Cours et activités de Mathématiques Terminale C

Kabirou TOUKOUROU[1]

19 juillet 2018

1. Remerciement à Djamiou M CHOUETI

Table des matières

Chapitre1

CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

CEG DOWA Année scolaire : 2016 - 2017

Discip : Mathématiques Date : 04-Octobre-2016

Classe : Term C **Effectif :** 36

Chargé du cours : Mr Kabirou TOUKOUROU

SITUATION D ?APPRENTISSAGE n° 1 : **Configurations de l'espace**

1. ÉLÉMENTS DE PLANIFICATION
1.1 Contenus de formation
1.1.1 Compétences

a) Les compétences disciplinaires :
- Résoudre un problème ou une situation-problème en utilisant les concepts et procédures du langage et du raisonnement mathématique.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects géométriques par l'appropriation d ?outils et de démarches propres à la géométrie.

b) Compétence transdisciplinaire :
- Se préparer à intégrer la vie professionnelle dans une perspective de réalisation de soi et d'insertion dans la société.

c) Compétences transversales
- Exploiter l'information disponible ;
- Résoudre une situation-problème ;
- Communiquer de façon précise et appropriée ;
- Exercer sa pensée critique ;
- Travailler en coopération.

1.1.2 Connaissances et techniques

Calcul vectoriel
Barycentre de n points pondérés (n entier naturel supérieur à 1) Étude des fonctions : M $\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}}_i$ et M $\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}}_i^2$

Lignes de niveau
Produit vectoriel
Applications de l'espace
Translation - Homothétie - Symétrie orthogonale par rapport à un plan - Symétrie orthogonale par rapport à une droite.

1.2 **Durée :** 27 heures

1.3 **Stratégies d ?enseignement / apprentissage** : Brainstorming, travail individuel, travail en groupe et travail collectif.

1.4 **Matériel :** objets familiers

2. **DÉROULEMENT**

Contexte : Le pont de Codji

Reliant les deux rives d'un fleuve, le pont réalisé par l'ingénieur PIKO est un chef d'œuvre que les pêcheurs contemplent chaque jour. Les travaux ont duré deux ans et une vingtaine de pêcheurs riverains ont été des ouvriers spécialisés en plongée. Sonon, l'un des ouvriers, a du plaisir à raconter à la jeune génération les longues journées de travail sur le chantier.
L'ingénieur PIKO dirigeait simultanément tous les ateliers : il exigeait partout la précision dans les mesures et s'en assurait. La qualité du sol, la qualité du béton, les précisions du dosage, la forme et la qualité des poutres, l'implantation des piliers, le flux et le reflux du cours d'eau ; rien n'échappait au contrôle de l'ingénieur PIKO.
Les travaux achevés, le pont fut livré à la circulation. Les riverains sont encore fiers de ce pont qui n'a rien perdu de sa solidité des décennies durant. Sonon s'interroge encore aujourd'hui sur les méthodes et les procédés qui ont permis à l'ingénieur PIKO de réussir ce chef d'œuvre.

Tâche Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la S.A à :

— exprimer ta perception de chacun des problèmes posés,

— analyser chacun des problèmes posés,

— mathématiser chacun des problèmes posés,

— opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème,

— améliorer si possible ta production.

Activité 0
Stratégie d'apprentissage : Brainstorming TC 10min
Lis attentivement le texte et exprime toutes les idées qu'il t'inspire.

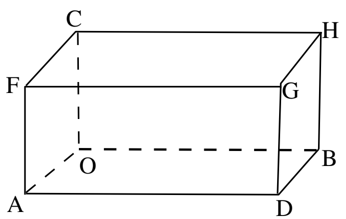
1.1 Séquence 1 : Calcul vectoriel

Durée : 18 heures

NB : Dans toute cette séquence, $\mathcal{A}$ désigne une droite, un plan ou l'espace et $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{A}$

1.1.1 Barycentre de points pondérés

Activité 1 Sur le chantier , Sonon se chargeait de fabriquer des briques ayant la forme du parallélépipède rectangle ci-dessous :



Activité 1.1 On pose donne OA = 4 , OB = 5 et OC = 3. On pose

$$\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} \quad , \quad \vec{j} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

1. Justifie que $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ est un repère de l'espace. Ce repère est-il orthonormé ?

2. Détermine dans ce repère les coordonnées des points F , G et H et celles des points E , L et K définis par

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{OC} \quad , \quad \overrightarrow{OK} = \frac{6}{5}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OE} \quad , \quad \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$$

3. Justifie qu'il existe un triplet $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ de nombres réels tels que

$$\alpha\,\overrightarrow{OL} + \beta\,\overrightarrow{OA} + \gamma\,\overrightarrow{OC} = \vec{O}$$

Stratégie d'apprentissage : T.I 5 min T.G 5 min T.C 7 min

Résultat

Définition 1 On appelle point pondéré tout couple (M, α) où $M \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 2 Soit $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n points de $\mathcal{A}$; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ n nombres réels, $(n \in \mathbb{N}\,;\, n \geqslant 2)$ et le système $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$.
On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** associée aux points pondérés (A_1, α_1) ; (A_2, α_2) ; ⋯ ; (A_n, α_n) l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & M & \longmapsto & \overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} \end{array}$$

Le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ est noté $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i}$

Exemple
• La fonction vectorielle de Leibniz f associée aux points pondérés (A , -1) , (B , 2) , (C , -3) et (D , 4) est définie par $\overrightarrow{f(M)} = -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}$.
• L'application $\begin{array}{rccl} g: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & M & \longmapsto & \overrightarrow{MA} - \sqrt{2}\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF} \end{array}$ est la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\{(A\,,1)\,,(B\,,-\sqrt{2})\,,(E\,,-3)\,,(F\,,1)\}$

Activité 1.1 :
Soit f la fonction vectorielle de Leibniz associée aux points pondérés (A_1, α_1) ; (A_2, α_2) ; ⋯ ; (A_n, α_n), K un point de $\mathcal{A}$.

1. Démontre que pour tout point M de $\mathcal{A}$, on a $\overrightarrow{f(M)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{f(K)}$.

2. (a) On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Que peux-tu dire de f ?

(b) On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Prouve que f est une application bijective.

Déduis-en l'ensemble des points M de $\overrightarrow{f(M)} = \vec{O}$.

Stratégie d'apprentissage : T.I 5 min T.G 7 min T.C 10 min

Résultat

Propriété 1 Soit le système $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$; $(n \in \mathbb{N} ; n \geqslant 2)$ et l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ M & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \end{array}$$

— Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors f est une application constante (le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ est indépendant de M).

— Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors f est une bijection.

Définition 3 Soit le système $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$; $(n \in \mathbb{N} ; n \geqslant 2)$.
Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors l'unique antécédent du vecteur nul par l'application $f : M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est appelé **barycentre** du système (S).
Autrement dit, G est le barycentre de $\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$; $(n \in \mathbb{N} ; n \geqslant 2)$
$\Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \right)$

NOTATION
Si G est le barycentre des points pondérés (A_1, α_1) ; (A_2, α_2) ; $\cdots$; (A_n, α_n), alors on note G=bar$\{(A_1, \alpha_1) ; (A_2, \alpha_2) ; \cdots ; (A_n, \alpha_n)\}$ ou encore

G=bar

A_1	A_2	$\cdots$	A_n
α_1	α_2	$\cdots$	α_n

Activité 2 Soient (A_1, α_1) ; (A_2, α_2) ; $\cdots$; (A_n, α_n) $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, n points pondérés de $\mathcal{A}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Soit G le barycentre du système S=$\{(A_1, \alpha_1) ; (A_2, \alpha_2) ; \cdots ; (A_n, \alpha_n)\}$.

1. Justifie que : $\forall M \in \mathcal{A}$, on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}$.

2. Déduis-en que pour tout point quelconque O de $\mathcal{A}$, on a : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \right)$

Propriété 2 Soit G le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1) ; (A_2, \alpha_2) ; \cdots ; (A_n, \alpha_n)\}$.
P_1 $\forall M \in \mathcal{A}$, on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}$
P_2 Pour tout point quelconque O un point quelconque de $\mathcal{A}$ on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \right).$$

Conséquence
Soit G le barycentre système $S = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$.
- $\mathcal{A}$ est le plan muni d'un repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit (x_i, y_i) les coordonnées de A_i , $1 \leq i \leq n$, et (x_G, y_G) celles de G, On a :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

- $\mathcal{A}$ est l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit (x_i, y_i, z_i) les coordonnées de A_i , $1 \leq i \leq n$, et (x_G, y_G, z_G) celles de G, On a :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad , \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Propriété 3 Considérons le système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et désignons par G son barycentre.

P_1 : Pour tout réel non nul λ, G est aussi le barycentre du système $\{(A_1, \lambda\alpha_1); (A_2, \lambda\alpha_2); \cdots; (A_n, \lambda\alpha_n)\}$

P_2 : Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ | $\alpha_1 \neq 0$, alors
$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_1 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_1 \overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. c-à-d :
G=bar$\{(A_1,\alpha_1) ; (A_2,\alpha_1) ; \cdots ; (A_n,\alpha_1)\}$=bar$\{(A_1,1) ; (A_2,1) ; \cdots ; (A_n,1)\}$. Et dans ce cas G est appelé **isobarycentre** des points A_1 ; A_2 ; $\cdots$; A_n.
En particulier :
· l'isobarycentre de deux points A et B estle milieux du segment [AB].
· l'isobarycentre de trois points A , B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

P_3 : Le barycentre de n points pondérés est indépendant de l'ordre dans lequel on considère ces points pondérés.

P_4 : Le barycentre de n points pondérés ne change pas lorsqu'on remplace p d'entre eux $0 < p < n$ dont la somme des coefficients est non nulle par leur barycentre affecté de cette somme.

Exemple

Soit G=$\{(A\,,4)\,,(B\,,4)\,,(C\,,2)\,,(D\,,1)\}$.

Soit I le milieu du segment [BD], alors on a G=$\{(A\,,4)\,,(C\,,2)\,,(I\,,2)\}$.

Soit I' le milieu du segment [CI], alors on a G=$\{(A\,,4)\,,(I'\,,4)\}$. Donc G est le milieu de [AI']

P_5 :

- L'ensembles des barycentres de deux points distincts A et B est la droites (AB)
- L'ensembles des barycentres de deux points distincts A et B affectés des coefficients de même signe est le segment [AB] .
- L'ensembles des barycentres de deux points distincts A et B affectés des coefficients de signes contraires est la droite (AB) privée du segment [AB] .

P_6 : L'ensembles des barycentres de trois points A, B et C non alignés est le plan (ABC) .

Exercices 1.c , 1.d , 1.e 1.g , 1.h CIAM-SM p.38

Activité de réinvestissement Str. d'appr : T.I ... min T.C 10 min

Soit A, B, C, et D quatre points non coplanaires de l'espace $\mathcal{E}$ et soit λ un réel.

1. Démontre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système S= $\{(A, 1); (B, 1-\lambda); (C, \lambda), (D, 1)\}$ admet un barycentre G_λ.
2. Détermine l'ensemble des points G_λ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$. (tu pourras utiliser G_0)

✂ ....

Activité de réinvestissement

Dans l'espace $\mathcal{E}$, soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que : AB = AC = a , avec $a \in \mathbb{R}_+^\star$.

1. Donne une condition nécessaire et suffisante sur m pour que le système $\{(A\,,2)\,,(B\,,-1)\,,(C\,,m)\}$ admette un barycentre G_m .
2. Construis G_0 et G_2 . Vérifie que : $G_0G_2 = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.
3. Détermine les ensembles suivants :

   (a) $\Gamma_1 = \left\{M \in \mathcal{E} \quad ; \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|\right\}$.

   (b) $\Gamma_2 = \left\{M \in \mathcal{E} \quad ; \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|\right\}$.

Définition 4 Soit $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n points de $\mathcal{A}$; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ n nombres réels ($n \geqslant 2$).
On appelle **fonction scalaire** de Leibniz associée au système $(S) = \{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);\cdots;(A_n,\alpha_n)\}$ l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M & \longmapsto & \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2 \end{array}$$

Le réel $\alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2$ est noté $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ et s'écrit encore $\alpha_1 \overrightarrow{MA}_1^2 + \alpha_2 \overrightarrow{MA}_2^2 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA}_n^2$

Exemple

La fonction scalaire φ de Leibniz associée au système $(S) = \{(A\,,-1)\,,(B\,,5)\,,(C\,,3)\}$ est définie par $\varphi(M) = -MA^2 + 5MB^2 + 3MC^2$.

Activité 1.3 :

Soit le système de points pondérés $S = \{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);\cdots;(A_n,\alpha_n)\}$. Soit f la fonction vectorielle de Leibniz associée au système S , φ la fonction scalaire de Leibniz associée à S et K un point de $\mathcal{A}$ et l'ensemble $(E_k) = \{M \in \mathcal{A} \mid \varphi(M) = k\}$

1. Démontre que pour tout point M de $\mathcal{A}$, on a :
$$\varphi(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MK^2 + \varphi(K) + 2\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{f(K)}$$
2. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Soit G le barycentre du système S , et M un point de $\mathcal{A}$.
Montre que $\varphi(M) = k \iff MG^2 = \lambda$ avec $\lambda = \dfrac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$.
3. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Soit O un point de $\mathcal{A}$ et $\vec{u}$ le vecteur défini par : $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA}_i$.
Montre que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k \iff \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 - k\right)$.

Stratégie d'apprentissage : T.I 10 min T.G 5 min T.C 20 min

Résultat

Retenons

Soit φ la fonction scalaire de Leibniz associée au système $(S) = \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \cdots; (A_n, \alpha_n)\}$ et K un point quelconque de $\mathcal{A}$.

$\forall$ M $\in \mathcal{A}$, $\varphi(\mathrm{M}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\mathrm{MK}^2 + \varphi(\mathrm{K}) + 2\overrightarrow{\mathrm{MK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{f(K)}}$ où f est la fonction vectorielle de Leibniz associé au système (S).

— si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors $\varphi(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{KA}_i^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MK}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{KA}_i}$, $\left(\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{K}) + 2\overrightarrow{\mathrm{MK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{f(K)}}\right)$.

— si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors $\forall$ M $\in \mathcal{A}$, $\varphi(\mathrm{M}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\mathrm{MG}^2 + \varphi(\mathrm{G})$ où G est le barycentre du système $\{(\mathrm{A}_1,\alpha_1) ; (\mathrm{A}_2,\alpha_2) ; \cdots ; (\mathrm{A}_n,\alpha_n)\}$.

1.1.2 Ligne de niveau

Définition 5 Soit g une application qui, à tout point M de $\mathcal{A}$, associe un réel $g(\mathrm{M})$, et k un nombre réel.

On appelle **ligne de niveau** k de l'application g l'ensemble des points M de $\mathcal{A}$ tel que $g(\mathrm{M}) = k$.

Exemple

On appelle **ligne de niveau** k de l'application $\varphi : \mathrm{M} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$, l'ensemble des points M de $\mathcal{A}$ tel que $\varphi(\mathrm{M}) = k$

Étude de la ligne de niveau k de la'application $g : \mathrm{M} \longmapsto \varphi(\mathrm{M})$

✂ ....

Activité 1.4 :

1. Soit $k \in \mathbb{R}$, Ω un point de $\mathcal{A}$ et l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \varphi(\mathrm{M}) = \Omega\mathrm{M} \end{array}$

   et l'ensemble $\Gamma = \{\mathrm{M} \in \mathcal{A} \mid f(\mathrm{M}) = k\}$

   Détermine suivant les valeurs de k et la nature de $\mathcal{A}$ la nature de Γ.

2. Soit : $k \in \mathbb{R}$; $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathcal{B}$; A un point de $\mathcal{A}$; g l'application définie par $g: \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} \end{array}$; et l'ensemble $\Gamma_1 = \{\mathrm{M} \in \mathcal{A} \mid g(\mathrm{M}) = k\}$

   (a) On suppose que $\vec{u} = \vec{o}$. Détermine suivant les valeurs de k et la nature de $\mathcal{A}$ la nature de Γ_1.

   (b) On suppose que $\vec{u} \neq \vec{o}$. On désigne par (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; B un point de (Δ)tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u}$ et H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

   Justifie que $g(\mathrm{M}) = k \iff \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{k}{\mathrm{AB}}\vec{\imath}$ avec $\vec{\imath} = \dfrac{1}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

   Détermine suivant la nature de $\mathcal{A}$ la nature de Γ_1.

3. Soit $k \in \mathbb{R}$; A un point de $\mathcal{A}$.

   Détermine suivant les valeurs de k et la nature de $\mathcal{A}$, l'ensemble $\Gamma_2 = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{A} \mid \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = k\right\}$.

Indication du résultat

1. Soit $k \in \mathbb{R}$, Ω un point de $\mathcal{A}$; $g: \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & g(\mathrm{M}) = \Omega\mathrm{M} \end{array}$

   et l'ensemble $\Gamma = \{\mathrm{M} \in \mathcal{A} \mid g(\mathrm{M}) = k\}$

   — Si $k < 0$, alors $\Gamma = \Phi$

   — Si $k = 0$, alors $\Gamma = \{\Omega\}$

   — Si $k > 0$ et :

     — si $\mathcal{A}$ est une droite, alors $\Gamma = \{\mathrm{M}_1 ; \mathrm{M}_2\}$ avec $\mathrm{M}_1\Omega = \mathrm{M}_2\Omega = k$;

     — si $\mathcal{A}$ est un plan, alors Γ est le cercle de centre Ω et de rayon k ;

     — si $\mathcal{A}$ est l'espace, alors Γ est la sphère de centre Ω est de rayon k.

