Introducción

La Geometría Analítica, es fundamental para el estudio y desarrollo de nuevos materiales que nos facilitan la vida diaria, razón por la cual esta asignatura siempre influye en la vida de todo ser humano.

El objetivo del presente trabajo es ayudar al estudiante del tercer curso curso de Geometría Analítica a comprender de qué manera se relaciona esta asignatura con su entorno, con las actividades que realiza y consigo mismo.

La Ecuación de la Recta, La Ecuación de la Circunferencia, La Ecuación del Elipse, La Ecuación de la Parábola y La Ecuación de la Hipérbola en sus diferentes representaciones (en el origen, fuera del origen y su forma general), **son las cinco grandes temáticas en torno a las cuales se centrarán las actividades de aprendizaje en este curso.**

Partiendo de que La Geometría Analítica**, estudia las figuras geométricas utilizando un sistema de coordenadas y resuelve los problemas geométricos por métodos algebraicos, donde las coordenadas se representan por grupos numéricos y las figuras por ecuaciones, abordaremos las temáticas anteriores partiendo de esta definición.**

Esperamos que el presente texto contenga el material básico para el desarrollo de este curso, bienvenido y.... ¡A estudiar!

Índice

Tema **Página.**

Unidad I.- Introducción a la geometría analítica.

En los cursos anteriores de matemáticas I y matemáticas II estudiamos el álgebra y la geometría euclidiana; ahora estudiaremos una rama de las matemáticas que aborda problemas en los que intervienen elementos de ambas disciplinas. En esta rama, conocida como *geometría analítica,* se introduce el empleo de sistemas de coordenadas, mediante los cuales se pueden aplicar procedimientos algebraicos para estudiar situaciones geométricas y viceversa.

La geometría analítica estudia los elementos de la geometría euclidiana refiriéndolos a sistemas de coordenadas, como el cartesiano. En este texto nos limitaremos a estudiar solamente algunas figuras respecto de dicho sistema coordenado.

1.- Antecedentes históricos de la geometría analítica.

La historia de las matemáticas considera a René Descartes el fundador del sistema matemático moderno y, por lo tanto, el padre de la geometría analítica.

La geometría analítica surge de la necesidad de resolver problemas para los que no bastaba la aplicación aislada de las herramientas del álgebra y de la geometría euclidiana, pero cuya solución se encontraba en el usa combinado de ambas. En este sentido, podemos entender a la geometría analítica como la parte de las matemáticas que relaciona y fusiona el álgebra con la geometría euclidiana para crear una nueva rama que estudia las figuras geométricas, referidas a un sistema de coordenadas, por métodos algebraicos.

Descartes, en su geometría analítica de 1637, considera el segmento como una unidad o como un número y transforma así la geometría en aritmética; como la suma, la resta, la multiplicación y la división de segmentos da lugar a otro segmento, Descartes relaciona los números con las mismas operaciones, y enfrenta problemas puramente algebraicos, ya que sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás, pues los considera problemas del plano. Descartes quiere resolver gráficamente ecuaciones de grado mayor por curvas algebraicas engendradas paso a paso par mecanismos lineales del movimiento, al usar elementos de referencia en posiciones especiales; resuelve el problema de las normales a las curvas algebraicas evitando operaciones infinitesimales; entre sus ejemplos aclaratorios figuran la concoide y el llamado óvalo de Descartes; habla de la tangente, creyendo haber resuelto todas las cuestiones principales de la matemática y que sus métodos de tangentes y normales son los más sencillos.

Descartes y Fermat son los inventores de la geometría sobre ejes de coordenadas, donde el álgebra y la geometría sé reúnen en el trazado de gráficas de ecuaciones y desigualdades.

El cálculo y la geometría analítica marcan el comienzo de las matemáticas modernas en el siglo XVII.

Geometría analítica

Estudia las figuras geométricas utilizando un sistema de coordenadas y resuelve los problemas geométricos por métodos algebraicos; las coordenadas se representan por grupos numéricos y las figuras por ecuaciones.

Lo que debes recordar

- La geometría analítica es la parte de las matemáticas que establece una conexión entre el álgebra y la geometría euclidiana, y en la cual se estudian figuras referidas a un sistema de coordenadas.
- René Descartes es considerado el creador o inventor de la geometría analítica.

2.- Sistemas de coordenadas cartesianas.

Este sistema también se denomina *cartesiano* en honor a René Descartes, par haber sido quien lo empleara en la unión del álgebra y la geometría plana para dar lugar a la geometría analítica.

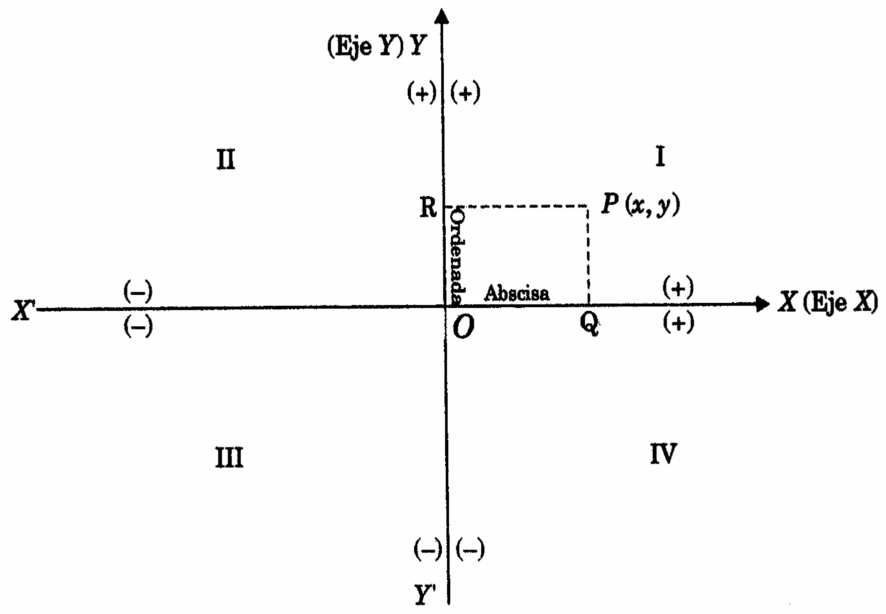
Recordemos cómo se construye un sistema de coordenadas rectangulares: trazamos dos rectas perpendiculares que se intersecan en el punto O, al cual se le llama *origen.*

La recta horizontal es el eje de las *abscisas o* eje de las *x;* la recta vertical es el eje de las *ordenadas* o eje de las y. Usando un segmento "unidad" conveniente, se divide cada eje de manera que los números *enteros positivos* queden a la derecha del origen sobre el eje *x,* y arriba del origen sobre el eje *y.* Los *enteros negativos* quedan a la izquierda del origen sobre el eje *x,* y abajo del origen sobre el eje y.

Tomando los ejes como elementos de referencia, se puede localizar cualquier punto situado en el plano que forman, procediendo en la forma siguiente: se indica la distancia del punto a la derecha o a la izquierda del eje horizontal, y la distancia hacia arriba o hacia abajo del eje vertical.

La abscisa es positiva o negativa según el punto P situado a la derecha o a la izquierda del eje horizontal; la ordenada es positiva o negativa según el punto este situado arriba o abajo del eje vertical.

A la abscisa y a la ordenada de un punto se les llaman *coordenadas del punto* y se escriben como un par de números dentro de un paréntesis separado por una coma; el primero de estos números representa siempre a la abscisa y el segundo a la ordenada.



En general, un punto cualquiera por ejemplo el punto A, cuya abscisa es *x* y la ordenada y se designa mediante la notación *A(x,* y).

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes, llamada cada una *cuadrante;* los cuadrantes se numeran con números romanos **I, II, III, IV** como se indica en la figura anterior.

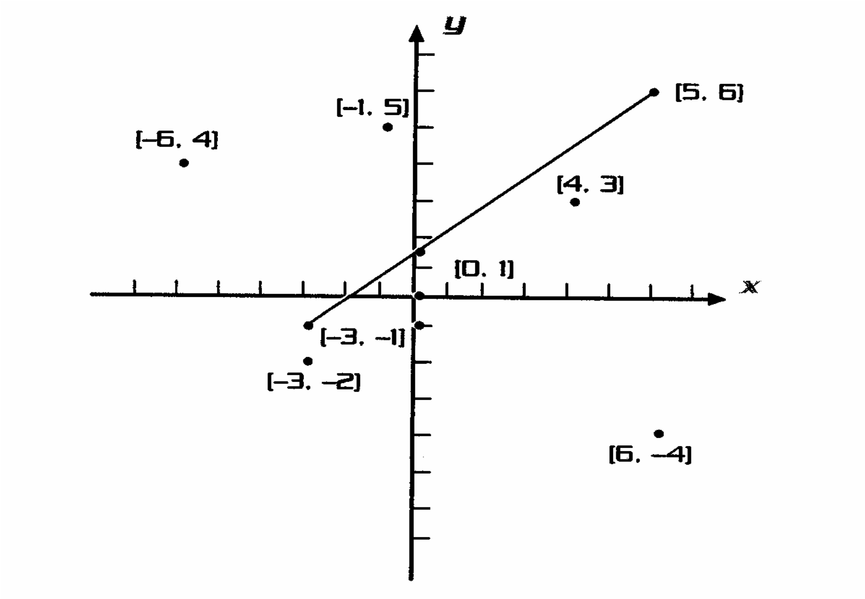
3.- Localización de puntos en el plano.

En el sistema de coordenadas rectangulares hay una relación que establece que *a cada par de números reales (x, y) le corresponde un punto definido del plana, y a cada punto del plano le corresponde un par único de coordenadas (x, y).*

En el proceso graficador hay que tomar en cuenta loa signos de las coordenadas del punto para ubicarlo en los cuadrantes; para ello se emplea el papel cuadriculado o de coordenadas rectangulares, ya que facilita la localización y el marcado de puntos en el plano.

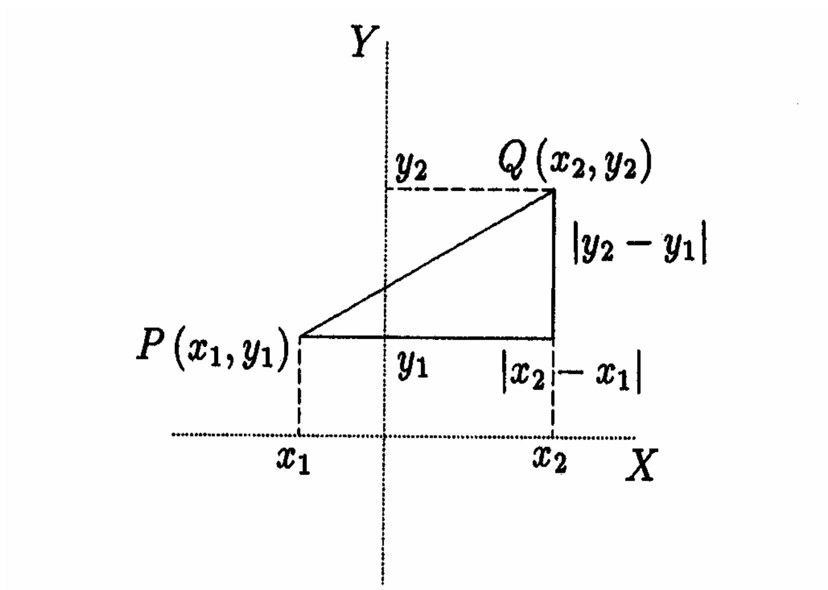
Ejemplo:

Traza un sistema coordenado rectangular y señala los puntos siguientes: (4, 3), (-1, 5), (-3, -2), (0, 1), (6, -4), (-6, 4). Traza, además, el segmento de recta que une los puntos (-3, -1) con (5, 6).



4.- Distancia entre dos puntos.

Para encontrar la distancia entre dos puntos *P(x1,y1)* y *Q(x2, y2)* que no estén en la misma recta vertical u horizontal, construimos un triángulo rectángulo que tenga al segmento *PQ* por hipotenusa, como se muestra en la figura, las longitudes de los lados de los catetos son $|x2 - x1|$ y $|y2 - y1|$. La distancia entre *P* y *Q* es la longitud de la hipotenusa del triángulo. Recordemos que el teorema de Pitágoras dice que "En un triangulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos",



Entonces:

$$d(P,Q)^2 = (x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2,$$

y por lo tanto:

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}\ .}$$

Observa que si los puntos están en la misma vertical o en la misma horizontal, uno de los dos sumandos de la formula vale cero, pero el resultado sigue siendo cierto.

La fórmula anterior, además de permitirnos obtener la distancia entre dos puntos, nos capacita para solucionar, entre otros, los siguientes problemas:

1. Determinar el perímetro de un triángulo o de algunas otras figuras geométricas.
2. Comprobar que un triángulo es rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a las distancias obtenidas al verificar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
3. Comprobar que un triángulo es isósceles, si dos de las distancias obtenidas son iguales.
4. Comprobar que un triángulo es equilátero, si sus tres lados son iguales.

Para resolver un problema y de ser posible, se *recomienda en todos los casas graficar los datos disponibles antes de realizar cualquier operación.*

Ejemplos:

1. Encontrar la distancia entre *P(3,5)* y *Q(* -1,6)**.**

Solución:

Sustituimos las coordenadas de *P* y *Q* en la fórmula y obtenemos:

$$d(P,Q) = \sqrt{((-1) - 3)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}\,,$$

observa que no importa el orden en el que se tomen los puntos,

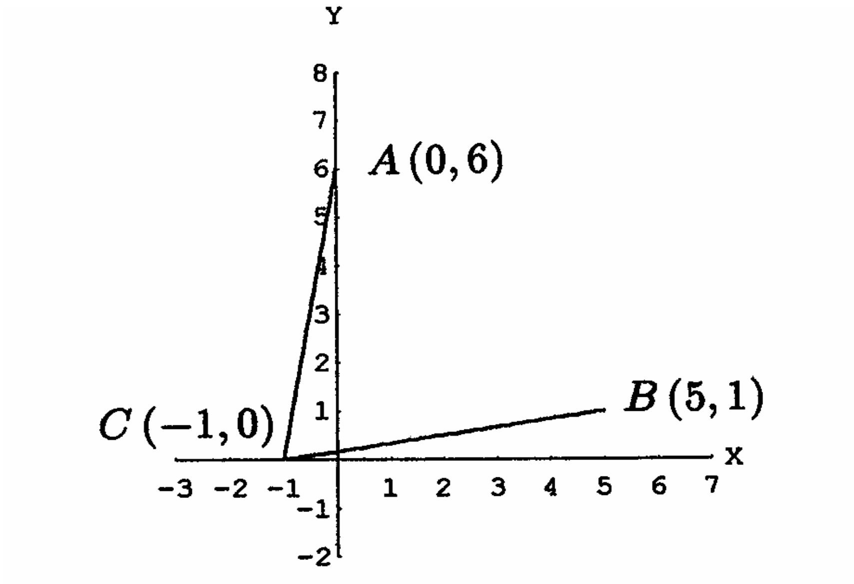
$$d(P,Q) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

2. Encontrar la distancia entre *P(* -3, -4) y *Q(* -3,2).

Solución:

$$d(P,Q)=\sqrt{0+(2-(-4))^2}=\sqrt{36}=6$$

3. ¿Que coordenadas tiene el punto del eje X que equidista de *A (0,6)* y *B (5,1)*?



Solución:

Llamemos *C* al punto buscado. Como *C* esta sobre el eje X, su segunda coordenada vale cero. Entonces *C(x,* 0). Nos falta determinar el valor de *x*. Como la distancia de *C* a A debe ser igual a la distancia de *C* a *B,* igualamos:

$$d(C, A) = d(C, B).$$

Sustituimos las coordenadas de los puntos;

$$\sqrt{(x-0)^2+(0-6)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(0-1)^2},$$

efectuando las operaciones dentro de log radicales, obtenemos;

$$\sqrt{x^2+36}=\sqrt{x^2-10x+25+1},$$

elevamos al cuadrado los dos lados de la ecuación y encontramos el valor de *x;*

$$x^2+36=x^2-10x+25+1$$

$$10x=-36+26=10$$

$$x=-1$$

entonces el punto del eje *X* que equidista de *A* y *B* es *C(* -1,0).

4. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son A(1,1), B(5,1), C(1,3) es un triángulo rectángulo.

$$d=\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}$$

distancia AB;

$$d=\sqrt{(1-5)^2+(1-1)^2}$$

$$d=\sqrt{(4)^2+(0)^2}=\sqrt{4^2}$$

$$d=4$$

distancia AC;

$$d=\sqrt{(1-1)^2+(1-3)^2}$$

$$d=\sqrt{(0)^2+(2)^2}=\sqrt{4}$$

$$d=2$$

distancia BC;

$$d=\sqrt{(5-1)^2+(1-3)^2}$$

$$d=\sqrt{(4)^2+(2)^2}=\sqrt{20}$$

$$d=\sqrt{20}$$

Comprobación de que el triángulo ABC es rectángulo:

Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\left(\overline{BC}\right)^2=\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{AB}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{20}\right)^2=2^2+4^2$$

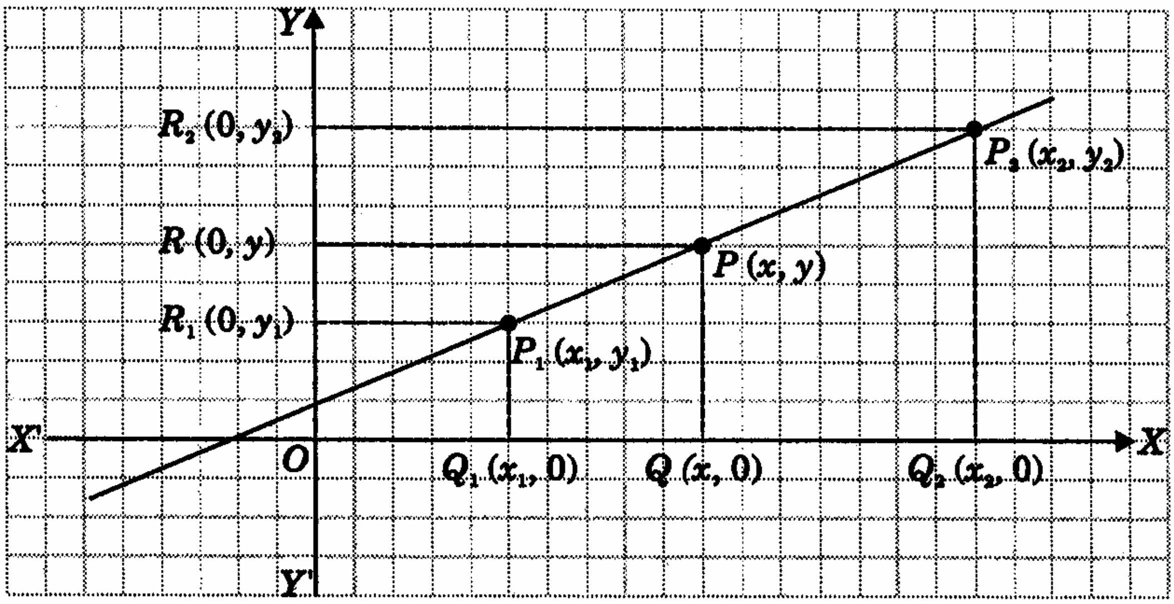
$$20=4+16$$

$20=20$ por lo cual, el triangulo ABC es rectángulo.

5.- División de un segmento en una razón dada.

Para determinar las coordenadas de un punta P que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$, se aplica el siguiente procedimiento.

Por los puntos P_1, P y P_2 se trazan perpendiculares a loa ejes coordenados; como las rectas paralelas P_1Q_1, PQ y P_2Q_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y Q_1Q_2 se establece que $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2}$.



Las coordenadas de los puntos trazados sobre el eje x son: $Q_1(x_1, 0)$, $Q(x, 0)$ y $Q_2(x_2, 0)$ y sobre el eje y son: $R_1(0, y_1)$, $R(0, y)$ y $R_2(0, y_2)$.

La distancia dirigida de cada segmento $Q_1Q = x - x_1$ y $QQ_2 = x_2 - x$, se sustituye en la ecuación de la razón, y resulta:

$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$. Al despejar para x tenemos:

$$x - x_1 = r(x_2 - x)$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x + rx = x_1 + rx_2$$

$$x(1+r)=x_1+rx_2$$

$$\therefore x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \quad \text{Es } r\neq -1$$

Las rectas paralelas P_1R_1, PR y P_2R_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y R_1R_2; por lo anterior $r=\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{R_1R}{RR_2}$.

La distancia dirigida de cada segmento $R_1R=y-y_1$ y $RR_2=y_2-y$, se sustituye en la ecuación de la razón, y resulta:

$$r=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{R_1R}{RR_2}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r\,.$$

Al despejar para *y,* tenemos:

$$y-y_1=r(y_2-y)$$

$$y-y_1=ry_2-ry$$

$$y+ry=y_1+ry_2$$

$$y(1+r)=y_1+ry_2$$

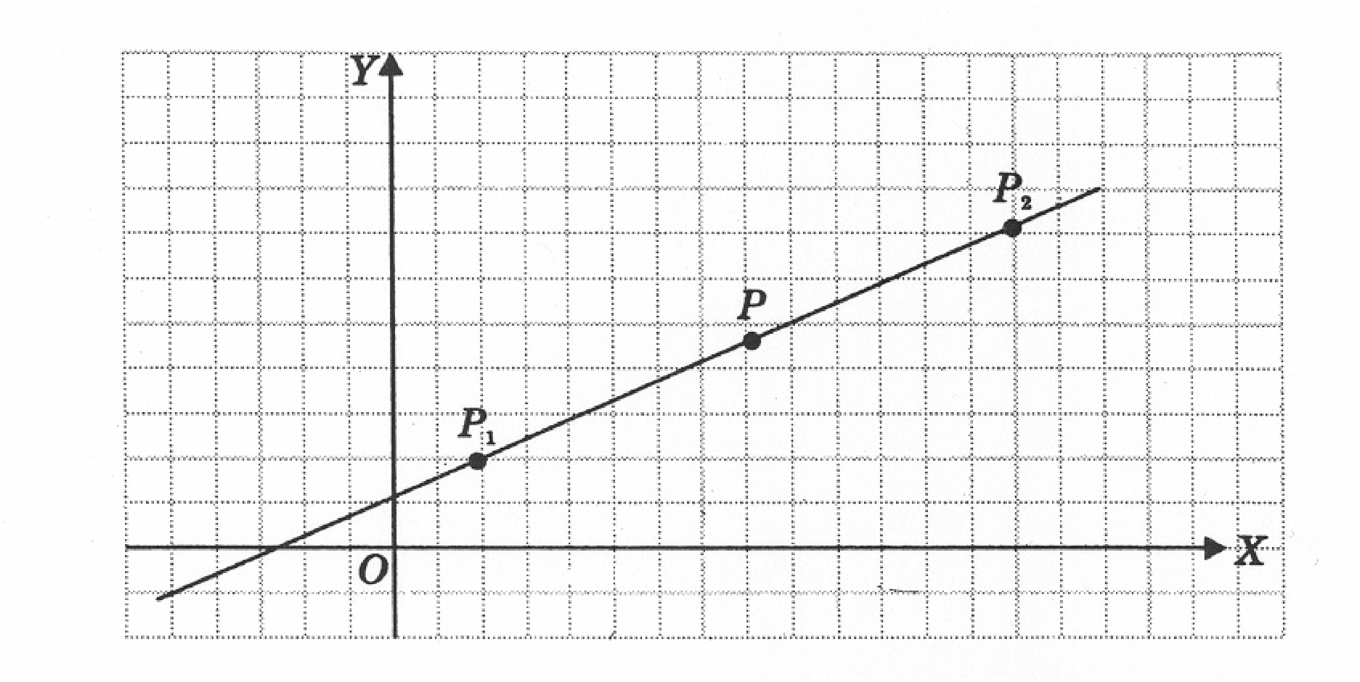
$$\therefore y=\frac{y_1+ry_2}{1+r} \quad \text{Es } r\neq -1$$

Teorema

Las coordenadas de un punto *P* que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en la razón dada $r=\dfrac{P_1P}{PP_2}$ son:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r} \qquad \text{Siendo } r\neq -1\,.$$

Si $P(x,y)$ es el punto medio del segmento P_1P_2, la razón es igual a la unidad, es decir:



Si $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y como $P_1P = PP_2$, resulta: $r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1P}{P_1P} = \frac{PP_2}{PP_2} = 1$

Al sustituir $r = 1$ en las siguientes ecuaciones, tenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

$$x = \frac{x_1 + (1)x_2}{1+1} \qquad y = \frac{y_1 + (1)y_2}{1+1}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Corolario

Las coordenadas de un punto *P* que es el punto medio de un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplos:

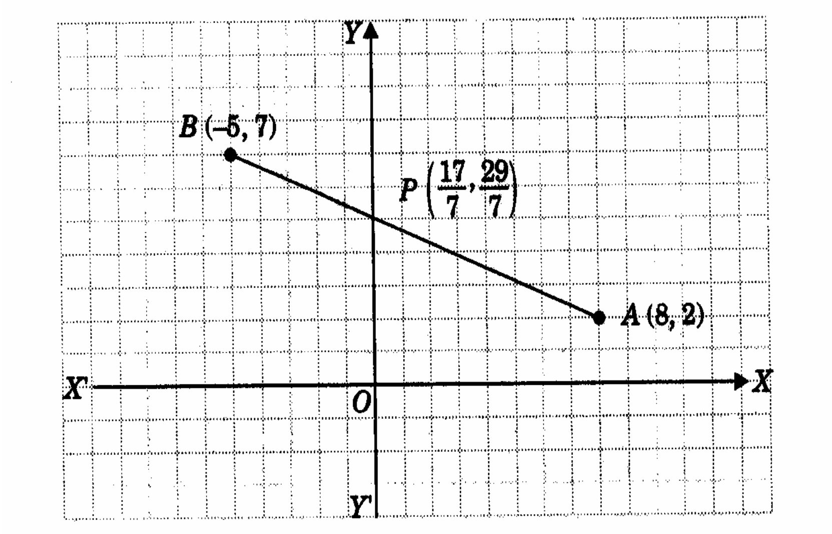
1. Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento determinado por A(8,2) y B(-5,7) en la razón $r = \frac{3}{4}$.

Al sustituir en, $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$, $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$, tenemos:

$$x = \frac{8 + \left(\frac{3}{4}\right)(-5)}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{17}{7} \qquad y = \frac{2 + \left(\frac{3}{4}\right)(7)}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{29}{7}$$

$\therefore$ las coordenadas del punto buscado son $P\left(\frac{17}{7}, \frac{29}{7}\right)$

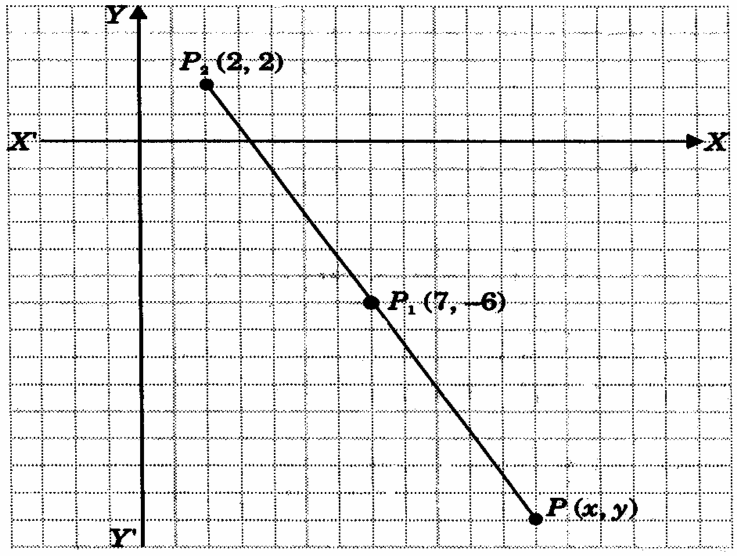
Al graficar:



2. El extremo del diámetro de una circunferencia de centro $P_1(7,-6)$ es $P_2(2,2)$; encontrar las coordenadas $P(x,y)$ del otro extremo.

Gráficamente suponemos que:
Como P_1P y PP_2 son de sentido opuesto la relación r debe ser negativa;

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = -\frac{1}{2}$$



Al sustituir los datos en las fórmulas, resulta:

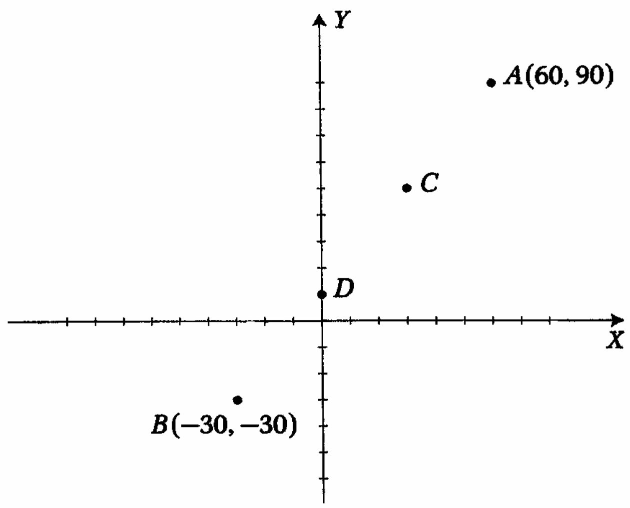
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}\ , \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r} \quad \text{, tenemos:}$$

$$x=\frac{7+\left(-\frac{1}{2}\right)(2)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=12 \qquad\qquad y=\frac{-6+\left(-\frac{1}{2}\right)(2)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-14$$

$\therefore$ las coordenadas del punto buscado son $P(12,-14)$.

3. Para el tendido de un cableado telefónico sobre una calle se requieren cuatro postes, los cuales deben estar separados por distancias iguales. Si el primero de los postes se encuentra en uno de los extremos del cableado que esta en el punto *A(60,* 90), según un sistema coordenado como el que se muestra en la figura, y el último en el extremo que se localiza en *B*(-30*,* -30), se deben determinar las coordenadas de los puntos C y *D* para colocar ahí los otros dos postes entre *A* y *B.* Las longitudes están dadas en metros.

   Puesto que los puntos C y *D* dividen al segmento comprendido entre los puntas *A* y *B* en tres segmentos, AC, *CD* y *DB,* de igual longitud, siendo el punto C el mas cercano al punto *A,* como se muestra en la figura, se tiene que:



$$\frac{d_{AC}}{d_{CB}} = \frac{1}{2}.$$

Al sustituir los valores $x_1 = 60, x_2 = -30$ y $r = \frac{1}{2}$ en la ecuación $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$ se obtiene:

$$x = \frac{60 + \left(\frac{1}{2}\right)(-30)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)} \quad ; \quad x = \frac{60-15}{\frac{3}{2}} = \frac{2(45)}{3} \quad ; \quad \text{x = 30.}$$

Y al sustituir los valores $y_1 = 90, y_2 = -30$ y $r = \frac{1}{2}$ en la ecuación $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$ se obtiene:

$$y = \frac{90 + \left(\frac{1}{2}\right)(-30)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)} \quad ; \quad x = \frac{90-15}{\frac{3}{2}} = \frac{2(75)}{3} \quad ; \quad \text{x = 50.}$$

Lo que significa que uno de los postes debe colocarse en el punto C(30, 50).

