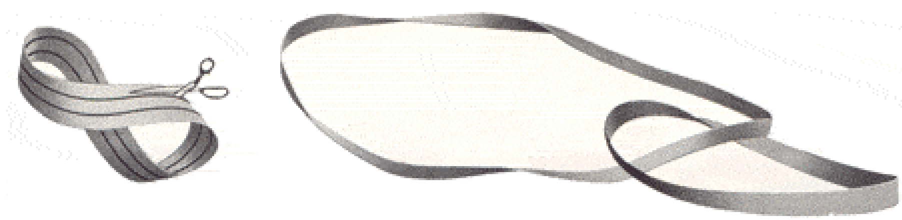
La obra de Möbius y Klein siempre ha fascinado al lego. Hace algunos años un mal poeta escribió:

"Un matemático creía
Que la tira de Möbius tiene sólo una cara.
Usted mucho se reirá
Si la corta por la mitad.
Ya que al dividirla queda en una sola pieza".

Otro poeta terminó la historia:

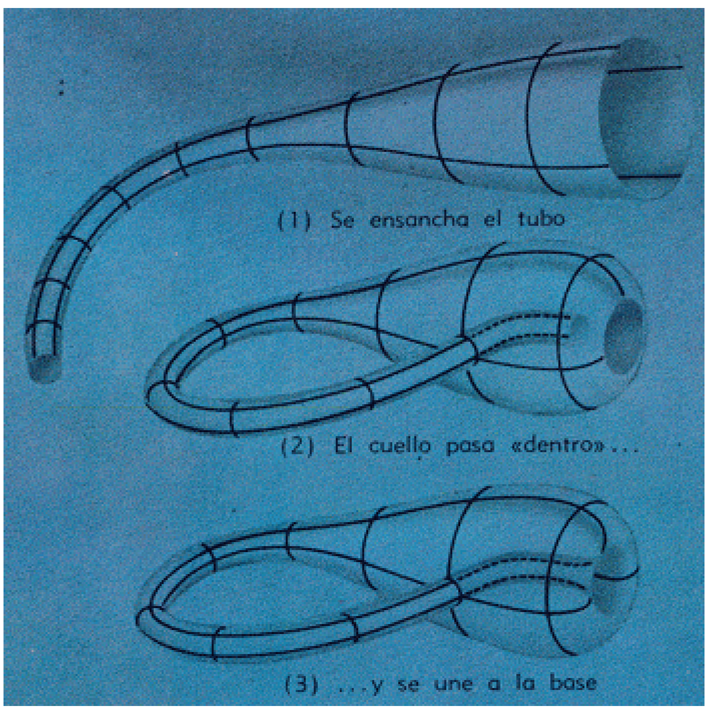
"Un matemático llamado Klein
Creyó divina la tira de Möbius.
Dijo, si usted pega los bordes de dos tiras
obtendrá una botella igual que la mía".

DANDO COLOR A UNA TIRA DE MÖBIUS
Cualquiera puede pintar un anillo de papel ordinario de color rojo por un lado y verde por el otro. «Pero ni siquiera Picasso podría hacer esto con una tira de Möbius». Si alguien lo intentara vería que la tira tiene únicamente un lado en el que coinciden ambos colores.



TIRA DE MÖBIUS EN TRES PARTES
Una tira de Möbius cortada en tres partes (arriba) da lugar a una nueva sorpresa: Las tijeras hacen dos vueltas completas alrededor de la tira pero sólo un corte unitario continuo. El resultado final de este corte son dos tiras entrelazadas (arriba, parte derecha). Una de las tiras es un aro de dos lados y la otra es ahora una nueva tira de Möbius.

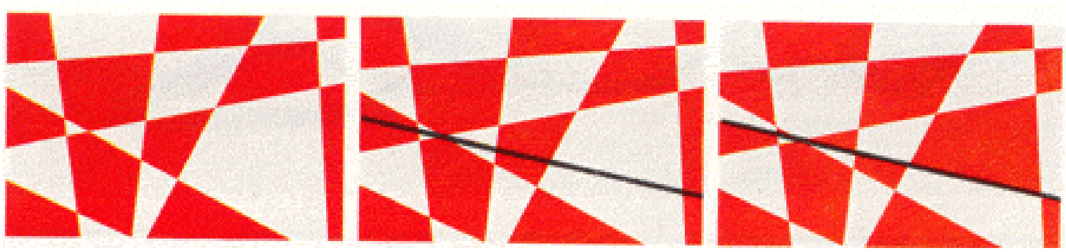
LA BOTELLA QUE NO TIENE INTERIOR
Este modelo de una botella de Klein, que no tiene «ningún interior», pertenece al topólogo Albert W. Tucker, de la Universidad de Princeton. Nadie verá jamás una verdadera botella Klein ya que ésta sólo existe en la imaginación del topólogo, la "botella Klein se atraviesa a si misma sin que haya ningún agujero.