2. Soit : $k \in \mathbb{R}$; $\vec{u}$ est un vecteur **non nul** de $\mathcal{B}$; A un point de $\mathcal{A}$; et l'application $g: \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} \end{array}$;

   l'ensemble $\Gamma = \{\mathrm{M} \in \mathcal{A} \mid g(\mathrm{M}) = k\}$ avec $k \in \mathbb{R}$; (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; B un point de (Δ)tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u}$ et H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{M}) = k &\iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = k \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = k \\ &\iff \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AH}} = k \\ &\iff \overline{\mathrm{AH}} = \frac{k}{\overline{\mathrm{AB}}} \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{k}{\mathrm{AB}}\vec{\imath} \quad \text{avec } \vec{\imath} = \frac{1}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \end{aligned}$$

   Γ est donc l'ensemble des points M ayant le point H pour projeté orthogonal sur la droite (AB),

- Si $\mathcal{A}$ est une droite,alors Γ est réduit à l'unique point H,
- Si $\mathcal{A}$ est un plan, alors Γ est la droite passant par H et perpendiculaire à (AB),
- Si $\mathcal{A}$ est l'espace $\mathcal{E}$, alors Γ est le plan passant par H et de vecteur normal $\vec{u}$

<u>Remarque</u>
Si on connaît un point C de Γ, alors on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \Gamma &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0 \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CM}} = 0 \quad \text{(Et la conclusion s'en suit).} \end{aligned}$$

<u>NB</u> : Si $\vec{u} = \vec{o}$ alors :
- si $k \neq 0$, Γ est l'ensemble vide,
- si $k = 0$, Γ est l'ensemble $\mathcal{A}$.

3. Soit $\Gamma = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0\right\}$
   - Si $\mathcal{A}$ est une droite, alors $\Gamma = \{\mathrm{A}; \mathrm{B}\}$
   - Si $\mathcal{A}$ est un plan, alors Γ est le cercle de diamètre [AB]
   - Si $\mathcal{A}$ est l'espace $\mathcal{E}$, alors Γ est la sphère de diamètre [AB]
4. Soit $g \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} \end{array}$

   et l'ensemble $\Gamma = \{\mathrm{M} \in \mathcal{A} \mid g(\mathrm{M}) = k\}$.
   - Si $k < 0$, alors $\Gamma = \Phi$
   - Si $k = 0$, alors $\Gamma = \{\mathrm{A}\}$
   - Si $k > 0$ et :
     - si $k = 1$ et $\mathcal{A}$ est une droite, alors Γ est réduit au point I milieu de [AB]
     - si $k = 1$ et $\mathcal{A}$ est un plan, alors Γ est la médiatrice de [AB]
     - si $k = 1$ et $\mathcal{A}$ est l'espace, alors Γ est le plan médiateur de [AB]
     - si $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = k &\iff \mathrm{MA} = k\mathrm{MB} \\ &\iff \mathrm{MA}^2 - k^2\mathrm{MB}^2 = 0 \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - k^2\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 = 0 \\ &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} - k\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + k\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0 \\ &\iff (1-k^2)\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MJ}} = 0 \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MJ}} = 0 \end{aligned}$$

avec I=bar{(A; 1); (B; $-k$)} et J=bar{(A, 1); (B, k)}.
Ce cas nous conduit au cas en 3.

Ligne de niveau	Condition	Sur une droite	Dans le plan	Dans l'espace
$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{u} = k$, $(k \in \mathbb{R})$	$\vec{u} = \vec{0}$	Ensemble vide ou la droite elle-même	Ensemble vide ou le plan lui-même	Ensemble vide ou l'espace
$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{u} = k$, $(k \in \mathbb{R})$	$\vec{u} \neq \vec{0}$	Un point	Une droite	Un plan
$\mathrm{AM} = k$	$(k \in \mathbb{R})$	Ensemble vide, un singleton ou une paire	Ensemble vide, un singleton ou un cercle	Ensemble vide, un singleton ou une sphère
$\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = k$	$k = 1$	Milieu de [AB]	Médiatrice de [AB]	Plan médiateur de [AB]
$\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = k$	$k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	Ensemble vide, un singleton ou une paire	Ensemble vide, un singleton ou un cercle	Ensemble vide, un singleton ou une sphère de diamètre

<u>Exemple</u>
Soit φ la fonction scalaire de Leibniz associée au système S.
- Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{M}) = k &\iff \varphi(\mathrm{K}) + 2\overrightarrow{\mathrm{MK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{f(K)}} = k \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{KM}} \cdot \vec{u} = k - \varphi(k). \end{aligned}$$

avec $\vec{u} = -2\overrightarrow{\mathrm{f(K)}}$ et on revient à un cas du tableau ci-dessus.

- Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{M}) = k &\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\mathrm{MG}^2 + \varphi(\mathrm{G}) = k \\ &\iff \mathrm{MG}^2 = \frac{k - \varphi(\mathrm{G})}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}. \end{aligned}$$

On discute alors suivant le signe de $\frac{k-\varphi(\mathrm{G})}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$ en se référant au tableau.

Propriété 4 Soit le système de points pondérés $\{(A_1,\alpha_1)\,;\,(A_2,\alpha_2)\,;\,\cdots;\,(A_n,\alpha_n)\}$, et on pose $\Gamma = \{M \in \mathcal{A} \mid \varphi(M) = k\}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $\varphi\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 \end{array}$

— Si $\mathcal{A}$ est une droite, alors Γ est soit l'ensemble vide, soit un point, soit une paire de points, soit une droite.

— Si $\mathcal{A}$ est un plan, alors Γ est soit l'ensemble vide, soit un point, soit ne droite, soit un cercle, soit un plan.

— Si $\mathcal{A}$ est l'espace, alors Γ est soit l'ensemble vide, soit une droite, soit une sphère, soit un plan, soit l'espace.

Activité de réinvestissement :

N.B les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit A et B deux points du plan et I le milieu de [AB]. Pour tout point M du plan, Montre que :
   (a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
   (b) $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
   (c) $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}$.
2. Soit ABC un triangle isocèle tel que AB = 4, CA = CB = 6.
   Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$.

Stratégie d'apprentissage : T.I 10 min T.G 0 min T.C 20 min

✂ ....

Activité de réinvestissement :

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC de côté 1.
Détermine l'ensemble Γ des points M de $\mathcal{P}$ tels que

$$MA^2 + 3MB^2 - MC^2 = 3$$

Stratégie d'apprentissage : T.I 5 min T.G 0 min T.C 7 min

✂ ....

Activité de réinvestissement :

Dans l'espace $\mathcal{E}$, soit A, B, C trois points tels que AB=1 et $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. m est n paramètre réel et Γ l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $-2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 = m$.

Détermine suivant les valeurs de m la nature de Γ.

I **Stratégie d'apprentissage** : T.I 10 min T.G 0 min T.C 20 min

✂ ....

Activité de réinvestissement

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(0\,;3)$, $B(-1\,;0)$, $C(3\,;0)$, $D(x\,;y)$.

1. Détermine les coordonnées x et y de D sachant que : $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$.
2. Détermine les réels α et β tels que D soit le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$, $(B\,,\alpha)$, $(C\,,\beta)$.
3. Détermine et construis l'ensemble Γ des points M de p tels que :
   $4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MD}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$.

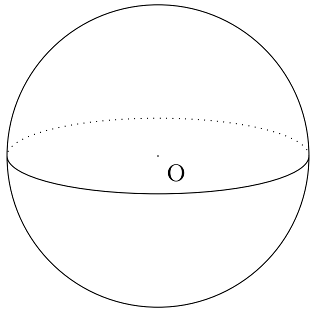
✂ ....

Activité d'approfondissement :

Activité 3 Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure a ($a \in \mathbb{R}_+^*$). O est le milieu de [BC], G le centre de gravité du triangle ABC et O′ le symétrique de G par rapport à O.

1. Trouve un triplet (α, β, γ) de nombres réels tel que O′ soit le barycentre des points pondérés $(A,\alpha)\,;\,(B,\beta)\,;\,(C,\gamma)$.
2. Détermine et construis l'ensemble Γ_1 des points M de $\mathcal{P}$ tels que
   $\left\|-3\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MO}\right\| = \left\|\overrightarrow{MO'}\right\|$
3. Détermine et construis l'ensemble Γ_2 des points M de $\mathcal{P}$ tels que
   $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2$
4. Soit $\Gamma_k = \left\{M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - 2\overrightarrow{MA}^2 = k\right\}$ avec $k \in \mathbb{R}$
   (a) Détermine Γ_k
   (b) Comment choisir k pour que $G \in \Gamma_k$

Définition 6 Soit Ω un point de l'espace $\mathcal{E}$, r un nombre réel positif.
La sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\Omega M = r$.



Propriété 5 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

— Une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(x_o; y_o; z_o)$ et de rayon r est $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=r^2$

— L'ensemble des points $\mathrm{M}(x; y; z)$ de l'espace $\mathcal{E}$ tels que $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ avec a, b, c, r des nombres réels et tel que $r>0$, est la sphère de centre $\mathrm{I}(a, b, c)$ et de rayon r.

NB : L'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, où a, b, c et d sont des constantes réelles, est soit l'ensemble vide, doit un singleton soit une sphère.

Propriété 6 Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon r, $(r>0)$ et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace$\mathcal{E}$.

— Si $d(\Omega; \mathcal{P})>r$, alors $\mathcal{P}$ et (S) sont disjoints : $\mathcal{P}\cap(S)=\Phi$.

— Si $d(\Omega; \mathcal{P})=r$, alors $\mathcal{P}$ et (S) sont tangents $\mathcal{P}\cap(S)=\{\mathrm{H}\}$ avec H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$.

— Si $d(\Omega; \mathcal{P})<r$, alors $\mathcal{P}$ et (S) sont sécants : $\mathcal{P}\cap(S)=\mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre H projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$ et de rayon $\lambda=\sqrt{r^2-d(\Omega; \mathcal{P})^2}$

Activité d'approfondissement 1 :

Soient ABCD un parallélogramme et I le milieu de [AB]. Les droites (DB) et (CI) se coupent en un point noté G.

1. Fais une figure que tu compléteras au fur et à mesure.
2. Montre que G est l'isobarycentre des points A, B et C.
3. (a) Construis le barycentre K du système de points pondérés (A ; 1), (B ; 1) et (C ;-1).
   (b) Montre que K est aussi le barycentre des points pondérés (G ; 3) et (C ;-2).
4. (a) Prouve que A est le barycentre des points pondérés (D ; 1), (G ; 3) et (C ;-2).
   (b) Justifie que A est le milieu du segment [DK].
5. Détermine et construis l ?ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MD}}+3\overrightarrow{\mathrm{MG}}-2\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right\|=\left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right\|$.
   (a) Pour quelle(s) valeur(s) du réel m le système $\{(\mathrm{D}; m), (\mathrm{G}; 3), (\mathrm{C}; -22)\}$ admet-il un barycentre I_m ?
   (b) Lorsque I_m existe, montrer que : $\overrightarrow{\mathrm{DI}_m}=\dfrac{1}{1+m}\overrightarrow{\mathrm{DK}}$.
   (c) Étudie les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.
   (d) déduis-en le lieu géométrique du point I_m lorsque le réel m décrit l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Activité d'approfondissement :

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [BG] et [HF], et O le centre du cube. On considère les ensembles suivants :

$(\Gamma)=\left\{\mathrm{M}\in\mathcal{E}; \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}-\overrightarrow{\mathrm{HM}}-\overrightarrow{\mathrm{FM}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=2\right\}$

$(\Sigma)=\left\{\mathrm{M}\in\mathcal{E}; -\mathrm{MA}^2+2\mathrm{MH}^2-\mathrm{MG}^2+2\mathrm{MB}^2=4\right\}$

1. (a) Vérifie que le point est O est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}, -1)$, $(\mathrm{B}, 2)$, $(\mathrm{H}, 2)$, $(\mathrm{G}, -1)$.
   (b) Démontre que (Σ) est une sphère dont tu préciseras le rayon.
2. (a) Démontre que pour tout point M de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}-\overrightarrow{\mathrm{HM}}-\overrightarrow{\mathrm{FM}}=2\overrightarrow{\mathrm{BF}}$.
   (b) Vérifie que J est un point de (Γ).
   (c) Détermine Γ.
3. Détermine $(\Gamma)\cap(\Sigma)$.

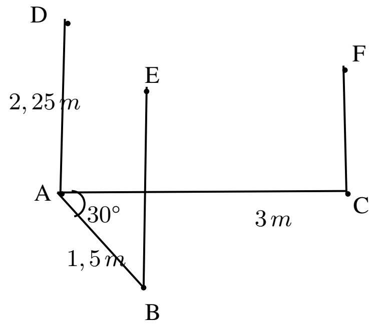
1.2 Séquence 2 : Produit vectoriel

Durée : ... heures

1.2.1 Orientation de l'espace

Activité 2

Sur le chantier de construction du pont de Codji, l'un des dispositifs utilisés par Piko pour le calage des bétons est représenté par la figure ci-contre.
Assiba, élève en terminale scientifique, affirme qu'on peut orienter l'espace à l'aide de deux types de repères définis par les points A, D,B et C, et qu'il existe une relation entre les normes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
NB : la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).



Tâche : Tu vas vérifier ces affirmations de Assiba.
Activité 2.1 :
On imagine un bonhomme debout sur l'axe (AD) les pieds en A, la tête en D et fixant l'un des points B et C.
De quel coôté le bonhomme voit-il l'autre ?
Stratégie d'apprentissage : T.I 2 min T.C : 2 min

Résultat

Définition 1

1. Soit $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$. I, J, K trois points de l'espace tels que $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.
   L'observateur d'Ampère est un personnage dont la tête est en K , les pieds en O et qui regarde le point I. Deux cas sont possibles :
   (a) Le point J est à gauche de l'observateur, on dit que le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est **direct** et que la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est **directe**
   (b) Le point J est à droite de l'observateur, on dit que le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est **indirect** et que la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est **indirecte**
   On admet que les repères de l'espace se répartissent en deux classes et chaque repère de l'espace appartient à l'une et une seule de ces classes.
   Orienter l'espace, c'est choisir l'un de ces deux repères. Les repères du type choisi sont dites directs, traditionnellement, ce sont du cas (a).
   • Permuter deux vecteurs d'un repère ou changer un vecteur d'une base en son opposé change l'orientation : si$(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est direct (ou encore $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est directe) alors $(-\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$; $(\vec{\imath}, -\vec{\jmath}, \vec{k})$; $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, -\vec{k})$; $(\vec{\imath}, \vec{k}, \vec{\jmath})$; $(\vec{k}, \vec{\jmath}, \vec{\imath})$ sont des bases indirectes de $\mathcal{W}$.
   • Une permutation circulaire sur les vecteurs d'une base ne change pas l'orientation : si$(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est direct (ou encore $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est directe) alors $(\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath})$; $(\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont des bases directes de l'espace $\mathcal{W}$.
2. L'espace est orienté. Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace $\mathcal{E}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
   On convient que $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère direct de $\mathcal{P}$ si $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ est un repère direct de l'espace $\mathcal{E}$.

Activité de réinvestissement

On considère un cube ABCDEFGH de l'espace $\mathcal{E}$ tel que le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère direct.
Chacune des bases $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FE})$; $(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA})$ est-elle directe ou indirecte ?

Stratégie d'apprentissage : T.I 5 min T.G 3 min T.C 5 min

1.2.2 Produit vectoriel

Activité 2.2 :
Assiba désire déterminer un vecteur normal $\vec{u}$ au plan (ABC) tel que la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{u}\right)$ soit directe et $\|\vec{u}\| = AB \times AC \times \sin\widehat{BAC}$.

1. Justifie qu ?il existe avec un nombre réel strictement positif λ tel que $\vec{u} = \lambda\overrightarrow{AD}$.
2. Déduis-en le vecteur $\vec{u}$.

Stratégie d'apprentissage : T.I 5 min T.G 3 min T.C 5 min

1.2.2.1 Définition du produit vectoriel

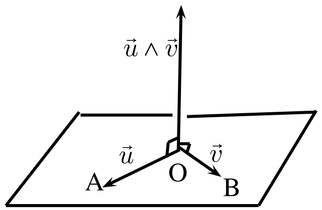
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace orienté . Soit A, B, C des points de l'espace $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ($\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$) défini par :

— si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

— si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ne sont pas colinéaires, alors :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et à $\vec{v}$,
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe ,

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \widehat{AOB}$



NB : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin \vec{u}, \vec{v}|$.

REMARQUE

—

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{W}^2; \quad \text{on a} : \begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{W}^2; \quad \text{on a} \begin{cases} (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \\ (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires et orthogonaux de $\mathcal{W}$, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de $\mathcal{W}$

1.2.2.2 Premières propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ orienté et pour tout nombre réel k, on a :

P$_1$: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormé directe de $\mathcal{W} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \\ \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \end{cases}$

P$_2$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

P$_3$: $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$

P$_4$: $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

P$_5$: $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

Activité de réinvestissement

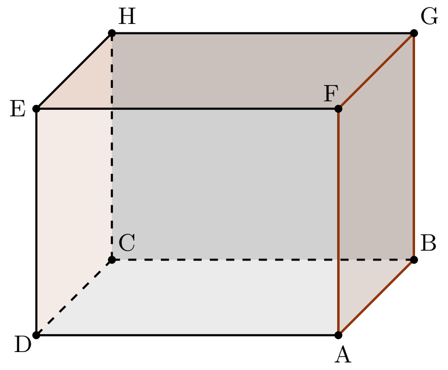
Les questions suivantes 1. et 2. sont indépendantes.

1. ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur a tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$ soit une base orthogonale directe de $\mathcal{W}$.
   Détermine $AB \wedge AD$ et $AH \wedge BF$.
2. Calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ sachant que $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -15\sqrt{3}$.