De la misma manera, puesto que los puntos C y *D* dividen al segmento comprendido entre log puntos *A* y *B* en tres segmentos de igual longitud, siendo el punto *D* el mas lejano al punto *A,* se cumple que:

$$\frac{d_{AC}}{d_{CB}} = \frac{2}{1}.$$

Al sustituir los valores $x_1 = 60, x_2 = -30$ y $r = 2$ en la ecuación $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$ se obtiene:

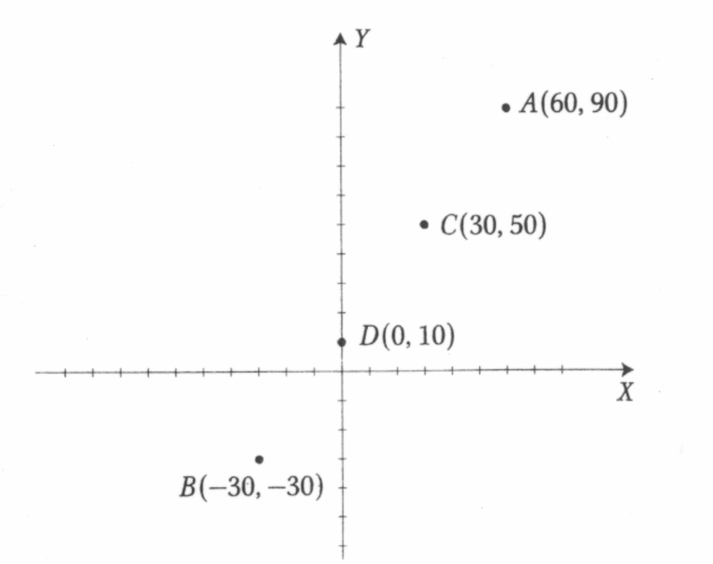
$$x = \frac{60 + (2)(-30)}{1 + (2)} \quad ; \quad x = \frac{60-60}{3} = \frac{0}{3} \quad ; \quad \text{x = 0.}$$

Y al sustituir los valores $y_1 = 90, y_2 = -30$ y $r = 2$ en la ecuación $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$ se obtiene:

$$y = \frac{90+(2)(-30)}{1+(2)} \quad ; \quad x = \frac{90-60}{3} = \frac{30}{3} \quad ; \qquad \text{x = 10.}$$

Lo que significa que el otro poste debe colocarse en el punto C(0, 10).

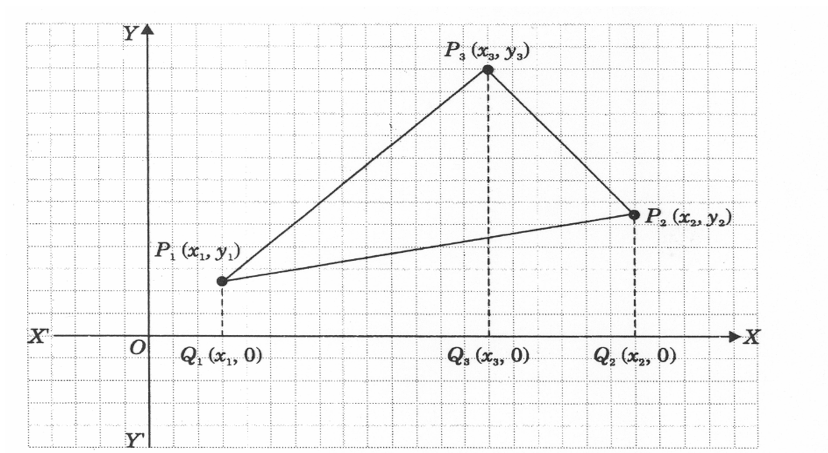
Las soluciones encontradas se muestran en la siguiente figura:



6.- Área de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices.

Área de una región triangular.

Sean $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo, su área se puede obtener sumando las áreas de los trapecios $Q_1Q_3P_3P_1$ y $Q_3Q_2P_2P_3$, y restando el área del trapecio $Q_1Q_2P_2P_1$. Dichos trapecios se forman trazando perpendiculares de los vértices del triangulo al eje *x*.



El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases (lados paralelos); por lo tanto el área del triangulo $P_1P_2P_3$ es:

A = área del trapecio $Q_1Q_3P_3P_1$ + área del trapecio $Q_3Q_2P_2P_3$ - área del trapecio $Q_1Q_2P_2P_1$.

$$A = (x_3 - x_1)\left(\frac{1}{2}\right)(y_1 + y_3) + (x_2 - x_3)\left(\frac{1}{2}\right)(y_3 + y_2) - (x_2 - x_1)\left(\frac{1}{2}\right)(y_1 + y_2)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_2y_1\right)$$

El área resultante se expresa en una forma mas fácil por:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X1 & Y1 \\ X2 & Y2 \\ X3 & Y3 \\ X1 & Y1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix} \qquad = \frac{1}{2}\left(x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_2y_1\right)$$

Esta fórmula también se emplea para determinar el área de cualquier polígono. Se hace notar que el primer renglón se ha repetido al final con el fin de facilitar la operación.

Si los vértices se ordenan en la fórmula en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el área resultante es de signo positivo; en caso contrario será negativa.

Ejemplos:

1. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son: D(3, 4) , E(2, -1) , F(-3, 5).

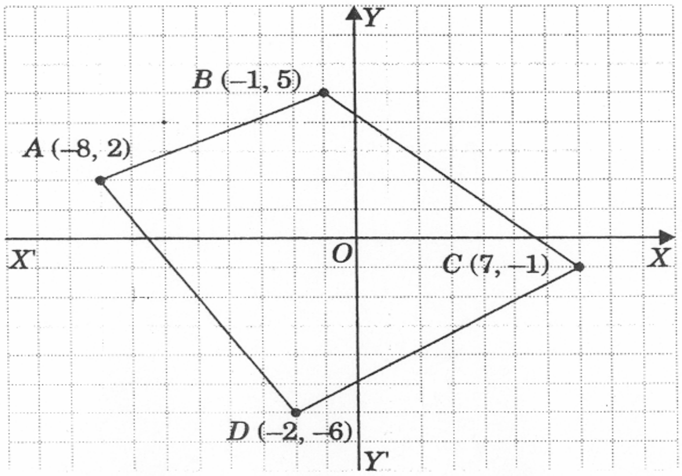
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left((-3)(4) - (3)(5) + (2)(5) - (-3)(-1) + (3)(-1) - (2)(4)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-12 - 15 + 10 - 3 - 3 - 8\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-31\right) = -\frac{31}{2} = 15.5u^2 \text{ (unidades cuadradas).}$$

2. Hallar el área del polígono si las coordenadas de sus vértices son: A(-8,2) , B(-1,5) , C(7,-1) y D(-2,-6).



Con base en la gráfica, los vértices se ordenan en la fórmula en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, es decir:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -2 & -6 \\ 7 & -1 \\ -1 & 5 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left((-8)(-6)+(-2)(-1)+(7)(5)+(-1)(2)-(-8)(5)-(-1)(-1)-(7)(-6)-(-2)(2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(48+2+35-2+40-1+42+4\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(168\right)=\frac{168}{2}=84u^2 \text{ (unidades cuadradas)}$$

7.- Lugares geométricos y gráfica de una ecuación.

En el estudio de la geometría analítica se nos presentan dos problemas básicos que son inversos entre sí:

1. Dada una ecuación, determinar el lugar geométrico que representa, es decir, trazar la gráfica correspondiente.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

Un lugar geométrico es el punto o conjunto de puntos que satisfacen una o varias condiciones.

El conjunto de los puntos, y solamente de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación, se llama gráfica de la ecuación, o bien, su lugar geométrico.

Otra definición importante establece: si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, dicho punto pertenece a la gráfica de la ecuación; o si un punto esta sobre la grafica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Para trazar la gráfica de una ecuación dada, es necesario tener una idea de su forma y conocer alguna de sus propiedades características, como la intersección con los ejes coordenados; la simetría; el campo de variación de las variables o extensión de una curva; las asíntotas; el cálculo del dominio y rango de la función y el trazado de la curva.

En consecuencia frecuentemente se define a una curva como el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve cumpliendo una determinada condición o condiciones que se expresan en forma narrativa o en forma de una ecuación.

Ejemplo:

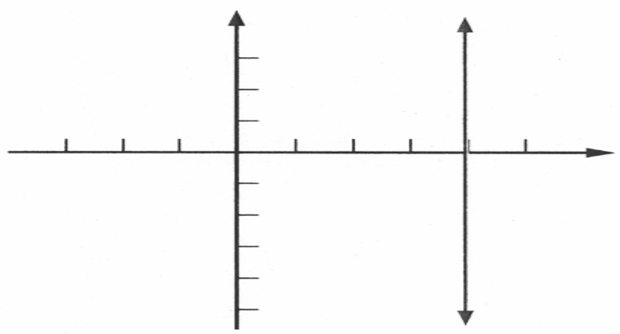
Una circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado centro.

Ejemplo:

La bisectriz de un ángulo se define como el lugar geométrico de los puntos de un ángulo que equidistan de sus lados.

Ejemplo:

Traza el lugar geométrico de los puntos de abscisa constante igual a 4.



Si los valores de una variable *y* dependen de los de otra variable *x* y realizadas las operaciones que se indiquen, si a cada valor asignado a *x* le corresponde uno o mas a *y*, decimos que hay una relación entre *x* y *y*. Si a cada valor de *x* le corresponde solo uno a *y*, entonces decimos que *y* es una función de *x*.

A la variable *x* se le llama *variable independiente,* y a la variable *y*, se le llama *variable dependiente* o *función.*

Ejemplo:

Sea la ecuación y = 3x + 6;

expresándola como función queda como y = *f(x)*

y = *f(x)* = 3x + 6

EI caso mas general es similar al del ejemplo anterior, en que escogimos la letra *x* como variable independiente, pero nada impide escoger la letra *y* como variable independiente, a condición de que en el desarrollo de un problema continúe como tal hasta su solución. En el ejemplo:

y = 3x+6

Entonces;

$$x = \frac{y-6}{3}$$

Expresándolo como función queda:

$$x = f(y) = \frac{y-6}{3}$$

También podemos escoger otras letras cualesquiera, como sucede frecuentemente en física y química.

Una ecuación en que intervienen solo dos variables reales se puede representar gráficamente en el plano cartesiano; procederemos de la forma siguiente:

Ejemplo:

Expresa la gráfica de la ecuación $y = x^2$ en el intervalo $-3 \leq x \leq 3$.

Resolución:

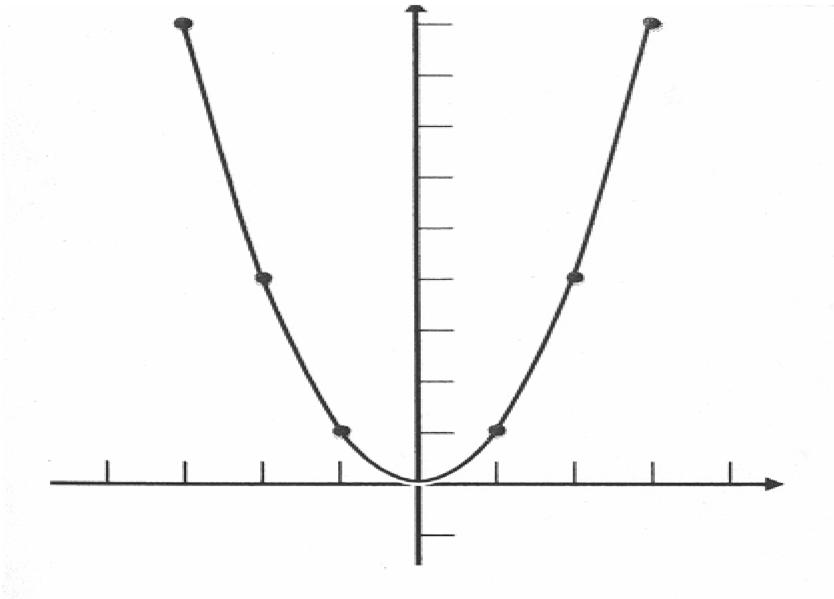
$$y = x^2$$

$$f(x) = x^2$$

Asignamos valores a la variable independiente *x*, realizamos las operaciones necesarias para obtener el valor de *y*; luego tabulamos:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Los puntos cuyas coordenadas son las parejas ordenadas de la tabla anterior se localizan en el plano cartesiano, y a continuación se obtiene la gráfica de la ecuación uniendo esos puntos, mediante un trazo continuo. A la curva obtenida se le llama *grafica o lugar geométrico de la ecuación*, en este caso de $y = x^2$. Observa que el intervalo de la variable independiente osciló entre -3 y 3, que consideramos suficiente para obtener la grafica.



Ecuaciones en forma explicita y en forma implícita.

Si están indicadas las operaciones que hay que realizar con la variable independiente para obtener la función, se dice que esta en forma explicita. En caso contrario, que es implícita.

Ejemplo:

La ecuación y = 3x – 2 está expresada en forma explicita. La misma ecuación expresada en forma implícita es 3x – y – 2 = 0.

Ejemplo:

Expresa la gráfica de la ecuación 3x – y – 2 = 0.

Resolución:

3x – y – 2 = 0

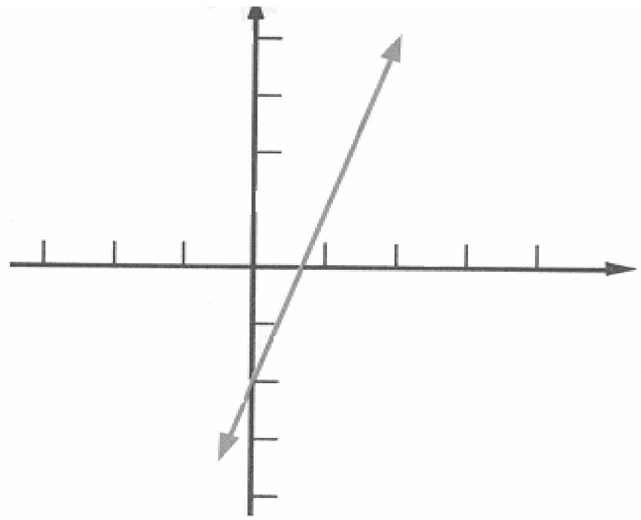
Ahora la expresamos en forma explicita:

$y = 3x - 2$

$f(x) = 3x - 2$

Como se trata de una recta, es suficiente tabular dos puntos, uno de ellos cuando x = 0; pero para comprobar, calculamos otro punto.

x	−1	0	1
y	−5	−2	1



8.- Ejercicios de repaso:

1. Halla la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son:

1. A (-2, 5) y *B* (4, -3)
2. C (2, 5/3) Y *M* (-3, -3/2)
3. *L* (0, 4) y *B* (9, -2)
4. *U* (9/2, 3/4) Y *V* (7/5, -3/4)

2. Uno de loa extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 17 es el punto A (1, -11); si la ordenada del otro extremo es 4, halla su abscisa (dos soluciones).
3. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 4 es el punto P (2, -2); si la abscisa del otro extremo es (2), halla su ordenada (dos soluciones).
4. Uno de loa extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a $\sqrt{18}$ es el punto *A* (-6, 2); si la ordenada del otro extremo es (-1), halla su abscisa (dos soluciones).
5. Halla las coordenadas de un punto P *(x, y)* que divide al segmento determinado por P1 (-2, 5) y P2 (10, -2) en la relación $r = 2/3$.
6. Se sabe que el punto P (8, -4) divide al segmento que se determina por los puntos P1 (14, -12) y P2 (X2' Y2) en la relación $r = 2$; halla las coordenadas del P2.
7. Halla el área y perímetro para los siguientes polígonos cuyas coordenadas de los vértices son:
   a) A (-3, 3), *B* (4, 2), *C* (7,7) y *D* (-1, 6)
   b) A (-3, -2), *B* (-7, 1), *C* ('-2,8), *D* (1, 5) y E (6, 3)
   c) A (-5, 1), *B* (-4, 6), *C* (3, 5), *D* (7, 2) y E (2, -4)
8. ¿Para qué valores de ordenada (y) tendrá el siguiente triángulo de vértices A (-3, 4),B (6,1) y C (4, y) un área de 25 unidades cuadradas?
9. Un agricultor quiere dividir un campo rectangular cuyas coordenadas de sus vértices son: *A* (-1, 2), *B* (7, 2), C (-1, -4) y *D* (7, -4) en ocho parcelas triangulares iguales, pero no sabe como hacerlo. Su sobrino, que resulta ser un estudiante de bachillerato muy inteligente, le dice que una manera de lograrlo es uniendo los puntos medios de los lados opuestos y trazando a continuación las diagonales del rectángulo.
   a) Traza el rectángulo y comprueba que es correcto el consejo del sobrino.
   b) Calcula el perímetro de cada una de las parcelas, sabiendo que el centro del campo es el punto P (3, -1).
   c) ¿Cuál es el área de cada una de las parcelas?
   d) ¿Cuál es el área total del campo?

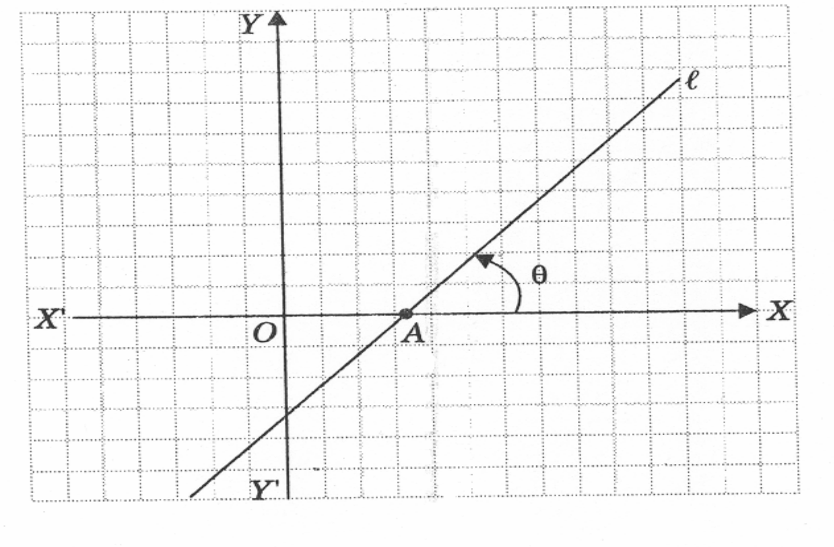
Unidad II.-   La línea recta.

Todos tenemos la idea intuitiva de lo que es una recta. Las propiedades fundamentales de la recta, de acuerdo a los Axiomas de Euclides, son: Por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta. Dos rectas distintas se cortan en un sólo punto o son paralelas.

1.- Ángulo de inclinación

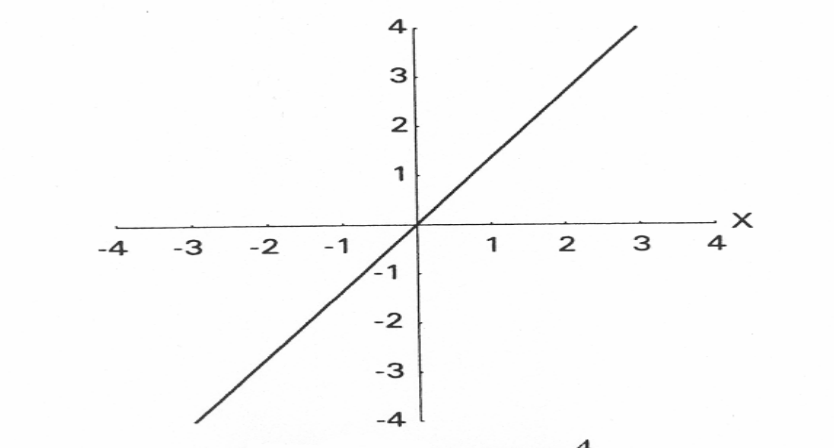
Sea *1* una recta no paralela al eje *x* y que lo intersecta en el punto *A*.

La dirección de la recta en relación con los ejes coordenados puede indicarse si se conoce el ángulo $\theta < 180°$ que se obtiene al girar la semirrecta *AX* en sentido contrario alas manecillas del reloj hasta coincidir con la recta *1*. Por lo tanto, este ángulo (θ) se denomina inclinación de la recta *1*.



La pendiente de una recta

La *pendiente* de una recta no vertical es un numero que mide que tan inclinada esta la recta y hacia donde esta inclinada. La recta de la figura por cada 3 unidades que avanza hacia la derecha, sube 4 unidades,



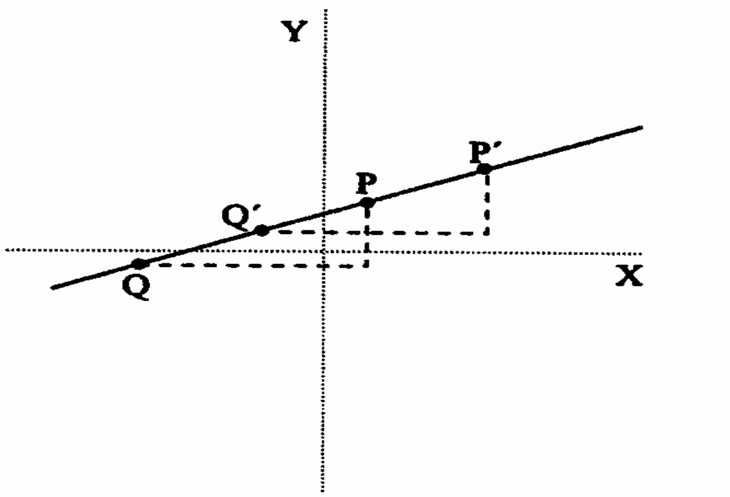
$m = \frac{4}{3}$

decimos que la pendiente de la recta es $\frac{4}{3}$.

Usualmente se denota con la letra *m* a la pendiente. Para encontrar la pendiente de una recta no vertical, tomamos dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ de la recta y calculamos el cociente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si tomamos otro par de puntos P' y Q' en la misma recta, como se muestra en la figura, se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes, y por lo tanto, la razón de sus catetos es la misma. Es decir, la pendiente de una recta puede determinarse usando dos puntos cualesquiera.

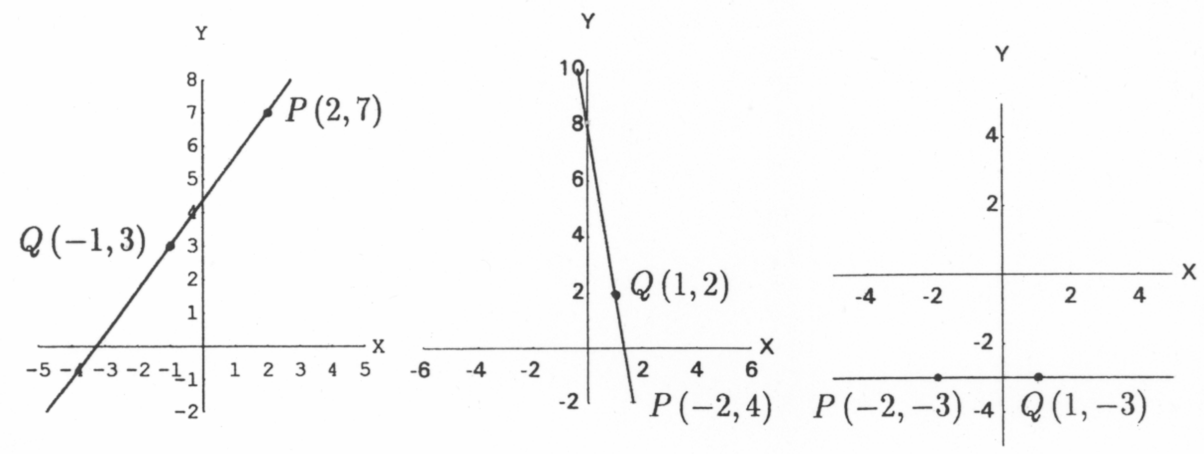


Pendiente de una recta

Si la recta es vertical, todos los puntos de la recta tienen la misma primera coordenada, entonces el denominador de la expresión anterior vale cero y por lo tanto, no puede evaluarse *m*, así que las rectas verticales no tienen pendiente.

0bservaciones:

- La pendiente es positiva cuando la recta esta inclinada hacia la derecha.
- La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.
- La pendiente es negativa cuando la recta esta inclinada hacia la izquierda.
- Conforme el valor absoluto de la pendiente es mayor, la recta esta mas inclinada.
- Una recta vertical no tiene pendiente.



$$m = \frac{7-3}{2-(-1)} = \frac{4}{3} \quad m = \frac{-4-2}{2-1} = -6 \quad m = \frac{-3-(-3)}{-2-1} = 0$$

Ejemplos de pendientes de rectas

2.- Determinación de la ecuación de la recta.

Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto de ella.

Como ya hemos visto antes las ecuaciones en dos variables representan lugares geométricos en el plano. Empezaremos nuestro estudio de lugares geométricos con las rectas, que son los más sencillos.

Consideremos el problema de encontrar la ecuación de la recta no vertical que pasa por un punto $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m.

Si *Q(x, y)* es cualquier otro punto de la recta, se debe satisfacer

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

puesto que $Q \neq$ P y la recta no es vertical, $x \neq x_1$, multiplicando por $x - x_1$, obtenemos:

$$\boxed{\text{Ecuación 1: } \; y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Esta forma de la ecuación de la recta se llama ecuación *punto-pendiente* de la recta, ya que la obtuvimos conociendo la pendiente y un punto de ella, y recíprocamente si vemos una ecuación de este tipo, podemos saber por que punto pasa la recta y que pendiente tiene.

Ejemplos:

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (4, -1) y tiene pendiente -2.

Solución:

m = -2 y (x_1, y_1) = (4,-1).

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$y-(-1)=(-2)(x-4)$

$y+1=-2(x-4)$

2. Dar un punto y la pendiente de la recta y -5 = -7(x + 3).

Solución:

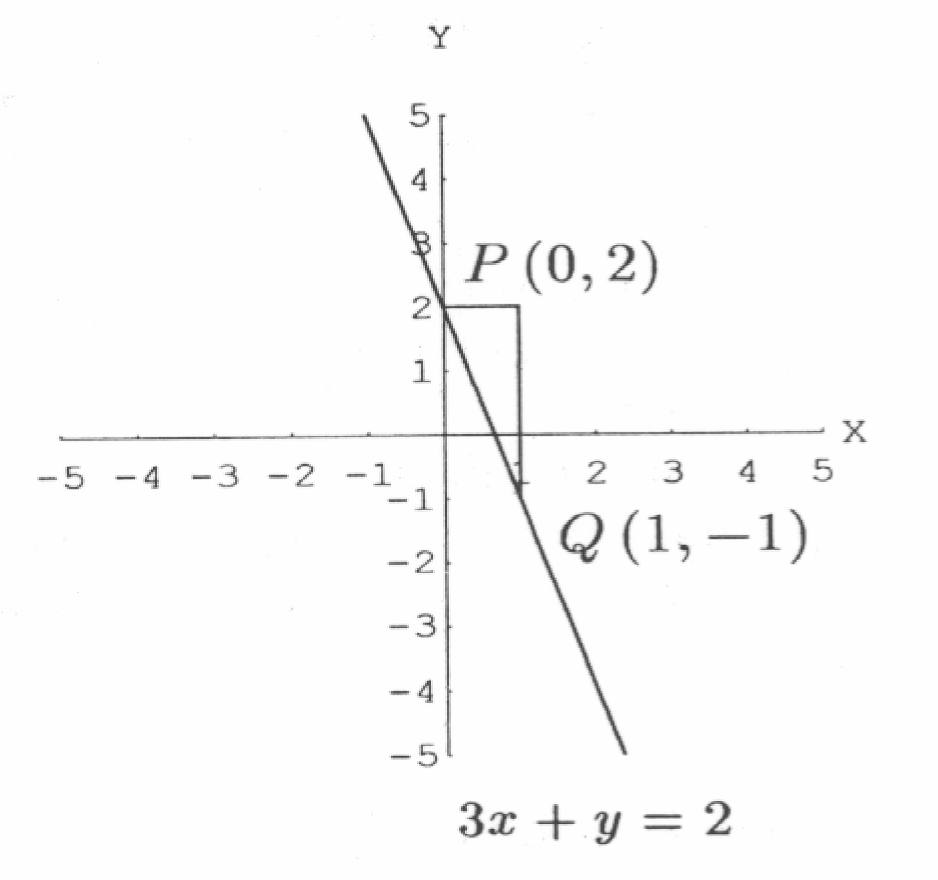
Comparando esta ecuación con la ecuación 1, tenemos que pasa por *P(* -3,5) y tiene pendiente *m* = -7 .

3. Dibujar la recta cuya ecuación es $3x + y = 2$. Escribimos la ecuación en la forma (1):

$$3x + y = 2$$

$$y - 2 = -3x$$

$$y-2 = -3(x - 0).$$



La recta pasa por $P(0,2)$ y tiene pendiente -3.

Localizamos el punto *P*. Pensamos al -3 como $\frac{-3}{1}$. Debemos buscar ahora un punto $Q(x_1, y_1)$ tal que:

$$\frac{y_1 - 2}{x_1 - 0} = \frac{-3}{1}.$$

A partir de *P* avanzamos horizontalmente 1 unidad (el denominador de la pendiente), bajamos 3 unidades (el numerador de la pendiente, bajamos porque es negativo) y marcamos el punto $Q(1, -1)$.
Podemos comprobar que:

$$\frac{-1-2}{1-0} = \frac{-3}{1} = -3.$$

Ahora unimos los puntos *P* y *Q* con una recta.

Podemos escribir la ecuación de una recta de varias maneras, dependiendo de los datos que sepamos de ella., y recíprocamente, si tenemos la ecuación de una recta, podemos llevarla a distintas formas, y obtener de esas expresiones distintas informaciones acerca de la recta. Un caso importante es cuando conocemos la pendiente *m* y el punto donde corta al eje *Y*, que usualmente Se denota con la letra *b* y se llama *ordenada al origen.* Tomando el punto P(0, *b*) y la pendiente dada., sustituimos en la ecuación 1.

$$y - b = m(x - 0),$$

que también se puede escribir como:

$$\boxed{\text{Ecuación 2:} \quad y = mx + b}$$

A esta ultima forma de la ecuación de la recta se le conoce como la ecuación *pendiente-ordenada al origen* de la recta.

Ejemplos:

1. Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y que corta al eje Y en el punto -1.

   Solución:

Sustituimos $m = 3$ y $b = -1$ en la ecuación 2:

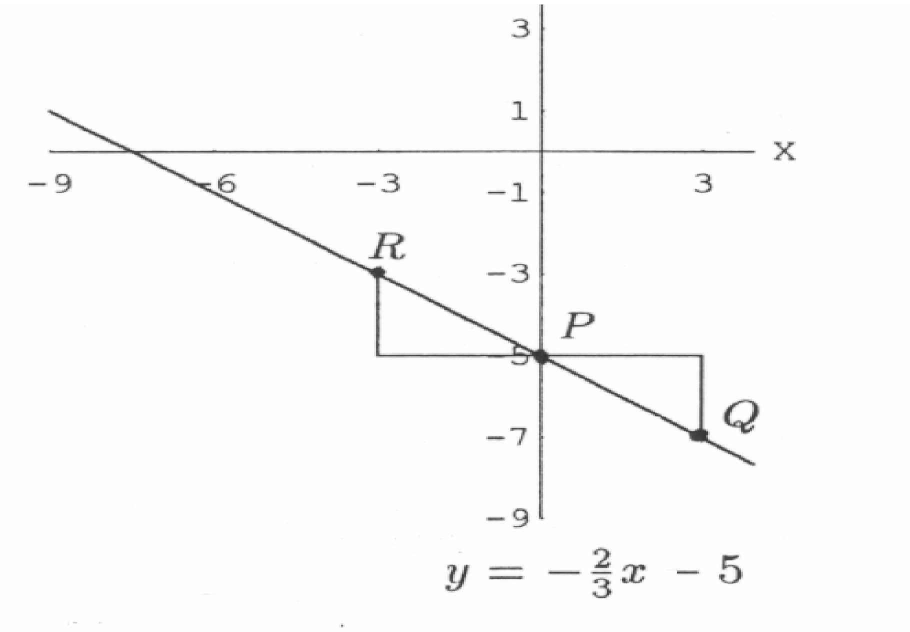
$$y = 3x + (-1),$$

obteniendo

$$y = 3x - 1.$$

2. Dibujar la recta que tiene por ecuación $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

Solución:



La recta corta al eje Y en -5, es decir, pasa por el punto P(0, -5) y tiene pendiente $m = -\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$.