CONSTRUCCIÓN DE LA BOTELLA DE KLEIN
Los tres diagramas de la izquierda ilustran cómo se hace la botella de Klein: (1) un extremo del tubo se convierte en el cuello, el otro extremo en la base; (2) el cuello atraviesa el lado de la botella; (3) el cuello y la base se unen, transformando en una sucesión continua el interior y el exterior

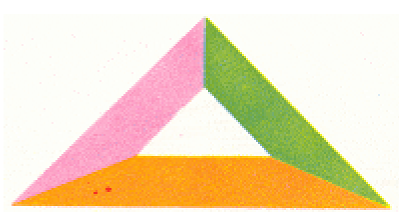
8. Colorear un mapa: el enigma de los topólogos

Los mapas siempre lían fascinado a los topólogos en virtud de ciertas cualidades que poseen. Durante mucho tiempo la regla que han observado los que hacen mapas es que cuatro colores son suficientes para diferenciar cada país de todos sus vecinos inmediatos. El caso de un mapa plano o una esfera es el mismo, ya que cualquier mapa en una esfera puede transformarse en un mapa plano similar agujereando la esfera y aplanándola. Pero hay casos en que se requieren más de cuatro colores. Un mapa trazado en una tira de Möbius requiere seis colores. Y cuando un topólogo enrolla y dobla un mapa plano en forma de rosquilla (a la que llama toro), el mapa que sólo requiere cuatro colores puede necesitar siete



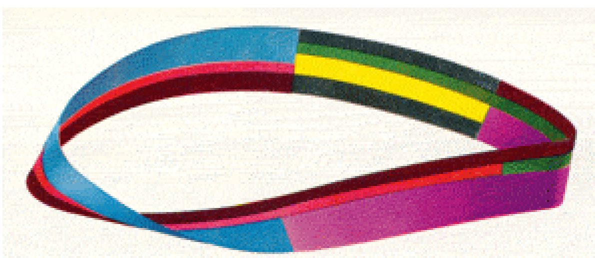
EL TEOREMA DEL MAPA DE DOS COLORES
Una de las reglas más simples de topología para colorear un mapa afirma que si se pudiera trazar totalmente un mapa plano a base de líneas rectas que empezaran y terminaran en un borde, podría colorearse con dos colores sin que ninguna área adyacente tuviera el mismo color. Esto es cierto sin tener en cuenta el número de líneas que tenga el mapa. Los tres diagramas de arriba demuestran la teoría. A la izquierda hay un mapa plano en dos colores, cuando se añade una línea al azar (centro) todavía se usan dos colores (derecha)

En todo esto, existe para los topólogos un tipo de exasperación constante. Ha podido demostrar que sólo se necesitan seis colores en una tira de Möbius y siete colores, a lo más, en un toro; pero no ha podido demostrar lo que durante mucho tiempo han sabido los que hacen mapas, que cuatro colores son suficientes para cualquier mapa plano o esfera. Los topólogos, desde la época de Möbius han tratado de trazar un mapa plano en el que se necesiten cinco colores: nadie lo ha hecho, pero tampoco nadie ha probado que sea algo que no pueda.

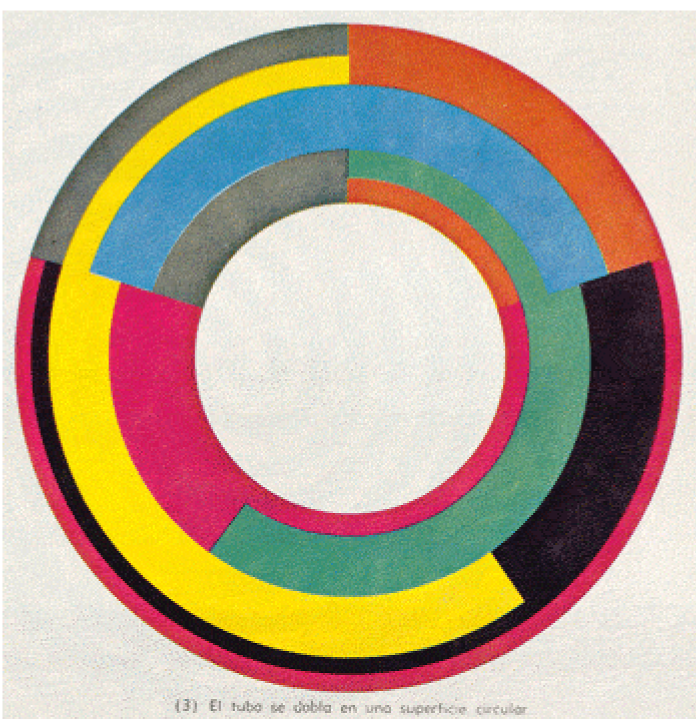


TEOREMA DEL MAPA DE 4 COLORES
La forma más simple para mostrar que se necesitan cuatro colores para un mapa plano es trazar cuatro regiones en forma tal que cada una esté unida con las otras tres, como en el diagrama de arriba. Cada una de las tres áreas exteriores requiere su propio color, y el centro debe tener otro.

En el mapa bastan 3 colores para 7 Estados, pero el octavo Estado debe de pintarse con otro color