Stratégie d'apprentissage : T.I 5 min T.G 3 min T.C 7 min

Résultat

1. Le repère $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$ formé sur le cube ci-dessous, est orthonormé direct.



   À l'aide des points de la figure, écris plus simplement les vecteurs suivants : $AB \wedge AD$; $AB \wedge AC$; $AC \wedge BD$; $AC \wedge AG$; $AG \wedge BH$
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un angle $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
   Calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ sachant que $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 6$.

1.2.2.3 Coord. du prod. vect. dans une base ortho. nor. directe

Activité 3

1. $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.
   Démontre que $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$ et $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$.
2. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe et les vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$ où x, x', y, y', z, z' sont des nombres réels.
   Calcule en fonction de x, x', y, y', z, z' les coordonnées du vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Stratégie d'apprentissage : T.I 7 min T.G 3 min T.C 10 min

Résultat

Propriété 1 Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormé directe de $\mathcal{W}$ et les vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$ où x, x', y, y', z, z' sont des nombres réels.

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$

1.2.2.4 Propriétés du produit vectoriel

Activité 4

1. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sot trois vecteurs de $\mathcal{W}$. Démontre que :
   (a) ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) $\iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{o}$.
   (b) ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires) $\iff \vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.
2. Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et M un point de $\mathcal{E}$.
   Démontre que $(\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC})) \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0$.

Propriété 2 $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathcal{W}$

$\mathbf{P}_1$: $(\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}) \iff$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires).

En conséquence si A, B, C trois points non alignés de l'espace $\mathcal{E}$, alors

$\ast$ (A, B, C sont alignés) $\iff AB \wedge AC = \vec{0}$

$\ast$ $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}; \mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) \iff AM \wedge AB = \vec{0}$

Ainsi, l'ensemble des points M de l'espace $\mathcal{E}$ tel que $AM \wedge AB = \vec{0}$ est la droite (AB).

$\ast$ Le vecteur $AB \wedge AC$ est un vecteur normal au plan (ABC) et
$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}, \mathrm{M} \in (\mathrm{ABC}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot (AB \wedge AC) = 0$.

$\mathbf{P}_2$: ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires) $\iff \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$.

En conséquence, Quatre points A, B, C et D de l'espace $\mathcal{E}$ sont coplanaires si, et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot (AB \wedge AC) = 0$.

$\mathbf{P}_3$: Soit $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$; $\mathcal{P}$ le plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{P}'$ le plan de vecteur normal $\vec{n'}$.

- $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \iff \vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants $\iff \vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$.
  Dans ce cas $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Activité de réinvestissement

l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soient la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $\mathrm{A}(2, 3, -1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et à la droite $(\mathcal{D}')$ passant par le point $\mathrm{B}(1, 1, -2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1. Vérifie que $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires.
   On appelle distance des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ la distance entre les points d'intersection de ces droites avec leur perpendiculaire commune.
2. Donne un système d'équations cartésiennes de la droite (Δ), perpendiculaire commune à $(\mathcal{D})$ et à $(\mathcal{D}')$.
3. Détermine la distance des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

1.2.2.5 Applications du produit vectoriel

Activité 5 M_o est un point de l'espace $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$. Soit $\mathcal{D}$ la droite de repère $(\mathrm{M}_o, \vec{u})$ et H le projeté orthogonal de M_o sur la droite $\mathcal{D}$.

1. Justifie que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}_o} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{HM}_o} \wedge \vec{u}\right\|$
2. Déduis-en la distance du point M_o à $\mathcal{D}$
3. A, B, C sont trois points non alignés de l'espace $\mathcal{E}$.
   Démontre que la distance d'un point quelconque M au plan (ABC) est égale à $\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot (AB \wedge AC)\right|}{\|AB \wedge AC\|}$

Stratégie d'apprentissage : T.I 7 min T.G 5 min T.C 10 min

Résultat

Propriété 3 L'espace $\mathcal{E}$ est orienté.

— Soit A un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{D}$ la droite de repère $(\mathrm{A}; \vec{u})$.

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}; \quad d(\mathrm{M}, \mathcal{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

— Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace $\mathcal{E}$.

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}; \quad d(\mathrm{M}, (\mathrm{ABC})) = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot (AB \wedge AC)\right|}{\|AB \wedge AC\|}$$

Si dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé, le plan (ABC) a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors pour tout point M de $\mathcal{E}$ on a : $d(\mathrm{M}, (\mathrm{ABC}) = \dfrac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Activité 6 Dans l'espace orienté $\mathcal{E}$, on considère le tétraèdre ABCD et D′ le point de $\mathcal{E}$ tel que DBCD′ est un parallélogramme.

1. Démontre que l'aire du triangle DBC est égale à $\dfrac{1}{2}\|DB \wedge DC\|$
2. Déduis-en l'aire du parallélogramme DBCD′
3. Démontre que le volume du tétraèdre ABCD est $\dfrac{1}{6}\left|(BC \wedge BD) \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|$

Stratégie d'apprentissage : T.I 7 min T.G 5 min T.C 10 min

Résultat

Propriété 4

Activité d'approfondissement

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

L'espace orienté $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé directe $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. On donne $\vec{u}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
   (a) Démontre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux.
   (b) Détermine un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$soit une base orthonormé directe de $\mathcal{W}$
2. On donne A(2,-1,1) ; B(5,5,4) ; C(3,2,-1) et D(1,1,3).
   Démontre que les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre puis calcule l'aire de la surface et le volume de ce tétraèdre.
3. Un tétraèdre ABCD a pour volume 1. On donne A(3,4,5) ; B(1,2,1) et C(1,6,2).
   Calcule les coordonnées du points D sachant qu'il appartient à la droite

$$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; \quad (t \in \mathbb{R})$$

Stratégie d'apprentissage : T.I ... min T.G ... min T.C 40 min

Activité de réinvestissement

$\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ sont deux vecteurs de l'espace orienté $\mathcal{E}$. On se propose de déterminer tous les vecteurs $\vec{\mathrm{X}}$ de $\mathcal{E}$ tels que : $\vec{\mathrm{U}} \wedge \vec{\mathrm{X}} = \vec{\mathrm{V}}$. ①

1. Quelle(s) conditions doivent vérifier les vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ pour que le problème ait de solutions ?.

Dans la suite on suppose que les vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ sont orthogonaux et on munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

2. Démontre que pour tous vecteurs $\vec{\mathrm{t}}$ et $\vec{\mathrm{w}}$ de l'espace , on a :

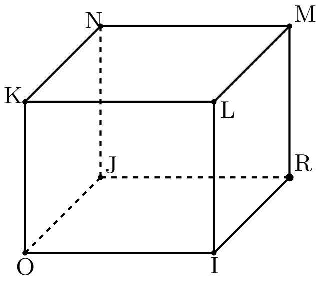
$$\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{w} \cdot \vec{t}) \cdot \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 \cdot \vec{t}. \qquad ②$$

3. (a) Prouve que si un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{X}_0}$ est une solution particulière de ①, alors $\vec{\mathrm{U}} \wedge \left(\vec{\mathrm{X}} - \overrightarrow{\mathrm{X}_0}\right) = \vec{\mathrm{O}}$.
   (b) Déduis alors l'expression des solutions de ① en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{X}_0}$ et $\vec{\mathrm{U}}$.
   (c) Démontre en utilisant l'égalité ② qu'il existe une seule solution du problème , $\overrightarrow{\mathrm{X}_0}$ à préciser, orthogonal à $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$.
   (d) Détermine alors les solutions de ① en fonction de $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$.
4. A, B et C sont trois points non alignées de $\mathcal{E}$. Détermine suivant la nature du triangle ABC, l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Activité de réinvestissement

On considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M. La figure ci-dessous représente ce cube.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $\left(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$. On note A le milieu de [IL] et B le point défini par : $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On appelle $(\mathcal{P})$ le plan passant par les points O, A et B.

1. Détermine l'aire du triangle OAB.
2. (a) Justifie que OABK est un tétraèdre puis calcule son volume.
   (b) Déduis-en la distance du point K au plan $(\mathcal{P})$.
3. O donne le point $C\left(1, \frac{1}{3}, 1\right)$.
   Justifie que le quadruplet (A, B, K, C) est un repère de l'espace puis détermine les coordonnées du point O dans ce repère.



1.3 Séquence 3 : Systèmes linéaires

1.3.1 Généralités

• On appelle équation linéaire à n inconnues $(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ toute équation de la

$$a_1x_1 + a_2x_2 \cdots + a_nx_n = b;\ n \in \mathbb{N}^*$$

• Un système de p équations linéaires à n inconnues est de la forme

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

- Une solution de (S) est tout $n-$uplet $(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ vérifiant simultanément toutes les équations de (S). Résoudre (S), c'est trouver toutes ses solutions.
- Deux systèmes sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.
- Si le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues dans un système, on dit que le système est carré.

1.3.2 Opérations élémentaires

• Notons $L_1\,,\,L_2\,,\,\ldots\,,\,L_p$ les lignes du système (S).

Les opérations suivantes permettent de transformer (S) en un système équivalent.

- Échange de deux lignes $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- on remplace la ligne : L_i par la ligne $\alpha L_i + \beta L_j (i \neq j)$: $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j (i \neq j)$; β peut être nul mais **Attention** α doit être non nul.

1.3.3 La méthode du Pivot de Gauss

• Les systèmes les plus faciles à résoudre sont les systèmes triangulaires, ou diagonaux,

c ?est-à-dire de la forme $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \qquad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{cases}$ ou

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 \qquad\qquad = b_1 & (L_1) \\ \qquad a_{2,2}x_2 \qquad = b_2 & (L_2) \\ \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad a_{n,n}x_n = b_n & (L_n) \end{cases}$$

• Soit le système (S) : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$

Il est toujours possible d ?obtenir un système triangulaire équivalent à (S) en effectuant les opérations élémentaires sur les lignes de (S).

• La méthode du pivot de gauss consiste à transformer un système donné en un système triangulaire équivalent en utilisant les opérations élémentaires ci-dessus.

Les coefficients diagonaux $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $\cdots$, $a_{n,n}$ du système triangulaire obtenu sont appelés pivots du système (S). On résout ce système de proche en proche.

Remarque

Après transformation d'un système en un système équivalent :

- on arrive à une ligne de la forme $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ alors on peut retirer cette ligne du système.

- Si on obtient une ligne de la forme $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$ l'ensemble des solutions du système initial est l'ensemble vide.

Activité de réinvestissement 1

Résous dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant d'inconnues $(\,x\,,\,y\,,\,z\,)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} + 3\sqrt{y} + |z| = 23 \\ -\dfrac{3}{\sin x} + 5\sqrt{y} - 4|z| = 2 \\ -\dfrac{1}{\sin x} + 5\sqrt{y} - 4|z| = 6 \end{cases} \text{avec } x \in \left]0\,;\pi\right[.$$

Activité de réinvestissement 2

1. En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, démontre que le système suivant

d'inconnues (x, y, z) :

$$(\text{S}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ -2x & + & y & + & 4z & = & 4 \\ 10x & - & 5y & - & 6z & = & -10 \end{array}\right.$$

admet une infinité de solutions et précise l'ensemble de ses solutions.

2. Existe-t-il des solutions (x, y, z) de (S) pour lesquelles l'expression $-xy - z$ soit minimale ; précise la valeur de ce minimum.

Activité de réinvestissement 2

1. Résous ,en discutant suivant les valeurs du paramètre réel a, le système suivant d'inconnues $(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t)$

$$; \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 2t & = & 1 \\ 2x & + & 4y & - & 6z & - & 2t & = & 0 \\ -x & + & y & - & 3z & - & 9t & = & -2 \\ x & - & 2y & + & 5z & + & 13t & = & a+1 \end{array}\right.$$

2. Résous et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant d'inconnues $(x\,,\,y\,,\,z)$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array}\right.$$

3.

1.4 Séquence 4 :Applications affines de l'espace

Durée : 18 heures

Activité 3 Pour placer certains poteaux du pont, Piko a utilisé, dans l'espace orienté $\mathcal{E}$, les applications suivantes

$$f : \begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} & & \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M'} & \mid & \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} \end{array}$$; et

$$g : \begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} & & \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M'} & \mid & \overrightarrow{\mathrm{BM'}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} \end{array}$$, où A, B, C et D sont des

points de $\mathcal{E}$; et l'application h qui, à tout point $\mathrm{M}(x, y, z)$ dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$, associe le point $\mathrm{M'}(x', y', z')$ tel que

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 2 \\ y' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 6 \end{cases}$$

Tâche : Tu vas te servir de ces applications pour te construire de nouvelles connaissances

Activité 3.1 :

Soit M et N deux points quelconques de $\mathcal{E}$ d'images respectives M' et N' par f, par g ; G le barycentre des points pondérés (M, α), (N, β), $\alpha + \beta \neq 0$, G'$= f(\mathrm{G})$.

1. Justifie que G' est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{M'}, \alpha)$, $(\mathrm{N'}, \beta)$.(On dit que f conserve le barycentre de deux points)
2. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ \overrightarrow{\mathrm{MN}} & \longmapsto & \overrightarrow{\mathrm{M'N'}} \end{array}$;.

   Prouve que $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = 2\overrightarrow{\mathrm{M'N'}}$.

Stratégie d'apprentissage : T.I 5 min   T.G 5 min   T.C 5 min

1.4.1 Généralités

① Une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une application de $\mathcal{E}$.

② Une application bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est appelée **transformation** de l'espace.

③ On appelle **application vectorielle** associée à une application f de $\mathcal{E}$, l'application
$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ \overrightarrow{\mathrm{MN}} & \longmapsto & \overrightarrow{\mathrm{f(M)f(N)}} \end{array}$

φ est linéaire, c'est-à-dire : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$, et pour tout nombre réel k, on a :

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) \quad \text{et} \quad \varphi(k\,\vec{u}) = k\,\varphi(\vec{u})$$

④ On appelle **application affine** de $\mathcal{E}$ toute application de $\mathcal{E}$ qui conserve le barycentre de deux points.

⑤ Une application affine de $\mathcal{E}$ est déterminée par la donnée d'un repère de $\mathcal{E}$ et de son image.(La donnée de quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$ et de leurs images).

⑥ l'ensemble des points invariants par une application affine de $\mathcal{E}$ est, soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit une droite, soit un plan, soit l'espace $\mathcal{E}$.

⑦ Un ensemble Γ est invariant par une application affine f de $\mathcal{E}$ si $\forall\, \mathrm{M} \in \Gamma;\ f(\mathrm{M}) \in \Gamma$. Si de plus $\forall\, \mathrm{M} \in \Gamma;\ f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, alors on dit que Γ est invariant point par point par l'application f.

⑧ Une application bijective de $\mathcal{E}$ est appelée **transformation affine** de $\mathcal{E}$.

⑨ La composée de deux applications affines de $\mathcal{E}$ est une transformation affine de $\mathcal{E}$

⑩ La réciproque d'une transformation affine de $\mathcal{E}$ est une transformation affine de $\mathcal{E}$

❶ Image d'une droite :

Soit f une application affine de $\mathcal{E}$, A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$.

- Si $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{B})$, alors $f((\mathrm{AB})) = \{f(\mathrm{A})\}$
- Si $f(\mathrm{A}) \neq f(\mathrm{B})$, alors $f((\mathrm{AB})) = (f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}))$

❷ Image d'un plan :

Soit f une application affine de $\mathcal{E}$, A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$ le plan (ABC). On pose $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A'}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B'}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C'}$.

- Si $\mathrm{A'}=\mathrm{B'}=\mathrm{C'}$, alors $f(\mathcal{P}) = \{\mathrm{A'}\}$
- Si $\mathrm{A'} \neq \mathrm{B'}$ et $\mathrm{C'} \in (\mathrm{AB})$, alors $f(\mathcal{P}) = (\mathrm{AB})$
- Si A', B' et C' sont des points non alignés, alors $f(\mathcal{P}) = (\mathrm{A'B'C'})$

❸ Dans un repère de $\mathcal{E}$, pour tout point $\mathrm{M}(x, y, y)$ d'image $\mathrm{M'}(x', y', y')$ par f, l'écriture qui permet d'exprimer les coordonnées de M' en fonction de celles de M est appelée expression analytique de f.

Activité 3.2 :

On pose $\mathrm{A}(1, -1, 2)$ et $\mathrm{B}(1, 0, 1)$.

Prouve que h conserve le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}, 2)$ et $(\mathrm{B}, 1)$.

Propriété 1 Un application de $\mathcal{E}$ est une application affine si, et seulement si son expression analytique est de la forme

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$$

avec a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', d, d', d'' des nombres réels constants.

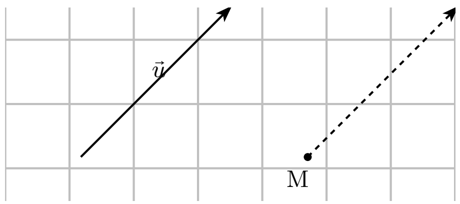
1.4.2 Translation

Activité 3.3 :
On suppose que A, B, C et D sont les sommets d'un carré.

1. Détermine l'ensemble des points invariants par l'application g.
2. Justifie que le vecteur $\overrightarrow{\text{MM'}}$ est un vecteur constant non nul. Déduis-en la nature de g.