Marcamos el punto *P*(0, -5). Debemos buscar ahora otro punto *Q*(x_1, y_1) de manera que:

$$\frac{-2}{3} = \frac{y_1 - (-5)}{x_1 - 0},$$

para ello, a partir de *P* avanzamos 3 unidades hacia la derecha (el denominador de la pendiente), 2 hacia abajo (el numerador de la pendiente, bajamos porque la pendiente es negativa) y marcamos el punto $Q(3,-7)$ y trazamos la recta que une a *P* y Q. Podemos comprobar que:

$$\frac{-7-(-5)}{3-0} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Observa que si pensamos ala pendiente como $m = \frac{2}{-3}$, a partir de *P,* avanzamos 3 unidades hacia la izquierda (porque el denominador es negativo) y 2 unidades hacia arriba (porque el numerador es positivo). De esta manera llegamos al punto *R(* -3, -3) que pertenece a la misma recta. Comprobemos nuevamente

$$\frac{-3-(-5)}{-3-0} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

3. Dibujar la recta que tiene por ecuación $4x- -y = -3$.

Solución:

Escribimos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$4x - y = -3$$

$$-y = -4x - 3$$

$$y = 4x + 3$$

La recta carta al eje Y en 3 y tiene pendiente $m = 4 = \frac{4}{1}$.

Marcamos el punta $P(0,3)$, a partir de ahí, avanzamos 1 unidad a la derecha y 4 hacia arriba para llegar al punto Q(1,7). Trazamos la recta que une a P y Q.

3.- Ecuación general de la recta.

Nos gustaría tener una forma de la ecuación de la recta que cubriera tanto a las rectas verticales como a las que no lo son. Esta forma es la *ecuación general* de la recta y se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro de manera que este quede igualado a cero.

Ecuación general de la recta 3: $Ax + By + C = 0$.

Recordemos que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando obtenemos una a partir de la otra efectuando las operaciones siguientes:

1. Sumar la misma cantidad (que puede ser una expresión algebraica) de ambos lados de una ecuación.
2. Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad distinta de cero.

Dos ecuaciones que son equivalentes representan el mismo lugar geométrico, en el caso de ecuaciones lineales en dos variables, representan la misma recta.

Observa que la ecuación general de la recta no es única, ya que si multiplicamos la ecuación anterior por una constante λ distinta de cero, obtenemos la ecuación;

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$$

que es de la misma forma que la anterior. Así, las tres ecuaciones siguientes son equivalentes y todas están en la forma general;

$$3x - 6y + 12 = 0,$$

$$x - 2y + 4 = 0,$$

$$-x + 2y - 4 = 0$$

y representan a la recta cuya ecuación pendiente-ordenada al origen es:

$$y = 2x + 2$$

y esta ecuación es equivalente a las anteriores, pues se obtiene a partir de cualquiera de las anteriores utilizando sucesivamente las dos operaciones enunciadas anteriormente.

Ejemplos:

1. Escribir la ecuación $y = 4x + 5$ en la forma general.

Solución:

Pasando todos los términos de un lado de la ecuación obtenemos la ecuación en forma general:

$$4x - y + 5 = 0.$$

2. Escribir la ecuación general de la recta que pasa por $P(-3,2)$ y tiene pendiente 8.

Solución:

La ecuación punto-pendiente de la recta es

$$y - 2 = 8(x + 3),$$

efectuando las operaciones y pasando todos los términos de un lado de la ecuación obtenemos la ecuación en la forma general:

$$8x - y + 26 = 0.$$

4.- Ecuación simétrica de la recta.

A partir de la ecuación general de la recta,

$$Ax + By + C = 0,$$

si $C \neq 0$, podemos pasarlo al otro lado de la igualdad y dividir entre -C para obtener

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1,$$

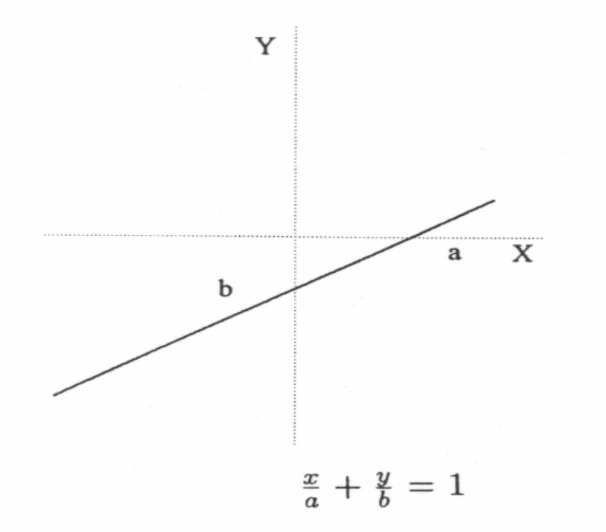
si además, A y B también son distintos de cero, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

llamamos ahora $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$ y escribimos,

$$\boxed{\text{Ecuación Simétrica 4:} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,}$$

esta forma de la ecuación de la recta se llama *ecuación simétrica* de la recta y tiene la ventaja de que podemos ver explícitamente en ella los puntos en los que la recta corta a los dos ejes, en efecto, si hacemos $x = 0$, obtenemos $y = b$, y con $y = 0$, obtenemos $x = a$, es decir, la recta corta al eje Y en $y = b$ y corta al eje X en $x = a$. Observa que una recta corta a ambos ejes en puntos distintos del origen si y sólo si en su ecuación en forma general, $A \neq 0$, $B \neq 0$ y C # 0.



Ejemplos:

1. Encontrar la ecuación de la recta que corta a los ejes en (5,0) y (0, -3).

   Solución:

Hacemos $a = 5$ Y $b = -3$ y sustituimos en la ecuación simétrica:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1,$$

efectuando las operaciones podemos transformarla a la forma general

$$-3x + 5y + 15 = 0 \, .$$

2. Encontrar los puntos de intersección de la recta $5x + 8y - 6 = 0$ con los ejes.

Solución:

Pasamos el termino independiente del otro lado de la ecuación y dividimos entre el

$$5x + 8y - 6 = 0$$

$$5x + 8y = 6$$

$$\frac{5x}{6} + \frac{8y}{6} = 1$$

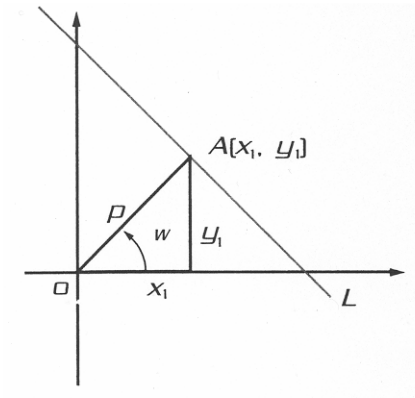
$$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

así que la recta corta a los ejes en $(\frac{6}{5}, 0)$ y $(0, \frac{3}{4})$.

5.- Ecuación de la recta en la forma normal.

La recta *L* queda determinada por la longitud de su perpendicular trazada desde el origen y el ángulo positivo W que la perpendicular forma con el eje de las *x.* La perpendicular OA a la recta *L,* representada por *P,* se *considera siempre positiva* por ser una distancia. EI ángulo W engendrado por *OA* varia de $0° \leq W < 360°$.

Si damos valores a *p* y W, la recta *L* trazada por $A(x_1, y,)$ queda determinada por la ecuación de la recta en su *forma normal* que se obtiene en la forma siguiente:



Observando la figura anterior, tenemos:

$\cos w = \dfrac{x_1}{p}$ $\qquad$ $\text{sen } w = \dfrac{y_1}{p}$

Despejamos: $\qquad$ *Despejamos:*

$x_1 = p\cos w$ $\qquad$ $y_1 = p \text{ sen } w$

Sustituimos los dos valores anteriores en $A = (x_1, y_1)$, con lo cual obtenemos las coordenadas del punto *A,* que son:

$$A = (p \cos W, p \text{ sen } w)$$

Par su parte, la pendiente *m* de *OA* es:

$$m = \tan w$$

Como la recta *L* es perpendicular a la recta *GA,* sus pendientes están relacionadas con;

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

es decir, *la recíproca con signo cambiado.* Como ya sabemos que la pendiente de OA es tan w, la inversa de esta función con signo cambiado de la recta *L* perpendicular a *GA* es:

$$-\cot w$$

de donde,

$$m = -\cot w = \frac{\cos w}{\sin w}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente los valores de x_1, y_1 y de m, queda:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - p \sin w = -\frac{\cos w}{\sin w}(x - p\cos w)$$

Quitamos el denominador sen w y desarrollamos:

$$y \text{ sen } w - p \text{ sen}^2 w = -\cos w(x - p \cos w\}$$

$$= -x \cos w + p \cos^2 w$$

Agrupando:

$x \cos w + y \text{ sen } w = p \text{ sen}^2 w + p \cos^2 w$

Factorizamos el segundo miembro:

$x \cos w + y \text{ sen } w = p$ (sen2 w + cos2 w)

Aplicamos la identidad pitagórica:

$\text{sen}^2 w + \cos^2 w = 1$

sustituimos:

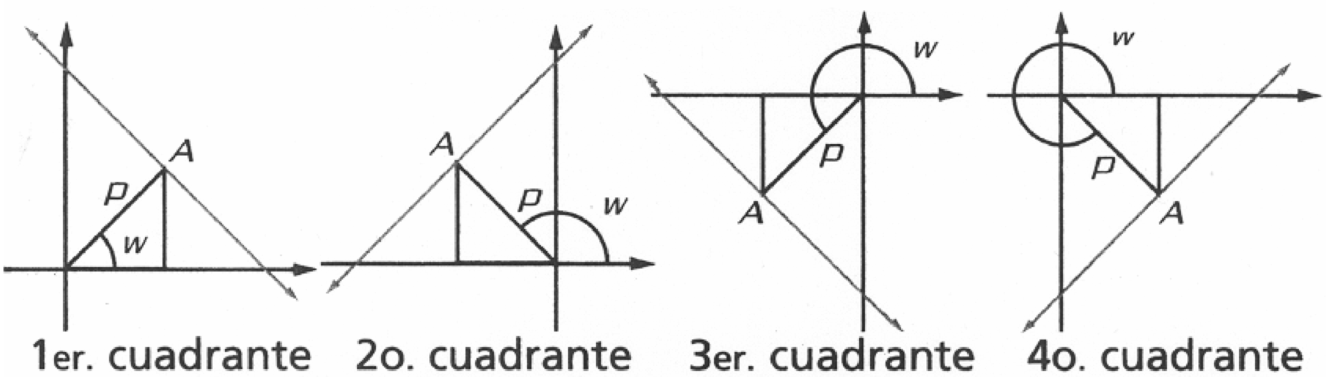
$x \cos w + y \text{ sen } w = p$

De donde

$\boxed{x \cos w + y \text{ sen } w - p = 0}$ *Forma normal de la ecuación de la recta.*

Relación en la que w y p son las constantes arbitrarias o parámetros, y el valor de sen w y cos w puede ser positivo o negativo, de acuerdo con el cuadrante en que este el lado terminal del ángulo w.

Recordando el círculo geométrico, tenemos:



1er. cuadrante sen positivo cos positivo | 2o. cuadrante sen positivo cos negativo | 3er. cuadrante sen negativo cos negativo | 4o. cuadrante sen negativo cos positivo

Ejemplo:

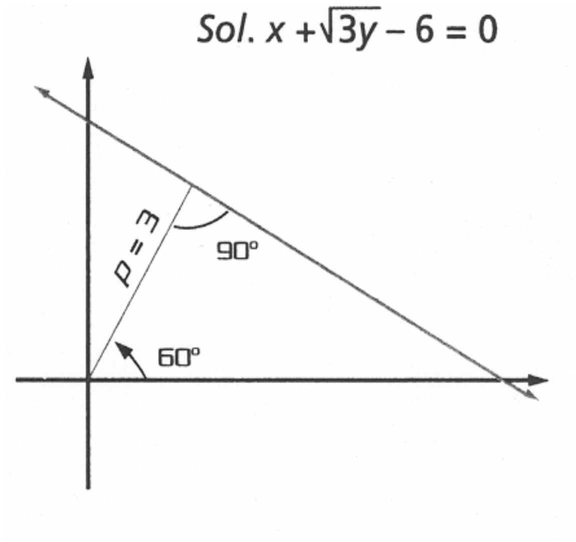
1. Determina la ecuación de la recta en su forma normal, con w = 60° y p = 3 y grafica.

Solución:

Sustituimos en:

X cos w + y sen w – p = 0

X cos 60° + y sen 60° - 3 = 0



Como cos 60° = $\frac{1}{2}$

Sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y-3=0$$

$$x+\sqrt{3}y-6=0$$

6.- Procedimiento para obtener la forma normal de una recta a partir de su forma general.

La ecuación de la recta en su forma general Ax + By + C = 0, queremos representarla en su forma normal x cos w + y sen w – p = 0.

Con Ax + By + C = 0, siendo K una constante distinta de cero, procedemos como sigue:

Dividimos cada termino de Ax + By + C = 0 entre K; así tenemos,

$\frac{Ax}{K}+\frac{By}{K}+\frac{C}{K}=0$; identificando esta expresión con la forma normal, obtenemos:

$\cos w=\frac{A}{K}$, sen w = $\frac{B}{K}$, -p = $\frac{C}{K}$ y p = $-\frac{C}{K}$

Elevamos al cuadrado:

$\cos w=\frac{A}{K}$ Obtenemos $\cos^2 w=\frac{A^2}{K^2}$

sen w = $\frac{B}{K}$ Obtenemos sen^2 w = $\frac{B^2}{K^2}$

Sumamos miembro a miembro de la igualdad:

$\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w = \dfrac{A^2}{K^2} + \dfrac{B^2}{K^2}$; como $\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w = 1$, sustituyendo nos queda;

$$1 = \frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2}.$$

Quitamos el denominador y despejamos $K^2 = A^2 + B^2$; $K = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ y sustituyendo el valor de K tenemos:

$$\boxed{\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0}$$

Fórmula para obtener la forma normal de una recta a partir de su forma general.

Para escoger el signo que precederá al radical $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ se tomaran en consideración los conceptos siguientes:

a. *E1 signo que se anteponga al radical debe ser el signo contrario al que tiene el coeficiente de* C.

Ejemplo:

En $x + y - 4 = 0$, como C = -4, el signo que precederá al radical será el (+).

b. Si sucede que:

$C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$; en este caso el signo del radical será el que tiene *B*.

Ejemplo:

En $x - 2y = 0$, como $B = -2$, el signo que precederá al radical será (-).

c. *Si sucede que:*

$C = B = 0$; en este caso *el signo del radical será el de* A.

Ejemplo:

En $-7x = 0$, como A = -7, el signo que precederá al radical será (-).

Ejemplo:

Determina la forma normal de la recta $12x - 5y - 52 = 0$ así como los valores de *p,* W, y traza la gráfica.

Sustituimos en:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

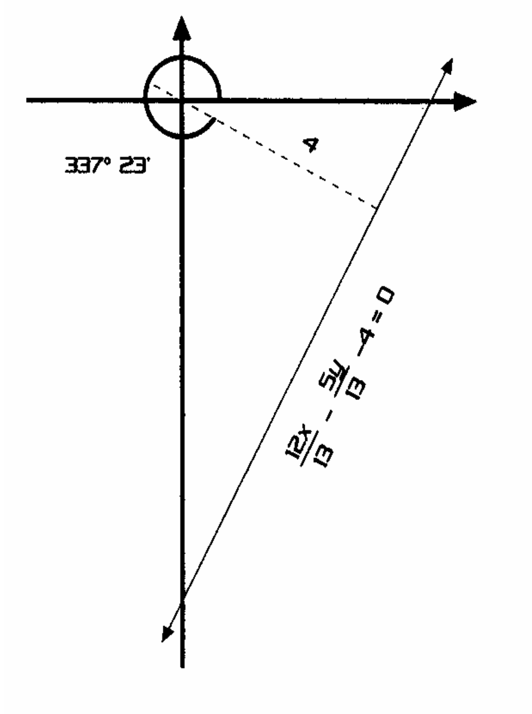
A = 12; B = -5; C = -52; $\pm\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{169} = 13$

Como el coeficiente de C esta precedido del signo (-), tomamos el signo positivo del radical:

$$\frac{12x}{13} - \frac{5y}{13} - \frac{52}{13} = 0$$

$$\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-4=0$$

de donde,



$\cos w=\frac{12}{13}$; sen w = $-\frac{5}{13}$;

$p=|-4|$; $p=4$

Como el seno w es negativo y coseno de w es positivo, el ángulo w debe medirse en el cuarto cuadrante; su valor es 337° 23'.

Cos w = $\frac{12}{13}$ = .9230 Sen w = $-\frac{5}{13}=-.3846$

w = 22º 37' w = -22º 37'

w = 359º 60' - 22º 37'

w = 337° 23'.

Sol. $\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-4=0$

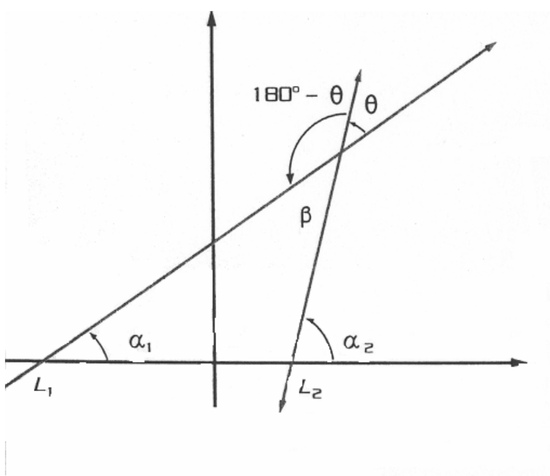
$w=337°\ 23'$; $p=4$.

7.- Ángulo de intersección entre dos rectas.

Si la recta *L1,* con ecuación y = m_1x + *b1,* se interseca con la recta *L2,* con ecuación y = m_2x + *b2,* se forman dos ángulos, el ángulo θ y su suplementario 180°- θ.

Para obtener el valor del ángulo θ procedemos en la forma siguiente:

Como "en todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a el":



$\alpha_1+\beta=\alpha_2$

Despejando:

$\beta=\alpha_2-\alpha_1$

Como $\beta=\theta$ par ser opuestas por el vértice queda,

$\theta=\alpha_2-\alpha_1$

el problema lo resolveremos usando la función tangente; en consecuencia, podemos indicar que;

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1).$$

En trigonometría se demostró que la tangente de la diferencia de dos ángulos es;

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + (\tan\alpha_1)(\tan\alpha_2)}.$$

como $\tan\alpha_2 = m_2$,

$\tan\alpha_1 = m_1$

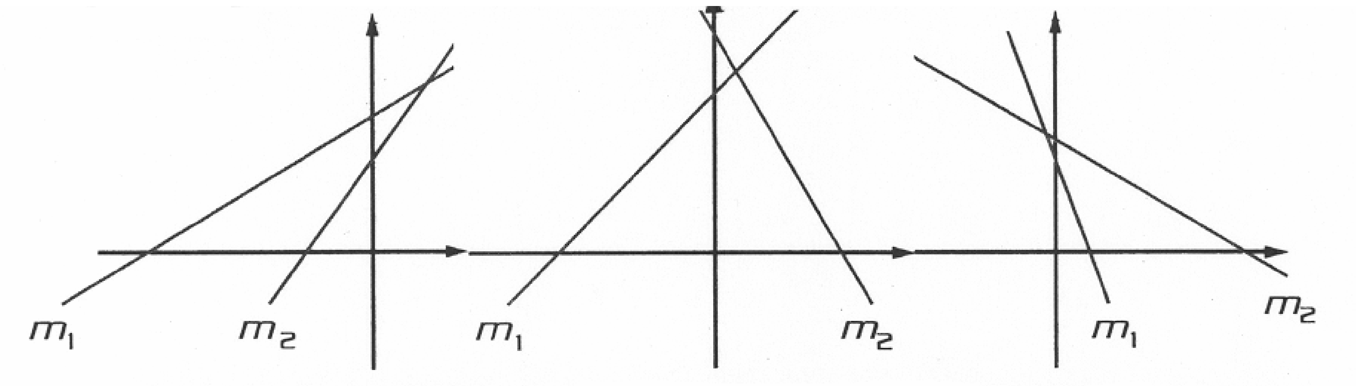
Sustituyendo queda:

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}}$$

Fórmula para obtener el valor del ángulo θ.

Para aplicar esta relación se debe tener sumo cuidado al determinar cual es la pendiente m_1 y cual m_2. Para ello se deben seguir las indicaciones siguientes:

A. Si las dos pendientes son *positivas, m_2* es la mayor y m_1 la menor.
B. Cuando una pendiente es *positiva* y la otra *negativa, m_2* es la pendiente negativa y m_1 la positiva.
C. Cuando las dos pendientes *son negativas, m_2* tiene mayor valor absoluto.



Observa: m_2 es la pendiente de la recta que forma el ángulo mayor con el sentido positivo del eje de las x.

CONCLUSION:

1. Expresamos las ecuaciones de las rectas en su *forma común.*
2. Trazamos las gráficas.
3. Determinamos cual es m_1 y cual m_2. Sustituimos en la fórmula.
4. Obtenemos el valor del ángulo de la función tangente en las tablas de valores naturales de las funciones trigonométricas.

Ejemplo:

Determina el valor del ángulo que forman las rectas 3x + y -6 = 0 con 2x -3y -4 = 0 (ángulo menor).

Solución:

Pendiente *m* de la recta 3x + y – 6 = 0:

y = -3x + 6

de donde *m* = -3

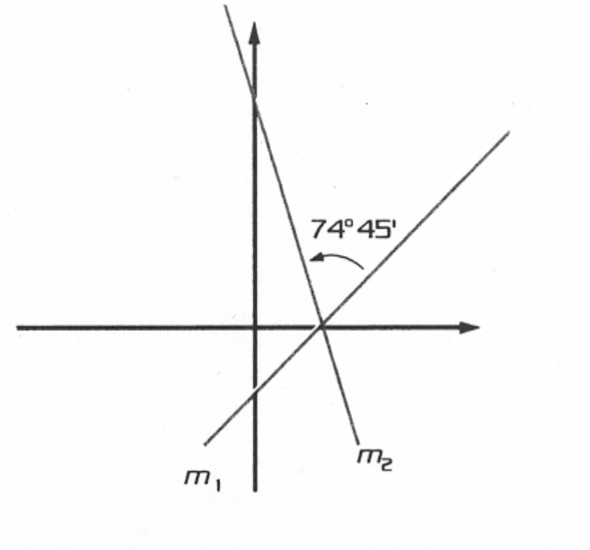
Pendiente *m* de la recta 2x – 3y – 4 = 0:

-3y = -2x + 4

$$-y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

de donde $m = \dfrac{2}{3}$



Determinamos cual es m_1 y cual m_2.

Como una es positiva y la otra negativa,

m_2 es la pendiente negativa y m_1 la positiva; en consecuencia:

$m_2 = -3$ y $m_1 = \dfrac{2}{3}$.

Sustituimos en la fórmula:

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}$$

$$\tan\theta = \frac{-3-\left(\frac{2}{3}\right)}{1+\left(\frac{2}{3}\right)(-3)} = \frac{-3-\frac{2}{3}}{1+(-2)} = \frac{\frac{-9-2}{3}}{-1} = \frac{\frac{-11}{3}}{-1} = \frac{-11}{-3} = 3.666$$

$\theta = 74°45'$

Ejemplo:

Si A(1, 6), C(4, -2), B(7,4), calcula el valor del ángulo C. Recordamos que en geometría, para designar un ángulo, entre otros procedimientos, la letra que esta al centro de las otras dos, en este caso la C, es la correspondiente al vértice.

Solución:

Pendiente de la recta (1 , 6), (4 , -2):

$$m = \frac{6-(-2)}{1-4} = \frac{6+2}{-3} = -\frac{8}{3}$$

Pendiente de la recta (4 , -2), (7 , 4):

$$m = \frac{-2-(4)}{4-(7)} = \frac{-6}{-3} = 2$$

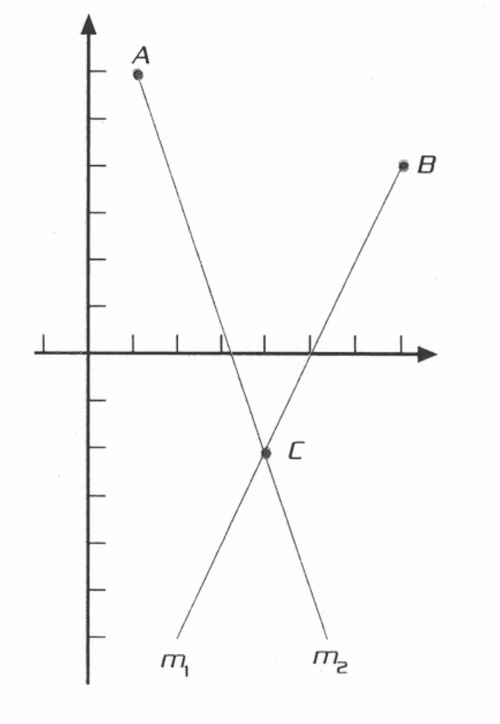
de donde

$m_2 = -\frac{8}{3}$ y $m_1 = 2.$

Sustituyendo en la formula:

$$\tan C = \frac{-\frac{8}{3}-2}{1+2\left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{\frac{-8-6}{3}}{1-\frac{16}{3}} = \frac{\frac{-14}{3}}{-\frac{13}{3}} = \frac{\cancel{3}(-14)}{\cancel{3}(-13)} = 1.07$$

$\hat{C} = 47°$



8.- Familia de rectas.

La ecuación de una recta, como ya lo estudiamos, queda determinada por dos condiciones independientes: dos puntos, la pendiente y un punto, la pendiente y su intersección con el eje, y la intersección de la recta con los dos ejes coordenados. En consecuencia aceptamos que una recta que satisface una sola condición, *no es una recta única,* ya que hay infinidad de rectas que cumplen la misma condición.

Todas las rectas que satisfacen una condición geométrica previamente establecida forman una *familia* o *haz de rectas* .

En la ecuación de la recta y = *mx* + *b,* las constantes m y b son los parámetros. Si asignamos un valor particular a uno de los parámetros, se obtiene la ecuación de una familia de rectas del otro parámetro que identificaremos como *K (K* debe ser un número real).

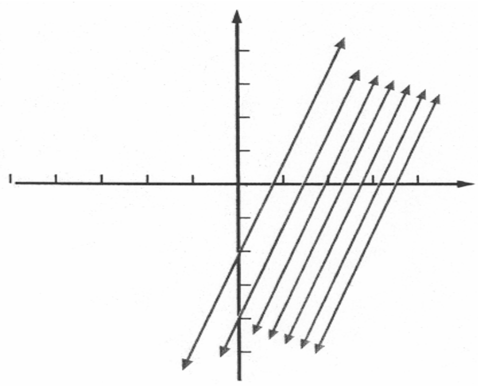
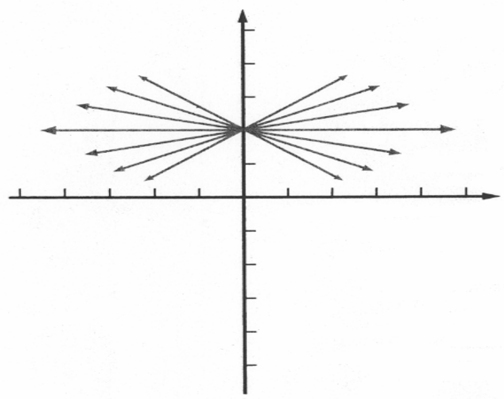
Ejemplo:

Si *m* = 3, resulta y = *3x* + *K,* que es la familia de todas las rectas paralelas cuya pendiente *m* es igual a 3.

En forma semejante, si en la ecuación y = mx + *b* ponemos *b* = 2, resulta y = *Kx* + 2, que es la ecuación de la familia o haz de rectas cuya intersección con el eje *y* es la misma, en este ejemplo.

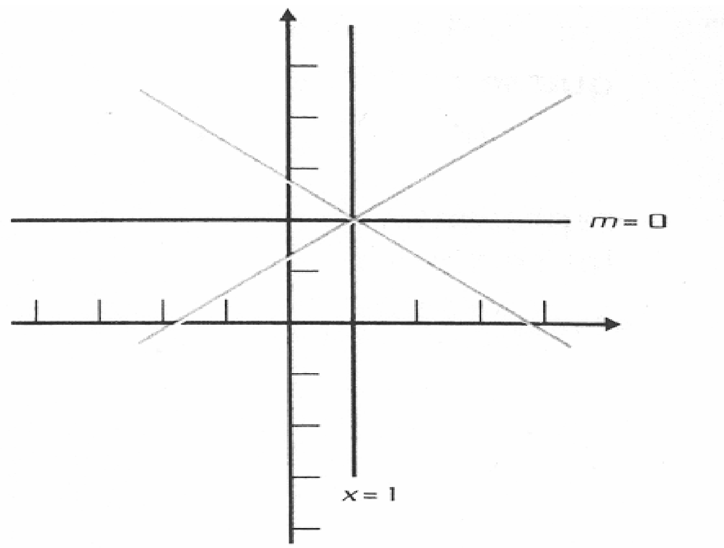
Observa que hay una recta x = 0 (el eje y) que no esta incluida en y = Kx + 2, puesto que se necesitaría que $K = \infty$, lo cual no esta permitido puesto que indicamos que K debe ser un numero real.

Sol. $y = Kx + 2$, con la recta $x = 2$, que también forma parte de la familia.
A veces, una familia de rectas tiene excepciones, que deben indicarse para hacer las notar en la solución, como en el ejemplo que se acaba de analizar.

Ejemplo:
Determina la ecuación de la familia de rectas que pasan a través de (1 , 2). Bosqueja la gráfica.

Solución: ***Sol.* y -2 = *K* (x -1), con la recta x = 1.**



Utilizamos la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Esta familia se representa analíticamente con la ecuación:

$y - 2 = m(x - 1)$

Como a m se le puede asignar cualquier valor dentro de los números reales, queda:

$y - 2 = K(x - 1)$

m no está definida para una recta paralela al eje y; por ello, la ecuación anterior no incluye a la recta x = 1, que también pasa por el punto (1, 2) y, por consiguiente, pertenece a la familia.

Ejemplo:

Determina la ecuación de la familia de las rectas que son paralelas a $3x + 4y + 2 = 0$. Haz la gráfica.