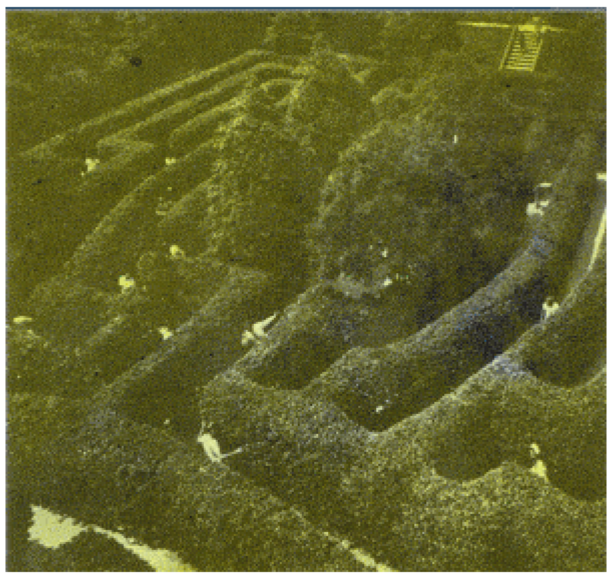
EL TEOREMA DEL MAPA DE SEIS COLORES
Un mapa en una tira de Möbius requiere seis colores para que no haya áreas contiguas del mismo color. Pero si se corta la tira, el mapa plano resultante puede iluminarse con sólo cuatro colores. En una tira de Möbius, ningún mapa requiere más de seis colores



EL TEOREMA DEL MAPA DE SIETE COLORES
En cualquier mapa sobre una superficie circular se necesita 7 colores para que ninguna región adyacente tenga el mismo. En las tres figuras, se unen los bordes de un mapa plano para hacer un tubo; los extremos del tubo se unen transformándolo en superficie circular

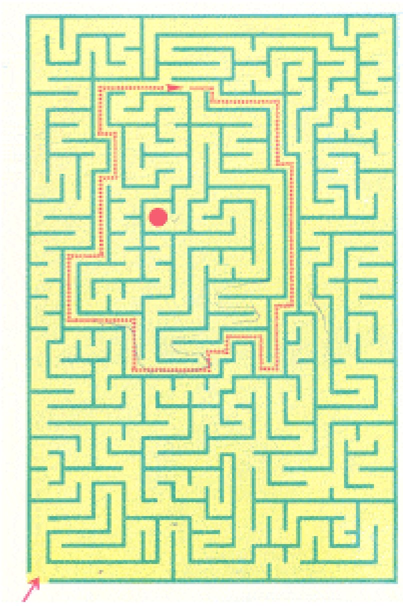
9. Puentes antiguos y la moderna teoría de la red

La teoría de la red es una de las formas más prácticas de la topología, con aplicaciones a los circuitos eléctricos y a la economía. Se originó hace unos 200 años, gracias a Leonhard Euler, que solucionó los problemas topológicos cien años antes que la topología se hubiera descubierto. Debido a una extraña coincidencia, ambos problemas resultaron ser parte de lo que hoy se llama teoría de la red.

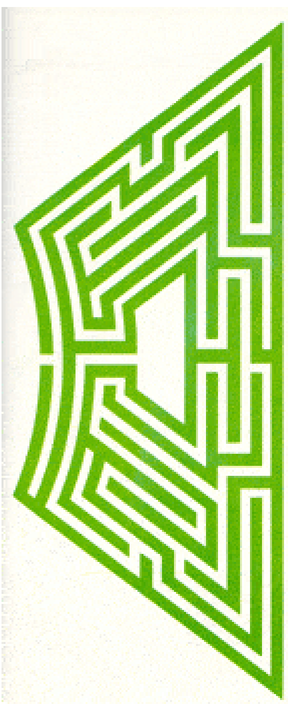


UN LABERINTO VIVIENTE

Los laberintos de jardín hechos a base de arbustos fueron muy populares en la Europa del siglo XVIII. El de Williamsburg, Virginia, es copia fiel de Hampton Court en Inglaterra

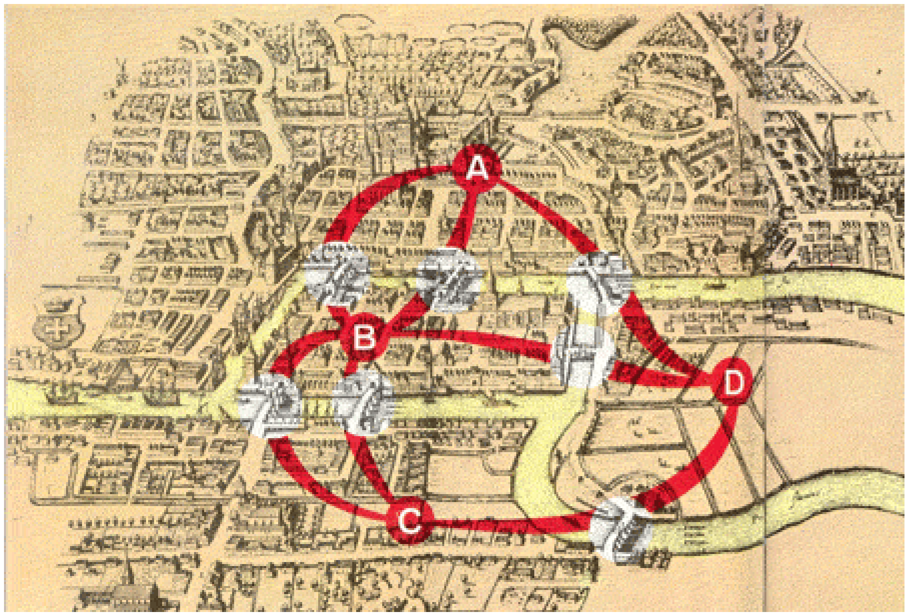


PERDIDO EN UNA ISLA
Este laberinto diseñado por un matemático inglés, tiene su meta en el centro de una isla de paredes que están, separadas de las otras paredes del laberinto. Por tanto es imposible llegar a la meta tocando siempre la pared con la mano.