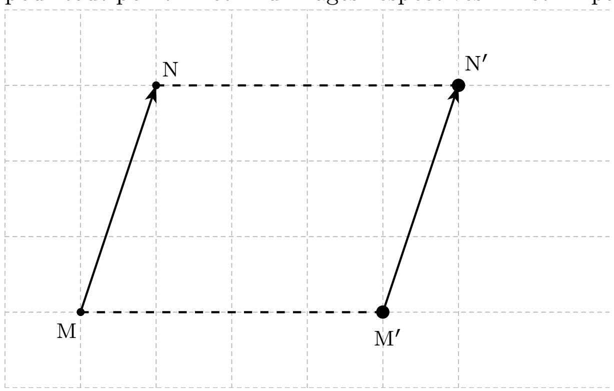
Définition 1 Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$. On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$, l'application

$$\begin{array}{rccl} t_{\vec{u}}: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & \text{M} & \longmapsto & \text{M}' \mid \overrightarrow{\text{MM}'} = \vec{u} \end{array}$$



Propriété 2

P-1 : Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même. f est une translation si, et seulement si pour tout point M et N d'images respectives M′ et N' par f , on a : $\overrightarrow{\text{M}'\text{N}'} = \overrightarrow{\text{MN}}$



P-2 : La translation de vecteur $\vec{u}$ est une transformation et sa réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$

P-3 : Soit t une translation.

- L'image d'une droite de repère $(\text{A}\,;\vec{u})$ est la droite de repère $(t(\text{A})\,;\vec{u})$.
- L'image d'un plan de repère $(\text{A}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ est le plan de repère $(t(\text{A});\vec{u}\,,\vec{v})$.
- L'image d'une figure plane est une figure plane de même nature et de même dimensions.
- L'image d'un solide de l'espace est un solide l'espace de même nature et de même dimensions.

1.4.3 Homothétie

Activité 3.4 :
Reprends les données de l'activité 3.

1. Prouve que f admet un unique point invariant Ω.
2. Démontre que pour tout point M et M' de $\mathcal{E}$, $f(\text{M}) = \text{M}' \iff \overrightarrow{\Omega\text{M'}} = 2\overrightarrow{\Omega\text{M}}$ puis précise la nature de f.

Définition 2 Soit Ω un point donné de $\mathcal{E}$ et k un nombre réel non nul.
On appelle **homothétie** de centre Ω et de rapport k, l'application

$$\begin{array}{rccl} h_{(\Omega\,;\,k)}: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & \text{M} & \longmapsto & M' \mid \overrightarrow{\Omega\,\text{M}'} = k\overrightarrow{\Omega\,\text{M}} \end{array}$$

Remarque : Dans les conditions de la définition,

- Si $k = 1$, alors $h_{(\Omega\,;\,k)}$ est l'**Identité** de $\mathcal{E}$ et on note $h_{(\Omega\,;\,1)} = \mathscr{I}d_{\mathcal{E}}$
- Si $k \neq 1$, alors Ω est l'unique point invariant par $h_{(\Omega\,;\,k)}$. c-à-d si $k \neq 1\,;\ h_{(\Omega\,;\,k)}(\text{M}) = \text{M} \iff \text{M} = \Omega$
- Si $k = -1$, alors $h_{(\Omega\,;\,k)}$ est la **symétrie centrale** de centre Ω

Propriété 3

P-1 : Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;\,1\}$.
f est une homothétie de rapport k si, et seulement si, pour tout point M et N d'images respectives M′ et N′ par f, on a :$\overrightarrow{\text{M}'\text{N}'} = k\,\overrightarrow{\text{MN}}$.
Il en résulte que l'application vectorielle associée à une homothétie de rapport k est l'application de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $k\,\vec{u}$.

P-2 : Soit h une homothétie de rapport k

- L'image d'une droite de repère $(\mathrm{A}\,;\,\vec{u})$ est la droite de repère $(h(\mathrm{A})\,;\,\vec{u})$.
- L'image d'un plan de repère $(\mathrm{A}\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est le plan de repère $(h(\mathrm{A});\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.
- L'image d'une figure plane est une figure plane de même nature.
- L'image d'un solide de l'espace est un solide l'espace de même nature.

P-3 : Toute homothétie de l'espace est une application affine de l'espace.

P-4 : Toute homothétie de rapport k multiplie :

- les distances par $|k|$
- les aires par k^2
- les volumes par $|k|^3$

P-5 : La réciproque d'une homothétie de centre Ω et de rapport k est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$

Activité de réinvestissement

A, B, C sont trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$.

1. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M′ tels que $\overrightarrow{\mathrm{M'A}} - 4\overrightarrow{\mathrm{M'B}} + 2\overrightarrow{\mathrm{M'C}} + 5\overrightarrow{\mathrm{M'M}} = \vec{0}$
2. Même question pour l'application

$$g:\begin{array}{ccl} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M'} \mid \mathrm{M'} = bar\{(\mathrm{A}\ 1);(\mathrm{B}\,,\,2);(\mathrm{C}\,,\,-3);(\mathrm{M}\,,\,2)\} \end{array}$$

3. Relativement à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,,\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$ de $\mathcal{E}$, on donne $\mathrm{A}(2\,,\,-1\,,\,1)$, $\mathrm{B}(1\,,\,0\,,\,2)$ et $\mathrm{C}(3\,,\,1\,,\,-1)$.
   Détermine l'expression analytique de chacune des transformations f et g .

Stratégie d'apprentissage : T.I 10 min T.G ... min T.C 10 min

1.4.4 Expressions analytiques

Activité 4 L'espace est muni du repère $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$. Soit k un nombre réel, $\Omega(x_o\,;\,y_o\,;\,z_o)$ un point de l'espace et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})}$ avec $(a\,;\,b\,;\,c) \in \mathbb{R}^3$; $(a\,;\,b\,;\,c) \neq (0\,;\,0\,;\,0)$

1. Détermine l'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u}$
2. Détermine l'expression analytique de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k.

Propriété 4 L'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$.

① Soit $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$.

L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$ est

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

② Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;\,1\}$ et $\Omega(x_o\,;\,y_o\,;\,z_o)$ un point de $\mathcal{E}$.

L'expression analytique de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_o \\ y' = ky + (1-k)y_o \\ z' = kz + (1-k)z_o \end{cases}$$

③ Une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une translation ou un homothétie si, et seulement si elle a une expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \\ z' = kz + c \end{cases}$; $k \in \mathbb{R}^*$

— Si $k = 1$, alors f est la translation de vecteur $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$

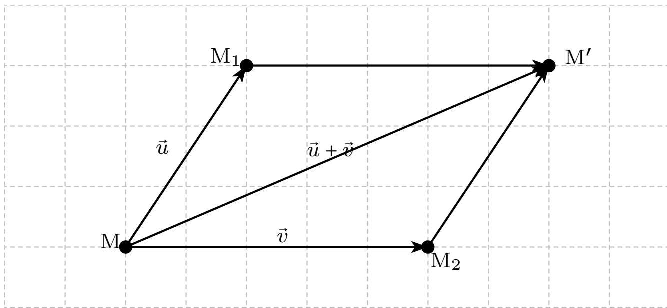
— Si $k \neq 1$, alors f est l'homothétie de centre $\Omega\left(\frac{a}{1-k}\,;\,\frac{b}{1-k}\,;\,\frac{c}{1-k}\right)$ et de rapport k.

1.4.5 Composées de translations et d'homothéties

1.4.5.1 Composée de translations

Définition 3 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$.

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ de la translation de vecteur $\vec{u}$ par la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{(\vec{u}+\vec{v})}$



1.4.5.2 Composée d'homothéties

1.4.5.2.1 Homothéties de même centre :

Propriété 5 Soit h_1 et h_2 deux homothéties de même centre Ω et de rapports respectifs k_1 et k_2.
$h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k_1 \times k_2$ et on a $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

1.4.5.2.2 Homothéties de centres distincts :

Propriété 6 Soit deux homothéties $h_1 = h(\mathrm{A}\,;k)$ et $h_2 = h_{(\mathrm{B}\,;k')}$ tels que A≠ B et $(k\,;k') \in \mathbb{R}* \times \mathbb{R}^*$

- ⋆ Si $k \times k' \neq 1$, alors $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont des homothéties de même rapport $k \times k'$ mais de centres distincts et distincts de A et de B. On a $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$
  Le centre de $h_2 \circ h_1$ est le point Ω tel que $\overrightarrow{\mathrm{B}\Omega} = \dfrac{k' - kk'}{1 - kk'}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et celui de $h_1 \circ h_2$ est le point Ω' tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega'} = \dfrac{k - kk'}{1 - kk'}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
- ⋆ Si $k \times k' = 1$, alors $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont des translations de vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. On a $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$.
  Le vecteur de $h_1 \circ h_2$ est $\vec{u} = (k-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et celui de $h_2 \circ h_1$ est $\vec{v} = (k'-1)\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

1.4.5.3 Composée de translation et homothétie

Propriété 7 Soit T la translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$.
$t \circ h$ et $h \circ t$ sont des homothéties de rapport k et de centres distincts de A. On a $t \circ h \neq h \circ t$.
Le centre Ω de $t \circ h$ est tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\vec{u}$.

Activité de réinvestissement
ABCDEFGH est un cube de l'espace orienté. T est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{GC}}$; H_1 est l'homothétie de centre B et de rapport 2 ; H_2 est l'homothétie de centre A et de rapport -1 ; H_3 est l'homothétie de centre C et de rapport 0,5 Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations $T \circ H_1$; $H_2 \circ H_1$ et $H_1 \circ H_3$

Exercices 2.a , 2.b , 2.c , 2.d , 2.e , 2.f, p.133, CIAM-SM

Stratégie d'apprentissage : T.I 0 min T.G ... min T.C 20 min

1.4.6 Réflexion de plan

Définition 4 Soit A, B deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$.
On appelle **plan médiateur** du segment [AB] le plan passant par le milieu de [AB] et qui est perpendiculaire à (AB).

Propriété 8 Dans l'espace, l'ensemble des points équidistants de deux points fixes A, B est le plan médiateur du segment [AB].

Définition 5 Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On appelle **Réflexion** de plan $\mathcal{P}$ (ou encore **symétrie orthogonale** par rapport au plan $\mathcal{P}$), l'application $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}' \end{array}$

tel que :

- — si $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$, alors M=M′
- — si $\mathrm{M} \notin \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ est le plan médiateur du segment [MM′].

Propriété 9 Soit $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ la réflexion du plan $\mathcal{P}$.

P-1 : L'ensemble des points invariants par $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ est le plan $\mathcal{P}$.

P-2 : Soit M et M′ deux points de l'espace $\mathcal{E}$ et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MH}}$.
- $\mathrm{M}' = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathrm{M}) \iff \mathrm{M} = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathrm{M}')$
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \mathscr{I}d_{\mathcal{E}}$ et $(\mathcal{S}_{\mathcal{P}})^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$
- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et H le milieu de [MM′], alors
  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = k\vec{n} \\ \mathrm{H} \in \mathcal{P} \end{cases}$

P-3 : Si $\mathcal{Q}$ est un plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, alors :
- — $\mathcal{Q}$ est globalement invariant par $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.
- — La restriction de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ à $\mathcal{Q}$ est, dans le plan $\mathcal{Q}$, la symétrie orthogonale d'axe Δ.

P-4 : Si $\mathcal{D}$ est une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ en un point B, alors :
- — $\mathcal{D}$ est globalement invariant par $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.
- — La restriction de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ à $\mathcal{D}$ est, sur la droite $\mathcal{D}$, la symétrie centrale de centre I

P-5 : Toute réflexion de l'espace transforme :
- — une droite en une droite,
- — un plan en un plan,
- — une figure plane en une figure plane de même nature,

— un solide de l'espace en un solide de l'espace de même nature.

P-6 : Toute réflexion de l'espace conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

P-7 :
- La composée de deux réflexions de plans parallèles est une translation dont le vecteur est normal à chacun des deux plans.
- Toute translation de vecteur non nul $\vec{u}$ est la composée de deux réflexions de plans parallèles tels que $\vec{u}$ soit normal à chacun de ces deux plans.

Application

(Seule la première question). L'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. Détermine l'expression analytique de la réflexion de plan $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{P}$: $2x-y+z-2=0$.
2. Soit l'application f:

$$f:\ \begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}\\ \mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \longmapsto & \mathrm{M}'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \mid \left\{\begin{array}{rcl}x' &=& \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z+\frac{4}{3}\\ y' &=& -\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{8}{3}\\ z &=& -\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z+\frac{4}{3}\end{array}\right.\end{array}$$

Démontre que f est une réflexion.

1.4.7 Demi-tour d'axe donné

Définition 6 Soit Δ une droite de l'espace $\mathcal{E}$. On appelle **demi-tour d'axe** Δ ou encore **symétrie orthogonale par rapport à** Δ, l'application notée $\mathcal{S}_\Delta$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M associe le point M′ tel que :

- Si M$\in\Delta$, alors M′=M ;
- Si M$\notin\Delta$, alors Δ est une médiatrice de [MM′].

Remarque

Dans les conditions de la définition, le plan passant par M et orthogonal à Δ coupe Δ en un point I ; le symétrique de M′ par rapport à I est l'image de M par $\mathcal{S}_\Delta$

Propriété 10 Soit $\mathcal{S}_\Delta$ le demi-tour d'axe Δ.

P-1 : L'ensemble des points invariants par $\mathcal{S}_\Delta$ est la droite Δ.

P-2 : Soit $(\mathrm{M},\mathrm{M}')\in\mathcal{E}^2$ et I le projeté orthogonal de M sur Δ. On a :
- $\mathcal{S}_\Delta(\mathrm{M})=\mathrm{M}' \iff \overrightarrow{\mathrm{MM}'}=2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$
- $\mathcal{S}_\Delta(\mathrm{M})=\mathrm{M}' \iff \mathcal{S}_\Delta(\mathrm{M}')=\mathrm{M}$
- $\mathcal{S}_\Delta\circ\mathcal{S}_\Delta=\mathscr{I}d_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{S}_\Delta^{-1}=\mathcal{S}_\Delta$

P-3 : Soit $\mathcal{P}$ le plan perpendiculaire à Δ en I.
- $\mathcal{P}$ est globalement invariant par $\mathcal{S}_\Delta$
- La restriction de $\mathcal{S}_\Delta$ à $\mathcal{P}$ est, dans le plan $\mathcal{P}$, la symétrie centrale de centre I.

P-4 :
- Tout demi-tour de l'espace transforme une droite en une droite, un plan en un plan, une figure plane en un figure plane de même nature, un solide en un solide de même nature.
- Tout demi-tour de l'espace conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

P-5 :
- La composée de deux réflexions de plan perpendiculaires suivant une droite Δ est le demi-tour d'axe Δ
- Tout demi-tour d'axe Δ est la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant Δ

P-6 :
- La composée de deux demi-tour d'axes Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires en un point A est le demi-tour dont l'axe est la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 en A.
- Tout demi-tour de l'espace est la composée de deux demi-tour d'axex perpendiculaires.

P-7 :
- La composée d'un demi-tour d'axe Δ et d'une réflexion de plan $\mathcal{P}$ telle que Δ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en A, est la symétrie centrale de centre A.
- Toute symétrie centrale de centre A est la composée d'un demi-tour et d'une réflexion de plan dont l'axe et le plan sont perpendiculaires en A.

RETENONS

Pour déterminer l'expression analytique d'un demi-tour d'axe Δ, on prend deux points $\mathrm{M}(x,\,y,\,z)$ et $\mathrm{M}'(x',\,y'\,z')$ de $\mathcal{E}$, on choisit un point I milieu de [MM′], on cherche un vecteur $\vec{u}$ de Δ et on pose $\mathcal{S}_\Delta(\mathrm{M})=\mathrm{M}' \iff \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\cdot\vec{u}=0\\ \mathrm{I}\in\Delta\end{array}\right.$

Réinvestissement

1. L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Détermine l'expression analytique du demi-tour d'axe Δ: $\left\{\begin{array}{rcl}x+y-2z &=& 0\\ 2x+3y-1 &=& 0\end{array}\right.$
2. Démontre que l'application h définie dans l'activité 3. est un demi-tour.

Stratégie d'apprentissage : T.I 10 min T.G ... min T.C 10 min

Résultat

Activité d'approfondissement

ABCDEFGH est un cube de l'espace orienté $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. Donne la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   $\mathcal{S}_{(\mathrm{ADE})} \circ \mathcal{S}_{(\mathrm{BCF})}$; $\mathcal{S}_{(\mathrm{AB})} \circ \mathcal{S}_{(\mathrm{HG})}$; $\mathcal{S}_{(\mathrm{ADE})} \circ \mathcal{S}_{(\mathrm{EF})}$; $\mathcal{S}_{(\mathrm{AE})} \circ \mathcal{S}_{(\mathrm{HE})}$
2. Donne l'expression analytique des transformations suivantes : $\mathcal{S}_{(\mathrm{ABC})}$; $\mathcal{S}_{(\mathrm{ADE})}$; $\mathcal{S}_{(\mathrm{ABE})}$; $\mathcal{S}_{(\mathrm{ABC})} \circ \mathcal{S}_{(\mathrm{ADE})}$; $\mathcal{S}_{(\mathrm{AG})}$

Stratégie d'apprentissage : T.I 0 min T.G 5 min T.C 30 min

✂ ....

Activité d'approfondissement

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le plan (π) d'équation $2x + y - z = 3$ et la droite (Δ) orthogonale à (π) passant par O.

1. Détermine l'expression analytique de la réflexion S_π de plan (π), puis celle du demi-tour S_Δ d'axe (Δ).
2. Dé termine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_\Delta \circ S_\pi$.
3. Détermine l'expression analytique de la restriction S de S_Δ à (π) ; sachant que $(\mathrm{A}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\mathrm{A}(1, 1, 0)$, $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$, est un repère orthonormé du plan (π).