Solución: *Sol.* $y = -\frac{3}{4}x - K$

Utilizamos la ecuación de la

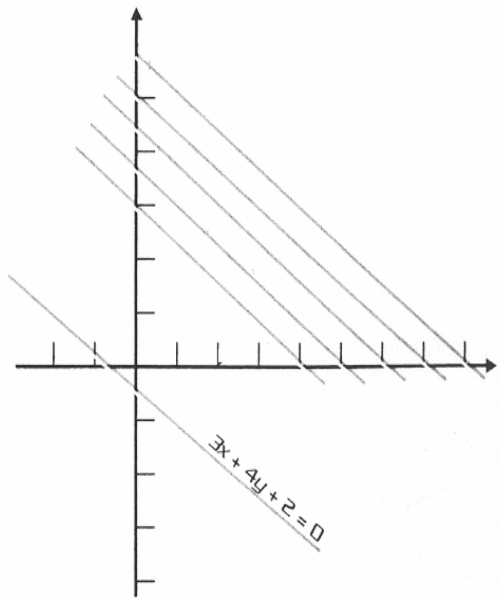
recta pendiente-intersección

$y = mx + b$

Quitamos el denominador 4 y queda:

$3x + 4y + K = 0$

Como a b se le puede asignar cualquier valor dentro de los números reales, queda:



$y = mx + K$

$3x + 4y + 2 = 0$

$4y = -3x - 2$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{2}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

de donde la pendiente de cada miembro

de la familia debe ser: $-\frac{3}{4}$ y el valor de

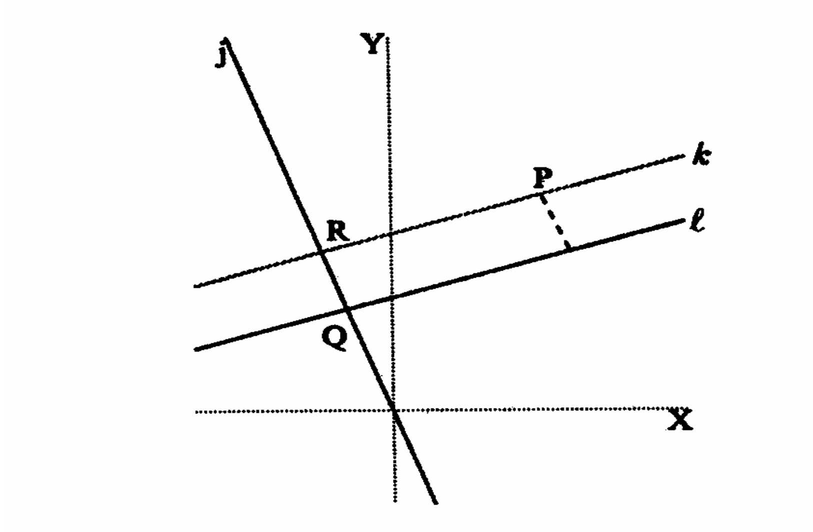
K arbitrario. De esta forma la familia se representa con:

$y = -\frac{3}{4}x - K$ o en la forma general $3x + 4y + K = O$.

9.- Aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta.

Distancia de un punto a una recta.

Consideremos una recta *l* cualquiera y un punto P(Xl, YI) que no este en la recta. La distancia de la recta *l* a *P* se define como la *distancia* de *P* al punto de *l* que esté más cercano a él. Construyamos una recta *k,* paralela a *l* que pase por *P y* la recta *j*, perpendicular a *l* que pasa por el origen.



La recta *j* corta a *l* y a *k* en *Q* y *R* respectivamente. Observa en la figura que la distancia de *P* a *l* es la misma que la distancia de *Q* a *R*. Para encontrar esta distancia debemos encontrar las coordenadas de *Q* y de *R* y aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Para encontrar las coordenadas de *Q* y *R,* escribimos las ecuaciones de *l, k* y j:

$$l : Ax + By + C = 0$$

$$k : Ax + By + C' = 0$$

$$j : \qquad Bx - Ay = 0$$

En la ecuación de *k* aparece una constante *C'* que determinaremos posteriormente. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de *l* y j, obtenemos las coordenadas de *Q:*

$$Q\left(\frac{-AC}{A^2+B^2},\frac{-BC}{A^2+B^2}\right)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de *k* y j, obtenemos las coordenadas de *R:*

$$R\left(\frac{-AC'}{A^2+B^2},\frac{-BC'}{A^2+B^2}\right)$$

Calculamos ahora el cuadrado de la distancia de *R* a *Q:*

$$d^2 = \frac{\left(AC-AC'\right)^2}{\left(A^2+B^2\right)^2}+\frac{\left(BC-BC'\right)^2}{\left(A^2+B^2\right)^2},$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos:

$$d^2 = \frac{(C - C')^2}{A^2 + B^2},$$

extrayendo raíz cuadrada, encontramos:

$$d = \frac{(C - C')}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Para determinar C', usamos el hecho de que $P(x_1, y_1)$ pertenece a *K,* así que (x_1, y_1) satisface la ecuación de *k:*

$$Ax_1 + By_1 + C' = 0$$

de donde,

$$C' = -Ax_1 - By_1.$$

Sustituyendo el valor de C' en la formula de la distancia, obtenemos;

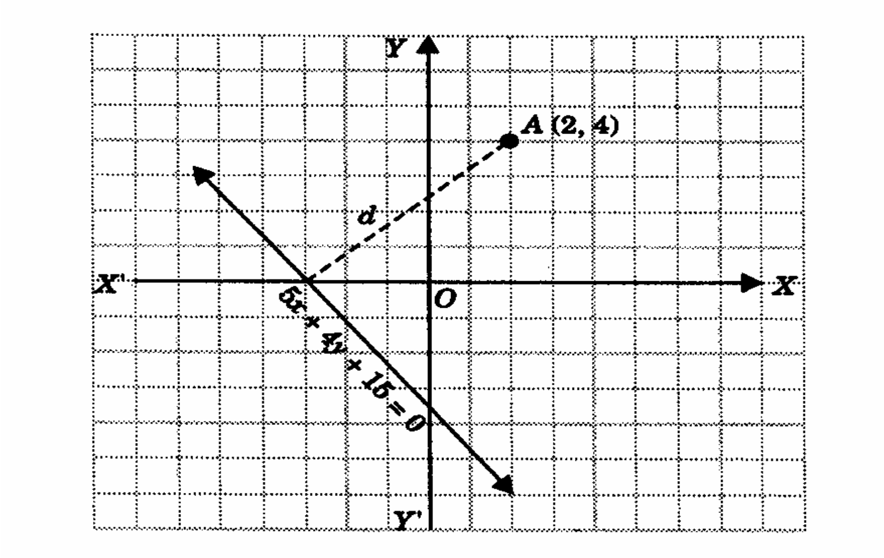
$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Como la distancia debe ser un número no negativo, el signo de la raíz se escoge para que *d* sea positiva.

Ejemplo:

1. Determinar la distancia de la recta $5x + 4y + 15 = 0$ al punto A (2, 4).

   Al graficar los datos dados, tenemos:



La distancia pedida se considera absoluta, es decir, no dirigida. Al sustituir los datos en la ecuación para distancia absoluta, obtenemos:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$d=\frac{|5x+4y+15|}{\sqrt{(5)^2+(4)^2}}.$$

Y al sustituir las coordenadas del punto A(2, 4), tenemos:

$$d=\frac{|5(2)+4(4)+15|}{\sqrt{25+16}}$$

$$d=\frac{|10+16+15|}{\sqrt{41}}$$

$$\therefore d=\frac{|41|}{\sqrt{41}}$$

La distancia de la recta $5x+4y+15=0$ al punto A (2, 4) es:

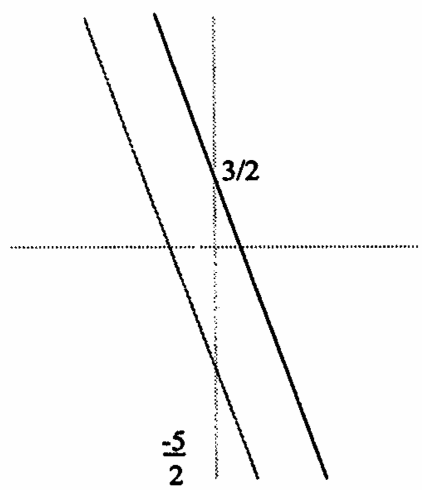
$$d=\frac{|41|}{\sqrt{41}}$$

Distancia entre rectas paralelas

Para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, tomamos un punto en una de ellas y encontramos la distancia de ahí a la otra recta.

Ejemplo:

Encontrar la distancia entre las rectas 6x + 2y - 3 = 0 y 6x + 2y + 5 = 0.



$6x+2y-3=0$ y $6x+2y+5=0$

Solución: Las rectas son paralelas, pues mediante un calculo directo se ve que la pendiente de ambas es m = -3. Elegimos un punto cualquiera en la primera recta. Para ello, tomamos cualquier valor de x, por ejemplo x = 1, lo sustituimos en la ecuación y encontramos el valor de y correspondiente:

$$6\,(1) + 2y - 3 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}.$$

Así que el punto $p(1, -\frac{3}{2})$ pertenece ala primera recta. Calculamos ahora la distancia de P a la segunda recta:

$$d = \frac{6(1) + 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 5}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{40}} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}},$$

así que la distancia entre las rectas es: $\frac{4}{\sqrt{10}}$.

10.- Ejercicios de repaso:

I. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente que se indica.

a) A(5, 9) y $m = 3$.

b) B(-6, 5) y $m = \frac{2}{3}$

II. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene el ángulo de inclinación que se indica.

a) A(7, 4) y $\theta = 60°$

b) P(2, -7) y $\theta = 135°$

III. Halla la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y su intersección con el eje y se indica.

a) $m = -\frac{3}{5}$, intersección (-3)

b) $m = -5$, intersección (2)

IV. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

a) A(2, 4) y B(-7, 5)

b) P(-3, -2) y Q(5, 3)

V. Halla la ecuación de la recta en la forma normal, para los siguientes valores de p y w; trazar la gráfica correspondiente.

a) $p = 6$ y $w = \frac{4\pi}{3}$

b) $p = 7$ y $w = 45°$

VI. Determina la distancia de las siguientes rectas dadas al punto indicado.

1. $4x - 5y - 13 = 0$ al punto A (7, -1).
2. $2x + 5y + 10 = 0$ al punto C (1, 3).
3. $3x - 4y + 2 = 0$ al punto P (5, -2).

VII. Determina los ángulos interiores de los siguientes triángulos cuyos vértices son los puntos que a continuación se indican; comprueba los resultados:

a) A(-2, 0), B(5, -5) y C(3, 7)

b) K(2, 5), L(-3, -2) y M(4, 2)

Unidad III.

La Circunferencia y las cónicas parte I.

La circunferencia como lugar geométrico. *La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de otro llamado centro.* La distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia es el *radio.*

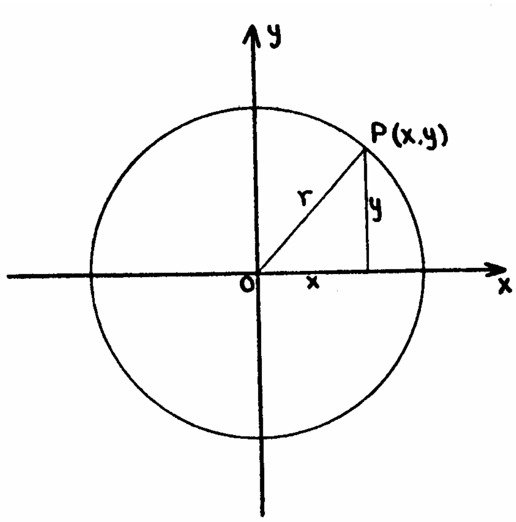


Fig. 1

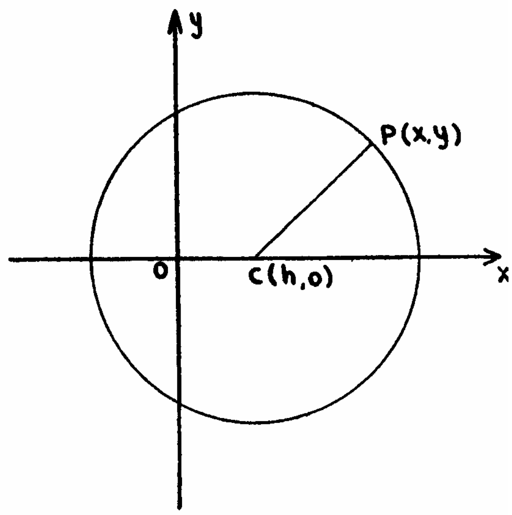


Fig. 2

1.- Ecuación cartesiana de la circunferencia de centro en el origen y radio *r*.

Aplicando el método de los lugares geométricos, tendremos:

1. Sea *P (x, y)* un punto cualquiera de la circunferencia.

2. La condición que establece que *P* es de la circunferencia es:

$$OP=r$$

3. Traduciendo analíticamente (formula de 1a distancia entre dos puntos):

$$\sqrt{x^2+y^2}=r\,.$$

4. Transformando:

$$x^2+y^2=r^2 \qquad \text{(A)}$$

Que es 1a ecuación cartesiana de 1a circunferencia de centro e1 origen y radio *r.*

Ejemplos. 1. La ecuación de 1a circunferencia de centro el origen y radio 4 es:

$$x^2+y^2=16$$

2. La ecuación $x^2+y^2=25$, representa una circunferencia de centro e1 origen y radio $r=\sqrt{25}=5$.

Ecuación cartesiana de una circunferencia de centro en uno de los ejes de coordenadas y radio r.

Primer caso. El centro esta en el eje de las x. Si llamamos h a la abscisa del centro, sus coordenadas serán (h , 0).

Si P (x, y) es un punto cualquiera de la circunferencia (fig.2), tendremos:

$$CP == r.$$

Traduciendo analíticamente:

$$\sqrt{(x-h)^2 + y^2} = r \qquad \therefore \qquad (x-h)^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{(B)}$$

Que es la ecuación de la circunferencia de centro en un punto del eje x y radio r.

Ejemplos. 1. La ecuación de la circunferencia de centro $C(4,0)$ y radio 3 es:

$$(x\text{-}4)^2 + y^2 == 9 \qquad .'. \qquad x^2 + y^2 -8x + 7 = 0$$

2. La ecuación $(x -3)^2 + y^2 = 16$ representa una circunferencia de centro C (3, 0) y radio 4.

3. La ecuación $(x + 5)^2 + y^2 = 2$, representa una circunferencia de centro C.{-5, *0)* y radio $\sqrt{2}$.

Segundo caso: El centro está en *el eje* de *las y*. Si llamamos k a la ordenada del centro, sus coordenadas son de la forma C (0, k). Procediendo análogamente al caso anterior se obtiene la ecuación:

$$x^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \text{(C)}$$

Ejemplos. 1. La ecuación de la circunferencia de centro C (0, -4) y radio 5 es ,

$$x^2 + (y+4)^2 = 25 \qquad \therefore \qquad x^2 + y^2 + 8y -9 = 0.$$

2. La ecuación $x^2 + (y -1)^2 = 7$, representa una circunferencia de centro C (0,1) y radio $\sqrt{7}$.

Ecuación cartesiana de la circunferencia, cuando el centro es un punto cualquiera del plano. Forma orinaría de la ecuación de la circunferencia. Sea C (h , k) el centro, r el radio y P (x , y) un punto cualquiera de la circunferencia figura 3 por definición:

$$CP == \text{r}.$$

O sea, analíticamente:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \qquad\qquad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \text{(D)}$$

que es la *ecuación cartesiana de una circunferencia de radio r y centro* un *punto cualquiera C (h, k) del plano.*

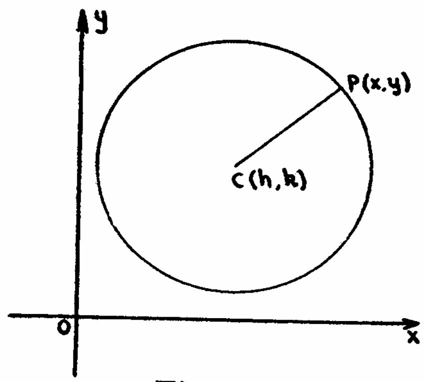


Fig. 3

La ecuación (D) que comprende como pasos particulares a las ecuaciones (A), (B), y (C) se conoce como *forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.*

Ejemplos. 1. La ecuación $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ representa una circunferencia de radio, $r = 5$ y centro C (2,3).

2. La ecuación de la circunferencia de centro C (-4, 2) y radio 4 es:

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 == 16.$$

3. Hallar 1a ecuación de la circunferencia que tiene como centro C (-2, -3) y pasa por e1 punto A (2,4.).

El radio será la distancia CA. = $\sqrt{(-2-2)^2+(-3-4)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

y aplicando la ecuación *(D):*

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 == 65.$$

Condiciones para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente una circunferencia. Forma general de la circunferencia. La ecuación general de segundo grado con dos variables es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + f = 0 \qquad (1)$$

y 1a ecuación de una circunferencia de centro (h, k) y radio r es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Y desarrollando:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0, \qquad (2)$$

Para que 1a ecuación (1) representa una circunferencia, sus coeficientes y los de 1a (2) de los términos del mismo grado deben ser proporcionales.

Como la (2) carece de término xy, resulta: $B = 0$. (3)

Además, tendremos:

$$\frac{A}{1} = \frac{C}{1} = \frac{D}{-2h} = \frac{E}{-2k} = \frac{F}{h^2+k^2-r^2} \qquad (4)$$

Luego:

A = C $\neq$ 0 para que la ecuación sea de segundo grado (5)

De las igualdades (3) y (5) resulta que, para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente una circunferencia es necesario:

1. Que no tenga término en xy
2. Que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales y del mismo signo.

Si una circunferencia viene dada por una ecuación de 1a forma:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se dice que viene dada en su *forma general.*

Ejemplos. Las ecuaciones:

1. $x^2 + y^2 + 3x + 2y - 4 = 0$;
2. $2x^2 + 2y^2 + x + 4x + 1 = 0$;
3. $3x^2 + 3y^2 - x + y + 10 = 0$;
4. $-4x^2 - 4y^2 + 5x + y - 3 = 0$,

representan circunferencias dadas en su forma general.

Dada la ecuación e una circunferencia en su forma general, hallar su centro y radio. El problema puede resolverse de dos maneras.

Primera manera: Convirtiendo la ecuación dada a la forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

por el método de completar cuadrados. El centro es C (h, k) y el radio es r.

Segunda manera. A partir de la serie de razones iguales (4) del articulo anterior, tomando como incógnitas h, k y r.

Ejemplos: 1. Hallar el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0.$$

Primer método. Completando cuadrados se tiene:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = -9 + 4 + 9$$

$$(x + 2)^2 - (y + 3)^2 = 4$$

$$\therefore\ h = -2,\quad k = -3,\ r = \sqrt{4} = 2.$$

$$\therefore \text{C}\ (-2, -3),\ r = 2\ .$$

Segundo método. En este caso:

$$A = \text{C} = 1, D = 4,\ E = 6,\ \ F = 9.$$

De (4) resulta:

$$1=\frac{4}{-2h}=\frac{6}{-2k}=\frac{9}{h^2+k^2-r^2}$$

$$\therefore h=-2, k=-3, \frac{9}{4+9-r^2}=1, r=2$$

El centro es C (- 2, -3) y el radio $r = 2$.

2. Hallar el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0.$$

Primer método. Completando cuadrados, resulta:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$C\ (2,\ 1),\ \ r = 3.$$

Segundo método. Se tiene:

A = C == 1, D = -4, E = -2, F = -4

De (4) resulta:

$$1=\frac{-4}{-2h}=\frac{-2}{-2k}=\frac{-4}{h^2+k^2-r^2},$$

$$\therefore h=2, k=4, r=3, \quad C(2\ ,\ 1)\ \ y\ r = 3.$$

Nota: Si el coeficiente de x^2 y y^2 no es la unidad, antes de completar cuadrados se divide toda la ecuación por dicho coeficiente.

Ejemplo. Hallar el centro y el radio de la circunferencia:

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$$

Primer método. Dividiendo toda la ecuación entre 4, queda:

$$x^2+y^2-x+4y-\frac{19}{4}=0$$

Completando cuadrados:

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+4y+4=\frac{19}{4}+\frac{1}{4}+4=9$$

$$\left[x-\frac{1}{2}\right]^2+\left(y+2\right)^2=9$$

$$\therefore C\left[\frac{1}{2},-2\right], r=3.$$

Segundo método. En este caso:

A = C = 4, D = - 4, E = 16, F = -19

De (4) resulta:

$$4 = \frac{-4}{-2h} = \frac{16}{-2k} = \frac{-19}{h^2 + k^2 - r^2}$$

$$\therefore h = \frac{1}{2}, k = -2, r = 3, \quad C(\frac{1}{2}\ , -2)\ \ y \quad r = 3.$$

Nota. El procedimiento general para determinar el centro y el radio por el método de completar cuadrados es el siguiente:

La ecuación general de una circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(Si $A = C \neq 1$, se divide toda la ecuación entre A).

Completando cuadrados, se tiene:

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

$$\left[x + \frac{D}{2}\right]^2 + \left[y + \frac{E}{2}\right]^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

$$\therefore h = -\frac{D}{2}, k = -\frac{E}{2}, r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.$$

luego el centro es:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \text{ y el radio } \ r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

Para que exista circunferencia, el radio debe ser un número real positivo, luego:

$$D^2 + E^2 - 4F > 0.$$

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la circunferencia se reduce a un solo punto.

Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, el radio es imaginario y no existe circunferencia real.

Ejemplos:

1. La ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ representa una circunferencia real.

En efecto: D = 6, E = -2, F = 6

$$D^2 + E^2 - 4F = 36 + 4 - 24 = 16 > 0$$

Calculando sus elementos se encuentra: C (- 3, 1) $r = 2$.

2. La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$ representa una circunferencia que se reduce a un solo punto.

En efecto: D = -4, $E = 2$, $F = 5$,

$$D^2 + E^2 - 4F == 16 + 4 - 20 = 0$$

Hallando sus elementos el punto es C (2, -1) y el radio cero.

3. La ecuación: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 14 = 0$ representa una circunferencia de radio imaginario.

En efecto: D = -6, $E = -2$, $F = 14$.

$D^2 + E^2 - 4F = 36 + 4 - 56 = -16 < 0$

Calculando sus elementos resulta C (3, 1) y $r = \sqrt{-4}$ (imaginario).

2.- Ejercicios:

Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

1. Centro (0, 0) y radio 3.
2. Centro (2, -3) y radio 5.
3. Centro (3, -1/2) y radio 3.
4. Centro (- 1/2, 4) y radio 3/2.
5. Centro (-2/3, -1/2) y radio 2/3.
6. Centro (- 1/2, -1/3) y radio 3.
7. Centro (3, -1) y tangente al eje *Y*.

Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

8. $x^2 + y^2 = 4$.
9. $x^2 + y^2 = 4/9$.
10. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.
11. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$.
12. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25/4$.
13. $x^2 + (y-1)^2 = -2$.
14. $2x^2 + 2y^2 + 8x - 6y + 7 = 0$.
15. $9x^2 + 9y^2 - 36x - 54y + 113 = 0$.
16. $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 27 = 0$.

3.- Circunferencia determinada por tres condiciones.

Como 1a ecuación e una circunferencia, en su forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

o en la forma ordinaria,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

tiene tres parámetros *(D, E, F)* 0 *(h, k, r)* se necesitan tres condiciones para determinarlos.

Para hallar la ecuación de una circunferencia que cumple tres condiciones dadas (independientes) se expresaran estas analíticamente. Cada condición se traduce en una ecuación entre las coordenadas del centro, el radio y los datos, o bien, entre los coeficientes de la forma general y los datos.

Se llega finalmente a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que permite calcular los parámetros.

En algunos problemas es conveniente encontrar gráficamente el centro y el radio y expresar analíticamente las construcciones utilizadas.

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2 , 0), (1 , -1), (-1 , 3).

Sea $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ la ecuación buscada.

Expresando que pasa por cada uno de los puntos, es decir, que las coordenadas de los puntos dados satisfacen la ecuación de la circunferencia se tiene:

1) Por pasar por el punto (2, 0),

$$4 + 2D + F = 0 \quad \therefore \; 2D + F = -4$$

2) Por pasar por el punto (1, -1),

$$1 + 1 + D - E + F = 0 \;\; \therefore \;\; D - E + F == -2$$

3) Por pasar por el, punto (-1, 3),

$$1 + 9 - D + 3E + F = 0 \; \therefore \; -D + 3E + F = -10$$

4) Resolviendo e1 sistema de las tres ecuaciones, se obtiene:

$$D = 0, E = -2, \; F = -4.$$

5. Sustituyendo estos valores en la forma general se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0,$$

que es la ecuación buscada.

2. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes en los puntos
(-4,0) y (0,4) fig. 4.

El centro es el punto (- 4, 4) y el radio es igual a 4. Luego, aplicando la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, resulta:

$$(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16.$$

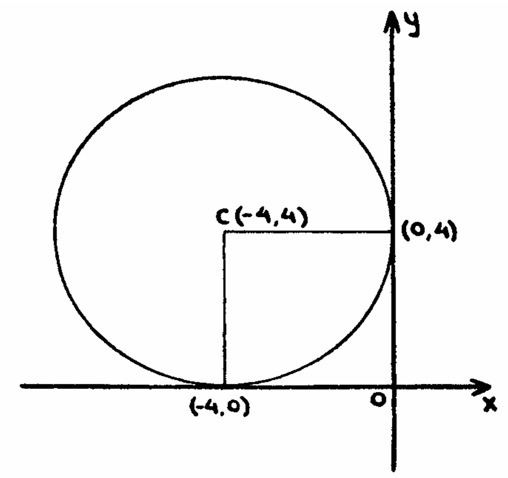


Fig. 4

Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une los puntos A-(3, -2) y B (5,4).

1. El centro C (fig. 5) es el punto medio del diámetro AB y sus coordenadas son:

$$x = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y = \frac{-2+4}{2} = 1 \therefore C(4,1).$$

2. El radio r es la distancia CA, de donde:

$$r = \sqrt{(3-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$$

3. La ecuación de la circunferencia de centro C (4 , 1) y $r = \sqrt{10}$, es:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10 \qquad \text{(forma ordinaria)}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \qquad \text{(forma general)}$$

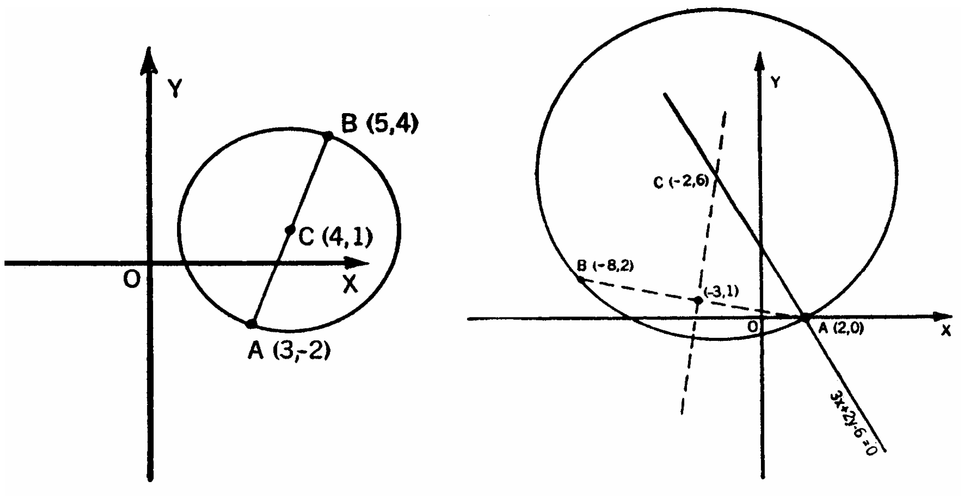


Fig. 5

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en la recta 3x + 2y -6 = 0 y pasa por los puntos A (2, 0) y B (-8,2).

1. Por pasar por A y B, el centro estará en la mediatriz de AB (fig. 5). La ecuación de la mediatriz de AB es:

$$5x - y + 16 = 0.$$

2. El centro C es el punto de intersección de las rectas:

$$3x + 2y - 6 = 0$$

$$5x - y + 16 = 0$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$x = -2,\ y = 6,\ \therefore C\ (-2, 6).$$

3. El radio es la distancia *CA,* luego:

$$r = CA = \sqrt{52}\,.$$

4. La ecuación de la circunferencia de centro C (- 2,6) y $r = \sqrt{52}$ es:

$$(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 52 \text{ (ordinaria)}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 12y - 12 = 0 \text{ (general)}$$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (2,3) y B (3,6) y es tangente a la recta

$$2x + y - 2 = 0.$$

1. Sea $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ la ecuación que buscamos.

2. Si la circunferencia pasa por el punto *A* (2, 3) sus coordenadas satisfacen la ecuación y tenemos:

$$(2 - h)^2 + (3 - k)^2 = r^2 \qquad (1)$$

3. También, si la circunferencia pasa por el punto *B* (3, 6) se verifica:

$$(3 - h)^2 + (6 - k)^2 = r^2 \qquad (2)$$

4. Si la circunferencia es tangente a la recta $2x + y - 2 = 0$, la distancia del centro C *(h, k)* a la recta es igual al radio *r.*

Luego:

$$r = \frac{|2h + k - 2|}{\sqrt{4+1}} \qquad \therefore \qquad r^2 = \frac{(2h + k - 2)^2}{5} \qquad (3)$$

5. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene que hay dos circunferencias, una de centro C (1,5) y radio $\sqrt{5}$ y otra de centro C' (13,1) Y radio 5 $\sqrt{5}$.

6. Las ecuaciones de las circunferencias que se buscan son:

a) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 5$ (ordinaria),

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$ (general) *b)* $(x-13)^2 + (y-1)^2 = 125$ (ordinaria),

$x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 == 0$ (general) .

4.- Intersecciones de una recta y una circunferencia.

El problema de hallar los puntos de intersección de una circunferencia y una recta es el de encontrar las coordenadas de los puntos *A* y *B que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones de la recta y la circunferencia.* Por lo tanto, bastara resolver el sistema formado por ambas ecuaciones.

Ejemplo. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 18$ y la recta $2x - y + 9 == O$.

Se resuelve el sistema:

$$x^2 + y^2 = 18 \qquad (1)$$

$$2x - y + 9 == 0 \qquad (2)$$

Despejando *y* de la (2), sustituyendo en la (1) y resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta, tendremos

$$y = 2x + 9 \qquad (3)$$

$$y + (2x + 9)^2 = 18$$

$$\therefore x_1 = -3, \quad x_2 = -\frac{21}{5}.$$

Sustituyendo los valores de *x* en (3), resulta:

$$y_1 = 3, \qquad y_2 = 3/5.$$

Los puntos de intersección son: *A* (- 3, 3) y *B* (-21/5, 3/5).

El sistema formado por las ecuaciones de la recta y la circunferencia puede tener, como en el ejemplo anterior, dos soluciones distintas, lo que indica que 1a recta es secante. Si tiene dos soluciones iguales, la recta es tangente y si 1as soluciones son imaginarias la recta es exterior.

5.- Intersección de dos circunferencias.

Para determinar los puntos comunes a dos Circunferencias dadas, basta observar que, por pertenecer los puntos a las dos circunferencias, sus coordenadas satisfacen las ecuaciones de ambas. Las coordenadas de los puntos de intersección son, pues, las soluciones del sistema formado por las dos ecuaciones.

Ejemplo. Hallar los puntos de intersección de las dos circunferencias:

$x^2 + y^2 - 2x = 0$ (1) $\qquad$ $x2 + y2 - 3x - 2y + 3 == 0$ $\qquad$ (2)

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones resulta:

$$(x_1 = 1, y_1 = 1), \qquad \left[x_2 = \frac{9}{5}, y_2 = \frac{3}{5}\right].$$

Luego los puntos de intersección de las dos circunferencias son:

$$A\ (1,1), \qquad\qquad B\left[\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right].$$

Si al resolver el sistema se obtienen dos soluciones diferentes las circunferencias son secantes; si resultan dos soluciones iguales son tangentes y si las soluciones son imaginarias las circunferencias no se cortan.

6.- Ecuaciones de la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos.