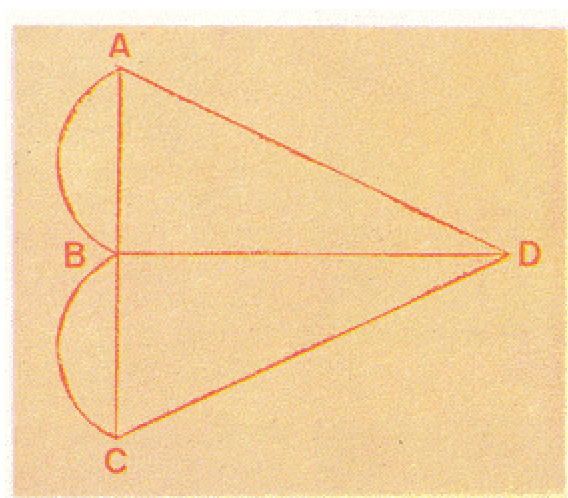


UN FÁCIL CAMINO PARA ENTRAR
En este diagrama del tipo de laberintos como el de Hampton Court (fotografía de arriba) el objetivo es el área abierta en el centro. Se llega fácilmente utilizando una simple regla: escójanse los caminos que no requieren que se levante la mano de la pared.

Los dos crucigramas que interesaron a Euler se referían a redes de líneas que conectaban un número de puntos.

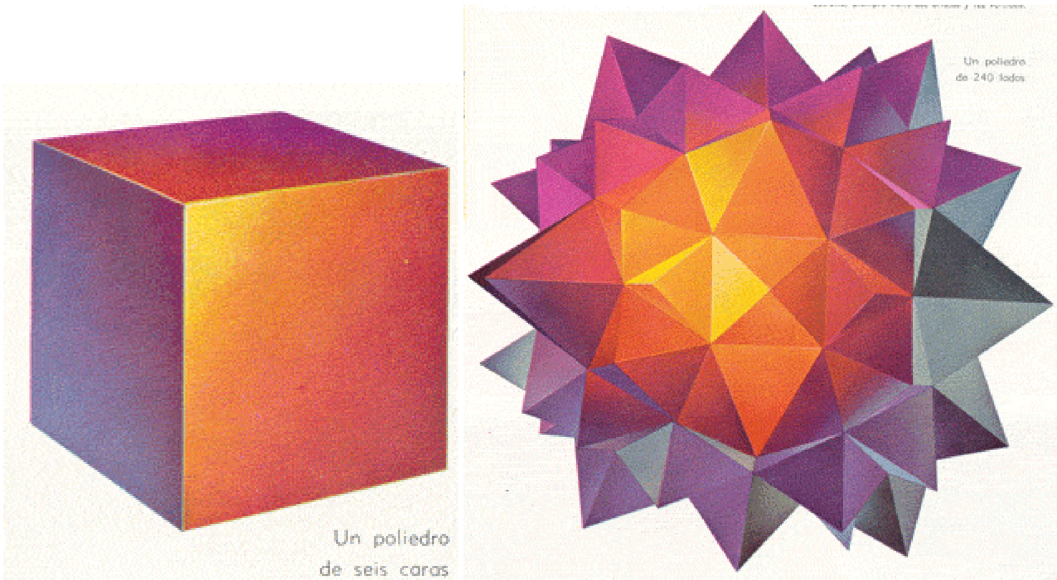


LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG
El antiguo mapa de la izquierda muestra la ciudad prusiana de Königsberg y la curva del río que la divide en cuatro áreas (señaladas por A, B, C y D). Siete puentes unen las áreas (en los círculos blancos). Las líneas rojas de trazo grueso indican todas las posibles rutas entre A, B, C y D, que siguen los puentes.



El diagrama de Königsberg muestra porque era totalmente imposible cruzar todos los puentes sin volver a cruzar por lo menos uno: en dicha red, como señaló Euler, es inevitable cruzar de nuevo algún puente siempre que hayan tres o más puntos en los cuales converjan una cantidad impar de caminos.

El primero de ellos comprendía los puentes de Königsberg. Había sido una tradición entre las gentes de la ciudad que los siete puentes no podían cruzarse todos en un camino continuo sin volver a cruzar la ruta en algún punto. Euler se dio cuenta de que éstos respondían a un importante principio, y prosiguió para demostrar matemáticamente por qué dicho camino era imposible.



LA FÓRMULA DE EULER

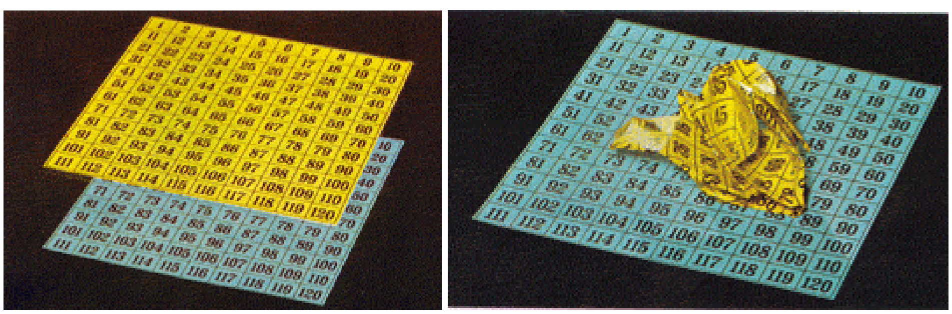
En cualquier figura de muchas caras o poliedro, Euler demostró que el número de aristas más dos es siempre igual al número de vértices más el número de lados. La fórmula es e + 2 = v + s. Por lo tanto, un cubo (arriba; tiene 8 vértices, 6 lados y 12 aristas. La fórmula es válida para formas geométricas complejas, como la figura de 240 lados que se muestra. Es un decaedro rómbico en forma de estrella; siempre tiene 360 aristas y 122 vértices.