Stratégie d'apprentissage : T.I ... min T.G ... min T.C 40 min

Activité d'approfondissement 1

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace est muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit f l'application affine de $\mathcal{E}$ telle que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{A}$ où $\mathrm{A}(1, 1, 1)$. L'application vectorielle φ associée à f est telle que

$$\varphi(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + 2\vec{k} \quad , \quad \varphi(\vec{\jmath} - \vec{k}) = -\vec{\jmath} + \vec{k} \quad , \quad \varphi(\vec{\imath} - \vec{k}) = -\vec{\imath} + \vec{k}$$

1. Détermine $\varphi(\vec{\imath})$, $\varphi(\vec{\jmath})$ et $\varphi(\vec{k})$.
2. Détermine l'expression analytique de f.
3. f est-elle une transformation de $\mathcal{E}$? Si oui, détermine sa réciproque.
4. f est-t-elle une réflexion ou un demi-tour ?

Établissement :CEG DOWA
Discipline : Mathématiques
Classe : Term C
Enseignant : Mr Kabirou TOUKOUROU

Année Scolaire : 2017-2018
Date : 20/10/18
Effectif : 29

Chapitre2

ORGANISATION DES DONNÉES

S.A n°1 : Organisation dzs données Classe : $T^{le}C$

I. ÉLÉMENTS DE PLANIFICATION

1.1 Contenus de formation

1.1.1 **Compétences**

a) **Les compétences disciplinaires :**

- Résoudre un problème ou une situation-problème en utilisant les concepts et procédures du langage et du raisonnement mathématique.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects numériques par l ?appropriation des outils, techniques et procédés conventionnels ainsi que par le traitement des données.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects géométriques par l ?appropriation d ?outils et de démarches propres à la géométrie.

b) **Compétence transdisciplinaire :**

- Se préparer à intégrer la vie professionnelle dans une perspective de réalisation de soi et d ?insertion dans la société.

c) **Compétences transversales** - Exploiter l'information disponible ;

- Résoudre une situation-problème ;
- Communiquer de façon précise et appropriée ;
- Exercer sa pensée critique ;
- Travailler en coopération.

1.1.2 **Connaissances et techniques**

• Nombres complexes : Forme algébrique ; Corps des nombres complexes ; Représentation géométrique ; Forme trigonométrique ; Forme exponentielle ; Application des nombres complexes à la trigonométrie Équations du second degré dans $\mathbb{C}$; Racines n-ièmes d ?un nombre complexe.

N.B. : Confère détail des contenus notionnels de la situation d ?apprentissage.

1.1.3 **Stratégie objet d'apprentissage** : Résolution de problèmes.

1.2 Durée : ...

1.3 Stratégies d'enseignement / apprentissage : Brainstorming, travail individuel, travail en groupe et travail collectif.

1.4 Matériel : objets familiers

2. DÉROULEMENT

Séquence de classe :

I. **ÉLÉMENTS DE PLANIFICATION**

1.1 Contenus de formation

1.1.1 **Compétences**

a) **Les compétences disciplinaires :**

- Résoudre un problème ou une situation-problème en utilisant les concepts et procédures du langage et du raisonnement mathématique.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects numériques par l ?appropriation des outils, techniques et procédés conventionnels ainsi que par le traitement des données.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects géométriques par l ?appropriation d ?outils et de démarches propres à la géométrie.

b) **Compétence transdisciplinaire :**

- Se préparer à intégrer la vie professionnelle dans une perspective de réalisation de soi et d ?insertion dans la société.

c) **Compétences transversales** - Exploiter l ?information disponible ;

- Résoudre une situation-problème ;
- Communiquer de façon précise et appropriée ;
- Exercer sa pensée critique ;
- Travailler en coopération.

1.1.2 **Connaissances et techniques**

• Système d ?équations linéaires : Généralités ; Résolution d ?un système d ?équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss

-Arithmétique Système de numération ; Anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$; sous-groupe $(\mathbb{Z}, +)$; Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$; Congruence : anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$, $n \in \mathbb{N}^\star$; Nombres premiers : Corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$; , p entier naturel premier ; Décomposition d ?un entier naturel en produit de facteurs premiers (existence et unicité) ; P.P.C.M. et P.G.C.D.

• Nombres complexes : Forme algébrique ; Corps des nombres complexes ; Représentation géométrique ; Forme trigonométrique ; Forme exponentielle ; Application des nombres complexes à la trigonométrie Équations du second degré dans $\mathbb{C}$; Racines n-ièmes d ?un nombre complexe.

N.B. : Confère détail des contenus notionnels de la situation d ?apprentissage.

1.1.3 **Stratégie objet d ?apprentissage** : Résolution de problèmes.

1.2 Durée : ...

1.3 Stratégies d ?enseignement / apprentissage : Brainstorming, travail individuel, travail en groupe et travail collectif.
1.4 Matériel : objets familiers
2. DÉROULEMENT
Situation de départ :
Contexte : Les nombres dans le Fâ.
Dansou est un brillant élève de terminale D. Cependant, à l'approche de son examen du baccalauréat prévu pour juin 2015, sa maman lui demande de consulter le fâ, comme il est de coutume dans la famille à l'occasion des événements importants. Il se rend le 14 mars 2015 chez Gouton, un devin du Fâ. Pour réaliser la consultation, Gouton utilise quatre cauris dont les dos sont rognés. Après les rituels d'usage, il jette les quatre cauris sur la surface préparée pour la circonstance. Il obtient trois cauris fermés et un ouvert. Il reprend l'opération et obtient les quatre cauris fermés . Alors il annonce à Dansou qu'il lui faut faire beaucoup de sacrifices avant d'obtenir le baccalauréat. Il lui demande si le marché de Tokpa qui a une périodicité de 4 jours s'animera l'un des trois jours que durera la composition du bac et quel est, le cas échéant, le jour de la semaine qui correspondra à ce marché. Entre autres sacrifices, il lui demande de disposer de 1069 citrons qu'il amènera au marché d'Adjarra, conditionnés de la façon suivante :

— avec sept citrons, il constitue un tas.

— avec sept tas, il constitue un filet.

— avec sept filets, il constitue un panier.

Dansou, pris de peur, décide d'aller consulter Adandé, un autre devin du Fâ. Adandé utilise également quatre cauris comme Gouton , après les rituels d'usage. Adandé jette ses quatre cauris une première fois. Il obtient deux cauris ouverts et deux cauris fermés. Il jette une deuxième fois les quatre cauris et en obtient trois ouverts et un fermé. Il dit alors à Dansou qu'au vu des signes obtenus, il réussira son baccalauréat avec une très bonne mention.
Dansou se pose alors plusieurs questions.
Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la S.A, à :

— exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;

— analyser chacun des problèmes posés ;

— mathématiser chacun des problèmes posés ;

— opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;

— améliorer au besoin ta production

Activité 0
Lis attentivement le texte et exprime toutes les idées qu'il t'inspire.
Stratégies d'enseignement / apprentissage : Brainstorming

2.1 Séquence 1 : Arithmétique

Durée : heures

Activité 1
Pour amener les citrons à Adjarra, Dansou les répartit dans de petits cartons pouvant contenir 49 citrons chacun. Aussi voudrait-il déterminer le jour de de la composition du baccalauréat que s'animera le marché de Tokpa. Dansou se rend compte que la division des entiers ainsi que la connaissance des propriété des opérations et relations définies dans $\mathbb{Z}$ sont nécessaires.

1. Combien faut-il prévoir de prévoir de cartons ?
2. Rappelle quelques propriétés usuelles de la l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Résultat

2.1.1 Ensemble $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

2.1.1.1 Addition-Multiplication dans $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots, 105, 106, \cdots\}$.

Sur $\mathbb{N}$ sont définies l'addition et la multiplication.

$\forall\,(a, b) \in \mathbb{N}^2$; $a + b \in \mathbb{N}$ et $a \times b \in \mathbb{N}$; on dit que l'addition et la multiplication sont des **lois de composition interne** sur $\mathbb{N}$.

D'une façon générale, on appelle **loi de composition interne** sur un ensemble $\mathbb{E}$, toute application de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$.

Les principales propriétés de l'addition et de l'addition dans $\mathbb{N}$ sont résumées dans le tableau ci-dessous où a, b, c sont des entiers naturels.

Addition dans $\mathbb{N}$	Multiplication dans $\mathbb{N}$
$a+0=0+a=a$: 0 est l'élément neutre pour l'addition	$a\times 1=1\times a=a$: 1 est l'élément neutre pour la multiplication
$(a+b)+c=a+(b+c)$: l'addition est associative dans $\mathbb{N}$	$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$: la multiplication est associative dans $\mathbb{N}$
$a+b=b+a$: l'addition est commutative dans $\mathbb{N}$	$a\times b=b\times a$: la multiplication est commutative dans $\mathbb{N}$
$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$: la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{N}$	

2.1.2 Ensemble $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z}=\{\cdots,-4,-3,-2,1,0,1,2,3,4,\cdots\}$.
$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$

2.1.2.1 Propriétés de "+" et "×" dans $\mathbb{Z}$

L'addition "+" dans $\mathbb{Z}$ possède les propriétés suivantes :

N°	Propriétés	Signification
P_1	l'addition(+) est une **loi de composition interne** dans $\mathbb{Z}$	Pour tous éléments a et b de $\mathbb{Z}$, $(a+b)\in\mathbb{Z}$
P_2	l'addition est **associative** dans $\mathbb{Z}$	Pour tous éléments a, b, c de $\mathbb{Z}$, $a+(b+c)=(a+b)+c$. on note simplement $a+b+c$.
P_3	Le nombre 0 est l'**élément neutre** pour l'addition dans $\mathbb{Z}$	Pour tout élément a de Z, $a+0=a$ et $0+a=a$.
P_4	Tout élément de $\mathbb{Z}$ admet un symétrique pour + dans $\mathbb{Z}$.	Pour tout élément a de $\mathbb{Z}$ il existe un élément a' de $\mathbb{Z}$ tel que $a+a'=a'+a=0$
P_5	l'addition(+) est **commutative** dans $\mathbb{Z}$	Pour tous éléments a et b de $\mathbb{Z}$, $a+b=b+a$

P_6 : Les propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4 permettent de dire que $(\mathbb{Z};+)$ est un **groupe**.
P_7 De P_5 et P_6, on dit que $(\mathbb{Z};+)$ est un **groupe commutatif** ou **groupe abélien**.

Propriété 1 $\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3;\ a+b=a+c\iff b=c$.

La multiplication "×" dans $\mathbb{Z}$ possède les propriétés suivantes :

N°	Propriétés	Signification
P_8	la multiplication(×) est une **loi de composition interne** dans $\mathbb{Z}$	Pour tous éléments a et b de $\mathbb{Z}$, $(a\times b)\in\mathbb{Z}$
P_9	l'addition est **associative** dans $\mathbb{Z}$	Pour tous éléments a, b, c de $\mathbb{Z}$, $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$. on note simplement $a\times b\times c$.
P_{10}	Le nombre 1 est l'**élément neutre** pour l'addition dans $\mathbb{Z}$	Pour tout élément a de Z, $a\times 1=a$ et $1\times a=a$.
P_{11}	la multiplication est **distributive à gauche** par rapport à l'addition dans $\mathbb{Z}$	Pour tous éléments a, b, c de $\mathbb{Z}$ $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
P_{12}	la multiplication est **distributive à droite** par rapport à l'addition dans $\mathbb{Z}$	Pour tous éléments a, b, c de $\mathbb{Z}$ $(a\times b)+c=a\times c+b\times c$
P_{13}	la multiplication est **commutative** dans $\mathbb{Z}$	Pour tous éléments a et b de $\mathbb{Z}$, $a\times b=b\times a$

P_{14} Avec P_{11} et P_{12} on dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{Z}$.
P_{15} Avec P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{13} et P_{14} on dit que $(\mathbb{Z};+;\times)$ est un **anneau commutatif et unitaire**.
P_{15} $\forall\,(a,b)\in\mathbb{Z}^2;\ a\times b=0\iff a=0$ ou $b=0$: On dit que $\mathbb{Z}$ n'admet pas de diviseur de 0.
$(\mathbb{Z},+,\times)$ est dit **anneau commutatif unitaire et intègre**.

Activité 2 a, b et c sont des entiers relatifs et $c\neq 0$.

1. En calculant de deux façons différentes le produit $a(a+0)$, justifie que $a\times 0=0$.
2. Démontre que : $(c\times a=c\times b)\iff(a=b)$.

Propriété 2 Pour tout (a,b,c) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$.

— $a\times 0=0$
— $a\times c=b\times c\iff a=b$.

2.1.2.2 Ordre dans $\mathbb{Z}$

Définition 1 Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation (binaire) d'inégalité notée "$\leqslant$" par :
$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a\leqslant b)\iff(b-a)\in\mathbb{N}$.
Elle possède les propriétés suivantes :

N°	Propriétés	Signification
P_1	"$\leqslant$" est **réflexive**	Pour tout élément a de $\mathbb{Z}$, $a \leqslant a$.
P_2	"$\leqslant$" est **antisymétrique**	Pour tous éléments a et b de $\mathbb{Z}$, $(a \leqslant b$ et $b \leqslant a) \Longrightarrow (a = b)$.
P_3	"$\leqslant$" est **transitive**	Pour tous éléments a, b, c de $\mathbb{Z}$, $(a \leqslant b$ et $b \leqslant c) \Longleftrightarrow (a \leqslant c)$.

Définition 2 Une relation binaire à la fois réflexive, antisymétrique et transitive est une **relation d'ordre**.

P_4 Deux éléments de $\mathbb{Z}$ sont toujours comparables par la relation $\leq$, c-à-d pour tous éléments a et b de $\mathbb{Z}$, on a toujours $(a \leqslant b$ ou $b \leqslant a)$. On dit que la relation "$\leqslant$" est une **relation d'ordre total** sur $\mathbb{Z}$..

NB : La relation "$\leqslant$" est également une **relation d'ordre total** sur $\mathbb{N}$. Elle est définie par

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{N}^2,\ (a \leqslant b) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N} \mid b = a + k).$$

Propriété 3 Soit a, b deux entiers relatifs.

- $\forall\, c \in \mathbb{Z},\ a \leqslant b \Longleftrightarrow a + c \leqslant b + c.$
- $\forall\, c \in \mathbb{Z}_+^*,\ a \leqslant b \Longleftrightarrow a \times c \leqslant b \times c.$
- $\forall\, c \in \mathbb{Z}_-^*,\ a \leqslant b \Longleftrightarrow b \times c \leqslant a \times c$.
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

2.1.2.3 Ordre dans $\mathbb{Z}$

Activité 3

1. Effectue la division euclidienne de 1069 par 7.
2. On donne $a = -724$ et $b = 97$.
   Détermine l'entier relatif q et l'entier naturel r tel que $0 \leqslant r < |b|$ et $a = bq + r$.

Propriété 4 Soit a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.
Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$.

L'opération permettent de passer du couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ au couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ s'appelle « **division euclidienne** ».
a, b, q, r sont respectivement le **dividende** , le **diviseur**, le **quotient** et le **reste** de cette division.

Conséquences Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $0 \leqslant r < |b|$. Les valeurs possibles de r sont donc $0, 1, 2, \cdots, |b| - 1$.

Exemple
Si $b = 4$, alors $r \in \{0; 1; 2; 3\}$.
Cas particulier : Soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$. Si q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b, on a : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Activité 4

1. Détermine le quotient et le reste de la division euclidienne de 27 par -513
2. Dans la division euclidienne de 527 par l'entier naturel non nul b, le quotient est 21.
   Donne toutes les valeurs possibles du diviseur et du reste.

2.1.2.4 Système de numération

Activité 5 On considère l'entier naturel $x = 1\ 069$

1. Détermine les entiers naturels $x_o, x_1, \cdots, x_n$ inférieurs à 7 et $x_n \neq 0$ tels que
   $x = x_n \times 7^n + x_{n-1} \times 7^{n-1} + \cdots + x_2 \times 7^2 + x_1 \times 7^1 + x_0$
2. Justifie l'unicité des entiers naturels $x_o, x_1, \cdots, x_n$ obtenus.

Retenons
En base 10, tout entier naturel x peut s'écrire à l'aide des puissance de 10 :
$x = x_n \times 10^n + x_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + x_1 \times 10 + x_0$.
On peut écrire le même nombre x à l'aide des puissances de 2 , de 4, de 8 ou de 16.

Propriété 5 Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Tout entier naturel x peut s'écrire de façon unique :

$$x = \sum_{i=0}^{i=n} a_i p^i = a_n \times p^n + a^{n-1} \times p^{n-1} + \cdots + a_2 \times p^2 + a_1 \times p + a_0,$$

où les a_i sont des entiers naturels tels que : $0 \leq a_i < p$ avec $a_n \neq 0$ si $x \neq 0$ et $n = 0$ si $x = 0$.

La suite $a_0\,, a_1\,, \cdots a_n$ est appelée développement de x en base p et l'on écrit :
$x = \overline{a_n\,a_{n-1}\cdots a_1\,a_0}^p$ ou encore $a_n\,a_{n-1}\cdots a_1\,a_{0_p}$.

REMARQUE
Le quotient et le reste de la division euclidienne de x par p sont respectivement :
$q_0 = \overline{a_n\,a_{n-1}\cdots a_1}^p$ et a_0 .
Le quotient et le reste de la division euclidienne de q_0 par p sont respectivement :
$q_1 = \overline{a_n\,a_{n-1}\cdots a_2}^p$ et a_1 .
On peut ainsi déterminer de proche en proche tous les chiffres de l ?entier naturel x écrit en base p .
Exemple 1 069 en base 4.