Para resolver este problema se aplica la propiedad de que la tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto *P (x , y)*.

Analíticamente esto quiere decir que la tangente y el radio tienen sus pendientes negativamente reciprocas. Luego hallaremos la pendiente m_1 del radio y la ecuación de la tangente es la de la recta que pasa por el punto dado *P (x , y)* y tiene de pendiente $-\frac{1}{m_1}$. Es decir:

$$y-y_1=-\frac{1}{m_1}\left(x-x_1\right)$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 13$ en el punto (3,2). (este punto es el de la circunferencia porque sus coordenadas satisfacen la ecuación).

1. El centro de 1a circunferencia es (0, 0).
2. La pendiente del radio que pasa por el punto (3, 2) es:

$$m_1=\frac{0-2}{0-3}=\frac{2}{3}$$

3. La pendiente de la tangente será $-\frac{1}{m_1}=-\frac{3}{2}$
4. La ecuación de la tangente, es la de la recta que pasa par el punto (3,2) y tiene de pendiente -3/2:

$$y-2 = -\frac{3}{2}\ (x-3) \quad \therefore \quad 3x + 2y-13 = 0.$$

Ejemplo 2: Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ en el punto *A* (2,1).

1. EI centro de la circunferencia es (- 2, 4).

2. La pendiente del radio que pasa por *A* es $m_1 = -\frac{3}{4}$.

La pendiente de la tangente es $\frac{4}{3}$.

3. La ecuación de la tangente en *A* es:

$$y - 1 = \frac{4}{3}(x-2) \quad \therefore \quad 4x-3y-5=0.$$

7.- Ecuaciones de las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.

Primer método. Sea una circunferencia de radio r y centro C (h, k) y sea P (x_1, y_1) un punto exterior. Del haz de rectas P, las tangentes son aquellas cuyas distancias al centro son iguales al radio. Esta condición nos permite determinar la pendiente m de cada tangente.

En efecto: La distancia del centro h a la recta

$$y-y_1 = m\,(x—x_1), \quad \text{o sea,} \quad mx-y-mx_1 + y_1 == 0,$$

$$\text{es: } r = \frac{mh-k-mx_1+y_1}{\pm\sqrt{m^2+1}},$$

y de esta ecuación se despeja m después de sustituir h y k por las coordenadas del centro y r por el radio de la circunferencia dada.

Si el punto es exterior se obtienen dos valores que corresponden a las dos tangentes, excepto en el caso en que una de las tangentes sea paralela al eje *Y.*

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y2 + 2x + 4y + 3 = 0$ que pasan por el punto, exterior a la circunferencia, A (2, -3).

(Este punto es exterior a la circunferencia porque su distancia al centro es mayor que el radio.)

1. La ecuación del haz de rectas que pasan por el punto A (2, -3) es:

$$y + 3 == m\,(x - 2) \quad \therefore \quad mx - y - 2m - 3 = 0\,. \qquad (1)$$

2: El radio de la circunferencia es $\sqrt{2}$, y el centro es el punto (-1, -2), luego:

$$\frac{m(-1)-(-2)-2m-3}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \quad \therefore \quad \frac{-3m-1}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}$$

y despejando m, resulta:

$$7m^2 + 6m - 1 = 0 \quad \therefore \quad m_1 = -1,\ m_2 = \tfrac{1}{7}$$

Substituyendo en (1) cada uno de estos valores de m se obtienen:

$$x + y + 1 = 0 \qquad\qquad x - 7y - 23 = 0,$$

que son las ecuaciones de las dos tangentes buscadas.

Segundo método. Otro método consiste en resolver el sistema formado par la ecuación del haz y la de la circunferencia y expresar que debe tener dos soluciones iguales, es decir, que el discriminante de la ecuación de segundo grado que resulta debe ser igual a cero.

En el ejemplo anterior resolvemos el sistema:

$$y = mx - 2m - 3,$$
$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0.$$

Sustituyendo en 1a segunda el valor de y dado por la primera:

$$(m^2 + 1)x^2 + (-4m^2 - 2m + 2)x + 4m^2 + 4m = 0$$

Igualando a cero el discriminante:

$7m^2 + 6m - 1 = 0 \quad \therefore \quad m_1 = \frac{1}{7}, \quad m_2 = -1$

y las ecuaciones de las tangentes son:

$$x - 7y - 23 = 0, \qquad\qquad x + y + 1 = 0,$$

que son las mismas obtenidas anteriormente.

8.- Ecuaciones de las tangentes a una circunferencia paralelas a una recta dada.

Este problema equivale analíticamente, a encontrar entre todas las rectas que tienen la misma pendiente que la recta dada, aquellas cuya distancia al centro es igual al radio.

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 14y + 44 = 0$ paralelas a la recta $2x + y + 1 = 0$.

1. La pendiente de la recta dada es -2.
2. La ecuación del haz de rectas de pendiente igual a -2 es:

$$y = -2x + n \qquad \therefore \qquad 2x + y - n = 0.$$

2. El centro de la circunferencia es el punto, (0, -7) y el radio $\sqrt{5}$.

La distancia del centro (0, -7) a la recta $2x + y - n = 0$ es:

$$\frac{2(0) + 7 - n}{\pm\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad \therefore \qquad n = 2, \quad n = 12$$

y las ecuaciones de las dos tangentes son:

$$2x + y - 2 = 0, \qquad\qquad 2x + y - 12 = 0.$$

9.- Circunferencia circunscrita a un triangulo.

Si el triángulo viene determinado por sus tres vértices, el problema queda reducido a determinar la circunferencia que pasa por tres puntos.

Si se dan los tres lados se hallan primero los vértices para reducirlo al caso anterior.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triangulo cuyos lados son:

$BC = x + 2y - 3 = 0$,

$AC = y - 2 = 0$,

$AB = 2x - y - 6 = 0$.

1. Las coordenadas del vértice C se obtendrán resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de los lados *BC* y *AC*.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3 &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= -1 \\ x &= 2. \end{aligned}\right\} \qquad C(-1,2).$$

2. Análogamente se obtienen los vértices *A* (4,2) y *B* (3, 0).
3. El problema queda reducido a encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A* (4,2) *B* (3, 0) y C (-1,2).
4. Dicha ecuación es: $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

Circulo inscrito a un triángulo. El centro del círculo se halla resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las bisectrices de dos de los ángulos interiores. El radio es la distancia del centro a uno cualquiera de los lados del triangulo.

10.- Ejercicios:

Hallar las ecuaciones de las circunferencias que cumplen las condiciones que se indican.

1. Radio 5 y concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0$.
2. Centro (3, -1) y tangente al eje *Y*.
3. Un diámetro es e1 segmento que une los puntos (2, -3) (- 4,5).
4. El centro es e1 punto de intersección de 1as rectas: $2x + 5y - 2 = 0$, $x - 2y + 8 = 0$,
   y pasa por e1 punto (2, -1).
5. Tiene su centro en 1a recta $2x - y - 10 = 0$ y pasa por los puntos (1, 3) y (5, -3).
6. Pasa por los puntos (1, 3) (4, 0) y (1, -1).
7. Pasa por e1 origen y por los puntos (- 2, 0) y (3, 3).
8. Pasa por los puntos (11, 1) (3, -3) y es tangente a la recta $3x + 4y + 13 = 0$.

Hallar las intersecciones de las rectas y 1as circunferencias en los siguientes casos indicando en cada uno la posición de la recta y la circunferencia y comprobar gráficamente el resultado.

9. $x^2 + y^2 = 29, \qquad y - 2x - 9 = 0.$

10. $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0, \qquad 3x + y + 11 = 0.$

11. $x^2 + y^2 = 4, \qquad 4x - 3y = 12.$

Encontrar en cada uno de los ejercicios siguientes los puntos de intersección de las circunferencias cuyas ecuaciones se indican y comprobar gráficamente el resultado.

12. $x^2 + y^2 + 4x = 0, \quad x^2 + y^2 - 2y = 0.$

13. $x^2 + y^2 = 5, \qquad x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0.$

Hallar la ecuación de las tangentes a las circunferencias en los puntos que se indican.

14. $x^2 + y^2 = 5$, en el punto (1,2).

15. $(x- 3)^2 + (y -2)^2 = 5$, en el punto (1, 3).

Hallar las ecuaciones de las tangentes a las circunferencias dadas que pasan por los puntos que se indican.

16. $x^2 + y^2 = 5$, y que pasan por el punto (3, 1).

17. $x^2 + y^2 = 25$ y que pasan por el punto (-7, 1).

Hallar las ecuaciones de las tangentes alas circunferencias dadas y que tienen 1a pendiente que se indica.

18. $x^2 + y^2 = 37, \quad m = \frac{1}{6}.$

19. $x^2 + y^2 = 8, \quad m = 1.$

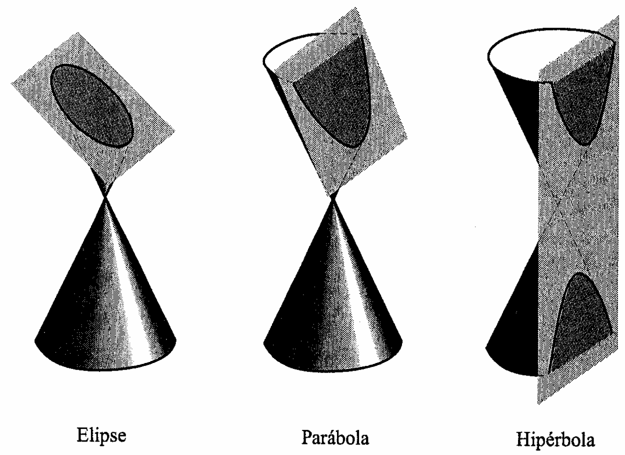
11.- Las cónicas.

La ecuación cuadrática general en *x* y *y* se puede expresar en la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La gráfica de una ecuación de segundo grado en las coordenadas x y y se llama sección cónica o simplemente cónica. Esta denominación viene del hecho de que la curva se puede obtener como la intersección de un cono circular recto y un plano.

El matemático griego Apolonio (262 A. C.-200 A. C.) escribió el tratado definitivo, *Secciones cónicas,* sobre este tema. Superó los trabajos de los geómetras griegos anteriores y formó la piedra angular del pensamiento acerca del tema por más de mil años. En efecto, pasaron dieciocho siglos antes de que Descartes escribiera su libro *La Geometría.*



La importancia de las secciones cónicas rebasa lo puramente histórico o académico; estas tienen muchas aplicaciones interesantes e importantes en la ciencia, la ingeniería y la industria. Aunque no se examine con detalle cada aplicación, se puede señalar una rica variedad de aplicaciones conocidas de las cónicas. Además, se descubrirán nuevas aplicaciones en el futuro, como ha sucedido en los últimos veintidós siglos. Muchas de las aplicaciones de hoy día ni siquiera podrían haberse imaginado hace cincuenta o cien años.

Obviamente hay diferentes tipos de secciones cónicas. Un plano que no pase por el vértice de un cono puede cortar todos los elementos de una hoja y formar una curva cerrada (Fig.1). Si el plano es paralelo a un elemento, la intersección se extiende indefinidamente a lo largo de una hoja, pero no corta la otra. El plano puede cortar ambas hojas y formar una sección de dos partes, cada una extendiéndose indefinidamente a lo largo de la hoja. Además de estas secciones, el plano puede pasar por el vértice del cono y determinar un punto, una recta o dos rectas que se intersecan. Una intersección de cada uno de estos tipos se llama, algunas veces, *cónica degenerada*.

12.- La Parábola

Definición:

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo y de una recta fija en el plano. El punto fijo se llama **foco** y la recta fija, **directriz.**

En la figura 2 el punto *F* es el foco y la recta *D* la directriz. El punto *V,* a la mitad entre el foco y la directriz, debe pertenecer a la parábola. Este punto se llama vértice.

Otros puntos de la parábola se pueden localizar de la siguiente manera. Dibuje una recta *L* paralela a la directriz (Fig. *2*). Con *F* como centro y radio igual a la distancia entre las rectas *D* y *L,* describa arcos que corten a *L* en *P* y *P'.* Cada uno de estos puntos, al ser equidistantes del foco y de la directriz, se encuentra sobre la parábola. La curva se puede esbozar determinando, de esta manera, unos cuantos puntos. La recta *VF* que pasa por el vértice y el foco es el bisector perpendicular de *PP'* y de todas las demás cuerdas dibujadas de manera similar. Por esta razón, a la recta se le llama eje de la parábola y se dice que la parábola es simétrica con respecto a su eje.

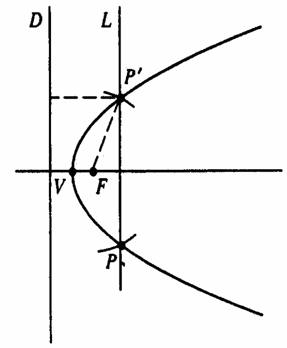


Figura 2

Aunque los puntos de la parábola se pueden localizar mediante la aplicación directa de la definición de parábola, es más fácil obtenerlos a partir de la ecuación de la curva. Se puede escribir la ecuación más sencilla de la parábola si los ejes coordenados se colocan en una posición especial con respecto a la directriz y al foco. El eje *x* se coloca sobre la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz, en tanto que el origen se coloca en el vértice. Entonces, si se escoge $a > 0$, las coordenadas del foco se representan con $F(a, 0)$ y la ecuación de la directriz con $x = -a$ (Fig. 3). Como cualquier punto $P(x, y)$ de la parábola dista lo mismo del foco que de la directriz, se tiene que

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a\,.$$

Después, en esta ecuación se elevan al cuadrado los binomios y se agrupan términos. Así, $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$,

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$y^2 = 4ax.$$

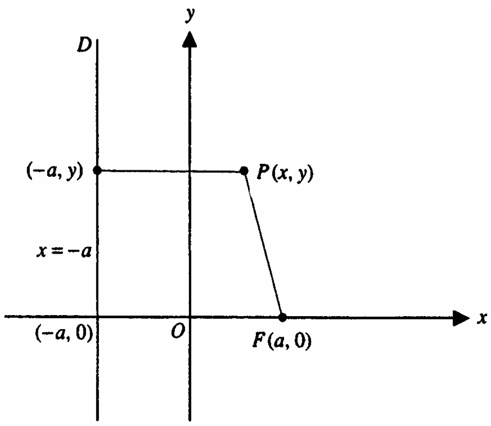


Figura 3

Esta es la ecuación de una parábola con el vértice en el origen y foco en *(a,* 0). Como $a > 0$, x puede tomar cualquier valor positivo o cero, pero no valores negativos, la gráfica se aleja indefinidamente en el primer y cuarto cuadrantes y el eje de la parábola es el eje x positivo (Fig. 4). A partir de la ecuación, resulta evidente que la parábola es simétrica con respecto a su eje, pues $y = \pm 2\sqrt{ax}$.

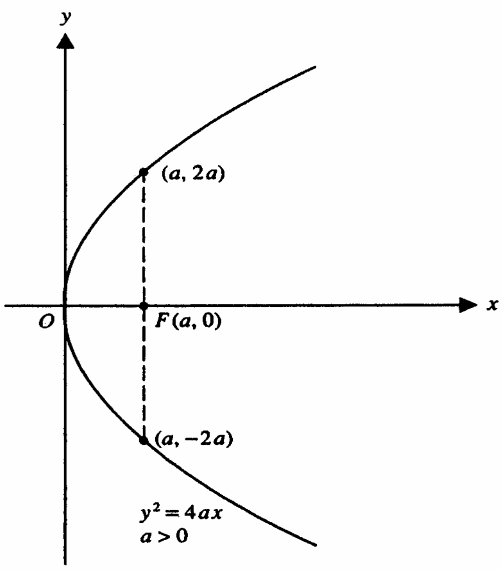


Figura 4

La cuerda trazada por el foco y perpendicular al eje de la parábola recibe el nombre **de lado recto**. La longitud del lado recto se puede determinar mediante las coordenadas de sus extremos. Sustituyendo a por x en la ecuación $y = 4ax,$ se encuentra

$$y^2 = 4a^2 \qquad\qquad y = \pm\, 2a.$$

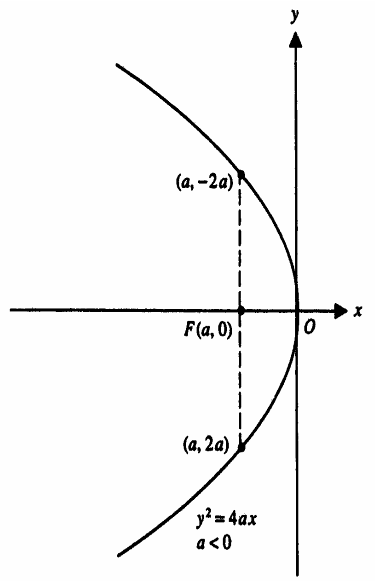


Figura 5

Por tanto, los extremos son *(a, -2a)* y *(a, 2a).* Esto hace que la longitud del lado recto sea igual a *4a.* El vértice y las extremidades del lado recto son suficientes para hacer un esbozo de la parábola.

Por supuesto, se puede tener el foco de una parábola a la izquierda del origen. Para este caso se escoge $a < 0$, el foco se representa con *F(a,* 0) y la directriz con $x = -a$ (Fig.5) Entonces, la medición positiva desde un punto *P(x, y)* de la parábola a la directriz es *-a-x.* Por consiguiente,

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} = -a-x = |a+x|,$$

y esta ecuación, como antes, se reduce a

$$y^2 = 4ax.$$

Como $a < 0$, la variable x sólo puede tomar valores negativos y cero, como se muestra en la figura 5.

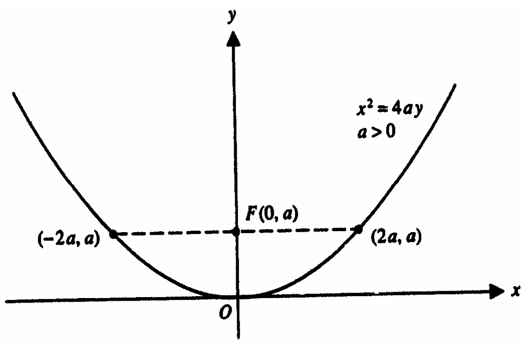


Figura 6

En el análisis anterior, el eje x se coloco sobre la recta que pasa par el foco y es perpendicular a la directriz. Si se escoge esta posición para el eje *y,* se intercambiaran los papeles de x y *y.* Por tanto, la ecuación de la parábola seria:

$$x^2 = 4ay.$$

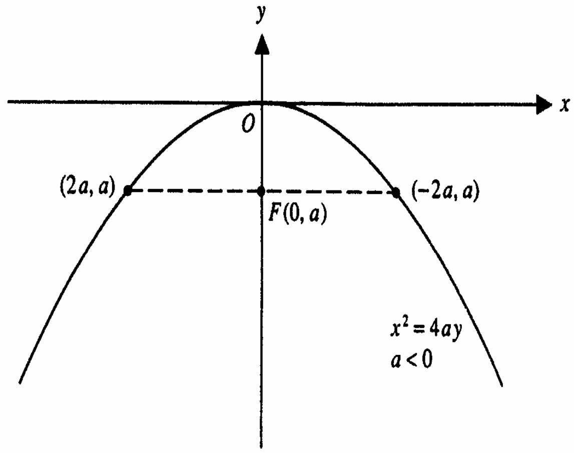


Figura 7

La gráfica de esta ecuación, cuando $a > 0$, esta en la figura 6 y cuando $a < 0$, en la figura 7. Se observa que cambiando el signa de a, la gráfica, en efecto, se *refleja* a través del eje x; surge así una nueva gráfica que es congruente con la original.

Para resumir, se hacen las siguientes afirmaciones.

Teorema 1:

La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en $(a, 0)$ es:

$$y^2=4ax \qquad (1)$$

La parábola se abre hacia la derecha si $a > 0$ y se abre hacia la izquierda si $a <$ O. La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en $(0, a)$ es:

$$x^2 = 4ay \qquad (2)$$

La parábola se abre hacia arriba si $a> 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Se pueden aplicar las ecuaciones (1) y (2) para encontrar las ecuaciones de parábolas que satisfacen condiciones específicas. Su usa se ilustra con algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Escriba la ecuación de la parábola con vértice en el origen y el foco en (0, 4). Grafique la parábola.

Solución:

Aquí se aplica la ecuación (2). La distancia del vértice al foco es 4 y, por tanto, $a = 4$. Sustituyendo este valor con a, se obtiene $x^2=16y$. La gráfica aparece en la figura 8.

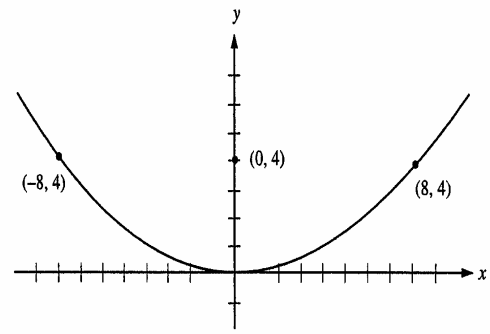


Figura 8

Ejemplo 2: Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje a lo largo del eje x y pasa por el punto (-3, 6). Encuentre su ecuación.

Solución. La ecuación de la parábola es de la forma $y^2 = 4ax$. Para determinar el valor de $4a$, se sustituyen las coordenadas del punto dado en esta ecuación. Así, se obtiene

$$36 = 4a(-3) \qquad \text{y} \qquad 4a = -12.$$

La ecuación requerida es $y^2 = -12x$. El foco esta en (-3, 0) y el punto dado es el extrema superior del lado recto. La gráfica se elaboró en la figura 9.

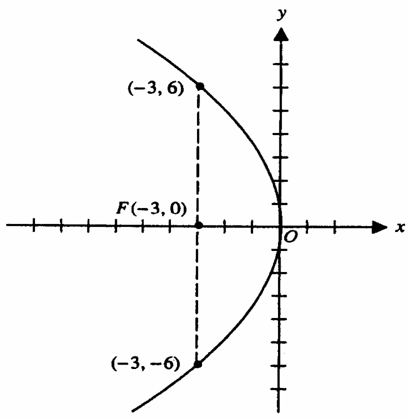


Figura 9

Ejemplo 3: La ecuación de una parábola es, $x^2 = -6y$. Encuentre las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución:

La ecuación es de la forma (2), donde a es negativa. Por ello, el foco se encuentra sobre el eje y negativo y la parábola se abre hacia abajo. A partir de la ecuación $4a = -6$ se encuentra $a = -\frac{3}{2}$: Por tanto, las coordenadas del foco son $(0, -\frac{3}{2})$ y la directriz es $y = \frac{3}{2}$. La longitud del lado recto es igual al valor absoluto de $4a$, y en este caso es 6. El lado recto se extiende 3 unidades hacia la izquierda del foco y 3 unidades hacia la derecha. La gráfica se puede esbozar mediante un trazo que pase por el vértice y por los extremos del lado recto. Para una gráfica más precisa, podrían localizarse unos cuantos puntos más (Fig. 10).

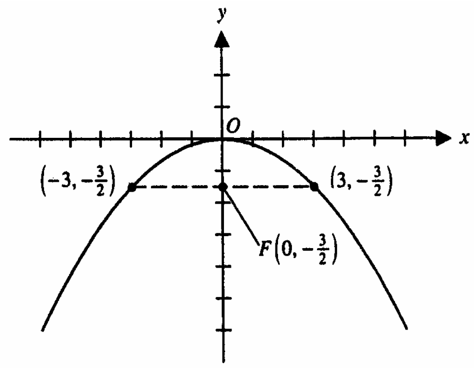


Figura 10

13.- Ejercicios:

Encuentre las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y las coordenadas de sus extremos para cada una de las parábolas dadas. Encuentre además la ecuación de la directriz de cada parábola. Dibuje cada curva.

1. $y^2 = 4x$ *2.* $y^2 = -16x$ *3.* $x^2 = 4y$

4. $x^2 = -10y$

Escriba la ecuación de la parábola con vértice en el origen que satisface las condiciones dadas en los ejercicios:

5. Foco en (3, 0) 6. Foco en (0,3)

7. Foco en (-4, 0) 8. Foco en (0, -3)

9. La directriz es $x + 4 = 0$ 10. La directriz es $y - 4 = 0$

11. La longitud del lado recto es 10 y la parábola se abre hacia la derecha.

12. La longitud del lado recto es 8 y la parábola se abre hacia arriba.

14.- PARÁBOLA CON VÉRTICE EN (h, k)

Considere ahora una parábola cuyo eje es paralelo a un eje coordenado, pero no esta sobre él. En la figura 11 el vértice esta en (h, k) y el foco en (h + *a, k*). Se introduce otro par de ejes mediante una traslación al punto (h, *k*). Como la distancia del vértice al foco es *a,* se obtiene en seguida la ecuación:

$$y'^2 = 4ax'.$$

Para escribirla ecuación de la parábola con respecto a los ejes originales, se aplican las fórmulas de traslación y se obtiene así:

$$(y - k)^2 = 4a(x - h).$$

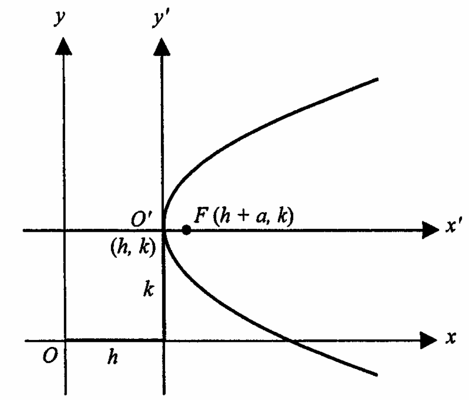


Figura 11

Se observa de esta ecuación, y también de la figura, que cuando $a > 0$, el factor x-h del miembro derecho debe ser mayor o igual que cero. En consecuencia, la parábola se abre hacia la derecha. Para $a < 0$ el factor x-h debe ser menor o igual a cero y, por tanto, la parábola se abriría hacia la izquierda. El eje de la parábola se halla sobre la recta $y - k = 0$. La longitud del lado recto es igual al valor absoluto de *4ay* entonces los extremos se pueden localizar con facilidad.

Se puede hacer un análisis similar si el eje de una parábola es paralelo al eje *y.* En consecuencia, se tienen las siguientes afirmaciones.

Teorema 2

La ecuación de una parábola con vértice en *(h, k)* y foco en *(h+a, k)* es:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h). \qquad (3)$$

La parábola se abre hacia la derecha si $a > 0$ y hacia la izquierda si $a < 0$.

La ecuación de una parábola con vértice en *(h, k)* y foco en *(h, k+a)* es:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k). \qquad (4)$$

La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Se dice que las ecuaciones (3) y (4) se encuentran en forma usual. Cuando $h = 0$ y $k = 0$, aquellas se reducen a las ecuaciones más sencillas de la sección anterior. Si la ecuación de una parábola está en su forma usual, su gráfica puede esbozarse con rapidez. Para ello bastan el vértice y los extremos del lado recto. Naturalmente, si se localizan algunos otros puntos, la precisión será mayor.

Se observa que cada una de las ecuaciones (3) y (4) es cuadrática en una variable y lineal en la otra variable. Este hecho se puede expresar de manera más elocuente si se hacen los cuadrados indicados y se trasponen términos para obtener las formas generales:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (5)$$

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (6)$$

Recíprocamente, una ecuación de la forma (5) o (6) se puede presentar en forma usual siempre que $E \neq 0$ y $D \neq 0$.

Ejemplo 1: Dibuje la gráfica de la ecuación:

$$y^2 + 8x - 6y + 25 = 0.$$

Solución: La ecuación representa una parábola pues y aparece al cuadrado y x linealmente. La grafica se puede trazar con mayor rapidez si la ecuación se reduce a la forma usual. Así, completando el cuadrado, se obtiene:

$$y^2 - 6y + 9 = -8x - 25 + 9,$$

$$(y - 3)^2 = -8(x + 2).$$

El vértice se ubica en (-2, 3). Como $4a = -8$ y $a = -2$, el foco esta dos unidades a la izquierda del vértice. La longitud del lado recto, igual al valor absoluto de $4a$, es 8. Por consiguiente, el lado recto se extiende 4 unidades par arriba y por abajo del foco. La gráfica se construye en la figura 12.

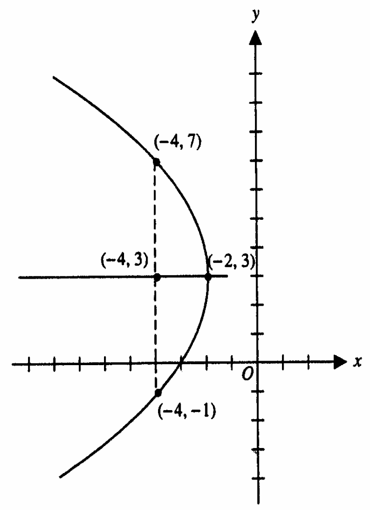


Figura 12

Ejemplo 2: Construya la gráfica de la ecuación:

$$x^2 - 6x - 12y - 51 = 0.$$

Solución: La ecuación dada representa una parábola pues y aparece al cuadrado y x es lineal. Primero se expresa la ecuación en forma usual.

$$x^2-6x+9= 12y+51 +9,$$

$$(x -3)^2 = 12(y + 5).$$

El vértice se ubica en (3, -5). Como $4a = 12$, $a = 3$. De este modo, el foco esta 3 unidades sobre el vértice, o en (3, -2); La longitud del lado recto es 12, y por tanto las coordenadas de sus extremos son (-3, -2) y (9, -2). La gráfica se construye en la figura 13.

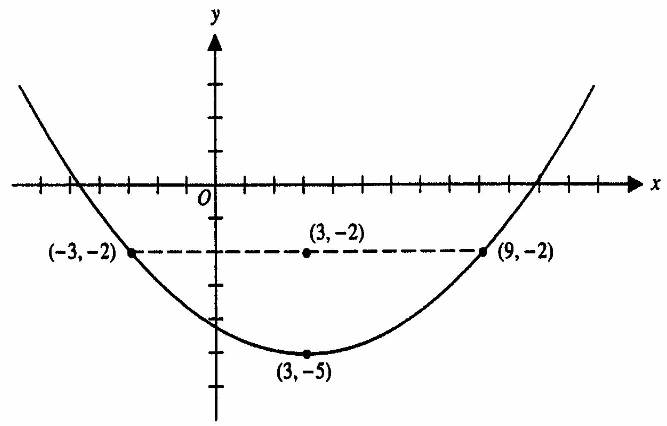


Figura 13

Ejemplo 3: Una parábola cuyo eje es paralelo al eje y pasa por los puntos (1, 1), (2, 2) y (-1, 5). Encuentre su ecuación.

Solución: Como el eje de la parábola es paralelo al eje y, la ecuación debe ser cuadrática en x y lineal en y. Por ello se comienza con la forma general:

$$x^2 + Dx + Ey + F == 0.$$

Las coordenadas de cada uno de los puntos dados deben satisfacer esta ecuación. Sustituyendo las coordenadas de cada punto, uno por uno, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$1 + D + E + F = 0,$$

$$4 + 2D + 2E + F = 0,$$

$$1 - D + 5E + F = 0.$$

La solución simultanea de estas ecuaciones es D = -2, E = -1 y F = 2. Entonces la ecuación de la parábola es $x^2- 2x -y + 2 = 0$. Véase la figura 14.