10. Raro comportamiento de una superficie "transformada en sí misma"

Entre todas las transformaciones que estudia la topología las menos frecuentes, tal vez las menos comunes, son las que aparecen en estas páginas. Para el topólogo, una hoja de papel arrugada y un disco con los distintos puntos en su superficie dirigidos al exterior tienen el mismo tipo de variación. Según palabras de un matemático "se transforman de manera continua". Es decir, son superficies planas en las que todos los puntos posibles están cambiando simultáneamente en un patrón continuo. De tales transformaciones, los matemáticos han derivado el "teorema del punto fijo": Cuando una superficie "se transforma en sí misma" de esta manera, un punto de la superficie permanecerá donde estaba.

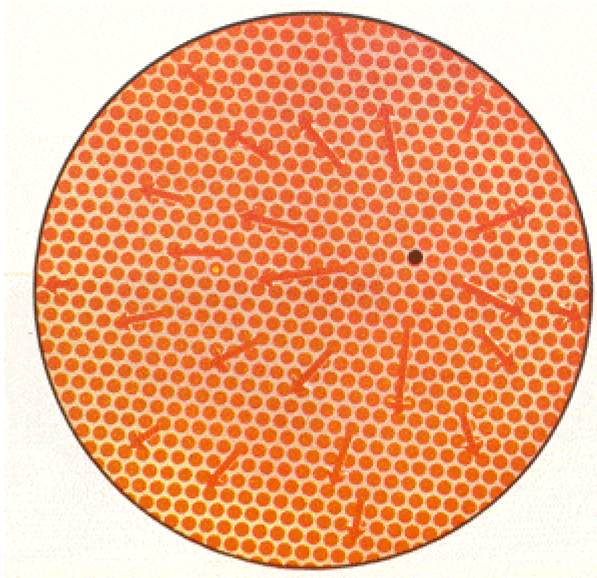
UN PELIRROJO TOPOLÓGICO

Como muestra el joven de la derecha, la mayor parte de las cabezas tienen un punto, en forma de remolino, del cual irradian todos los cabellos. Topoi lógicamente, sería imposible cubrir una esfera con cabello, o con líneas radiantes si no hubiera un punto fijo. Por la misma razón el viento no puede soplar en todas partes de la tierra a la vez.



UN PUNTO FIJO SOBRE UNA HOJA

Arrugar una hoja de papel (arriba) ilustra el «teorema de punto fijo». Se coloca primero una hoja de papel numerada sobre un duplicado exacto, de forma tal que todos los puntos de ambas hojas estén alineados. Después se arruga la hoja superior encima de la hoja inferior. Un punto de la hoja arrugada debe estar por encima todavía de su punto inicial.



UN PUNTO FIJO EN UN DISCO
Según el teorema del punto fijo, si todos los puntos alrededor del punto negro del disco de la derecha irradian hacia el exterior en un patrón de flujo continuo en dirección, pero no más allá del límite del disco, un punto (el punto negro) debe permanecer fijo.

11. Las nuevas matemáticas: revolución en las aulas

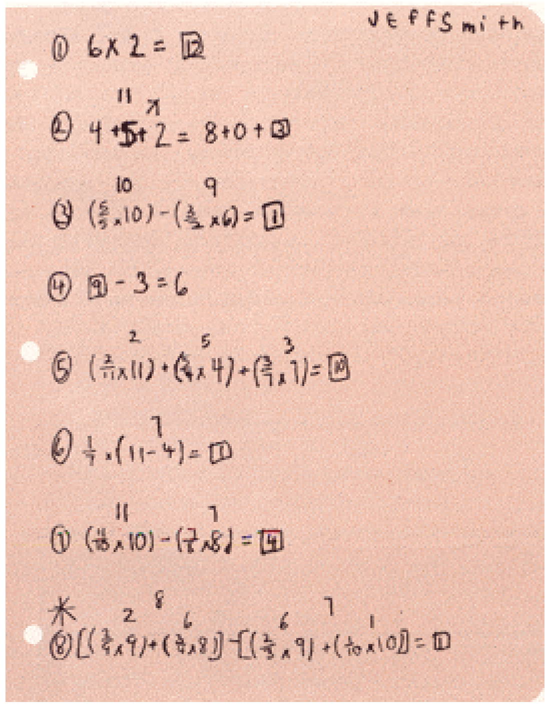
Cada vez más, los padres se sienten sorprendidos por los extraños deberes de matemáticas que traen sus hijos a la casa. De las bocas de niños que apenas ayer pronunciaban palabras de no más de una sílaba, oyen un vocabulario erizado de términos tan formidables como «conjuntos», «intersecciones» y «propiedades conmutativas y asociativas». Este fenómeno refleja un cambio que se ha ido manifestando en las matemáticas escolares desde hace más de diez años, trastornando la enseñanza tradicional y suscitando agudas controversias en las Asociaciones de Padres y Maestros y entre los propios matemáticos. Casi todas las escuelas de la nación han adoptado las «nuevas matemáticas» después de ensayar programas experimentales que fijaron la tónica para esta revolución educacional.
A continuación, la Colección Científica de TIME LIFE contesta algunas preguntas referentes a lo que son las «nuevas matemáticas», ahora que se han establecido.