Ainsi :

$$\begin{aligned} 59\ 953 &= 1\times 8^5 + 6\times 8^4 + 5\times 8^3 + 0\times 8^2 + 6\times 8^1 + 1\times 8^0 \\ &= \overline{165061}^8 \end{aligned}$$

5 9 9 5 3	6	9 9 9 2	6						
5 9	9 9 9 2	3 9	1 6 6 5	1 6 6 5	6				
5 5		3 9		4 6	2 7 7	2 7 7	6		
1 3		3 2		4 5		3 7	4 6 4 6	6 7	6
1		2		3		1	4	7 1	1

Ainsi :

$$\begin{aligned} 59\ 953 &= 1\times 6^6 + 1\times 6^5 + 4\times 6^4 + 1\times 6^3 + 3\times 6^2 + 2\times 6 + 1 \\ &= \overline{1141321}^6 \end{aligned}$$

Définition 3

— Dans un système de numération de base $b \in \mathbb{N}$; $b \geqslant 2$, il y a b chiffres.

— Si $b \leqslant 10$, les chiffres de numération de base b sont : $0,1,2,\cdots,b-1$.

— Si $b > 10$, les chiffres de numération de base b sont : $0,1,\cdots,9$, A,B,C,$\cdots$ avec A=10, B=11, C=12, $\cdots$

— Les chiffres de numération **décimale** (ou de base 10) sont $0,1,2,\cdots,9$.

— Le système **binaire** (système de numération de base 2) dispose de deux chiffres : 0 et 1.

— Le système **octal** (système de numération de base 8) comporte 8 chiffres : 0,1,2,3,4,5,6 et 7.

— Le système **hexadécimal** (système de numération de base 16) comporte 16 chiffres : $0,1,2,\cdots,9$,A,B,C,D,E et F.

• **décimal** $\longmapsto$ **binaire** : La conversion s'effectue par des divisions entières successives par 2. La condition d'arrêt correspond à un quotient nul. Le nombre binaire est obtenu en lisant les restes du dernier vers le premier. EX 25
• **octal (hexadécimal)** $\longmapsto$ **décimal** : La conversion se réduit à une addition de puissances de 8 (16). Ex : 123_8 et $6C5_{16}$.
• **décimal** $\longmapsto$ **octal (hexadécimal)** : La conversion correspond à des divisions entières successives par 8 (16). Le nombre octal (hexadécimal) est obtenu en prenant les différents restes du dernier vers le premier. EX : 234
• **octal (hexadécimal)** $\longmapsto$ **binaire** : La conversion consiste à remplacer chaque chiffre octal (hexadécimal) par son équivalent binaire sur 3 (4) bits. EX : $17_8 = 001111_2$ car $1_8 = 001_2$ et $7_8 = 111_2$ et $2A_{16} = 00101010_2$ car $2_{16} = 0010_2$ et $A_{16} = 1010_2$

Activité 6

1. Donne l'écriture de l'entier 1 713 dans la base 12.
2. Écris l'entier $\overline{\text{CAFE}}^{16}$ en base 10 et l'entier 642 006 en base 16.
3. Détermine le nombre A du système décimal qui s'écrit : $\overline{ab7}^9$ et $\overline{a7b}^8$.
4. Détermine $x\,,\,y\,,\,z$ sachant que : $\overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^9$.
5. En utilisant la factorisation de $(x^2+3x+1)^2-1$, montre que dans tout système de numération de base b supérieur à 3 on a : $\overline{10}\times\overline{11}\times\overline{12}\times\overline{13}+1 = (131)^2$.
6. Les nombres sont écrits en base cinq ; effectue les opérations suivantes :

$$\begin{array}{rr} & 3421 \\ + & 240 \\ \hline = & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3421 \\ \times & 240 \\ \hline = & \end{array}$$

2.1.3 Principe de raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$; et soit $n_0 \in \mathbb{N}$
-Si on a $\mathcal{P}(n_0)$ (initialisation)
- et si on a $\forall\, n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (hérédité),
- alors nécessairement , on a $\forall\, n \geq n_0\ \mathcal{P}(n)$.

Activité 7

1. Démontre par récurrence les formules suivantes :
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
2. Déduis-en la valeur de la somme :
$$S = mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \cdots + 1(n-m+1)\ ,\ m \in \mathbb{N}^*\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\ (m < n).$$
3. Vérifie S pour $m = 7$ et $n = 10$.

2.1.4 Multiple d'un nombre entier relatif

2.1.4.1 Définition et Propriétés

Soit a et b deux entiers relatifs.On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un relatif k tel que $a = k \times b$. De plus si $b \neq 0$, on dit que « b est un **diviseur** de a » ou encore « b divise a ». et on note $b \mid a$

REMARQUE

— Tout nombre entier relatif est multiple de 1 et de -1.

— 1 et -1 sont des diviseurs de tout nombre entier relatif.

— 0 est multiple de tout entier relatif.

Activité 8 Démontre que :

1. $\forall\,(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*\ ,\ (b \mid a) \Longrightarrow (|b| \leqslant |a|)$
2. $\forall\, a \in Z^*;\ a \mid a$
3. $\forall\,(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*;\ (a \mid b \text{ et } b \mid a) \Longrightarrow (a = -b \text{ ou } a = b)$
4. $\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z};\ (a \mid b \text{ et } b \mid c) \Longrightarrow (a \mid c)$
5. $\forall\,(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ a \mid b \text{ et } a \mid c \Longrightarrow \forall\,(p, q) \in \mathbb{Z}^2;\ a \mid (pb + qc)$

Propriété 6

— $\forall\,(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*;\ (b \mid a) \Longrightarrow (|b| \leqslant |a|)$

— $\forall\, a \in Z^*;\ a \mid a$

— $\forall\,(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*;\ (a \mid b \text{ et } b \mid a) \Longrightarrow (a = -b \text{ ou } a = b)$

— $\forall\ (a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z};\ (a \mid b \text{ et } b \mid c) \Longrightarrow (a \mid c)$

— $\forall\,(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ a \mid b \text{ et } a \mid c \Longrightarrow \forall\,(p, q) \in \mathbb{Z}^2;\ a \mid (pb + qc)$

2.1.4.2 Ensemble des multiples d'un entier relatif

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Les multiples de a sont les nombres entiers relatifs de la forme $a \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce sont $\cdots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \cdots$
Cet ensemble est noté $a\mathbb{Z}$. Ainsi on a : $a\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = a \times k,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple

$1\mathbb{Z} = (-1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$; $0\mathbb{Z} = \{0\}$

REMARQUE

$\forall\, a \in \mathbb{Z};\ a\mathbb{Z} = (-a)\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$

Propriété 7 Soit $n \in \mathbb{N}$.

— $\forall\,(x, y) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z};\ (x + y) \in n\mathbb{Z}$: L'addition est donc une loi de composition interne dans $n\mathbb{Z}$.

— $\forall\,(x, y, z) \in n\mathbb{Z}^3;\ x + (y + z) = (x + y) + z$: L'addition est donc associative dans $n\mathbb{Z}$.

— $\forall\, x \in n\mathbb{Z};\ x + 0 = x$ et $0 + x = x$: 0 est donc l'élément neutre de l'addition dans $n\mathbb{Z}$.

— $\forall\, x \in n\mathbb{Z};\ \exists x' \in n\mathbb{Z}\ \mid\ x + x' = 0$ et $x' + x = 0$: Tout élément x de $n\mathbb{Z}$ admet donc un symétrique pour l'addition noté $-x$.

— $\forall\,(x, y) \in n\mathbb{Z}^2;\ x + y = y + x$: L'addition est donc commutative dans $n\mathbb{Z}$.
On en conclut que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.

— De plus $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe, alors on dit que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un **sous groupe** de $(\mathbb{Z}, +)$.

2.1.4.3 Ensemble des diviseurs d'un entier relatif

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Notons $\mathscr{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a. On a :

— $1 \in \mathscr{D}(a)$, alors $\mathscr{D}(a) \neq \phi$

— Soit $q \in \mathscr{D}(a)$.
$q \mid a \iff |q| \leqslant |a| \iff -|a| \leqslant q \leqslant |a|$: Tout diviseur de a est compris, au sens large, entre $-|a|$ et $|a|$.

— Si $q \mid a$, alors $-q \mid a$. On a soit $q > 0$, soit $-q > 0$. Pour trouver les diviseurs de a on peut d'abord chercher les diviseurs q tels que $0 < q \leqslant |a|$

— Si $q \mid a$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}^*\ \mid\ a = k \times q$
$a = k \times q \iff |a| = |k| \times |q| \Longrightarrow$ soit $|k| \leqslant \sqrt{|a|}$ soit $|q| \leqslant \sqrt{|a|}$
Pour obtenir les diviseurs positifs de a, on peut se contenter de rechercher les diviseurs q tels que $0 < q \leqslant \sqrt{|a|}$
Exemple

$72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$, alors les diviseurs de 72 sont : -72,-36,-24,-18,-12,-9,-8,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72

Pour chercher la liste des diviseurs d ?un nombre entier, on utilise un tableau à deux colonnes :
• la première colonne commence par le nombre lui-même (le plus grand diviseur) ;
• la deuxième colonne commence par le nombre 1 (le plus petit diviseur).
En effet tout nombre est au moins divisible par 1 et par lui-même.
Ensuite, on essaie de compléter la deuxième colonne en cherchant les diviseurs dans l ?ordre croissant. On complète alors la ligne de manière à ce que le produit des deux diviseurs de la ligne soit égal au nombre étudié. La recherche se termine quand le diviseur trouvé a déjà été écrit dans la colonne de gauche.
Cherchons la liste des diviseurs de 64 :

64	1
32	2
16	4
8	8

Les diviseurs de 64 sont 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.

Activité 9

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$.
   Démontre que tout diviseur commun à a et b divise 50.
2. Détermine les valeurs de l'entier n tels que $n + 3$ divise $9n + 17$.
3. (a) Justifie que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 + 2n + 2 = (n + 3)(n - 1) + 5.$$
   (b) Détermine les valeurs de l'entier naturel n pour les quelles : $\dfrac{n^2 + 2n + 2}{n + 3} \in \mathbb{N}$.
4. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 - y^2 = 9$, d'inconnue $(x\,,\,y)$.
   (a) Justifie que si un couple $(x\,,\,y)$ est solution de (E), alors $(x\,,\,-y)$, $(-x\,,\,y)$ et $(-x\,,\,-y)$ sont solutions de (E).
   (b) On suppose que x et y sont positifs. justifie que $x > y$ et $x - y \leq x + y$.
   (c) Résous alors l'équation (E).
5.
6. Résous dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^2 - y^2 = 35$.

Point-méthode :
• Pour résoudre un problème du type $f(n)|g(n)$, on se ramène à un problème du type $h(n)|A$ où A est un entier indépendant de n.
• Pour les problèmes donnés sous forme additive $A + B = C$, on essaiera de se ramener à une forme multiplicative du type $D \times E = F$, où on connaît les diviseurs de F.

Activité 10

1. Trouve les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $x^2 - y^2 = 196$.
2. a et b étant deux entiers naturels vérifiant $a > b$, trouve tous les couples $(x\,,\,y)$ éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que :
   $$x^2 - y^2 = a^2 b^2.$$
   Application : Détermine l'ensemble des couples $(x\,,\,y)$ dans les deux cas suivants : $(a\,,\,b)(7\,;\,2)$ et $(a\,,\,b)(11\,;\,5)$

2.1.5 Congruence arithmétique

2.1.5.1 Définition

Soit x et y deux entiers relatifs et n un entier naturel. On dit que x est congru à y modulo n si $(x - y)$ est un multiple de n. On note $x \equiv y[n]$

$$x \equiv y[n] \iff (x - y) \in n\mathbb{Z}$$

Exemple
$-55 \equiv -83[2]$; $11 \equiv 16[5]$

REMARQUE

— Soit $a \in \mathbb{Z}$. $a \equiv 0[n] \iff a \in n\mathbb{Z}$
— Si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors $a \equiv r[n]$

2.1.5.2 Propriétés

Activité 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Démontre que :

1. $a \equiv a[n]$
2. $a \equiv b[n] \Longrightarrow b \equiv a[n]$
3. $\forall\,(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$; $(a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]) \Longrightarrow (a \equiv c[n])$

Propriété 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

① $\forall\, a \in \mathbb{Z}$; $a \equiv a[n]$: La relation de congruence modulo n est donc réflexive.

② $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ a \equiv b[n] \Longrightarrow b \equiv a[n]$: La relation de congruence modulo n est donc symétrique.

③ $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3;\ (a \equiv b[n] \text{ et } b \equiv c[n]) \Longrightarrow (a \equiv c[n])$: La relation de congruence modulo n est donc transitive.

Avec ①, ② et ③ , on dit que la relation de congruence modulo n est une **relation d'équivalence**

Définition 4 Soit $a \in \mathbb{Z}$. On appelle **classe d'équivalence** de a pour la relation de congruence modulo n, le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ constitué des entiers relatifs qui sont congrus à a modulo n. Ce sous-ensemble est noté $cl(a)$ ou $\dot{a}$ ou encore $\overline{a}$.

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a[n]\}$$

INFORMATIONS

— $\dot{a} = \dot{b} \iff a \equiv b[n]$

— $x \in \dot{a} \iff x \equiv a[n] \iff \dot{x} = \dot{a}$

— L'ensemble de classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo n est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

— $\forall a \in \mathbb{Z},\ a \equiv r[n] \mid 0 \leqslant r < n \iff \dot{a} = \dot{r}$. Or $r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ donc $\dot{a} \in \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \cdots, \dot{\widehat{n-1}}\right\}$.

D'où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \cdots, \dot{\widehat{n-1}}\right\}$

Exemple

$\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}\right\}$ où $\dot{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0[1]\}$; $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\right\}$ où $\dot{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0[3]\}$, $\dot{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1[3]\}$, et $\dot{2} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2[3]\}$

Activité 12 Soit $n \in N^*$, $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. r et r' les restes respectifs de la division euclidienne de a et a 'par n.
Démontre que $a \equiv b\,[n] \iff r = r'$

`Résultat`

soit a, a' deux entiers relatifs et r, r' les restes respectifs des divisions euclidiennes de a et a' par n. Démontrons que si : $r = r'$; alors : $a \equiv a'[n]$.
Supposons que : $r = r'$; alors : $r \equiv r'[n]$.
Or on sait que : $a \equiv r[n]$ et $r' \equiv a'[n]$; donc par transitivité : $a \equiv a'[n]$.
Réciproquement, démontrons que $a \equiv a'[n]$; alors : $r = r'$. Supposons que : $a \equiv a'[n]$. On sait que : $r \equiv a[n]$ et $a' \equiv r'[n]$; donc par transitivité : $r \equiv r'[n]$; ce qui signifie qu'il existe un entier k tel que : $r - r' = kn$. Or : $0 \leq r < n$ et $-n < r' \leq 0$; donc par somme : $n < r - r' < n$; d ?où, en divisant par $n\,(n > 0)$: $1 < k < 1$. Par conséquent $k = 0$ et donc : $r = r'$

Propriété 9 Soit n un entier naturel non nul.
Deux entiers sont congrus modulo n si et seulement si ils ont le même reste lorsqu'on les divise par n.
Soit $n \in N^*$, $(a, a') \in \mathbb{Z}^2$. r et r' les restes respectifs de la division euclidienne de a et a 'par n. On a :

$$a \equiv a'[n] \iff r = r'$$

Activité 13 Soient n un entier naturel non nul et a, a' , b, b quatre entiers relatifs, et p un élément de $\mathbb{N}$.

1. Démontre que : $(a \equiv b[n] \text{ et } a' \equiv b'[n]) \Longrightarrow (a + a') \equiv (b + b')[n]$.
2. Démontre que : $(a \equiv b[n] \text{ et } a' \equiv b'[n]) \Longrightarrow a \times a' \equiv b \times b'[n]$.
3. $a \equiv b[n] \Longrightarrow a^p \equiv b^p[n]$.

Propriété 10 Soient n un entier naturel non nul et a, a' , b, b quatre entiers relatifs, et p un élément de $\mathbb{N}$.

① $(a \equiv b[n] \text{ et } a' \equiv b'[n]) \Longrightarrow (a + a' \equiv b + b'[n])$.

② $(a \equiv b[n] \text{ et } a' \equiv b'[n]) \Longrightarrow a + b' \equiv b + b'[n]$

③ $(a \equiv b[n] \text{ et } a' \equiv b'[n]) \Longrightarrow (a \times a' \equiv b \times b'[n])$

④ $a \equiv b[n] \Longrightarrow a^p \equiv b^p[n]$.

Conséquence

— $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2;\ a \equiv b[n] \Longrightarrow k \times a \equiv k \times b[k \times n]$

— $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, $b^k - a^k \in (b-a)\mathbb{Z}$
En effet : La propriété est immédiate lorsque $a = b$, on suppose donc désormais que : $a \neq b$. $b - a$ est multiple de $|b-a|$ et $|b-a| \neq 0$, donc : $b \equiv a\ (mod|b-a|)$; d'où : $b^k - a^k (mod|b-a|)$; de qui signifie que $bk - ak$ est multiple de $|b-a|$ et donc de $b - a$

Activité 14

1. On considère les nombres a et b tels que : $a = 135$ et $b = 93$.
   Détermine le reste de la division euclidienne de $a + b$, ab et $2a$ $-3b$ par 23.
2. Deux nombres a et b ont pour restes respectifs 17 et 15 dans la division euclidienne par 19. Dans cette division, quel est le reste de : $a \times b$? ; $a^3 \times b^2$; $2a - 5b$?

3. En utilisant la congruence modulo 20, détermine les entiers relatifs x tels que $\begin{cases} x \equiv 2[4] \\ x \equiv 3[5] \end{cases}$
4. On pose $a \equiv 3[17]$ et $b \equiv 5[17]$.
   (a) Démontre que $4a + b$ est un multiple de 17.
   (b) Démontre que $7a + 5b \equiv 12[17]$.
   (c) Démontre que $a^2 + b^2$ est un multiple de 17.
   (d) Détermine le reste de la division euclidienne de $a^3 + 3b^2$ par 17.
5. Prouve que pour tout entier naturel n, $5^{3n} - 2^{2n}$ est un multiple de 121.

