Prova 1 (2024/2)

Wednesday, 27 November 2024 11:16

lc1-2024-2-prova1

Lógica Computacional 1 (2024-2)

Primeira Avaliação Escrita

Prof. Flávio L. C. de Moura

27 de novembro de 2024

- Por favor, coloque **nome** e **matrícula** em todas as folhas
- A resolução pode ser feita à lápis ou caneta, mas seja organizado.
- Esta avaliação é **individual** e **sem consulta**.
- Início: 20:50
- Término: 22:30

Construa uma prova no sistema de Dedução Natural para cada um dos sequentes abaixo, considerando os seguintes pontos:

- **Construa uma prova intuicionista sempre que possível.**
  - Valor: 2 pontos para cada prova intuicionista correta.
- Se não for possível, **mostre que o sequente não tem prova intuicionista**.
  - Valor:
    - 1 ponto para cada prova clássica correta;
    - 1 ponto para cada justificativa/prova (de que o sequente não tem prova intuicionista) correta.

1. $(\neg A) \vee B \vdash A \to B$
2. $A \to B \vdash (\neg A) \vee B$
3. $A \to B \vdash (\neg B) \to (\neg A)$
4. $(\neg B) \to (\neg A) \vdash A \to B$
5. $A \vee B \vdash \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$

	Notação com sequentes	Notação padrão
0	$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\,(Ax)$	
1	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge_i)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}\,(\wedge_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i\in\{1,2\}}}\,(\wedge_e)$
3	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee_i)$	$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee_i)$
4	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\,(\vee_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \begin{matrix}[\varphi_1]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\varphi_2]^v \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,(\vee_e)\ u, v$
5	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\,(\to_i)$	$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\,(\to_i)\ u$
6	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\to_e)$	$\dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}\,(\to_e)$
7	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,(\neg_i)$	$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ u$
8	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\,(\neg_e)$	$\dfrac{\neg\varphi \quad \varphi}{\bot}\,(\neg_e)$
9	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\bot_e)$	$\dfrac{\bot}{\varphi}\,(\bot_e)$
10	$\dfrac{}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi}\,(LEM)$	$\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(LEM)$

Tabela 1: Regras da Lógica Proposicional Clássica

1. $(\neg A) \vee B \vdash A \to B$

$$\dfrac{(\neg A)\vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^x \quad [A]^y}{\bot}\,(\neg e)}{B}\,(\bot e)}{A \to B}\,(\to_i)\ y \qquad \dfrac{[B]^z}{A \to B}\,(\to_i)\ \emptyset}{A \to B}\,(\vee e)\ x, z$$

2. $A \to B \vdash (\neg A) \vee B$

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee (\neg A)}\,(LEM) \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^x \quad A \to B}{B}\,(\to e)}{(\neg A) \vee B}\,(\vee i) \qquad \dfrac{[\neg A]^y}{(\neg A) \vee B}\,(\vee i)}{(\neg A) \vee B}\,(\vee e)\ x, y$$

Este sequente não possui prova intuicionista. De fato, considere $\dfrac{\varphi \to \psi}{(\neg\varphi) \vee \psi}\,(R)$.

Construiremos uma prova de (LEM) utilizando apenas regras intuicionistas e R para concluirmos que R é uma regra clássica:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^x}{A \to A}\,(\to_i)\ x}{(\neg A) \vee A}\,(R)$$

3. $A \to B \vdash (\neg B) \to (\neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to B \quad [A]^x}{B}\,(\to e) \quad [\neg B]^y}{\bot}\,(\neg e)}{\neg A}\,(\neg i)\ x}{(\neg B) \to (\neg A)}\,(\to_i)\ y$$

4. $(\neg B) \to (\neg A) \vdash A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^y \quad \dfrac{(\neg B) \to (\neg A) \quad [\neg B]^x}{\neg A}\,(\to e)}{\bot}\,(\neg e)}{B}\,(PBC)\ x}{A \to B}\,(\to_i)\ y$$

Este sequente não possui prova intuicionista. De fato, considere $\dfrac{(\neg\varphi) \to (\neg\psi)}{\psi \to \varphi}\,(R)$.

Construiremos uma prova de $(\neg\neg e)$ utilizando apenas regras intuicionistas e R para concluirmos que R é uma regra clássica:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^x \quad [\neg\neg A]^y}{\bot}\,(\neg e)}{\neg\neg\neg A}\,(\neg i)\ y}{(\neg A) \to (\neg\neg\neg A)}\,(\to_i)\ x}{(\neg\neg A) \to A}\,(R) \qquad \neg\neg A}{A}\,(\to e)$$

5. $A \vee B \vdash \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$

$$\dfrac{\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{[A]^x \quad \dfrac{[(\neg A)\wedge(\neg B)]^y}{\neg A}\,(\wedge e)}{\bot}\,(\neg e) \qquad \dfrac{[B]^z \quad \dfrac{[(\neg A)\wedge(\neg B)]^y}{\neg B}\,(\wedge e)}{\bot}\,(\neg e)}{\bot}\,(\vee e)\ x, z}{\neg((\neg A) \wedge (\neg B))}\,(\neg i)\ y$$