¿POR QUÉ CAMBIAR LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES?

Percibir una oleada de emoción creativa en un aula llena de alumnos es una de las mayores recompensas de la enseñanza. Hasta fines del decenio de 1950, fue solamente un extraño regalo del profesor de matemáticas. La demanda del siglo xix de una preparación constante de oficinistas y pilotos convirtieron las matemáticas escolares en una asignatura fundamental cuya fascinación para algunos de los mejores cerebros de la Historia parecía inexplicable. Pocos jóvenes iban a la Universidad con la capacidad o el deseo de conocer las matemáticas superiores.

BARATIJAS PARA LA ENSEÑANZA
Un párvulo absorto descubre el mágico mundo de los números con unas barras proporcionadas. Tales complementos se utilizan en los grados primarios como introducción a las matemáticas abstractas.

Aunque los matemáticos y los educadores habían tratado de conseguir durante mucho tiempo revisiones drásticas en la enseñanza, fue necesario el nerviosismo nacional causado por el Sputnik ruso de 1957 para promover el apoyo público. Los americanos despertaron encontrándose con que el mundo actual descansa sobre la ciencia, y que la ciencia a su vez descansa sobre las matemáticas. Esta urgente necesidad ya no afecta únicamente a los oficinistas y pilotos. sino a los hombres capaces de describir los descubrimientos científicos exactamente; a los hombres capaces de predigerir en forma de ecuación los problemas que han de ser abarcados por nuestros ubicuos computadores y por nuestras máquinas de automación; y de hombres capaces de tratar de las novísimas matemáticas necesarias para hacer frente a la relatividad, teoría del quantum y el estudio sistemático de las complejas interacciones sociales.

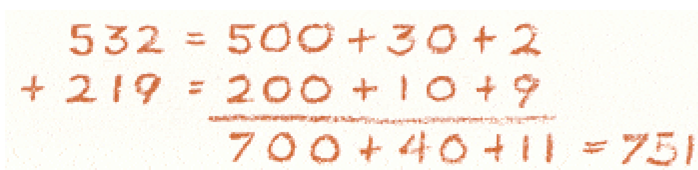


LA NUEVA PERSPECTIVA DE LOS DEBERES
Una expresión remota de la vieja aritmética la constituye este papel algebraico de primer grado en East Brunswick, Nueva Jersey. Al rellenar las casillas que representan las incógnitas, se solucionan ecuaciones.

¿COMO SON LOS NUEVOS PROGRAMAS?

Desde 1952, matemáticos, educadores y editores de libros de texto idearon más de una docena de programas experimentales. A mediados del decenio de 1960, estos programas, mejorados y complementados con materiales apropiados, se usaban en cierto grado en dos tercios de las 135.000 escuelas elementales y secundarias del país. El supuesto básico era que nadie podía prever qué tipo de matemáticas encontrarían más útil los alumnos de hoy cuando fueran adultos. En una palabra, los innovadores querían darles una comprensión suficiente para que hicieran sus propias matemáticas.

Los programas buscaban un lenguaje más preciso, libre de ambigüedades y de las proposiciones engañosas del pasado. (¿A cuántos se nos dijo que no se podía deducir dos de tres, y unos años más tarde nos enteramos de que era posible, con -1 como resultado?) Desde un principio, a los jóvenes se les enseña la «estructura» esencial de las matemáticas -el «porqué» más bien que el «cómo»- mediante la geometría plana (capítulo 2), el álgebra elemental (capítulo 3) e innovaciones tales como la «aritmética binaria», las «líneas de números» y los «conjuntos» (capítulo 8). A algunos se les ha iniciado también en la geometría analítica (capítulo 4), la probabilidad (capítulo 6), los vectores (capítulo 7) y el álgebra booleana, que habían sido el dominio del estudiante universitario. En los nuevos programas es fundamental el método docente de «descubrimiento», opuesto al aprendizaje de memoria del pasado. Mediante una especie de técnica socrática de preguntas, se lleva a los estudiantes suavemente a descubrir por sí mismos el mundo de los números, a hacer y comprobar conjeturas y a idear reglas de procedimiento, con la premisa de que lo desconcertante es divertido, y, por lo tanto, se aprende más de prisa y mejor.



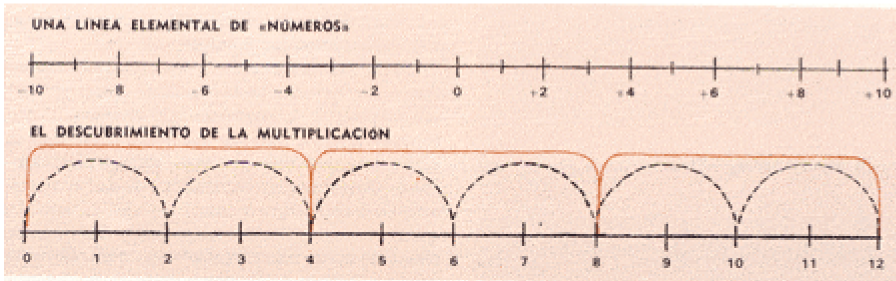
LA CONSTRUCCIÓN DE NÚMEROS GRANDES

«La notación por expansión» revela a los alumnos de primer grado cómo se forman los números grandes a base de cientos, decenas y unidades. Esto aclara por qué se «arrastran» los números en la suma.