2.1.5.3 Calcul des restes des nombres a^n

Soit a, n, p trois entiers naturels. Pour déterminer suivant les valeurs de l'entier n le reste de la division euclidienne de a^n par p :

On cherche (en utilisant les puissances croissantes de a) un entier non nul n_0 tel que
$a^{n_0} \equiv 1[p]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = kn_0 + r$ avec $r \in \{0, 1, \cdots, (n-1)\}$, alors $a^n = a^{kn_0} \times a^r$.
$a^{kn_0} \equiv 1[p]$ donc $a^n \equiv a^r[p]$

Exemple

Déterminons le reste de la division euclidienne de 7^{2002} par 9.
On a : $7^1 \equiv 7[9]$; de plus : $7^2 = 49 = 9 \times 5 + 4$; donc : $7^2 \equiv 4[9]$; d ?où : $7^3 \equiv 28[9]$; mais : $28 = 9 \times 3 + 1$; donc : $7^3 \equiv 1[9]$.
De plus : $2002 = 3 \times 667 + 1$.
Donc : $7^{2002} \equiv 7^{3\times 667+1}[9] \equiv (7^3)^{667} \times 7[9] \equiv 1 \times 7[9]$ c ?est-à-dire $7^{2002} \equiv 7[9]$ Or : $0 \leq 7 < 9$; donc le reste la division euclidienne de 7^{2002} par 9 est 7.

2.1.5.4 Critère de divisibilité

Un critère de divisibilité par n où $n \in \mathbb{N}$ $(n > 2)$ est un moyen de savoir « rapidement » si un nombre est divisible par n.
Tout entier naturel n s'écrit dans le système décimal sous la forme
$n = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0$ avec pour tout i, $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ et $a_n \neq 0$.
Rappel n est divisible par k si et seulement si $n \equiv 0[k]$.

Activité 15 On note $n = \overline{a_p a_{p-1} \cdots a_1 a_0}$ en base 10.

1. Démontre que $2 \mid n \iff a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
2. Démontre que $5 \mid n \iff a_0 \in \{0, 5\}$
3. Démontre que $3 \mid n \iff 3 \mid \sum_{k=0}^{k=p} a_k$
4. Démontre que $9 \mid n \iff 9 \mid \sum_{k=0}^{k=p} a_k$
5. Démontre que $4 \mid n \iff 4 \mid (10a_1 + a_0)$
6. Démontre que $25 \mid n \iff 25 \mid (10a_1 + a_0)$
7. (a) Trouve suivant les valeurs de k, les valeurs de m sachant que $10^k \equiv m[11]$
   (b) Démontre que $11 \mid n \iff 11 \mid \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n} a_i - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} a_i \right)$
8. Déduis de chaque résultat un critère de divisibilité.

Activité 16 On définit un entier naturel N par $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}^{10}$

1. Démontre que $N \equiv a_0[2]$ et $N \equiv a_0[5]$
2. Démontre que $N \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i[3]$ et $N \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i[9]$
3. Démontre que $N \equiv (10a_1 + a_0)[4]$ et $N \equiv (10a_1 + a_0)[25]$
4. Démontre que $N \equiv \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n} a_i - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} a_i \right)[11]$
5. Déduis de chaque résultat un critère de divisibilité et donne dans chaque cas un ou deux exemples significatifs.

Retenons

1. Un entier naturel N écrit en base 10, est divisible par 2 si, et seulement si son chiffre des unités est paire. Exemple : 10 572 est divisible par 2 car le dernier chiffre est pair (2)
2. Un entier naturel N écrit en base 10, est divisible par 5 si, et seulement si son chiffre des unités est "0" ou "5". Exemple : 25 345 est divisible par 5 car le dernier chiffre est 5.
3. Un entier naturel N écrit en base 10, est divisible par 3 si, et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3. Exemple : 10 302 est divisible par 3 car $1 + 0 + 3 + 0 + 2 = 6 \equiv 0[3]$
4. Un entier naturel N écrit en base 10, est divisible par 9 si, et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 9. Exemple : 10 908 est divisible par 9 car $1 + 0 + 9 + 0 + 8 = 18 \equiv 0[9]$

5. Un entier naturel N écrit en base 10, est divisible par 4 si, et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres (dizaines et unités) est divisible par 4. Exemple : 317 832 est divisible par 4 car $32 \equiv 0[4]$
6. Un entier naturel N écrit en base 10, est divisible par 25 si, et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres (dizaines et unités) appartient à l'ensemble $\{00, 25, 50, 75\}$. Exemple : 10 375.
7. Un entier naturel N écrit en base 10, est divisible par 11 si, et seulement si la différence entre la somme des chiffres de rang pair (à partir de la droite) et la somme des chiffres de rang impair (à partir de la droite) est divisible par 11. Exemple : 11 308 est divisible par 11 car $(8+3+1)-(0+1) = 11 \equiv 0[11]$

Activité 17

1. Trouve le critère de divisibilité par 8
2. On note $n = \overline{a_p a_{p-1} \cdots a_1 a_0}$ en base 10.
   Démontre que $7 \mid n \iff 7 \mid \overline{a_p a_{p-1} \cdots a_1} - 2a_0$
3. Soit $N = \overline{13xy45z}^{10}$.
   Détermine x, y, z pour que N soit divisible par 8, 9 et 11.
4. (a) Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 6.
   (b) Détermine les entiers naturels n tels que $n^2 - n$ soit divisible par 6.
   (c) Détermine les entiers relatifs x, y tels que $3x + y - 1$ et $x - y - 3$ soient tous deux divisibles par 6.
5. Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11
6. En utilisant les conséquences de la congruence, prouve que si l'entier naturel n n'est pas divisible par 3, alors $5^{2n} + 5^n + 1$ est divisible par 31.
7. Détermine le reste de la division euclidienne de 11^{2017} par 7.
8. On donne $A = 33^{2015} + 10^{2006} + 22^{2007}$.
   Détermine le reste de la division euclidienne de A par 12.
9. Détermine les entiers naturels x tels que $x^2 + x - 2$ soit divisible par 7 (table de congruence)

Activité 18

1. Détermine le reste de la division euclidienne par 7 des nombres
   999 888 777 666 555 444 333 222 111 et 999 888 777 666 555 444 333 222 111 000
2. Détermine le reste modulo 7 de 1976^{57}
3. Détermine l"'ensemble des entiers naturels n tels que $1976^n \equiv 4[7]$.
4. Détermine le reste modulo 12 de $1234^{567} + 89^{1011}$
5. (a) Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que l'on ait $2^n - 1 \equiv 0[9]$?
   (b) Détermine l'ensemble des couples $(x\,,\,y)$ d'entiers naturels pour lesquels $2^x 11^y \equiv 1[9]$.
6. (a) Détermine les entiers n tels que $n^3 + 1 \equiv 0[7]$
   (b) Détermine les entiers n tels que $n^3 - 1 \equiv 0[6]$
   (c) Démontre que pour tout entier naturel n $(n^3+1)(n^3-1)$ est divisible par 42.

Activité 19

1. Vérifie que $x^4 + x^3 + x + 1 \equiv (x-2)^4 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, quel que soit l ?entier relatif x.
2. Déduis-en les entiers relatifs, x, tels que $x^4 + x^3 + x + 1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$,

2.1.6 PPCM, PGCD

2.1.6.1 PPCM

Pour tous entiers relatifs a et b., on note $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples communs à a et b.

Activité 20 Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls, et A l'ensemble des éléments de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ plus grands que 0.
Montre que A admet un plus petit élément.

Définition 5 Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls. On appelle **plus petit commun multiple** de a et b, et on note $\mathrm{PPCM}\,(a\,,\,b)$, le plus petit entier naturel non nul de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$

Exemple

— $12\mathbb{Z} = \{\cdots, -96, -84, -72, -60, -48, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, \cdots\}$
  $16\mathbb{Z} = \{\cdots, -64, -48, -32, -16, 0, 16, 32, 48, 64, \cdots\}$, alors $12\mathbb{Z} \cap 16\mathbb{Z} = \{\cdots, -48, 0, 48, \cdots\}$ et donc $\mathrm{PPCM}\,(12\,,\,16) = 48$

— Les premiers entiers naturels non nuls multiples de 8 sont : $8, 16, 24, 32, 40, \cdots$ et le premier d'entre ces multiples qui est multiple de 3 est 24, alors $\mathrm{PPCM}\,(8\,,\,3) = 24$

Propriété 11

— $\forall\,(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, $\mathrm{PPCM}\,(a\,,\,b) = \mathrm{PPCM}\,(|a|\,,\,|b|)$

— $\forall\,(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\mathrm{PPCM}\,(a\,,\,b) = a \iff a \in b\mathbb{Z}$

— $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \ \max(a,b) \leqslant \text{PPCM}\,(a\,,\,b) \leqslant a \times b$

Activité 21 Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls et μ leur **PPCM**. Montre que :

1. $\mu\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$
2. $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset \mu\mathbb{Z}$ (utilise la division euclidienne d'un élément de de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ par μ)
3. $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$

Résultat

Soit k un élément de $\mu\mathbb{Z}$.
k est multiple de μ et μ est multiple de a et de b ; donc, par transitivité, k est multiple de a et de b.
Tout multiple de μ est multiple de a et de b ; donc : $\mu\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap bZ$.
Soit k un élément de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Désignons par q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de k par μ ; on a : $r = k - \mu q$.
k et μq sont des multiples communs à a et b ; donc :$r \in a\mathbb{Z} \cap bZ$. De plus, μ est le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap bZ$ et $0 \leq r < \mu$; donc : $r = 0$.
On en déduit que : $k \in \mu\mathbb{Z}$. Donc : $a\mathbb{Z} \cap bZ \subset \mu\mathbb{Z}$. On a : $\mu\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset \mu\mathbb{Z}$; donc : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.

Propriété 12 Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, et $\mu = \text{PPCM}\,(a\,,\,b)$ On a ; $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$
L'ensemble des multiples communs à deux entiers est l'ensemble est l'ensemble des multiples de leur PPCM
Cette propriété signifie qu'un entier c est multiple de a et de b si, et seulement si, il est multiple de μ.

Exemple
Calcule $4^{17} + 11^{10} - 1$ modulo 2 et modulo 5. Déduis-en que $4^{17} + 11^{10} - 1$ est multiple de 10.

Point-méthode
• Pour démontrer l'égalité de deux ensembles A et B, on peut établir leur double inclusion ; c'est-à-dire démontrer que : A ⊂ B et B ⊂ A,.
• Soit d et D, deux quantités. Pour montrer que $d = D$, il suffit :
· de montrer successivement que $d \leq D$ puis $D \leq d$.
· dans le cas de nombres entiers positifs, on pourra aussi montrer que $d|D$ puis $D|d$.

Activité 22 Soit a, b, k trois nombres entiers naturels non nuls, $\mu = \text{PPCM}\,(a\,,\,b)$ et $\mu_1 = \text{PPCM}\,(ka\,,\,kb)$.

1. Justifie qu'il existe deux entiers naturels a' et b' tels que $\mu = aa'$ et $\mu = bb'$.
2. Justifie que $k\mu$ est multiple de μ_1
3. Prouve μ_1 est multiple de $k\mu$
4. Conclus

Résultat

Posons : $\mu = PPCM(a\,;\,b)$ et $\mu_1 = PPCM(ka\,;\,kb)$. 'μ est multiple de a et b, il existe donc deux entiers naturels non nuls a' et b tels que : $\mu = aa'$ et $\mu = bb'$.
On a : $k\mu = kaa'$ et $k\mu = kbb'$. $k\mu$ est un multiple commun à ka et kb ; donc : $k\mu$ est multiple de μ_1.
μ_1 est multiple de ka et kb, il existe deux entiers naturels non nuls a'' et b'' tels que :
$\mu_1 = kaa''$ et $\mu_1 = kbb''$. On a : $aa'' = bb''$; aa'' est un multiple commun à a et b, donc : aa'' est multiple de μ. On en déduit que : μ_1 est de $k\mu$.
μ_1 et $k\mu$ sont deux entiers naturels multiples l'un de l'autre, ils sont donc égaux. On a donc : $PPCM(ka\,;\,kb) = k\,PPCM(a\,;\,b)$.

Propriété 13 MULTIPLICATIVITÉ DU PPCM
$\forall (a,b,k) \in (\mathbb{N}^*)^3, \ \text{PPCM}\,(k \times a\,,\,k \times b) = k \times \text{PPCM}\,(a\,,\,b)$
Conséquence
① Pour tout diviseur commun d de a et b, $\text{PPCM}\left(\frac{a}{d}\,,\,\frac{b}{d}\right) = \frac{\text{PPCM}\,(a\,,\,b)}{d}$
② $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \ (a \equiv b[m] \text{ et } a \equiv b[n]) \iff a - b \equiv 0[\text{PPCM}\,(m\,,\,n)\,]$

Activité 23

1. Détermine le PPCM de 45 et 120.
2. Détermine les nombres entiers relatifs x de trois chiffres tels que : $\begin{cases} x \equiv 3[45] \\ x \equiv 3[120] \end{cases}$

2.1.6.2 PGCD

Activité 24 Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.
Justifie que $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) \cap \mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Définition 6 Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls. On pose $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$.
Le plus grand commun diviseur de a et b noté $\text{PGCD}\,(a\,,\,b)$ est le plus grand élément de $\mathscr{D}(a,b)$
Exemple

$\mathscr{D}(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ et $\mathscr{D}(15) = \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$, alors $\mathscr{D}(12, 15) = 3$.

Remarque

— $\forall\,(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, $\text{PGCD}\,(a\,,\,b) = \text{PGCD}\,(|a|\,,\,|b|)$

— $\forall\,(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $1 \leqslant \text{PGCD}\,(a\,,\,b) \leqslant \min(a, b)$

— $\forall\,(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}\,(a\,,\,b) = b \iff b \in \mathscr{D}(a)$

— Pour tout entier naturel non nul c, on a : $PGCD(c\,;\,0) = c$.

Activité 25 Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et δ leur PGCD. Démontre que $\mathscr{D}(a, b) = \mathscr{D}(\delta)$

1. Justifie que $\mathscr{D}(\delta) \subset \mathscr{D}(a\,;\,b)$.
2. Soit d un élément de $\mathscr{D}(a\,;\,b)$ $\mu = \text{PPCM}\,(d\,,\,\delta)$.
   (a) Justifie que a et b sont des multiples de μ.
   (b) Déduis-en que $\mu \leq \delta$, puis que $\mu = \delta$.
   (c) Déduis que $d \in \mathcal{D}(\delta)$.
3. Justifie que $\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{D}(a\,,\,b)$.

`Résultat`

Démonstration :
Soit d un élément de $\mathscr{D}(\delta)$. d divise δ et δ divise a et b ; donc, par transitivité, d divise a et b.
Tout diviseur de δ divise a et b ; donc : $\mathscr{D}(\delta) \subset \mathscr{D}(a\,;\,b)$.
Soit d un élément de $\mathscr{D}(a\,;\,b)$. Désignons par μ le PPCM de d et δ ; on a donc : $\delta \leq \mu$.
a est multiple de d et de δ, donc a est multiple de μ. De même b est multiple de μ. Donc μ est un élément de $\mathscr{D}(a\,;\,b)$; donc : $\mu \leq \delta$; puis : $\mu = \delta$.
On a : $PPCM(d\,;\,\delta) = \delta$; donc d divise δ ; c'est-à-dire : $d \in \mathscr{D}(\delta)$. Donc : $\mathscr{D}(a\,;\,b) \subset \mathscr{D}(\delta)$. On en déduit que : $\mathscr{D}(a\,;\,b) = \mathscr{D}(\delta)$.

Propriété 14 L'ensemble des diviseurs communs à deux nombres entiers relatifs non nuls a et b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD δ.
Cela signifie qu'un entier d divise deux entiers naturels non nuls a et b si et seulement si il divise le PGCD de a et b.

Activité de réinvestissent : Pour séparer deux champs, on a planté une clôture constituée de piquets reliés par du fil de fer. Une tempête a détruit cette clôture, il ne reste que trois piquets désignés par les lettres A, B et C dans le schéma ci-dessous. La distance de A à B est de $231\,m$, alors celle de B à C est de $308\,m$. Sachant que les piquets situés entre A et C étaient à égale distance les uns des autres et que cette distance est un nombre entier de mètres, trouve combien il y avait de piquets avant la tempête.

Activité 26 Soit a, b, k trois nombres entiers naturels non nuls. $\delta = PGCD(a\,;\,b)$ et $\delta_1 = PGCD(ka\,;\,kb)$.

1. Prouve qu'il existe un entier naturel non nul q tel que : $\delta_1 = qk\delta$. (I.2)
2. Prouve qu'il existe deux entiers naturels non nuls m et m tels que : $ka = \delta_1 m$ et $kb = \delta_1 n$.
3. Prouve que $q\delta$ divise δ
4. Déduis-en que $\delta_1 = k\delta$.

`Résultat`

Démonstration Posons : $\delta = PGCD(a\,;\,b)$ et $\delta_1 = PGCD(ka\,;\,kb)$.
Il existe deux entiers naturels non nuls a' et b' tels que : $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.
On a : $ka = k\delta a'$ et $kb = k\delta b'$. $k\delta$ divise ka et kb , donc $k\delta$ divise δ_1.
Il existe un entier naturel non nul q tel que : $\delta_1 = qk\delta$. (I.2)
Il existe deux entiers naturels non nuls a'' et b'' tels que : $ka = \delta_1 a''$ et $kb = \delta_1 b''$. D'après (I.2), on a donc : $ka = qk\delta a''$ et $kb = qk\delta b''$; or k n'est pas nul, donc : $a = q\delta a''$ et $b = q\delta b''$; $q\delta$ divise a et b, donc $q\delta$ divise δ ; $q\delta$ et δ sont deux entiers naturels multiples l'un de l'autre, ils sont donc égaux. En remplaçant $q\delta$ par δ dans (I.2), on obtient : $\delta_1 = k\delta$.