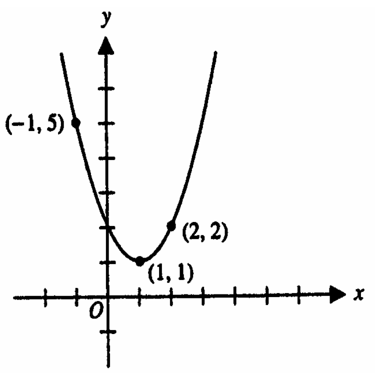


Figura 14

15.- Simetría

Se ha observado que el eje de una parábola biseca todas las cuerdas de la parábola que son perpendiculares a los ejes. Por esta razón, se dice que una parábola es simétrica con respecto a su eje. El hecho de que muchas otras curvas posean la propiedad de simetría conduce a la siguiente:

Se dice que dos puntos A y B son simétricos con respecto a una recta si ésta es el bisector perpendicular al segmento de la recta AB. Una curva es simétrica con respecto a una recta si cada uno de sus puntos forma parte de un par de puntos simétricos con respecto a la recta. Dos puntos A y B son simétricos con respecto a un punto *O*, si *O* es el punto medio del segmento de recta AB. Una curva es simétrica con respecto a un punto *O* si cada uno de sus puntos forman parte de un par de puntos simétricos con respecto a *O*.

La simetría de una curva con respecto a un eje coordenado o al origen es de especial interés. Por esta razón se harán las observaciones siguientes; Los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son simétricos con respecto al eje x. En consecuencia, una curva es simétrica con respecto al eje x si para cada punto (x, y) de la curva, el punto $(x, -y)$ también pertenece a la curva. De manera análoga, una curva es simétrica con respecto al eje y si, para cada punto (x, y) de la curva, el punto $(-x, y)$ también pertenece a la curva. Los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ son simétricos con respecto al origen. Por tanto, una curva es simétrica con respecto al origen si para cada punto (x, y) de la curva, el punto $(-x, -y)$ también pertenece a la curva (véase la fig. 15).

Es fácil comprobar, mediante su ecuación, si una gráfica es simétrica con respecto a algún eje coordenado o al origen. Considere, por ejemplo, la ecuación $x^2 = 4y + 6$. Si x se reemplaza con $-x$, no se altera la ecuación. Esto significa que si a x se le da un valor y después el negativo de ese valor, los valores correspondientes de y son iguales. Por ello, para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(-x, y)$ que también esta en la gráfica. Por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Por otro lado, asignar valores a y con igual valor absoluto, uno positivo y otro negativo, conduce a diferentes valores correspondientes de x. En consecuencia, la gráfica no es simétrica con respecto al eje x. De manera análoga, la gráfica no es simétrica con respecto al origen.

Los siguientes criterios se formulan a partir de la definición de simetría:

1. Si una ecuación no se altera cuando y se reemplaza con $-y$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x.
2. Si una ecuación no se altera cuando x se reemplaza con $-x$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje y.
3. Si una ecuación no se altera cuando x se reemplaza con $-x$ y y con $-y$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al origen.

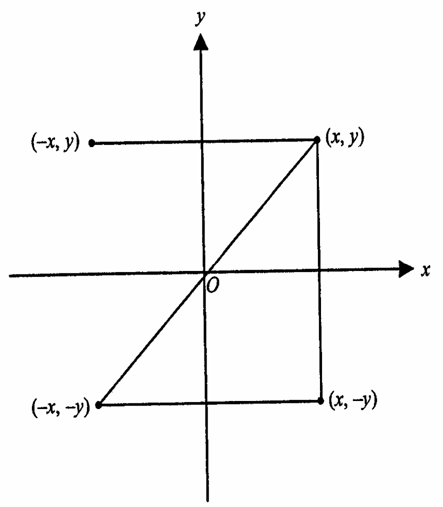


Figura 15

Hay tres tipos de simetrías, y es fácil ver que una gráfica que posee dos de las simetrías también posee la tercera simetría. Suponga por ejemplo que el punto (x, y) esta en la gráfica, la cual es simétrica tanto con respecto al eje x como al eje y. La simetría con respecto al eje y significa que el punto $(-x, y)$ se encuentra en la gráfica. Por tanto, la simetría con respecto al eje x significa que el punto $(-x, -y)$ esta en la gráfica. Por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al origen. Esta claro que, además, una gráfica que sea simétrica con respecto a un eje coordenado y al origen es simétrica con respecto al otro eje.

La gráfica de la ecuación $x\,y = 1$ es simétrica con respecto al origen. Esto es cierto, pues si un punto (x_1, y_1) satisface la ecuación dada, entonces el producto $x_1\,y_1=1$. En consecuencia, el producto $(-x_1)(-y_1)$ también es igual a 1.

Ejemplo 4: Construya la gráfica de la ecuación,

$$x^4 - 36y^2 = 0.$$

Solución: Es claro que la gráfica posee las tres simetrías. Para obtener la gráfica, primero se factoriza el lado izquierdo de la ecuación dada. Se obtiene así:

$$(x^2 + 6y)(x^2 - 6y) = 0.$$

Entonces, al igualar carla factor a 0 se obtiene:

$$x^2 + 6y = 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 - 6y = 0.$$

Por tanto, la gráfica deseada consta de dos parábolas, cada una con el vértice en el origen, una abriéndose hacia arriba y la otra hacia abajo. Se trazará la gráfica de $x^2 = 6y$ y después se obtendrá, por simetría, la gráfica de la otra parábola. Para la parábola que se abre hacia arriba, se tiene $4a = 6$ y $a = \frac{3}{2}$. Por tanto, el foco esta en el punto $(0, \frac{3}{2})$ y los extremos del lado recto se encuentran en $(3, \frac{3}{2})$ y $(-3, \frac{3}{2})$. Localizando algunos otros puntos, se puede obtener un buen dibujo. La gráfica completa se muestra en la figura 16.

Un proyectil (p. ej., una pelota o una bala) recorre una trayectoria que es aproximadamente una **parábola.** Sin embargo, la parábola tiene una característica muy importante que la hace útil en una amplia variedad de aplicaciones: tiene la propiedad de reflejar o enfocar. Los dos ángulos, θ y ϕ *en* la figura 17, formados por una recta paralela al eje y una tangente L a la parábola en un punto, así como por la recta del foco F al punto, son iguales. Si la parábola es una superficie reflejante, entonces los rayos de luz viajan paralelos al eje y se reflejan hacia el foco. Por ello, un paraboloide de revolución (superficie formada al rotar una parábola alrededor de su eje) es la forma ideal para telescopios reflejantes, faros de automóvil, antenas de radar y microondas, antenas caseras para televisión por saté1ite y algunos generadores solares de electricidad.

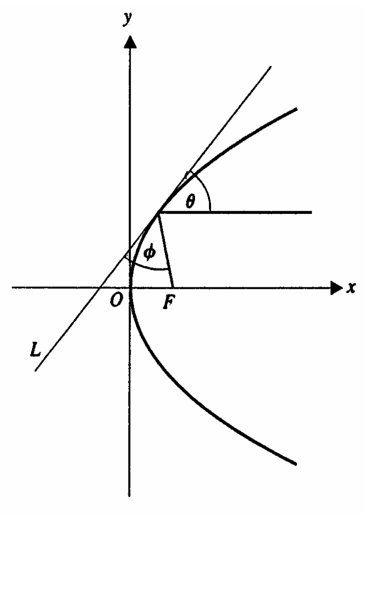


Figura 17

16.- Ejercicios:

En los siguientes ejercicios exprese la ecuación, en forma usual, de la parábola que satisface las condiciones dadas.

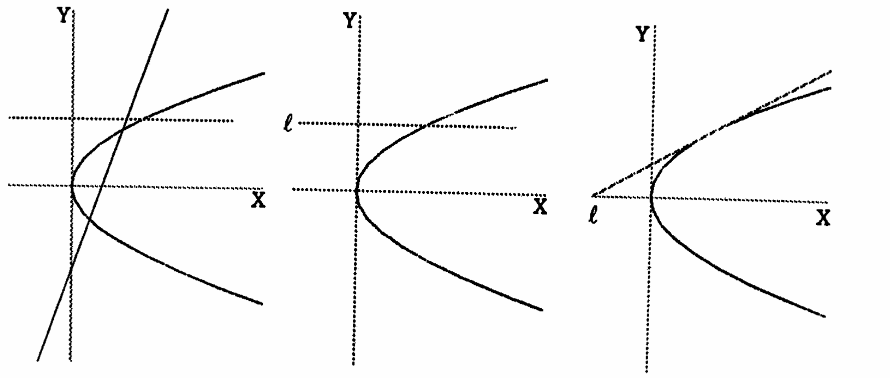
1. Vértice en (3, 2), foco en (3, 4).
2. Vértice en (3, -2), foco en (3, -8).
3. Vértice en (-6, -4), foco en (0, -4).
4. Vértice en (4, 1), directriz x = 2.

En los siguientes ejercicios exprese cada ecuación en la forma usual. Indique las coordenadas del vértice, del *foco* y de los extremos del lado recto. Dibuje la gráfica.

5. $y^2+8x+8 = 0$
6. $x^2+4y+8 = 0$
7. $y^2-12x-48 = 0$
8. $x^2+16y-32 = 0$
9. $x^2+4x+ 16y+4 = 0$
10. $y^2-6y-4x+9 = 0$
11. $y^2+8y+6x+ 16 = 0$
12. $x^2+ 10x-20y+25=0$

17.- Recta tangente a la parábola

Recordemos que una recta l es *tangente* a una cónica en un punto P de ella, si corta a la cónica únicamente en P y todos los demás puntos de l están en una sola de las regiones determinadas por la cónica. En la figura (19) la primera recta corta a la parábola en dos puntos, la segunda corta a la parábola en un punto,



(a) (b) (c)
Figura 19

pero tiene una parte dentro y otra fuera de la parábola, en cambio, la tercera recta toca a la parábola en un solo punto y se queda fuera de ella.

La siguiente proposición nos permitirá calcular la ecuación de la tangente a una parábola en un punto de ella.

Proposición

Dado P un punto en la parábola

$$y^2 = 4px \,, \qquad (7)$$

la bisectriz del ángulo formado por la recta F P y la recta horizontal que pasa por P, que esta del mismo lado de ambas rectas que el origen es la recta tangente a la parábola.

Demostración:

En la figura (20) , como l' es la bisectriz del ángulo formado por la recta PF y la recta horizontal que pasa por P, el punto simétrico de F respecto a l' es R, así que para cualquier punto Q de l',

$$d(Q\,,R) = d(Q\,,F)\,,$$

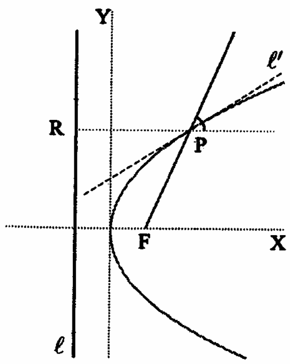


Figura 20 Recta tangente a una parábola

pero si $Q \neq P$, la distancia de Q a la directriz es menor que la distancia de Q a R, así que

$$d(Q\,,\,l) < d(Q,\,R)\,,$$

de donde,

$$d(Q\,,\,l) < d(Q,\,F)$$

y por lo tanto, Q esta fuera de la parábola. Como esto pasa para todo punto $Q \neq P$ de la bisectriz l', entonces l' es la recta tangente en P a la parábola con lo que queda probada la proposición.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola por el punto P lo que debemos hacer entonces es encontrar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por la recta $P\,F$ y la recta horizontal que pasa por P.

Las coordenadas de P y F son $P\,(x_1,\,y_1)$, $F\,(p,\,0)$.

La ecuación de la recta que pasa par P y F es:

$$(x_1 - p)\,(y - y_1) = y_1\,(x - x_1)$$

y la ecuación de la recta horizontal que pasa por P es:

$$y = y_1$$

Escribimos estas ecuaciones en la forma normalizada de manera que el origen quede del mismo lado de ambas rectas.

$$\frac{y_1 x + (p - x_1)y - p y_1}{\sqrt{y^2{}_1 + (p - x_1)^2}} = 0 \qquad \text{y} \qquad y - y_1 = 0\,,$$

para encontrar los puntos que equidistan de ambas rectas, igualamos:

$$\frac{y_1 x + (p - x_1)y - p y_1}{\sqrt{y^2{}_1 + (p - x_1)^2}} = y - y_1\,,$$

ahora utilizamos el hecho de que $P\,(x_1,\,y_1)$ pertenece a la parábola, así que sus coordenadas satisfacen la ecuación (7) y podemos simplificar el denominador.

$$\frac{y_1 x + (p - x_1)y - p y_1}{p + x_1} = y - y_1$$

efectuando las operaciones y simplificando., obtenemos la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punta $P(x_1, y_1)$

$$y_1 x - 2x_1 y - x_1 y_1 = 0 \qquad (8)$$

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 8x$ que pasa por el punto $Q(2,4)$. Ver la figura (21).

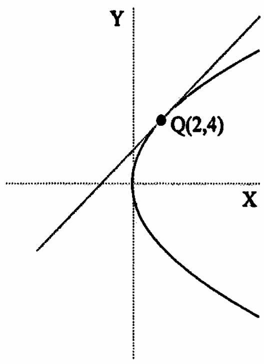


Figura 21 **Recta tangente a la parábola $y^2 = 8x$**

Solución:

Sustituyendo las coordenadas de Q en la ecuación (8) obtenemos:

$$4x\text{-}2(2)y\text{+}(2)(4)\text{=}0,$$

simplificando obtenemos;

$$x - y + 2 = 0.$$

Mediante argumentos similares se puede ver que la recta tangente en un punto $Q(x_1, y_1)$ a una parábola con vértice en el origen y vertical es:

$$2y_1 x - x_1 y - x_1 y_1 = 0. \qquad (9)$$

Ejemp1o:

Encontrar la ecuación de la tangente a la parábola $3x^2 + y = 0$ en el punto $Q(1, -3)$.

Solución:

Como la variable que esta elevada al cuadrado es x, la parábola es vertical, la ecuación tiene la forma (9), sustituyendo las coordenadas de Q en esta ecuación obtenemos

$$2\,(-3)\,x - (1)\,y + 3 = 0,$$

simplificando obtenemos

$$6x + y - 3 = 0.$$

Veamos ahora como encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola con vértice en $V(x_0,y_0)$ y foco $F(x_0 + p,\ y_0)$ en el punto $Q(x_1,\ y_1)$. Trasladamos los ejes para que el origen quede en V mediante la sustitución

$$x' = x - x_0 \qquad \text{y} \qquad y' = y - y_0\,, \qquad (10)$$

las coordenadas de Q respecto a los nuevos ejes son

$$x' = x_1 - x_0 \qquad \text{y} \qquad y' = y_1 - y_0\,, \qquad (11)$$

como la parábola es horizontal entonces, por (8)

$$y'_1 x' - 2x'_1 y' + x'_1 y'_1 = 0\,,$$

sustituyendo x' y y' de acuerdo a (10) y x'_1 y y'_1 de acuerdo a (11) obtenemos que la recta tangente a la parábola en $Q(x_1,y_1)$ es:

$$(y_1 - y_0)\,(x - x_0) - 2\,(x_1 - x_0)\,(y - yo) + (x_1 - x_0)\,(y_1 - y_0) = 0\,,$$

donde $Q(x_1,\ y_1)$ es el punto de tangencia y $V(x_0,y_0)$ es el vértice de la parábola.

Análogamente se encuentra la ecuación de la recta tangente a una parábola vertical.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 10y - 8x + 9 = 0$ en el punto $Q(-\frac{3}{2},7)$.

Solución:

Escribimos la ecuación de la parábola en la forma estándar;

$$y^2 - 10y - 8x + 9 = 0,$$

$$y^2 - 10y = 8x - 9,$$

$$(y - 5)^2 = 8x - 9 + 25,$$

$$(y - 5)^2 = 8x + 16,$$

$$(y-5)^2 = 8(x+2),$$

vemos que la parábola es horizontal y su vértice es $V(-2,5)$, así que la ecuación de la recta tangente en Q $(-\frac{3}{2},\ 7)$ es:

$$(7-5)(x+2) - 2\left(\left(-\frac{3}{2}\right)+2\right)(y-5) + \left(\left(-\frac{3}{2}\right)+2\right)(7-5) = 0$$

después de simplificar obtenemos:

$$2x - y + 10 = 0\,.$$

18.- Ejercicios

Encuentra en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado.

1. $2y^2 - x + 12y + 22 = 0$; Q (36, 1).
2. $3x^2 - y - 3 = 0$; Q (4, 45).
3. x2 -3y = 0; Q (2, $\frac{4}{3}$).
4. $y^2 - 12x - 4y - 20 = 0$; Q ($\frac{11}{4}$, -1).
5. $3y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$; Q (10, 3).
6. $x^2 + 4x - 8y - 20 = 0$; Q (-2, -3).
7. $y^2 + x = 0$; Q (-4, 2).
8. x^2-3x-4y-~=0; Q ($\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$).
9. $y^2 + 5x + 5 = 0$; Q (-6, 5).
10. $3y^2+2x=0$; Q ($-\frac{3}{2}$,-1).

Unidad IV.- Cónicas parte II.

Elipse.

1.- La elipse como lugar geométrico. Definición y elementos.

Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' (fig. 1) *es una cantidad constante, que se representa por $2a$.* Así, para cualquier punto M de la curva, se tiene $MF + MF' = 2a$.

Los puntos fijos F y F' se llaman *focos* y la longitud FF' *distancia focal* que se designa por $2c$.

El punto medio de FF' es el *centro* de 1a elipse.

Para que haya elipse es necesario que $2c < 2a$ o sea $c < a$ (pues en el triángulo MFF' un lado $FF' = 2c$, es menor que la suma de los otro dos $MF' + MF = 2a$).

Los segmentos MF y MF' que unen un punto cualquiera de la elipse con los focos se llaman *radios vectores.*

Un segmento CC' que une dos puntos cualesquiera de la elipse es una *cuerda.*

Una cuerda que pasa por el centro, tal como DD', es un *diámetro.*

El diámetro que pasa por los focos se llama *eje mayor* o *eje focal* y el perpendicular a el es el *eje menor,* o *normal,* que se designa por $2b$. En la figura, AA' es el eje mayor *y* BB' el menor.

Las intersecciones A , A', B y B' de los ejes con la curva son los *vértices* de la elipse.

Las cuerdas *EE´ y GG´* que pasan por los focos y son perpendiculares al eje mayor son los lados rectos de la elipse.

Excentricidad de una elipse es la razón de la semidistancia focal al semieje (c/a) y se representa por e.

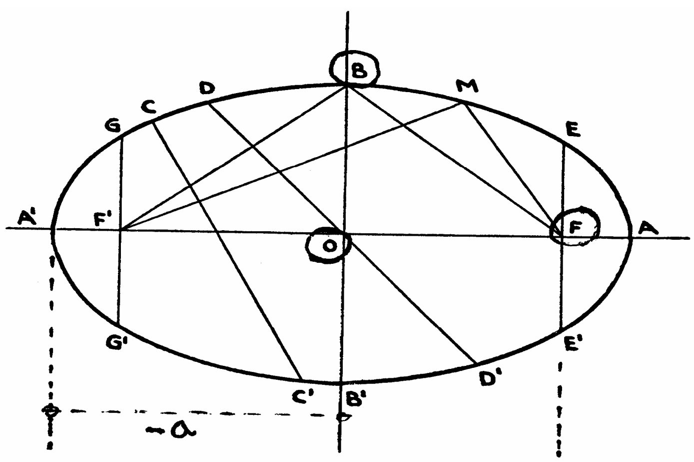


Fig. 1

2.- Construcción de una elipse.

1. Dados los focos F y F´ y la cantidad constante 2ª. (fig. 2).

1. Se señala el centro C (punto medio de FF´) y se traza por él la perpendicular BB´ a FF´.
2. A partir del centro se señalan los vértices A y A´ que distan *a* del centro.
3. Con centro F o F´ y radio *a* se señalan los vértices B y B´.
4. Se toma un punto cualquiera M del segmento FF´ (puesto que la diferencia MA´- MA debe ser menor que FF´) y con el centro en los focos y radios MA y MA´ se trazan dos arcos que se cortaran en puntos de la elipse. Para diferentes posiciones del punto M se obtendrán nuevos puntos, y uniéndolos por medio de un trazo continuo se obtiene la curva.

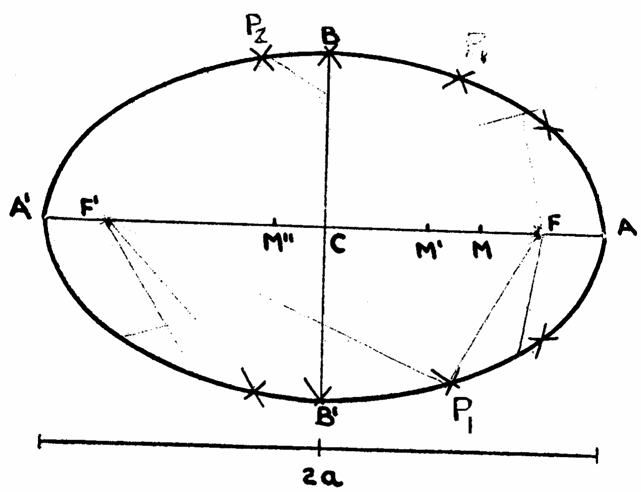


Fig. 2

2. Dadas las longitudes 2a r 2b de los ejes.

Se trazan las circunferencias que tienen como diámetros los dos ejes de la elipse (fig. 3). Sea *OD* un radio cualquiera de la circunferencia de radio *a y* C el punto donde corta a la circunferencia de radio *b.* Tracemos por *D* la perpendicular a *OA* y por *C* la paralela a *OA.* El punta *P* en que se cortan pertenece a la elipse.

Repitiendo 1a construcción para diferentes posiciones de *OD* y uniendo los puntos obtenidos por un trazo continuo se tiene la elipse.

Nota: una vez estudiada la ecuación de la elipse se puede demostrar que los puntos P, así obtenidos son de la elipse.

En efecto: sean (x , y) las coordenadas del punto P referidas a los ejes de la elipse como ejes coordenados.

Los triángulos OED y CPD son semejantes y por tanto:

$$\frac{ED}{EP} = \frac{OD}{OC} = \frac{a}{b} \qquad \therefore \qquad ED = EP * \frac{a}{b} = (\gamma * \frac{a}{b})^2 \qquad (1)$$

Como el punto D pertenece a la circunferencia de radio *a* sus coordenadas satisfacen la ecuación de dicha circunferencia, y se tiene:

$$x^2 + ED^2 = a^2$$

y sustituyendo a ED por su valor (1) se obtiene:

$$x^2 + \gamma^2 * \frac{a^2}{b^2} = a^2 \quad \therefore \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} = 1,$$

que es la ecuación de la elipse que pasa por el punto P.

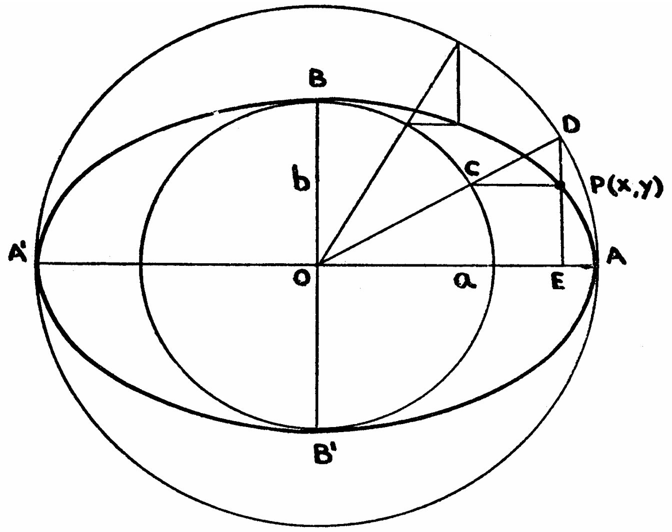


Fig. 3

3.- Principales propiedades de la elipse.

1. *EL eje mayor es igual a la cantidad constante 2a* (fig. 1).

En efecto: Por ser *A* un punto de la elipse:

$$AF' + AF = 2a$$

y como $AF' = OA + OF'$ y $AF = OA - OF$, sustituyendo resulta:

$$OA + OF' + OA - OF = 2a, \quad \therefore \quad 2OA = 2a, \text{ o sea, } OA = a.$$

Análogamente: $OA' = a.$

Luego $OA + OA' = 2a \quad \therefore \quad AA' = 2a.$

2. *Los vértices A y A', equidistan de los locos.* En efecto:

$AF = a\text{-}c \qquad A'F' = a\text{-}c \qquad \therefore \qquad AF = A'F'.$

3. *Los ejes se cortan en su punto medio.* En efecto: según la propiedad anterior *O* es el punto medio de *AA'.* También es el punto medio de BB´, porque siendo *B* y *B'* puntos de la elipse se tiene *FB '= FB' = a* luego *FF'* o sea, *AA'* es la mediatriz de *BB',* y por consiguiente;

$$OB = OB'$$

4. el cuadrado del semieje mayor es igual a la suma de los cuadrados del semieje menor y de la semidistancia focal.

En efecto: Por ser el triangulo BOF (fig. 1) rectángulo:

$BF^2 = BO^2 + OF^2 \quad \therefore \quad a^2 = b^2 + c^2$

5. *La excentricidad es siempre menor que la unidad.*

En efecto: Por definición se tiene:

$$BF = a \quad \therefore \quad BF^2 = a^2$$

$$e = \frac{c}{a},$$

y como $a > c$ la razón será siempre menor que la unidad.

Nota. Cuanto más se aproxima c a a es mayor la excentricidad y la elipse tiene "más forma de elipse" y a medida que los *focos* se acercan al centro, la excentricidad disminuye y la elipse se parece más a la circunferencia. Si la excentricidad es igual a cero, lo que indica que $a == b$ y la elipse se convierte en una circunferencia.

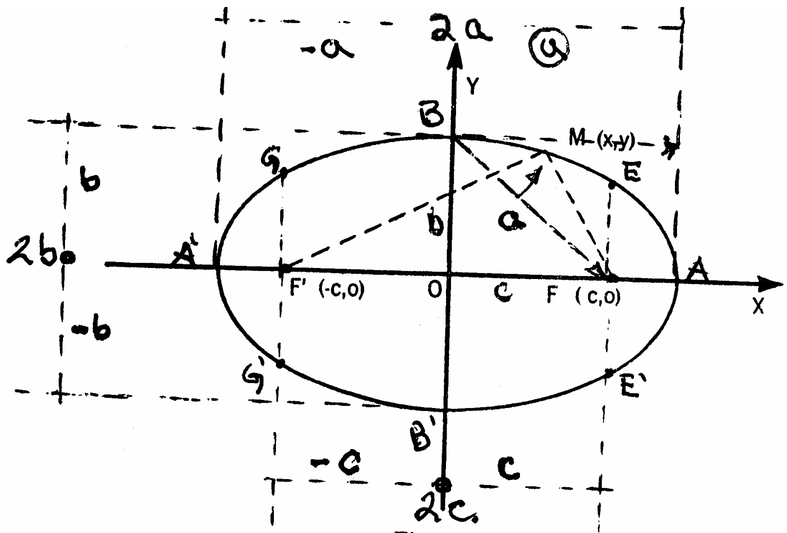


Fig. 4

4.- Ecuación cartesiana de una elipse de centro en el origen y cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados.

Primer caso. Eje focal sobre el eje *x*. sea una elipse de centro el origen de coordenadas, focos F y F´ sobre el eje de las *x*, FF´ = 2*c* y eje mayor = 2*a,* siendo *a* y *c*, números positivos y *a* > *c*, (fig. 4).

Aplicando el método de los lugares geométricos tendremos:

1. Sea M (x,y) un punto cualquiera de la elipse.
2. La propiedad que caracteriza a los puntos de la elipse es:

$$MF + MF' = 2a. \qquad (1)$$

Las coordenadas de F son $(c, 0)$, las de F′ son $(-c, 0)$ y las longitudes MF y MF' son:

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

3. Expresando analíticamente la igualdad. (1) resulta:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

4. Transformando. Aislando el primer radical en el primer miembro, elevando al cuadrado, haciendo operaciones y reduciendo, queda:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2$$

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando nuevamente al cuadrado, para hacer desaparecer el radical y reduciendo, se tiene:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (2)$$

De la propiedad 4 se deduce que $a^2 - c^2 = b^2$

Sustituyendo en (2), queda:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Y dividiendo entre a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$ (a) Que es la ecuación buscada.

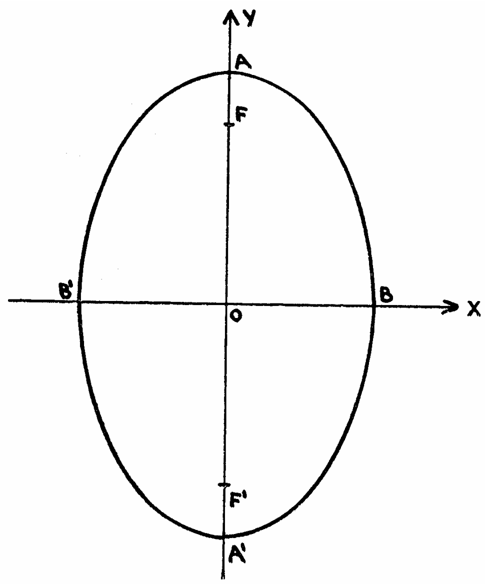


Fig. 5

Segundo caso. Eje focal sobre el eje Y. Si el eje focal coincide con el eje de las y (fig.5) siguiendo un razonamiento análogo, se obtiene:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \text{ , o sea, } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \qquad \text{(b)}$$

Designando siempre por 2a el eje mayor de la elipse.

Nota. Algunos autores llaman siempre 2a al eje situado sobre el eje X. En este caso la ecuación de 1a elipse es siempre $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Si $a > b$ el eje focal esta en el eje X y si $a < b$ el eje focal esta en el eje Y.

Las ecuaciones *(a)* y *(b)* se conocen con el nombre de *primera forma ordinaria de la ecuación de la elipse.*

Cuando el denominador de x^2 es mayor que el de y^2, la elipse tiene su eje mayor sobre el eje de las x, es decir, es de la forma *(a);* y si el denominador de y^2 es mayor que el de x^2, la elipse es de la forma *(b)* y tiene su eje mayor en el eje de las y.

Construcción de la curva a partir de su ecuación.

De la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, se deduce, despejando y:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

que nos dice:

1. La curva consta de dos ramas (una corresponde al signo positivo y otra al negativo del radical):

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\;;\qquad\qquad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

2. La curva esta definida solamente para valores de x comprendidos en el intervalo $-a\leq x\leq a$.

3. *Intersecciones con los ejes.* Haciendo $x = 0$ se obtiene $y = \pm b$, luego *los puntos de intersección con el eje Y son (0, b) (0, -b).* Haciendo $y = 0$ en la ecuación dada, resulta $x= \pm a$, luego *la curva corta al eje* X *en los puntos (a, 0)* (- *a, 0).*

4. *Simetría.* Si hacemos $x = -x$, la ecuación no cambia. Si hacemos $y = -y$, 1a ecuación no cambia. Si hacemos $x = -x$, y $y = -y$, la ecuación no varia. Luego, *la curva es simétrica respecto los ejes* y *el origen.*

5. *Tabla de valores.* Debido a las simetrías es suficiente dar a x valores entre 0 y a.

Análogamente se construye la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

5.- Determinación de los principales elementos de una elipse, dada en la primera forma ordinaria.

1. Sea la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

1. Es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (centro el origen y eje focal sobre el eje *X).*

2. *Centro.* O (0, 0).

3. *Longitud de los semiejes y ejes.*

$a^2 = 16 \quad \therefore \quad a = 4$ y 2a = 8.

$b^2 = 9 \quad \therefore \quad b = 3$ y 2b = 6.

4. *Ecuaciones de las rectas que contienen los ejes.*

El eje mayor esta sobre la recta $y = 0$.

El eje menor esta sobre la recta $x = 0$.