¿ES BUENO EN REALIDAD?

Casi ningún maestro que haya enseñado uno de los nuevos programas querría volver al viejo sistema. Un maestro del Hunter College Experimental School de Nueva York decía que los alumnos de segundo grado protestaban ruidosamente si trataba de saltarse

una clase de matemáticas. El doctor Paul C. Rosenbloom, profesor de la Universidad de Minnesota, recuerda que tenía problemas de disciplina cuando enseñaba matemáticas experimentales a los alumnos de quinto grado. Pidió que lo hicieran maestros experimentados en cursos elementales. Se hizo necesaria la presencia de los monitores para ahuyentar a los jóvenes que rodeaban a Rosenbloom después de clase. En el decenio de 1960, las universidades informaron que había habido un resurgimiento en el interés en las matemáticas.

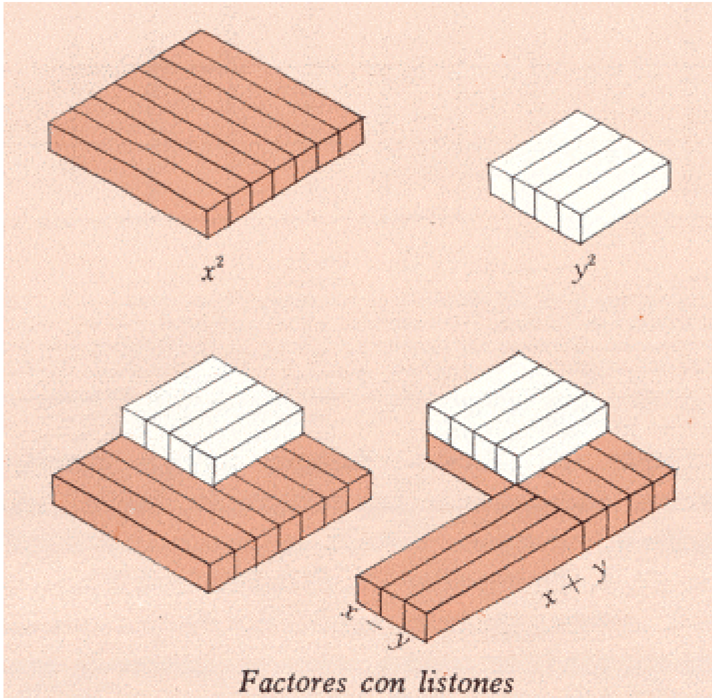


CÓMO SE VISUALIZAN LOS NÚMEROS
A través de «la línea de números» un chiquillo descubre muchas relaciones matemáticas. En la línea superior, señala intervalos iguales a la derecha desde el cero para visualizar los números positivos. Hacia la izquierda le muestra el difícil concepto dé los números negativos. Pronto hace su propia tabla de multiplicar dando «saltos» a lo largo de la línea, anotando cuantos saltos determinados se requieren para recorrer una distancia dada. Por ejemplo, requiere seis saltos de dos unidades cada uno para cubrir la línea de doce unidades.

Los expertos dicen que hemos menospreciado la capacidad de nuestros hijos para tratar el difícil y abstracto material matemático. «En realidad», afirma el doctor David A. Page, del Proyecto de Aritmética de la Universidad de Illinois, «ahora puedo enseñar más en una hora a los alumnos de tercer o cuarto grado acerca de las funciones matemáticas que lo que solía ser capaz de enseñar a los universitarios en dos semanas. Los jóvenes comprenden realmente, mientras que muchos universitarios, no».

Page y otros de los programas más experimentales, tales como el doctor Rosenbloom del Centro de la

Escuela de Matemáticas de Minnesota, el doctor Robert B. Davis del Proyecto de Siracusa-Webster Madison y el doctor Patrick C. Suppes de la Universidad de Stanford, previeron el progreso educativo cuyo éxito para hacer entender las matemáticas a las mentes jóvenes parecía increíble.



LA VISUALIZACIÓN DE LOS FACTORES
Esta disposición muestra lo que sucede al sacar factor común de x^2 - y^2. Si el grupo que representa y^2 se pone encima del grupo x^2, el área de x^2 puede volverse a ordenar para ver que sus lados son (x + y) y (x -y).

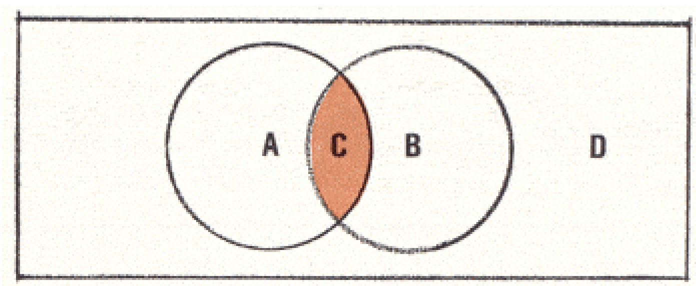
Pero no han faltado las críticas cáusticas; los padres de familia han expresado el temor de que sus hijos no estén capacitados para resolver sencillas realidades aritméticas, como sacar el saldo del talonario de cheques o calcular los impuestos sobre la renta. La mayor parte de estos temores se calmaron cuando se demostró que los estudiantes que aprenden con las nuevas técnicas no pierden ninguna capacidad fundamental. Pero muchos matemáticos e incluso algunos experimentadores, consideraban que ciertos programas eran demasiado abstractos y hacían poco hincapié en la aplicación a la vida cotidiana.

El mayor obstáculo en el camino de las nuevas matemáticas era la falta de maestros capaces de enseñarlas. Los planes de estudios más conservadores, como el programa del Grupo de Estudio de Matemáticas Escolares, muy usado, se idearon específicamente para ser impartidos con un mínimo de adiestramiento del maestro. Aunque muchos maestros tuvieron que atravesar una reeducación masiva, valió la pena. En el verano de 1972, la Escuela de Matemáticas de la Universidad de

Stanford, iniciadora del nuevo sistema, anunció orgullosamente que consideraba terminada su tarea y cerró sus talleres de enseñanza. La educación matemática ha roto sus cadenas.

LAS IDEAS UNIFICADORAS DE LOS CONJUNTOS

En el corazón de muchos planes escolares se encuentra una rama centenaria de las matemáticas, denominada «teoría de los conjuntos». Fue ideada para dar a los matemáticos una visión más clara de la lógica interna de su disciplina. Al aumentar la comprensión de la forma en que operan los conjuntos, los niños pueden aprender los elementos comunes a la aritmética, el álgebra y la geometría.

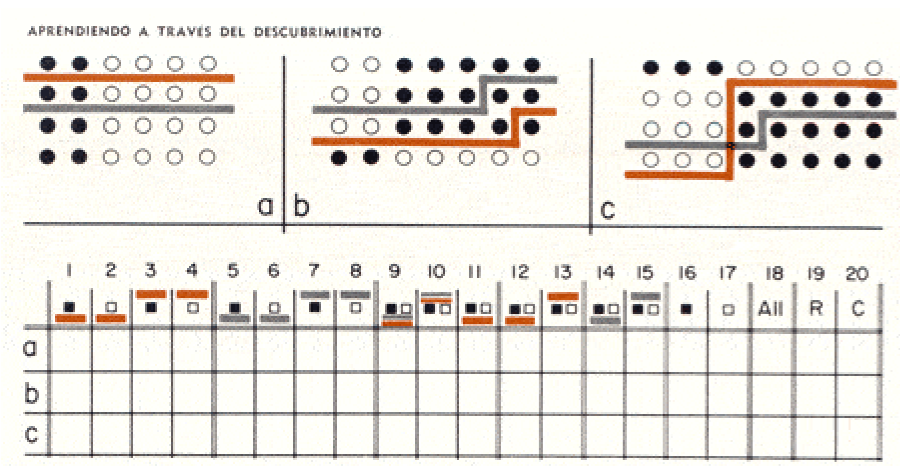


En vez de tratar sólo con números, la teoría de los conjuntos se ocupa de los conjuntos. Por ejemplo, las cebras en el Zoo de San Luis constituyen un conjunto. Las operaciones realizadas en los conjuntos se llaman uniones, intersecciones, y complementaciones. Éstas se ilustran por el diagrama Venn de arriba, utilizado como auxiliar para visualizar los conjuntos. La unión del conjunto A con el B (se lee «A unión con B» y se escribe A U B) se representa por el área total determinada por los dos círculos. Es decir, sería las áreas A + B - C, ya que de otra forma el área C se cortaría dos veces. El área común, denominada C, representa la intersección de los dos conjuntos y se lee «A intersección con B» y se escribe A ∩ B. El complemento de A U B es otro conjunto, D, y es todo el diagrama fuera de A y B. Finalmente, la unión de A, B y D se escribe D U (A U B) y sería denominado E, un conjunto representado por todo el rectángulo.

Para ver cómo un alumno de sexto grado podría utilizar las operaciones de conjuntos, considérese el problema: «En un restaurante había 15 personas. 8

comieron hamburguesas, 6 tomaron bebidas, 5 ambas cosas. ¿Cuántas no tomaron nada?»

Supóngase que E es el conjunto de todas las personas en el restaurante, D el conjunto que no toman ni hamburguesas ni bebidas, A el conjunto que toman hamburguesas y B el conjunto que toman bebidas. Por lo tanto n(E) es el número de personas en el primer conjunto, n(D) el número en el segundo, etc. La ecuación principal para el problema es n(E) = n(D) + n(A U B). Como se ha visto, (A U B) es la misma que las áreas A + B - C, por lo tanto podemos sustituir n(A) + n(B) - n(C) por n(A U B), resultando n(E) = n(D) + n(A) + n(B) - n(C). Sustituyendo los números: 15 = n(D) + 8 + 6 - 5. Al solucionar (D) algebraicamente, vemos que 6 no tomaron nada.



EJERCICIO SIN PALABRAS

Un diagrama críptico tal como el de arriba podría presentarse a un joven de la escuela primaria en una nueva clase de matemáticas sin ninguna otra instrucción que rellenar los espacios. Ampliamente utilizados en el método pedagógico «descubrimiento», dichos ejercicios animan a los niños a buscar modelos y relaciones. Durante el proceso en que hacen esto se practican en la operación de contar y en otras operaciones aritméticas. El «secreto» en el ejercicio que se muestra aquí consiste simplemente en decidir que un cuadrado sobre una línea en la mitad inferior del diagrama significa contar el número de círculos similares que hay encima de la línea de color en la mitad superior.