5. *Semidistancia focal.* $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

6. *Vértices.* $A\ (a, 0)$, $A'\ (-a, 0)$, $B\ (0, b)$, $B'\ (0, -b)$.

$\therefore \quad A\ (4,0),\quad A'\ (-4,0),\quad B\ (0,3),\quad B'\ (0,-3)$.

7. *Focos.* $F(c,0)$, $F'(-c,0)$

$\therefore \quad F\ (\sqrt{7}, 0), F'\ (-\sqrt{7}, 0)$.

8. *Excentricidad.* $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

9. *Lado recto.* De la definición, se deduce que el lado recto *(lr)* es el doble de la ordenada *FE* (fig. 1) que corresponde al valor de $x= \pm\ c$.

Despejando y de la ecuación de la elipse y sustituyendo x por $\pm c$, resulta:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\frac{b^2}{a}, \text{ (valor absoluto)}$$

y el lado recto es $2y=\dfrac{2b^2}{a}$.

En este caso: $lr=\dfrac{2*9}{4}=\dfrac{9}{2}=4.5$.

10. *Cálculo de puntos.* Despejando y, resulta:

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16^2-x^2}$$

Tabla de valores. En este caso daremos a x valores entre 0 y 4. Los puntos simétricos de los obtenidos respecto del eje X, el eje Y y el origen son también puntos de la elipse.

x	y	*Puntos*
0	$\pm$ 3	(0, 3), (0, — 3)
2	$\pm$ 2.6	(2, — 2.6), (2, 2.6)
4	0	(4, 0)

Análogamente se obtienen los elementos de la curva representada por una ecuación del tipo *(b).*

2. Sea la elipse: $9x^2 + 4y == 1$.

Como $9x^2=\dfrac{x^2}{\frac{1}{9}}=\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$ y $4y^2=\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$, la ecuación puede escribirse:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1.$$

1. Es de la forma: $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ (centro el origen y eje focal sobre el eje *Y.)*

2. *Centro.* O (0, 0).

3. *Longitudes de los semiejes y ejes.*

$$a^2=\frac{1}{4}\quad\therefore\quad a=\frac{1}{2}\text{ y } 2a=1.$$

4. *Ecuaciones de las rectas que contienen los ejes.*

EI eje mayor esta sobre 1a recta $x = 0$.

El eje menor esta sobre la recta $y = 0$.

5. *Semidistancia focal.*

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9}} = \sqrt{\tfrac{5}{36}} = \tfrac{\sqrt{5}}{6}.$$

6. *Vértices.* $A\,(0, a), A'\,(0, -a), B\,(b, 0), B'\,(-b, 0).$

$\therefore\ A\,(0, \tfrac{1}{2}), A'\,(O, -\tfrac{1}{2}),\ B\,(\tfrac{1}{3}, 0), B'\,(-\tfrac{1}{3}, 0).$

7. *Focos.* $F\,(0, c), F'\,(0, -c)$

$\therefore\ F(0, \tfrac{\sqrt{5}}{6}), F'(0, -\tfrac{\sqrt{5}}{6}).$

8. *Excentricidad.* $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

9. *Lado recto.* Su longitud se obtiene también por la fórmula:

$$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 * \frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}.$$

10. *Cálculo de puntos.* Despejando y de la ecuación, resulta:

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - 9x^2}$$

Tabulación. Daremos valores a x entre 0 y $\tfrac{1}{3}$. Para $x > \tfrac{1}{3}$ la curva no esta definida (no existen valores reales de y).

x	y	*Puntos*
0	$\pm\frac{1}{2}$	$\left[0, -\frac{1}{2}\right]$ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
$\frac{1}{5}$	$\pm .4$	$\left[\frac{1}{5}, .4\right]$ $\left[\frac{1}{5}, -.4\right]$
$\frac{1}{3}$	0	$\left[\frac{1}{3}, 0\right]$

Nota. Para calcular los elementos de una elipse dada por una ecuación en que el segundo miembro no es la unidad, se divide previamente a ecuación por el segundo miembro.

Ejemplo. Para calcular los elementos de la elipse.

$$4x^2 + 6y^2 = 2$$

se divide previamente entre 2 y resulta:

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

6.- Ejercicios.

Hallar las ecuaciones de las elipses que tienen el centro en el origen de coordenadas y sus elementos son los que se indican:

1. $a = 8$, $b = 4$ y eje mayor sobre el eje X.
2. $a = 5$, $b = 3$ y eje mayor sobre el eje *Y.*
3. $a = 10$, c =;= 4 y el eje mayor sobre el eje X.
4. $b^2 = 6$, $c^2 = 4$ y el eje mayor sobre el eje *Y.*
5. Lado recto 4, $a = 8$ y el eje mayor sobre el eje X.
6. Un foco es (5,0) y $e = \frac{2}{3}$
7. $a = 10$, $e = 0.6$ y la abscisa de los focos es cero.
8. Los vértices son los puntos (5,0), (- 5,0) y los focos son los puntos (2, 0), (- 2, 0).

Hallar los elementos de las siguientes elipses (centro, ejes, vértices, excentricidad y lado recto). Dibujar la curva correspondiente.

9. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$
10. $4x^2 + y^2 = 4$
11. $4x^2 + 9y^2 = 36$
12. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$

7.- Ecuación de una elipse de centro un punto cualquiera y ejes paralelos a los coordenados (segunda forma ordinaria).

Sea la elipse de centro C *(h, k)* y ejes paralelos a los coordenados, siendo el eje mayor paralelo al eje X (fig. 6). Llamemos *(x, y)* alas coordenadas de un punto cualquiera de la elipse respecto a los ejes X, *Y* y *(x', y')* alas coordenadas del mismo punto respecto a los ejes de la elipse *X', Y'.*

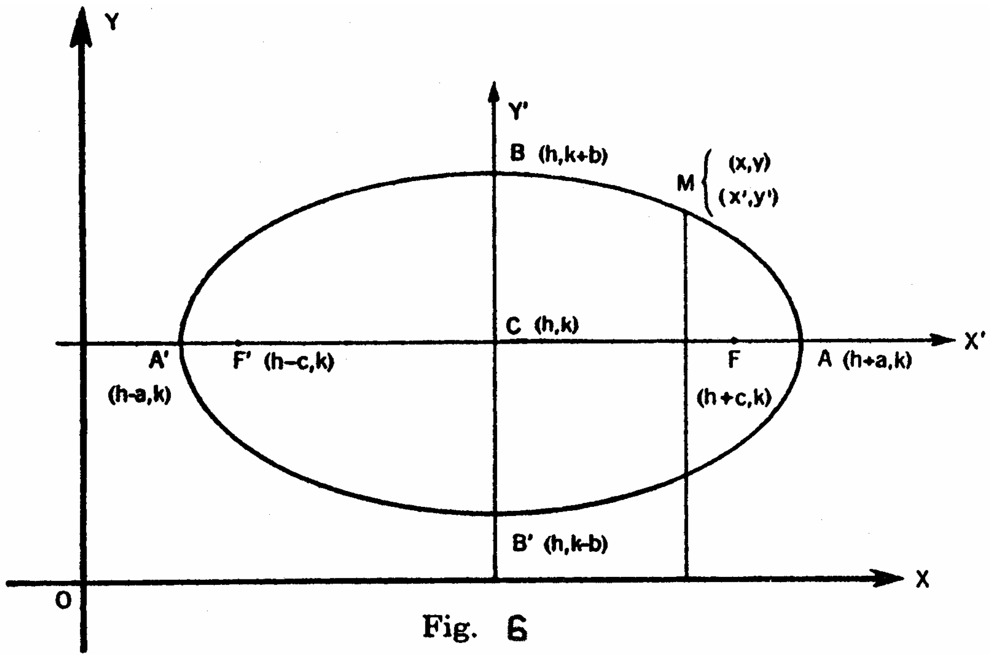


Fig. 6

La ecuación de la elipse referida a sus *ejes X', Y'* como ejes de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Por las fórmulas de transformación de coordenadas sabemos que:

$$x' = x - h, \qquad r = y - k.$$

Sustituyendo resulta $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, (1)

que es la *ecuación de una elipse de centro* C *(h, k) y ejes paralelos a los coordenados, siendo el eje mayor paralelo al eje de las x.*

Análogamente, la ecuación:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \text{ o bien } \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \qquad (2)$$

representa *una elipse de centro* C *(h, k) y sus ejes paralelos a los coordenados, siendo el eje mayor paralelo al eje Y* (fig. 7).

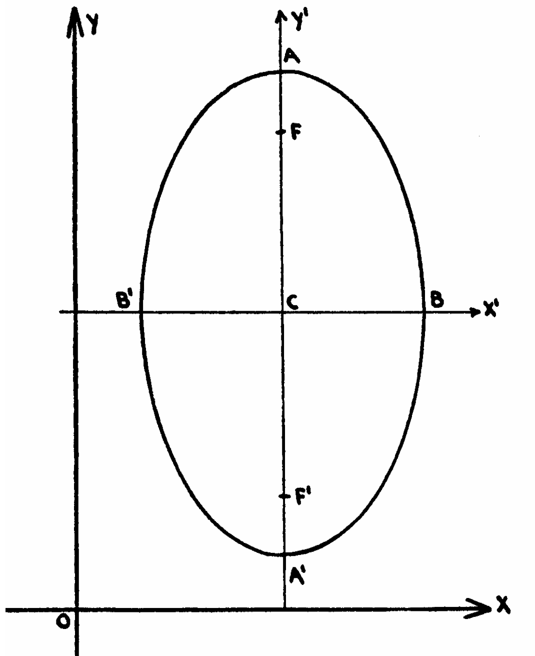


Fig. 7

Ejemplos. 1. Hallar la ecuación de la elipse de centro C (- 4,2) y eje mayor paralelo al eje X siendo $a = 4$ y $b = 3$.

Es de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, siendo h = -4 y k = 2 1uego:

$$\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1,$$

es 1a ecuación de la elipse.

2. Hallar la ecuación de la elipse de centro C (- 2, -5) y semiejes $a = 4$ y $b = 2$, siendo el eje mayor paralelo al eje *Y.*

Es de la forma $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, h = -2, k = -5 y la ecuación será:

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

3. Hallar la ecuación de la elipse de centro C (2, -1), lado recto 4.5, $a = 4$, y el eje mayor paralelo al eje de las abscisas.

$$lr=\frac{2b^2}{a} \quad \therefore \quad 4.5=\frac{2b^2}{4} \quad \therefore \quad b^2 = 9$$

y la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

4. Hallar la ecuación de una elipse, cuyos vértices sobre el eje mayor son *A* (3,6), *A'* (3, -2) y *b* = 2.

Como los vértices tienen la misma abscisa, el eje mayor es paralelo al de las *y* y 2a = 6 + 2 = 8. La ecuación es de la forma (2) y el centro es el punto medio de *AA´* es decir: C (3, 2), y la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

8.- Determinación de los elementos de una elipse dada en su segunda forma ordinaria.

Primer caso. La ecuación es de la forma (fig. 6):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

1. *Centro.* C *(h, k).*
2. *Vértices.* Los vértices *A* y *A´* están sobre una recta paralela al eje X, luego tienen la misma ordenada, igual a la ordenada *k* del centro. Para encontrar las abscisas de los vértices se suma y se resta *a* a la *h* del centro.

A (h + a, k), A´ (h -a, k) .

Los vértices *B* y *B'* están sobre una recta paralela al eje *Y* y tienen la misma abscisa, igual a la abscisa *h* del centro y para encontrar las ordenadas se suma y resta *b* a la ordenada *k* del centro.

B (h, k + b), B' (h, k- b).

3. *Focos.* Los focos *F* y *F'* están en el eje mayor que es paralelo al eje X, luego tienen la misma ordenada, igual a la ordenada *k* del centro y las abscisas de los focos se encuentran sumando y restando a la abscisa *h* del centro la cantidad *c* (semidistancia focal):

F (h + c, k) F' (h -c, *k).*

Ejemplo. Dada la elipse $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$, calcular sus principales elementos.

1. La ecuación es de la forma (1) (eje mayor paralelo a1 eje *X).*
2. *Centro.* C *(h, k)* $\therefore$ C (- 2, 1).
3. *Longitud de los semiejes y ejes,*

$a^2 = 25$ $\therefore$ $a = 5$ y 2a = 10.

$b^2 = 16 \;\therefore\; b = 4$ y $2b = 8$.

4. *Ecuaciones de las rectas que contienen los ejes.* La recta que contiene al eje mayor es paralela a1 eje X y su ecuación es: $y = 1$.

La recta que contiene a1 eje menor es paralela a1 eje *Y* y su ecuación es: $x = -2$.

5. *Semidistancia focal,*

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

6. *Vértices, A (h + a, k), A' (h-a, k),*

$\therefore$ A (-2 + 5,1), A' (-2-5,1) $\therefore$ A (3,1), A' (-7,1).

B(h , k+b), B'(h, k-b).

$\therefore$ B (-2,1 + 4), B' (-2, 1 -4) $\therefore$ B (-2,5), B' (-2, -3).

7. *Focos. F (h + c, k), F' (h'-c, k)*

$\therefore$ F (-2 + 3, 1), F' (-2 -3, 1) $\therefore$ F (1, 1), F' (-5, 1),

8. *Excentricidad.* $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

9. *Lado recto.* $lr = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2*16}{5} = \dfrac{32}{5} = 6.4.$

10. *Cálculo de puntos.* Despejando y de 1a ecuación, resulta:

$$y = 1 \pm \frac{4}{5}\sqrt{25 - (x+2)^2}.$$

Tabulación. La curva solamente esta definida entre $x = -7$ y $x = 3$ (abscisas de A' y A).

x	y	Punto
—7	1	(—7, 1)
—2	5	(—2, 5)
	—3	(—2, —3)
0	—6.7	(0, —6.7)
	8.7	(0, 8.7)
3	1	(3, 1)

Segundo caso. La ecuación es de la forma (fig. 7):

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

1. *Centro.* C *(h, k).*

2. *Vértices.* A y A' están sobre una recta paralela al eje *Y* y tienen la misma abscisa, igual a la abscisa h del centro. Las ordenadas se encuentran sumando y restando a a la ordenada k del centro.

$$A\ (h,\ k + a),\ A'\ (h,\ k - a)\ .$$

3. *Focos.* Los focos F y F' están sobre una recta paralela al eje Y y tienen la misma abscisa, igual a la abscisa h del centro y las ordenadas de ambos puntos se obtienen sumando y restando c a la ordenada k del centro.

$$F\,(h, k + c),\ F'\,(h, k - c).$$

Ejemplo. Hallar los elementos de la elipse.

$$\frac{(y-3)^2}{16}+\frac{(x+3)^2}{4}=1$$

1. La ecuación es de la forma $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

2. *Centro.* $C(h\,,k)\ \therefore\ C(-3,3)$.

3. *Longitud* de *los semiejes y ejes.*

$a^2 = 16\ \therefore\ a = 4$ y $2a = 8$.

$b^2 = 4\ \therefore\ b = 2$ y $2b = 4$.

4. *Ecuaciones de las rectas que contienen los ejes.* La recta que contiene al eje mayor es paralela al eje Y y su ecuación es:

$$x = -3.$$

La recta que contiene al eje menor es paralela al eje X y su ecuación es $y = 3$.

5. *Semidistancia focal.* $c=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

6. *Vértices.* $A\,(h, k + a),\ A'\,(h, k - a)$.

$\therefore\ A\,(-3,3+4), A'\,(-3, 3-4)\ \therefore\ A\,(-3,7),\ A'\,(-3,-1)$.

$B\,(h + b, k), B'\,(h - b, k)$.

$\therefore\ B\,(-3+2,3), B'\,(-3-2, 3)\ \therefore\ B\,(-1,3), B'\,(-5, 3)$.

7. Focos. $F\,(h, k + c), F'\,(h, k - c)$

$$\therefore\ F\,(-3,3+2\sqrt{3}),\ F'\,(-3,3-2\sqrt{3}).$$

8. *Excentricidad.* $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. *Lado recto.* $lr=\frac{2b^2}{a}=\frac{2*4}{4}=2.$

10. *Cálculo de puntos.* Despejando y de la ecuación:

$$y=3\pm 2\sqrt{4-(x+3)^2}.$$

Tabulación. La curva solamente esta definida entre $x = -5$ y $x = -1$ (abscisas de B y B').

x	y	*Punto*
-5	3	$(-5, 3)$
-3	7	$(-3, 7)$
	-1	$(-3, -1)$
-2	6.5	$(-2, 6.5)$
	-0.5	$(-2, -0.5)$
-1	3	$(-1, 3)$

La ecuación general de segundo grado con dos variables es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

y la ecuación de una elipse de ejes paralelos a los coordenados de centro C *(h, k)* y semiejes *a* el mayor y *b* el menor es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Desarrollando estas dos últimas:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0, \qquad (4)$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0. \qquad (5)$$

Para que la ecuación (3) represente una elipse de ejes paralelos a los coordenados sus coeficientes y los de cada una de las (4) y (5) deben ser proporcionales. Luego:

1. Como las ecuaciones (4) y (5) carecen de término en *xy,* resulta:

$$B = 0$$

2. Los coeficientes A y C deben ser del mismo signo pero diferentes, por ser $a^2 \neq b^2$, luego:

Toda ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ *representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados si los coeficientes A y* C *de* x^2 y *de y son diferentes en valor absoluto, pero del mismo signo.*

Esta forma se conoce con el nombre de *forma general de la ecuación de una elipse de ejes paralelos a los coordenados.*

Ejemplos. Las ecuaciones:

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0,$$

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0,$$

$$-x^2 - 4y^2 - 2x + 8y - 4 = 0,$$

representan elipses de ejes paralelos a los coordenados.

Dada la ecuación de una elipse de ejes paralelos a los coordenados, en su forma general, hallar sus elementos. Se pasa a la forma ordinaria completando cuadrados y después se determinan sus elementos.

Ejemplo: Dada la ecuación de la elipse

$$9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$$

pasarla a 1a forma ordinaria y hallar sus elementos.

Completando cuadrados se tiene:

$$9(x^2-6x+9)+16(y^2+4y+4)=-1+81+64$$

$$9(x-3)^2+16(y+2)^2=144$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

que es la forma ordinaria.

Determinación de sus elementos.

1. Es de la forma (1) (eje focal paralelo al eje *X).*

2. *Centro.* C (3,-2).

3. *Longitud de los semiejes y ejes.*

$a^2 = 16 \;\therefore\; a = 4$ y 2a = 8.

$b^2 = 9 \;\therefore\; b = 3$ y $2b = 6$.

4. *Ecuaciones de las rectas que contienen los ejes.* La ecuación de 1a recta que contiene el eje mayor es $y = -2$ y la ecuación de 1a recta que contiene el eje menor es $x = 3$.

5. *Semidistancia focal.* c = $\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

6. *Vértices.*

A (3 + 4, -2), A' (3 -4, -2) $\therefore$ A (7, -2), A' (-1, -2).

B (3,-2 + 3), B' (3,-2-3) $\therefore$ B (3, 1), B' (3,-5).

7. *Focos.* F (3 + $\sqrt{7}$, -2), F' (3 - $\sqrt{7}$, -2).

8. *Excentricidad.* $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

9. *Lado recto.* $lr=\frac{2b^2}{a}=\frac{2*9}{4}=4.5$.

10. *Cálculo de puntos.* Despejando y de la ecuación:

$$y=-2\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-(x-3)^2}.$$

Tabla de valores. La curva esta definida solamente para valores de x entre -1 y 7.

x	y	*Puntos*
-1	-2	$(-1, -2)$
3	-5	$(3, -5)$
	1	$(3, 1)$
0	-0.01	$(0, -0.01)$
	-3.9	$(0, -3.9)$
7	-2	$(7, -2)$

2. Dada la ecuación de la elipse,

$9x^2 + 4y^2 + 54x - 32y + 109 = 0.$

Escribirla en forma ordinaria y hallar sus elementos. Completando cuadrados, resulta:

$$9\,(x^2 + 6x + 9) + 4\,(y^2 - 8y + 16) = -109 + 81 + 64$$

$$9(x+3)^2 + 4(y-4)^2 = 36$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

Tabla de valores. La curva esta definida solamente para valores de x entre -5 y -1.

x	y	*Puntos*
-5	4	$(-5, 4)$
-3	1	$(-3, 1)$
	7	$(-3, 7)$
-1	4	$(-1, 4)$

9.- Ejercicios:

Hallar las ecuaciones de las elipses cuyos elementos son los que se indican:

1. Vértices: A (7,-2), A' (-5,-2), $e = \frac{2}{3}$.
2. Focos: F (5,4), F' (-1,4) y el lado recto = $\frac{32}{5}$.
3. Vértices: A (8,5), A' (- 4,5), y el lado recto = 3.
4. Focos: F (5, 1), F' (-1, 1) y el eje menor = 10.

Hallar los elementos de las siguientes elipses (centro, ejes, vértices, focos, excentricidad y lado recto). Dibujar 1a curva correspondiente.

5. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$
6. $9(x-1)^2 + 16(y-3)^2 = 144$.
7. $4(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.

Reducir las siguientes ecuaciones a 1a forma ordinaria, y determinar sus elementos (centro, ejes, focos, excentricidad y lado recto).

8. $x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 28 = 0$.
9. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$.
10. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$.
11. $x^2 + 4y^2 - 4x + 16y + 16 = 0$.

Hallar las ecuaciones de las elipses, cuyos elementos son los siguientes:

12. Focos (2, 3), (- 1, 4) y la longitud del eje mayor es 4.
13. Focos (-1, -3), (1, -2) y la longitud del eje mayor es 3.
14. Las longitudes de los ejes son 5 y 4 y están situados sobre las rectas $x + 2y - 3 = 0$ y $4x - 2y + 1 = 0$.

Hipérbola

10.- Definición de la hipérbola

Una *hipérbola* es el conjunto de puntas del plano cuya distancia a dos puntos fijos tiene una diferencia constante. Con esto queremos decir que tomamos la diferencia de la distancia mayor menos la distancia menor. Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la hipérbola. El punto medio entre los dos focos se llama *centro* de la hipérbola.

11.- Hipérbola con centro en el origen

Empecemos con el análisis de una hipérbola can centro en el origen y can tacos en el eje *X.* Supongamos que las coordenadas de los focos son *F(* c, 0) y *F'(-c,* 0). Para que un punto *P(x, y)* pertenezca a la hipérbola, debe satisfacer

$$d\,(P, F) - d(P, F') = k, \qquad (1)$$

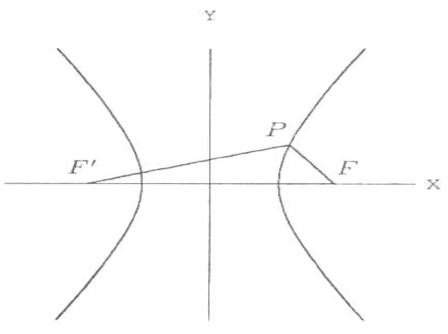
0

$$d\,(P, F') - d(P, F) = k, \qquad (2)$$

donde *k* es una constante ver la figura (1).

Sustituyendo las coordenadas de *P, F* y *F'* en la fórmula de la distancia entre dos puntos, la expresión queda:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=k.$$



Hipérbola horizontal

Trabajamos ahora de una manera muy similar a como lo hicimos en el caso de la elipse.

Para eliminar los radicales, pasamos uno de ellos al otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado,

$$(x-c)^2+y^2=\left(k+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right),$$

Simplificando obtenemos:

$$-4cx-k^2=2k\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

Volvemos a elevar al cuadrado para eliminar el otro radical y simplificamos nuevamente:

$$4\left(4c^2 - k^2\right)x^2 - 4k^2y^2 = k^2\left(4c^2 - k^2\right),$$

para poder seguir simplificando, observemos la figura (1). Si llamamos $a = \dfrac{k}{2}$, podemos ver que los puntas *V(a, 0)* y *V'(-a ,0)* pertenecen a la hipérbola. Sustituyendo *k* = *2a* en la fórmula anterior tenemos:

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).$$

Llamando $b^2 = c^2 - a^2$, llegamos a:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (3)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre a^2b^2 llegamos a la ecuación *simétrica* de la hipérbola:

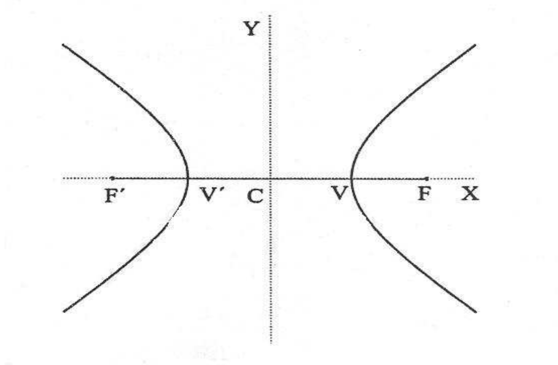
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Si en lugar de trabajar con (1) trabajamos con (2), llegamos a la misma ecuación.

Si en la ecuación (3) pasamos todos los términos al primer miembro, nos queda la ecuación de la hipérbola en la forma *general:*

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Veamos ahora algunos de los elementos principales de la hipérbola, ver la figura (2).



Elementos de la hipérbola

Como en el caso de la elipse, los puntos *V* y *V'* se llaman *vértices* de la hipérbola.

La recta que une a los vértices *V* y *V'* se llama *eje focal.* El punto medio de *F* y *F'* y por tanto, también de *V* y *V'* es el *centro C* de la hipérbola.

La recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje focal se llama *eje no focal*.

Observa que tanto el eje focal como el eje no focal de la hipérbola son *ejes de simetría.*

La distancia entre los dos focos *F* y *F'* se llama *distancia focal* y vale *2c.*

La distancia entre los dos vértices *V* y *V'* es *2a.*

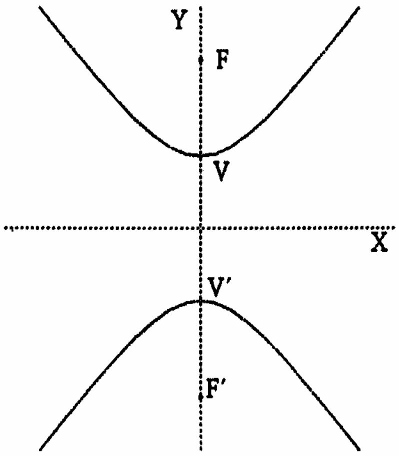
Notemos que, a diferencia del caso de la elipse, ahora se tiene c > *a.*

Si la hipérbola tiene centro en el origen y sus focos están en el eje *Y,* las coordenadas de ellos son *F(0,* c) y *F'(0, -c),* si llamamos nuevamente *2a* a la diferencia de las distancias de un punto *P(x, y)* de la hipérbola a los focos, haciendo un análisis similar al anterior, o simplemente intercambiando los papeles de *x* y *y,* llegamos ahora a la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$.

Los vértices son ahora *V(0, a)* y *V'(0,* -a). (Ver la figura 3).



Hipérbola vertical

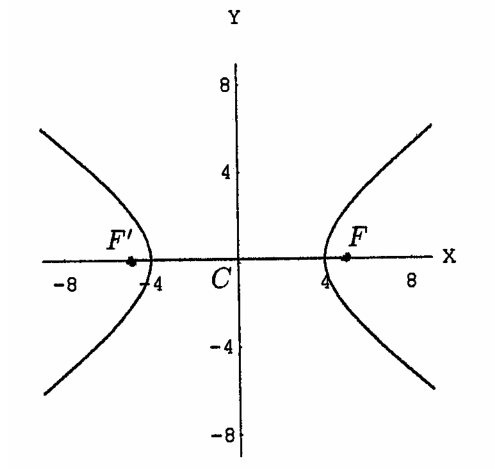
Ejemplos:

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son *F(5,* 0) Y *F'(* -5,0), y tal que la diferencia de las distancias de los puntos de ella a los focos sea 8. (Ver la figura 4).

Solución:

El punto medio entre los focos es *C (0,0)* y los focos están sobre el eje X, así que su ecuación es de la forma (4), la distancia entre los focos es 2c = 10 y la distancia entre los vértices es *2a* == 8, entonces $b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ y la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$



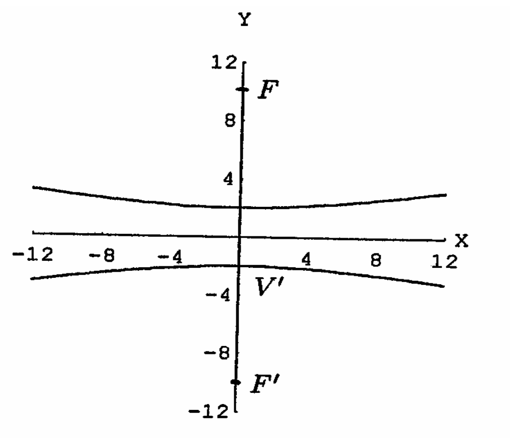
Hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son: *V(0,2)* y *V'(0,* -2) y sus focos son *F(0,* 10) y *F'(0,* -10). (Ver la figura 5).

Solución:

Nuevamente el centro es C (0, 0), los focos están ahora sobre el eje *Y,* la distancia focal es 2c = 20, la distancia entre los vértices es $2a = 4$, entonces $b^2 = 10^2 - 2^2 = 96$ y la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{96} = 1.$$



Hipérbola $-\frac{x^2}{96} + \frac{y^2}{4} = 1$

12.- Asíntotas de la hipérbola

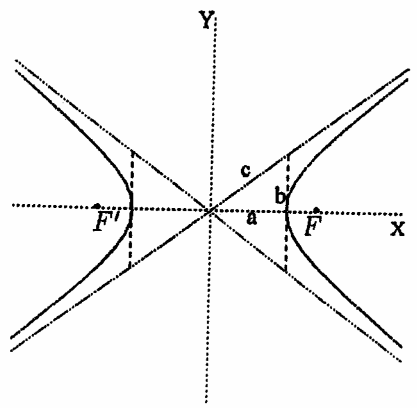
Si despejamos *y* de la ecuación (3) obtenemos:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \,,$$

ahora, si $|x|$ es muy grande, $x^2 - a^2$ es "casi igual" a x^2 y por lo tanto $\sqrt{x^2 - a^2}$ es casi igual a $|x|$, es decir, para *x* grande (ya sea positiva o negativa), *y* es "casi igual" a $\pm\frac{b}{a}x$ o sea que las ramas de la hipérbola se aproximan a las rectas:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

este par de rectas se llaman *asíntotas* de la hipérbola. Observa que las asíntotas, el eje *X* y las rectas verticales que pasan por los vértices de la hipérbola, forman triángulos rectángulos cuyos catetos miden *a* y *b* y la hipotenusa mide *c*. Esta observación es importante para poder trazar las hipérbolas como podemos ver en los siguientes ejemplos. (Ver la figura 6).



Asíntotas de la hipérbola

Ejemplos:

1. Dibujar la hipérbola cuya ecuación es:

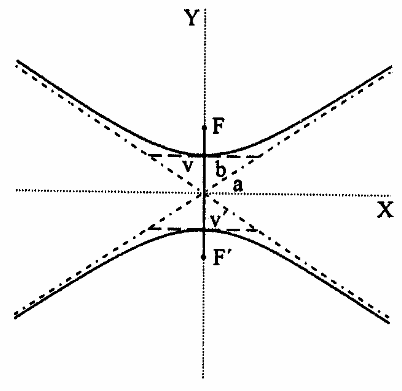
$$-\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Solución:

EI signo (-) esta antes de x^2, entonces la hipérbola es vertical, $a^2 = 16$ y $b^2 = 36$, así que $c^2 = 16 + 36 = 52$ y por lo tanto a = 4, b = 6 y c = $\sqrt{52} \approx 7.21$.

Tenemos entonces que los focos son $F(0, \sqrt{52})$ y $F'(0, -\sqrt{52})$; los vértices son $V(0,4)$ y $V'(O, -4)$.

Marcamos los vértices y dibujamos los triángulos con catetos *a* y *b,* como ayuda para trazar las asíntotas. Trazamos ahora las hipérbolas como curvas suaves que salen de los vértices y se aproximan a las asíntotas. (Ver la figura 7).



Hipérbola $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

2. Dibujar la hipérbola cuya ecuación general es:

$$9x^2-16y^2-144=0.$$

Solución:

Escribimos la ecuación en la forma simétrica, para ello, pasamos del otro lado de la ecuación al término independiente;

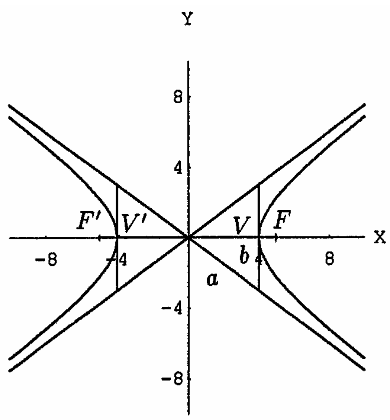
$$9x^2-16y^2=144.$$

y dividimos entre él toda la ecuación.

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Como el signo (-) esta antes de y^2, la hipérbola es horizontal, a^2 = 16, b^2 = 9 y por lo tanto, c^2 = 16 + 9 = 25. Así que a = 4, b = 3 y c = 5.

Los focos son *F(5,0)* y *F'(* -5,0); los vértices son *V(* 4,0) y *V'(* -4,0). Podemos ahora marcar estos puntos, marcamos también los puntos (4,3), (4, -3), (-4,3) Y (-4, -3) por donde pasan las asíntotas. Dibujamos estas últimas y ahora trazamos la hipérbola a partir de los vértices y acercándonos a las asíntotas, (ver la figura 8).



Hipérbola $9x^2-16y^2-144=0$

Los ejes de simetría de la hipérbola, en este caso, los ejes cartesianos son las bisectrices de los ángulos formados por las asíntotas. Para probarlo escribimos las ecuaciones de las asíntotas en la forma normalizada:

$$\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \qquad \text{y} \qquad \frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=0\,,$$

entonces las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por ellas son:

$$\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{y} \quad \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

que después de simplificarlas nos dan:

$$y=0 \qquad \text{y} \qquad x=0,$$

que son las coordenadas de los ejes cartesianos.

Para determinar la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y vértices en uno de los ejes cartesianos, basta conocer la ecuación de una de las asíntotas y las coordenadas de uno de los vértices, digamos *V (a, 0)*, ya que con la ecuación de la asíntota podemos determinar *b.*

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la hipérbola tal que una de sus asíntotas es $y = 3x$ y tiene un vértice en V (12,0).

Solución:

De las coordenadas del vértice tenemos que $a = 12$ y la hipérbola es horizontal, de la ecuación de la asíntota tenemos $\frac{b}{a} = 3$, as! que $b = 36$, entonces la ecuación de la hipérbola es:

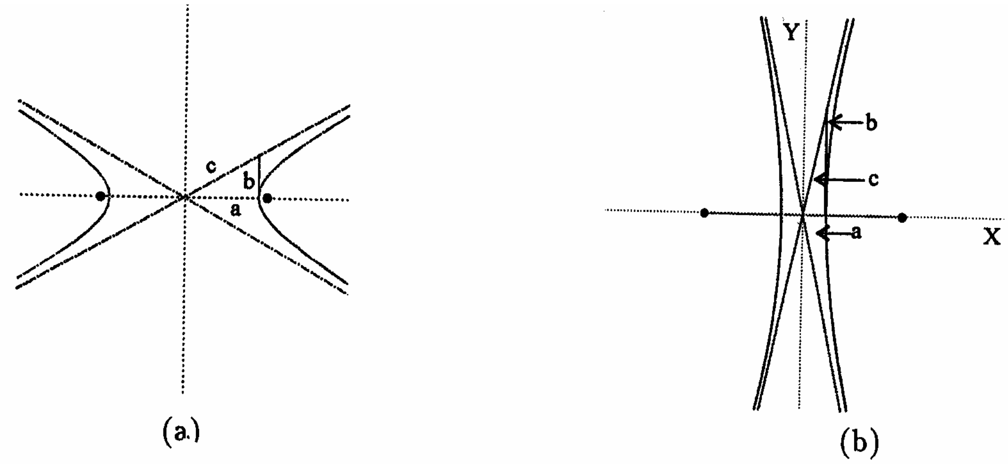
$$\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{36^2}=1.$$

13.- Excentricidad de la hipérbola

De manera similar al caso de la elipse, un elemento importante a considerar en la hipérbola es su *excentricidad,* que se define, igual que en el caso de la elipse, como el cociente de la distancia focal entre la distancia entre los vértices.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a},$$

observa que como ahora $c > a$, entonces $e > 1$. La excentricidad mide que tan *abierta* o *cerrada* es la hipérbola.



Excentricidad de la hipérbola

Observa en la figura (9) que el eje focal, una asíntota y la recta perpendicular al eje focal que pasa por el vértice forman un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden *a* y *b* y cuya hipotenusa mide c. Mientras más cercana esta la excentricidad a uno, el cateto *b* es más pequeño y por lo tanto, la hipérbola está más cerrada, mientras más grande es la excentricidad, *b* es mayor y la hipérbola está más abierta.

14.- Ejercicios

Encuentra las coordenadas de los vértices y de los focos de las siguientes hipérbolas.

1. $25x^2 -9y^2 -225 = 0$.
2. $-9x^2 + 4y^2 -36 = 0$.
3. $-4x^2 + y^2 = 16$.
4. $25x^2 -49y^2 -1225 = 0$.
5. $2x^2 -3y^2 = 12$.
6. $5x^2 -4y^2 = 100$.
7. $-4x^2 + 5y^2 -80 = 0$.
8. $y^2 -9x^2 -81 =0$.

Encuentra en cada caso la ecuación de la hipérbola con los datos dados.

9. Focos *F'(* -5,0), *F(5,0);* la distancia entre sus vértices es 4.

10. Vértices *V'(O,* -3)-, *V(O,* 3); distancia focal 7.

11. Focos *F'(O,* -6), *F(O,* 6); vértices *V'(O,* -3), *V(O,* 3).

12. Vértices *V'(* -4,0), *V(* 4,0); excentricidad 3.

15.- Hipérbolas con eje focal paralelo a un eje cartesiano

Pasemos a estudiar ahora las hipérbolas que tienen su centro en cualquier punto del plano y sus ejes de simetría son paralelos a los ejes. Utilizaremos nuevamente la traslación de ejes.

Empezaremos con hipérbolas que tienen su eje focal paralelo al eje *X*.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son *F'*(1, 1) Y *F(5,* 1) y tal que la distancia entre los vértices es 2.

Solución:

Los focos están en una recta horizontal, el centro es el punto medio de los focos: *C(3,1).* Trasladamos los ejes de manera que el origen coincida con el centro de la hipérbola, para ello sustituimos:

$$x' = x - 3 \quad \text{y} \quad y' = y - 1. \qquad (5)$$

En el nuevo sistema de coordenadas, las coordenadas de los focos son *F(* -2,0) Y *F'(2,0).* La distancia entre los vértices es $2a = 2$ y la distancia focal es 2c = 4, por lo que $b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$. Así que la ecuación de la hipérbola, respecto alas coordenadas *X'Y'* es:

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{3} = 1.$$

Sustituimos ahora x' y y' de acuerdo a (5) y obtenemos la ecuación simétrica;

$$\frac{(x-3)^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{3} = 1,$$

si efectuamos las operaciones y pasamos todo al primer termino, obtenemos la ecuación general

$$3x^2 - y^2 - 18x + 2y + 23 = 0.$$

Veamos ahora el caso general. Si el centro de la hipérbola es C(h, k) y el eje focal es paralelo al eje *X,* llamamos como siempre 2c a la distancia focal y $2a$ la distancia entre los vértices, las coordenadas de los focos son F(h + c , k) y *F'*(h –c , k).

Como en el ejemplo anterior, trasladamos los ejes de manera que el origen quede en C. Para lograrlo, hacemos la sustitución

$$x' = x - x_0 \quad \text{y} \quad y' = y - y_0 . \qquad (6)$$

En el nuevo sistema de coordenadas la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$.

Sus asíntotas son las rectas:

$$y' = \frac{a}{b}x' \qquad \text{y} \qquad y' = -\frac{a}{b}x' .$$

Si sustituimos x' y y' de acuerdo a (6), obtenemos la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

y las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y-k=\frac{a}{b}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$$

En el caso de que el eje focal sea vertical, los denominadores de $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$ en la ecuación de la hipérbola están cambiados y el signo (-) afecta al término en x :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

y las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y-k=\frac{a}{b}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$$

Si conocemos las asíntotas de la hipérbola y un vértice de ella, podemos encontrar la hipérbola.

Ejemplos:

1. Escribir la ecuación

$$8x^2 -4y^2 -24x -4y -15 = 0$$

en la forma simétrica y dibujar la hipérbola.

Solución:

Agrupamos los términos en x, en y y pasamos el término independiente del otro lado de la ecuación:

$$(8x^2 -24x) -(4y^2 + 4y) = 15.$$

Factorizamos los coeficientes de x^2 y de y^2 para que sea mas fácil completar los cuadrados perfectos.

$$8\ (x^2 -3x) -4\ (y^2 + y) = 15.$$

En cada paréntesis completamos el trinomio cuadrado perfecto, recordando que, debemos sumar la misma cantidad del otro lado de la ecuación para que la igualdad no se altere:

$$8\ (x^2 -3x + \frac{9}{4}) - 4\ (y^2 + y + \frac{1}{4}) = 15 + 18 -1,$$

Simplificamos,

$$8\ (x - \frac{3}{2})^2 - 4\ (y + \frac{1}{2})^2 = 32,$$

dividimos entre el término independiente y obtenemos:

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{8}=1.$$

Como el signo (-) afecta al termino en *y,* la hipérbola es horizontal, el centro es $C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $a^2 = 4$, $b^2 = 8$ y $c^2 = 4 + 8 = 12$. Así que la distancia entre los vértices es $2a = 4$ y la distancia focal es $2c = 4\sqrt{3}$. Por lo tanto, los focos son

$$F\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

y

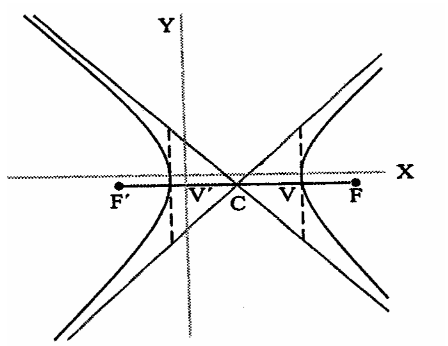
$$F\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

los vértices son:

$$V\left(\frac{3}{2}+2,-\frac{1}{2}\right)=V\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)\quad \text{y} \quad V'\left(\frac{3}{2}-2,\ -\frac{1}{2}\right)=V'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

Las asíntotas son:

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(y+\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{2}\right).$$



Hipérbola $8x^2 -4y^2 -24x - 4y -15 = 0$

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola vertical cuyas asíntotas son:

$$x - 2y + 1 = 0 \quad \text{y} \quad x + 2y - 3 = 0,$$

y la distancia entre los vértices es 2.

Solución:

Resolvemos simultáneamente las ecuaciones de las asíntotas y encontramos que se cortan en el punto C (1,1) que es el centro de la hipérbola, como la distancia entre los vértices es $2a = 2$ y la hipérbola es vertical, las pendientes de las asíntotas son:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}$$

como a = 1, entonces b = 2 y la ecuación de la hipérbola es:

$$-\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1,$$

que en la forma general es:

$$-x^2 + 4y^2 + 2x - 8y - 1 = 0.$$

Ejercicios

Encuentra en cada caso, las coordenadas de los focos, de los vértices y del centro de las siguientes hipérbolas.

1. $\frac{(x+9)^2}{81}+\frac{(y-1)^2}{9}=1.$

2. $\frac{(y-7)^2}{25^2}-\frac{(x+3)^2}{16^2}=1.$

Escribe cada ecuación en su forma simétrica, da las coordenadas de los focos y de los vértices así como las ecuaciones de las asíntotas.

3. $x^2 - y^2 - 4x - 4y - 400 = 0.$

4. $4x^2 - 9y^2 + 8x - 54y - 113 = 0.$

5. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en $V(7, 1)$, $V'(-3,1)$ y con focos $F(9, 1)$, $F'(-5,1)$.

6. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en $V(2, 7)$, $V'(2, -7)$ y que pasa par el punto $P(4, 7\sqrt{2})$.

7. Centro $C(-5,3)$, vértice $V(-9,3)$ y una asíntota $x + 2y - 1 = 0$.

8. Vértices $V'(-11, -7)$, $V(5,-7)$ y una asíntota $x - 2y - 11 = 0$.

16.- Consecuencia de la definición de la hipérbola

Vamos a hacer un análisis similar al que hicimos en el caso de la elipse. Observemos nuevamente las ecuaciones:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

vamos a dar otra interpretación de estas ecuaciones. Si el centro de la hipérbola es $C(x_0, y_0)$, entonces el eje horizontal de la hipérbola es la recta $y = y_0$ y el eje vertical es la recta $x = x_0$, luego, si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, el termino $(x - x_0)^2$ es el cuadrado de la distancia dirigida de P a la recta $x = x_0$, considerando que la parte positiva es el lado derecho y $(y - y_0)^2$ es el cuadrado de la distancia dirigida de P a la recta $y = y_0$, considerando que la parte positiva es la parte de arriba, es decir $(x - x_0 , y - y_0)$ son las coordenadas de P respecto alas rectas $x = 0$ y $y = 0$.

En general, si l es la recta que contiene a los focos de la hipérbola y l' es la recta perpendicular a l que pasa por el centro de la hipérbola, $2a$ es la distancia entre los vértices y 2c es la distancia entre los focos, la ecuación de la hipérbola horizontal es:

$$\frac{D(P,l')^2}{a^2}-\frac{D(P,l)^2}{b^2}=1, \qquad (7)$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$, es decir,

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

donde (x', y') son las coordenadas de P respecto a los ejes l, l'.

La ecuación (7) sigue teniendo valor cuando los ejes de la hipérbola no son paralelos a los ejes cartesianos, esta manera de ver a la ecuación de la hipérbola es particularmente útil en este último caso.

Ejemplos:

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(3, 6)$ y $F'(3, -4)$ y la distancia entre los vértices es 6.

Solución:

El centro de la hipérbola es el punto medio de los focos: $C(3,1)$, entonces el eje focal es $x = 3$ y la recta perpendicular que pasa por el centro es $y = 1$; la distancia focal es 2c = 10 y la distancia entre los vértices es $2a = 6$, así que $b = \sqrt{5^2-3^2} = 4$, luego; la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son *F'* (0, 0), *F(* 4, 4) y la distancia entre sus vértices mide 2.

Solución:

El eje focal de la hipérbola es la recta que contiene a los focos:

$$y = x,$$

el centro de la hipérbola es el punto medio entre los focos, $C(2, 2)$, la recta perpendicular a la anterior que pasa por el centro de la hipérbola es:

$$y = -x + 4,$$

como la distancia entre los vértices es $2a = 2$, el valor de a es 1; la distancia entre los focos es:

$$2c = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

así que $c = 2\sqrt{2}$ y entonces:

$$b = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - (1)^2} = \sqrt{7},$$

sustituyendo estos valores en la ecuaci6n (7), obtenemos:

$$\frac{\left(\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} - \frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{7} = 1$$

$$\frac{(x+y-4)^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{14} = 1,$$

desarrollamos los cuadrados y multiplicamos por 14, para eliminar los denominadores:

$$7\,(x^2 + 2xy - 8x + y^2 - 8y + 16) - (x^2 - 2xy + y^2) = 14,$$

pasando todos los términos al primer miembro de la ecuación obtenemos:

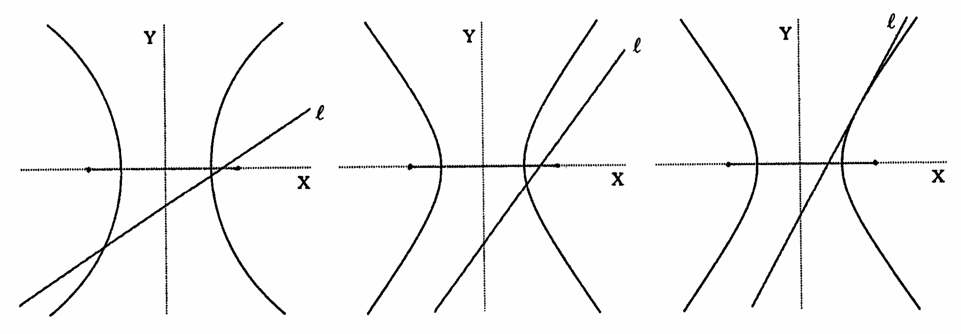
$$6x^2 + 6y^2 + 16xy - 56x - 56y + 98 = 0.$$

Es muy importante hacer notar que en la ecuación anterior, aparece un término en *xy,* este término indica que los ejes de las cónicas no son paralelos a los ejes cartesianos.

17.- Recta tangente a una hipérbola

Recordemos nuevamente que vimos en la sección de la tangente a la circunferencia que una recta £ es *tangente* a una cónica en un punto *P* de ella, si corta a la cónica únicamente en *P* y todos los demás puntos de £ están en una sola de las regiones determinadas por la cónica. En la figura (11) la primer a recta corta a la hipérbola en dos puntos, la segunda recta corta a la hipérbola en un punto, pero tiene una parte de un lado de la hipérbola y la otra del otro lado, finalmente, la tercera recta toca a la hipérbola en un solo punto y se queda fuera de ella.

La tangente a la hipérbola tiene una propiedad de bisectriz similar a la de la tangente a la elipse que veremos en la siguiente proposición.



11

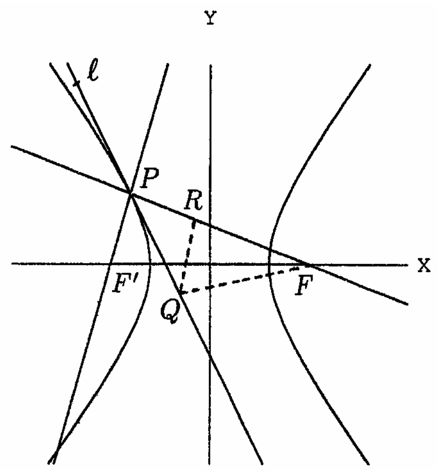
Proposición:

Dado *P* un punto en la hipérbola,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

la bisectriz del ángulo formado par la recta *F P* y la recta *F' P,* que esta del mismo lado de ambas rectas que el origen, es la recta tangente a la hipérbola.

En la figura (12), *l* es la bisectriz del ángulo formado por la recta *F P* y *F' P,* el punto



12

simétrico de F' respecto a l es R, entonces d (F, R) = 2a, así que para cualquier punto $Q \neq P$ de l,

$$
\begin{aligned}
d(F, Q) - d(F',Q) &= d(F, Q) - d(Q, R) \\
&< d(F, R) \\
&= d(F,P) - d(P,R) \\
&= d(F,P) - d(P, F') = 2a,
\end{aligned}
$$

así que:

$$d(F, Q) - d(F',Q) = d(F, Q) - d(R, Q) < d(F, R) = 2a$$

y por lo tanto, Q esta fuera de la hipérbola. Como esto pasa para todo punto $Q \neq P$ de la bisectriz l, entonces l es la recta tangente en P a la hipérbola.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola por el punto P lo que debemos hacer entonces es encontrar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por la recta $F'P$ y FP.

Las coordenadas de P, F Y F' son $P(x_1, y_1)$, $F(c,0)$, .F(-c,0). La ecuación de la recta que pasa por P y F es:

$$(x_1 - c)(y - y_1) = y_1 (x - x_1)$$

y la ecuación de la recta que pasa por P y F' es:

$$(x_1 + c)(y - y_1) = y_1 (x - x_1).$$

Escribimos estas ecuaciones en la forma normalizada de manera que el origen quede del mismo lado de ambas rectas,

$$\frac{y_1 x + (c - x_1) y - c y_1}{\sqrt{y_1^2 + (c - x_1)^2}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{-y_1 x + (c + x_1) y - c y_1}{\sqrt{y_1^2 + (-c - x_1)^2}} = 0,$$

observa que al evaluar los lados izquierdos de ambas ecuaciones en el origen (0,0) obtenemos el mismo signo en ambas.

Para encontrar los puntos que equidistan de ambas rectas, igualamos:

$$\frac{y_1 x + (c - x_1) y - c y_1}{\sqrt{y_1^2 + (c - x_1)^2}} = \frac{-y_1 x + (c + x_1) y - c y_1}{\sqrt{y_1^2 + (-c - x_1)^2}}. \qquad (14)$$

Para simplificar un poco las ecuaciones, vamos a analizar los términos que están dentro de los radicales, como P esta en la hipérbola, sus coordenadas satisfacen la ecuación, así que:

$$y_1^2 = \frac{b^2 x_1^2 - a^2 b^2}{a^2},$$

Entonces:

$$y_1^2 + (c - x_1)^2 = \frac{b^2 x_1^2 - a^2 b^2 + a^2 c^2 - 2a^2 c x_1 + a^2 x_1^2}{a^2}$$

$$=\frac{a^2\left(c^2-b^2\right)+x_1^2\left(a^2+b^2\right)-2a^2cx_1}{a^2}$$

$$=\frac{a^4+x_1^2c^2-2a^2cx_1}{a^2}$$

$$=\frac{(a^2-cx_1)^2}{a^2}$$

Así que:

$$\sqrt{y_1^2+\left(c-x_1\right)^2}=\left|\frac{a^2-cx_1}{a}\right|.$$

De manera similar:

$$y_1^2+\left(c-x_1\right)^2=\frac{\left(a^2-cx_1\right)^2}{a^2}$$

Y entonces:

$$\sqrt{y_1^2+\left(c-x_1\right)^2}=\left|\frac{a^2-cx_1}{a}\right|,$$

si x_1 es la primera coordenada de un punto en la hipérbola con centro en el origen, uno de los dos términos que están dentro de los valores absolutos anteriores es positivo y el otro negativo, sustituyendo estos valores en la ecuación (14) obtenemos:

$$\frac{a\left(y_1x+\left(c-x_1\right)y-cy_1\right)}{a^2-cx_1}=-\frac{a\left(-y_1x+\left(c+x_1\right)y-cy_1\right)}{a^2+cx_1}$$

Simplificando la ecuación anterior llegamos a:

$$a^2y-a^2y_1+x_1y_1x-x_1^2=0$$

$$\left(x_1y_1\right)x+\left(a^2-x_1^2\right)y=a^2y_1$$

$$\frac{\left(x_1y_1\right)x}{a^2y_1}+\frac{\left(a^2-x_1^2\right)y}{a^2y_1}=1$$

nuevamente utilizando el hecho de que *P* satisface (15), obtenemos que:

$$\frac{a^2-x_1^2}{a^2}=-\frac{y_1^2}{b^2},$$

finalmente, sustituyendo este valor y simplificando obtenemos que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en $P(x_1, y_1)$ es:

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (15)$$

Para el caso de la hipérbola vertical, se intercambian los papeles de a y b y los signos de x y y obteniéndose:

El análisis anterior es para hipérbolas con centro en el origen. Veamos ahora como encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola horizontal con centro en C(h, k)en el punto $P(x_1, y_1)$.

Trasladamos los ejes para que el origen quede en C mediante la sustitución:

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k \qquad (16)$$

las coordenadas de P con respecto a los nuevos ejes son:

$$x'_1 = x_1 - h \quad \text{y} \quad y'_1 = y_1 - k, \qquad (17)$$

como la hipérbola es horizontal entonces por (15),

$$\frac{x'_1 x'}{a^2} - \frac{y'_1 y'}{b^2} = 1$$

sustituyendo x' y y' de acuerdo a (16) obtenemos la ecuación de la recta tangente a la hipérbola horizontal en $P\ (x_1, y_1)$;

$$\frac{(x_1 - h)(x - h)}{a^2} - \frac{(y_1 - k)(y - k)}{b^2} = 1$$

Análogamente podemos encontrar la ecuación de la recta tangente a una hipérbola vertical con centro en C (h , k) en un punto $P\ (x_1, y_1)$que esté en la hipérbola.

19.- Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en el punto dado.

1. $-x^2 + y^2 - 6x - 14y + 39 = 0$ en el punto $P(-3,6)$.
2. $-3x^2 + y^2 + 144x - 32y - 1481 = 0$ en el punta $P(27, 22)$.
3. $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$ en el punto $P(-3, -2)$.
4. $x^2 - 9y^2 - 18x - 54y - 81 = 0$ en el punto $P(24, 1)$.
5. $-x^2 + 2y^2 - 20y + 48 = 0$ en el punto $P(4,8)$.

SOLUCIÓN PARA ALGUNOS EJERCICIOS

Unidad I INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

8. Ejercicios de repaso pag. 25

1. 1) $d\overline{AB} = 10$ 2) $d\overline{CM} = 5.9184$ 3) $d\overline{LB} = 10.8166$

2. x = 9, x = -7.

3. y = 14, y = -2.

4. x = -3, x = 9.

5. $P(\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$

8. $y = \frac{65}{9}$, $y = -\frac{35}{9}$

Unidad II LA LINEA RECTA.

10. Ejercicios de repaso pag. 54

1. a) $3x - y - 6 = 0.$

2. a) $\sqrt{3x} - y + 4 - 7\sqrt{3} = 0$ b) $x + y + 5 = 0$

4. a) $x + 9y - 38 = 0$

5. a) $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 6 = 0$

6. 1. $d = \frac{|20|}{\sqrt{41}}$, 2. $d = \frac{|27|}{\sqrt{29}}$

7. a) $\angle A = 90°, \angle B = 45°, \angle C = 45°$

b) $\angle K = 69°13'40'', \angle L = 24°43'03'', \angle M = 86°03'17''$

Unidad III LA CIRCUNFERENCIA

2. Ejercicios Pag. 64

1. $x^2 + y^2 = 9$

3. $(x-3)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 9$

5. $(x+\frac{2}{3})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{4}{9}$

8. C (0,0), r = 2.

10. C (3,2), r = 2.

12. C (-3,2), r = $\frac{5}{2}$.

Unidad III LA PARÁBOLA

13. Ejercicios pag. 85

2. Foco (-4,0), L.R. 16, directriz x =4 **4.** Foco $(0,-\frac{5}{2})$ L.R.10 , directriz y = $\frac{5}{2}$

5. $y^2 = 12x$ **7.** $y^2 = -16x$ **9.** $y^2 = 16x$ **11.** $y^2 = 10x$

16. Ejercicios pag. 94

2. $(x-3)^2 = -24(y+2)$ **4.** $(y-1)^2 = 8(x-4)$

5. $V(-1,0), F(-3,0), (-3,4), (-3,-4)$ **7.** $V(-4,0), F(-1,0), (-1,6), (-1-6)$

9. $V(-2,0), F(-2,-4), (-10,-4), (6,-4)$ **11.** $V(0,-4)F(-\frac{3}{2},-4), (-\frac{3}{2},-1), (-\frac{3}{2},-7)$

18. Ejercicios pag. 101

1. x-16y-20=0 **3.** 4x-3y-4=0 **5.** x-6y+8=0 **7.** x+4y-4=0 **9.** x+2y-4=0

Unidad IV LA HIPÉRBOLA

6. Ejercicios Pag. 114

2. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ 5. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$ 8. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

9. c(0 , 0), a = $\sqrt{10}$, b = 3, c = 1, A($\sqrt{10}$,0), A´(- $\sqrt{10}$,0), F(1,0), F´(-1,0), B(0,3), B´(0,-3), e = $\frac{1}{\sqrt{10}}$, lr = $\frac{18}{\sqrt{10}}$.

12. c(0 , 0), a = 2$\sqrt{3}$, b = 2$\sqrt{2}$, c = 2, A(0, 2$\sqrt{3}$), A´(0, −2$\sqrt{3}$), F(0,2), F´(0,-2), B(2$\sqrt{2}$,0), B´(-2$\sqrt{2}$,0), e = $\frac{1}{\sqrt{3}}$, lr = $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

9. Ejercicios Pag. 125

1. $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{20}=1$ 4. $\frac{(x-2)^2}{34}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

5. c(1 , -2), a = 5, b = 4, c = 5, A(1,3), A´(1,-7), F(1,1), F´(1,-5), B(5,-2), B´(-3,-2), $e = \frac{3}{5}$, lr = $\frac{32}{5}$.

8. $\frac{(x+4)^2}{4}+(y+2)^2=1$, c(-4 , 2), a = 2, b = 1, $c=\sqrt{3}$, A(-2,2), A´(-6,2), F´($-4\pm\sqrt{3},2$), B(-4, 3), B´(-4, 1), $e = \sqrt{\frac{3}{2}}$, lr = 1.

Unidad IV LA HIPÉRBOLA

14. Ejercicios pag. 136

1. Focos $F'(-\sqrt{34},0)yF(\sqrt{34},0)$; vértices V'(-3,0) y V (3,0)

3. Focos F' $(0,-2\sqrt{5})yF(0,2\sqrt{5})$; vértices V'(0,-4) y V (0,4)

5. Focos $F'(-\sqrt{10},0)yF(\sqrt{10},0)$; vértices V' $(-\sqrt{6},0)yV(\sqrt{6},0)$

7. Focos F'(0,-6) y (0,6) ; vértices V'(0,-4) y V (0,4)

9. $21x^2-4y^2-84=0$ **11.** $-x^2+3y^2-27=0$

Ejercicios pag 141

1. $Fo\cos F'(-9-3\sqrt{10},1)yF(-9+3\sqrt{10},1)$; Vértices V'(-18,1) y V (0,1); centro (-9,1)

2. $Fo\cos F'(-3,7-\sqrt{41})yF(-3,7+\sqrt{41})$; Vértices V'(-3,2) y V (-3,12): centro (-3,7)

3. $\frac{(x-2)^2}{400}-\frac{(y+2)^2}{400}=1$ **4.** $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$

5. $24x^2-25y^2-96x+50y-529=0$ **6.** $4y^2-49x^2+196x-392=0$

18. Ejercicios pag 149

1. y = 6   **2.** 3x-2y-37= 0   **3.** x-y+1= 0   **5.** 2x-3y+16= 0

BIBLIOGRAFIA

1. Gordon Fuller y Dalton Tarwater
Geometría Analítica
Addison- Wesley Iberoamericana
Séptima edición, 1995

2. Elena de Oteyza, Emma Lam Osnaya, José Antonio Gómez, Arturo Ramírez Flores
Geometría Analítica
Prentice Hall
Primera edición, 1994.

3. Benjamín Garza Olvera.
Geometría Analítica
DGETI
Sexta reimpresión, 2003.

4. Irma Fuenlabrada Velásquez, Javier León Sarabia
Geometría Analítica
MC Graw Hill
Edición revisada, 2004.

5. Baltasar Júnez Vega, Armando López Zamudio, Rafael Rojas Rojas.
Matemáticas III. Geometría Analítica
DGETI
Primera edición, 2004.

6. Francisco José Ortiz Campos
Geometría Analítica
Publicaciones cultura
Octava reimpresión, 2002.

Sitios WEB

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/

http://www.elosiodelosantos.com/sergiman/div/geometan.html

http://jfinternational.com/mf/geometria-analitica.html

http://expo.cvh.edu.mx/proyectos/TISGGRG/99348/99348.htm