Propriété 15 (MULTIPLICATIVITÉ DU PGCD)
Soit a, b, k trois nombres entiers naturels non nuls. On a

$$\text{pgcd}(k \times a, k \times b) = k \times \text{PGCD}\,(a\,,\,b)$$

Exemple
Déterminer le PGCD de 300 et 375.
Solution On a : $PGCD(300; 375) = PGCD(25 \times 12; 25 \times 15) = 25 \times PGCD(12; 15)$;
On a vu que : $PGCD(12; 15) = 3$; donc : $PGCD(300; 375) = 25 \times 3 = 75$.

Propriété 16 Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls.
Pour tout diviseur d commun à a et b, on a : $\text{PGCD}\left(\dfrac{a}{d}\,,\,\dfrac{b}{d}\right) = \dfrac{\text{PGCD}\,(a\,,\,b)}{d}$.
En particulier, si $d = \delta = \text{PGCD}\,(a\,,\,b)$, on a $\text{PGCD}\left(\dfrac{a}{\delta}\,,\,\dfrac{b}{\delta}\right) = 1$

Activité 27 Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls et δ leur PGCD, et l'ensemble A$=\left\{x \in \mathbb{N} \mid \exists\,(u,v) \in \mathbb{Z}^2 ; x = au + bv\right\}$.

1. Démontre que A $\subset \delta\mathbb{Z}$
2. (a) Justifie que A admet un plus petit élément non nul d.
   (b) Démontre que d divise δ (tu pourras effectuer la division euclidienne de a et de b par d).
   (c) Déduis que $d = \delta$.
3. Soit m un multiple de δ avec $m \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontre que $m \in$ A
   (b) Déduis-en que : A $= \delta\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$.
   (c) Déduis-en que $(x \in \delta\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}) \iff \left(\exists\,(u,v) \in \mathbb{Z}^2 ;\ x = au + bv\right)$

Démonstration
Soit u et v deux entiers relatifs. au et bv sont multiples de δ, donc $au + bv$ est multiple de δ.
Réciproquement, considérons l'ensemble A des entiers naturels non nuls qui peuvent s'écrire sous la forme $au + bv$ ($u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$), A$=\left\{x \in \mathbb{N} \mid \exists\,(u,v) \in \mathbb{Z}^2 ; x = au + bv\right\}$. Si a n'est pas nul, on a : $|a| = |a| \times 1 + b \times 0$; donc : $|a| \in$ A. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément d . Il existe deux entiers relatifs u' et v' tels que : $d = au' + bv'$.
Divisons a par d, on obtient : $a = dq + r$ avec $0 \le r < d$. Donc : $r = a - dq = a(1 - u'q) + b(v'q)$ et $r \in$ A ; on en déduit que : $r = 0$. Donc d divise a. De même p divise b ; donc p divise δ.
Or, d est un naturel multiple de δ ; donc : $\delta = d = au' + bv'$.
Tout multiple de δ est de la forme : $k\delta$ $(k \in \mathbb{Z}$) ; c'est-à-dire de la forme : $au'k + bv'k$ (avec $u' \in \mathbb{Z}$ et $v' \in \mathbb{Z}$).

Propriété 17 Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls et δ leur PGCD.
Un entier naturel m est multiple de δ si, et seulement si il existe deux nombres entiers relatifs u et v tels que $m = au + bv$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$.
- Comme $p\mathbb{Z} = (-p)\mathbb{Z}$ pour $p \in \mathbb{N}$ la propriété est vraie pour tous nombres entiers relatifs non nuls a et b.
- En termes ensemblistes, la propriété peut s'écrire : $\delta\mathbb{Z} = \left\{au + bv\ ;\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

Exemple
$\text{pgcd}(300, 375) = 75$ et 225 est un multiple de 75, alors il existe deux nombres entiers relatifs u et v tels que $225 = 300u + 375v$
En effet : $225 = 300 \times (-3) + 375 \times 3$ ou $225 = 4125 - 3900 = 300 \times (-13) + 375 \times (11)$.
On peut donc écrire $300\mathbb{Z} + 375\mathbb{Z} = 225\mathbb{Z}$.

Activité 28 Soit n un entier relatif et δ le PGCD de $2n + 3$ et $3n + 2$. Démontrer que : $\delta = 1$ ou $\delta = 5$.

Résultat
Solution δ divise $2n + 3$ et $3n + 2$, donc δ divise $3(2n + 3) - 2(3n + 2)$, c'est-à-dire 5. On en déduit que $\delta = 1$ ou $\delta = 5$.

Propriété 18 Cas particulier : Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls et $\delta = PGCD(a\,,\,b)$.
Il existe Il existe deux entiers u_0 et v_0 tels que : $\delta = au_0 + bv_0$.

Exercice L'équation : $21x - 63y = 36$; a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Z}^2$
Solution : 21 et 63 sont deux multiples de 7. Pour tous entiers x et y le premier membre de l'équation est multiple de 7 alors que 36 n'est pas multiple de 7, l'équation n'a donc pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice Détermine une solution, dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation : $7x - 24y = 1$.
Déduis-en une solution, dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation : $7x - 24y = 5$.
Solution 1. On a : $7x - 24y = 1 \iff 24y - 1 = 7x$.
Pour trouver une solution, il suffit donc de trouver un entier y tel que $24y + 1$ soit multiple de 7. On constate que pour $y = 0$ et$y = 1$, $24y + 1$ n'est pas multiple de 7 ; en revanche pour $y = 2$ on obtient : $24y + 1 = 49 = 7 \times 7$; d'où : $7 \times 7 - 24 \times 2 = 1$. $(7\,;\,2)$ est une solution de l'équation : $7x - 24y = 1$.
2. En multipliant membre à membre l'égalité : $7 \times 7 - 24 \times 2 = 1$; par 5, on obtient : $7 \times 35 - 24 \times 10 = 5$.
$(35\,;\,10)$ est une solution de l'équation : $7x - 24y = 5$.
(En utilisant la méthode précédente nous aurions trouvé une autre solution : $(11\,;\,3)$)

Activité 29 Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid a > b$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.
Démontre que :
1. si $r = 0$, alors $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b)$
2. si $r \neq 0$, alors $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r)$

Résultat
Démonstration Soit c un élément de $\mathcal{D}(a\,;\,b)$.

Il existe deux entiers relatifs k et k' tels que : $a = kc$ et $b = k'c$.
On a : $a - bq = (k - k'q)c$; donc ¡ : $c \in \mathcal{D}(b\,;\,a - bq)$.
Par conséquent : $\mathcal{D}(a\,;\,b) \subset \mathcal{D}(b\,;\,a - bq)$
Soit c un élément de $\mathcal{D}(b\,;\,a - bq)$
Il existe deux entiers relatifs k et k' tels que : $b = kc$ et $a - bq = k'c$.
On a : $a = a - bq + bq = k'c - kcq = (k - kq)c$; donc : $c \in \mathcal{D}(a\,;\,q)$. Par conséquent : $\mathcal{D}(b\,;\,a - bq) \subset \mathcal{D}(a\,;\,b)$.
On a : $\mathcal{D}(a\,;\,b) \subset \mathcal{D}(b\,;\,a - bq)$ et $\mathcal{D}(b\,;\,a - bq) \subset \mathcal{D}(a\,;\,b)$) ; donc : $\mathcal{D}(a\,;\,b) = \mathcal{D}(b\,;\,a - bq)$

Propriété 19 Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid a > b$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

1. si $r = 0$, alors $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b)$
2. si $r \neq 0$, alors $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r)$

Propriété 20 Soit a et b deux nombres entiers naturels tels que $a > b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

1. si $r = 0$, alors $\text{PGCD}\,(a\,,\,b) = b$
2. si $r \neq 0$, alors $\text{PGCD}\,(a\,,\,b) = \text{PGCD}\,(b\,,\,r)$

En effet, d'après la propriété ... on a $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r)$. Ces deux ensembles sont égaux et bornés, ils ont donc le même plus grand élément ; d'où : $PGCD(a\,;\,b) = PGCD(b\,;r)$.

Exemple

Calculons PGCD $(-30\ 621\,,\ 92\ 276)$
On a déjà PGCD $(-30\ 621\,,\ 92\ 276)$ = PGCD $(30\ 621\,,\ 92\ 276)$
PGCD $(a\,,\,b)$ = PGCD $(b\,,\,r)$ avec r reste de la division euclidienne de a par b

$$\begin{array}{r|l} 92276 & 30621 \\ \hline 413 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30621 & 413 \\ \hline 1711 & 74 \\ 59 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 413 & 59 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

Dividendes	92 276	30 621	413
Diviseurs	30 621	413	59
Quotients	3	74	7
Restes	413	59	0

Le PGCD recherché est le dernier reste non nul obtenu dans le tableau.
Cette démarche est connue sous le nom d'Algorithme d'Euclide.

Déduisons-en deux entiers u et v tels que $-30\ 621u + 92\ 276v = 59$.

$$\begin{aligned} 59 &= 30\ 621 - 413 \times 74 \\ &= 30\ 621 - (92\ 276 - 30\ 621 \times 3) \times 74 \\ &= 30\ 621 - 92\ 276 \times +30\ 621 \times 222 \\ &= 30\ 621 \times 223 - 92\ 276 \times 74 \\ &= -30\ 621 \times (-223) + 92\ 276 \times (-74) \end{aligned}$$

D'où $u = -223$ et $v = -74$

Plus généralement :
Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Lorsque b ne divise pas a, le PGCD de a et b est le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

Activité 30

1. Détermine le PGCD de 61 542 et 6514. Déduis-en deux entiers u et v tels que $61\ 542\,u + 6\ 514\,v = 2$.
2. On applique l ?algorithme d'Euclide au couple $(a\,,\,b)$. La suite des quotients est $1\,,\,2\,,\,1\,,\,3\,,\,2$.
   On sait que PGCD $(a\,,\,b) = 504$. Calcule a et b .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Détermine, selon les valeurs de n , le **PGCD** de $a = 5n + 12$ et $b = 3n + 4$.

Propriété 21 Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

— PGCD $(a\,,\,b)$ = PGCD $(a - b\,,\,b)$
— $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, PGCD $(a\,,\,b)$ = PGCD $(b\,,\,a - kb)$

Activité 31 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Détermine, selon les valeurs de n , le **PGCD** de $A = 2n + 1$ et $B = 3n - 5$.
Point-méthode On essaie de se débarrasser de n par des combinaisons linéaires afin d'utiliser la propriété 20.

Activité 32 Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soient $x = 7a + 5b$ et $y = 4a + 3b$.
Montrer que PGCD $(x\,,\,y)$ = PGCD $(a\,,\,b)$.

Point-méthode

• On applique le même raisonnement qu'à l'exercice précédent avec des combinaisons linéaires judicieusement choisies afin afin d'utiliser la propriété 20.
• ou bien, On revient à la définition du **PGCD** en montrant, en deux temps, que $\mathrm{PGCD}(x\,,\,y)\,|\mathrm{PGCD}(a\,,\,b)$ puis $\mathrm{PGCD}(a\,,\,b)\,|\mathrm{PGCD}(x\,,\,y)$.

2.1.7 Nombres premiers

Activité 33 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\mathrm{PGCD}\left(n^2+2n\,,\,n^3+2n^2+1\right)$

2.1.7.1 Définition

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a et b sont **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1.

2.1.7.2 Propriétés

Activité 34 Soient a et b des naturels non nuls et d un diviseur commun de a et b . On pose $a = da'$ et $b = db'$.
Démontre que $(\delta = \mathrm{PGCD}(a\,,\,b)) \iff (\mathrm{PGCD}(a'\,,\,b') = 1)$

Résultat

Si $d = \mathrm{PGCD}(a\,,\,b)$ alors $d = \mathrm{PGCD}(da'\,,\,db') = d\mathrm{PGCD}(a'\,,\,b') \implies \mathrm{PGCD}(a'\,,\,b') = 1$ après simplification par $d \neq 0$ Donc a' et b' sont premiers entre eux.
Réciproquement, si $\mathrm{PGCD}(a'\,,\,b') = 1$, alors
$\mathrm{PGCD}(a\,,\,b) = \mathrm{PGCD}(da'\,,\,db') = d\mathrm{PGCD}(a'\,,\,b') = d$.

Propriété 22

① Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls et $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur commun à a et b. On pose $a = da'$ et $b = db'$ avec $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$.

$$(d = \mathrm{PGCD}(a\,,\,b)) \iff \left(\mathrm{PGCD}\left(a'\,,\,b'\right) = 1\right)$$

② Pour tous entiers naturels non nuls a , b et δ, on :
$\delta = \mathrm{PGCD}(a\,,\,b) \iff (\exists\,(a', b') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \;\mid\; a = \delta a',\, b = \delta b' \text{ et } \mathrm{PGCD}(a'\,,\,b') = 1)$

Activité de réinvestissement

Détermine les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $\begin{cases} 3a + 2b = 320 \\ \mathrm{PGCD}(a\,,\,b) = 5 \end{cases}$

Activité 35 Soit a et b deux entiers relatifs. Démontre que a et b sont premiers entre eux si, et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Résultat

Démonstration : Si a et b sont premiers entre eux alors leur PGCD est 1 et donc, d'après la propriété 17, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.
Réciproquement, soit δ le PGCD de a et b. S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$, alors δ divise $au + bv$ et donc 1 ; or 1 divise δ de plus 1 et δ sont positifs, donc : $\delta = 1$; c'est-à-dire : a et b sont premiers entre eux.

Propriété 23 Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
Cette propriété est appelée **théorème de Bachet Bézout**
Exemple
- Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux.
En effet , pour tout entier n on a : $1(n+1) - 1(n) = 1$.
- On a : $632 \times 9 + 47 \times (-121) = 1$; donc : 632 et 47 sont premiers entre eux.
- Justifions qu'il existe deux nombres entiers relatifs u et v tels que $175u + 67v = 1$.
On a

$$\begin{aligned}
175 &= 67 \times 2 + 41 \\
67 &= 41 \times 1 + 26 \\
41 &= 26 \times 1 + 15 \\
26 &= 15 \times 1 + 11 \\
15 &= 11 \times 1 + 4 \\
11 &= 4 \times 2 + 3 \\
4 &= 3 \times 1 + 1 \\
3 &= 1 \times 3 + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= 4 - 3 \times 1 = 4 - (11 - 4 \times 2) \\
&= 4 - 11 + 4 \times 2 = 4 \times 3 - 11 \\
&= (15 - 11) \times 3 - 11 = 15 \times 3 - 11 \times 4 \\
&= 15 \times 3 - (26 - 15) \times 4 = 15 \times 7 - 26 \times 4 \\
&= (41 - 26) \times 7 - 26 \times 4 = 41 \times 7 - 26 \times 11 \\
&= 41 \times 7 - (67 - 41) \times 11 = 41 \times 18 - 67 \times 11 \\
&= (175 - 67 \times 2) \times 18 - 67 \times 11 \\
1 &= 175 \times 18 + 67 \times (-47)
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{PGCD}(175\,,\,67) = 1$ (dernier reste non nul dans l'algorithme). 175 et 67 sont donc premiers entre eux. Ainsi il existe deux entiers relatifs u et v tels que $175u + 67v = 1$. On peut donc prendre $(u, v) = (18, -47)$.

Activité 36 Montrer que les nombres 3920 et 1089 sont premiers entre eux et déterminer des entiers u et v tels que : $3920u + 1089v = 1$.
Point-méthode On écrit toutes les divisions de l'algorithme d'Euclide. On reporte alors chaque reste obtenu en partant de la fin.

Activité 37 Soit a, b et c trois nombres entiers relatifs non nuls tels que a est premier avec b et c
Démontre que a et $b \times c$ sont premiers entre eux.

Démonstration D'après le théorème de BÉZOUT , il existe quatre entiers relatifs u, v, u' , v' tels que : $au + bv = 1$ et $au' + cv' = 1$. En multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $a(auu' + cuv' + bvu') + bc \times vv' = 1$.
Donc, d'après le théorème de BÉZOUT , a est premier avec bc.

Propriété 24 Si un entier est premier avec deux entiers alors il est premier avec leur produit.
c'est-à-dire : $\left\{\begin{array}{lcl} \text{PGCD}(a, b) & = & 1 \\ \text{PGCD}(a, c) & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{PGCD}(a, b \times c) = 1$.

Exercice Soit n un entier relatif, démontrer que $7n + 18$ et $10n^2 + 51n + 65$ sont premiers entre eux. (on pourra factoriser $10n^2 + 51n + 65$) .

Solution En factorisant, on obtient : $10n^2 + 51n + 65 = (5n + 13)(2n + 5)$. On a :
$2(7n + 18) - 7(2n + 5) = 1 et - 5(7n + 18) + 7(5n + 13) = 1$; donc, d'après le théorème de BÉZOUT , $7n + 18$ est premier avec $2n + 5$ et $5n + 13$; par conséquent $7n + 18$ est premier avec leur produit c ?est-à-dire $10n^2 + 51n + 65$.

Activité 38 Soit a,b et c trois nombres entiers relatifs non nuls. On suppose que $\text{PGCD}(a, b) = 1$ et a divise $b \times c$.
Démontre que a divise c.

Résultat

Démonstration : Il existe trois entiers relatifs k , u et v tels que : $bc = ka$ et $au + bv = 1$.
On a : $auc + bvc = c$; donc : $a(uc + kv) = c$. Par conséquent a divise c

Propriété 25 Soit a , b c trois nombres entiers relatifs non nuls.
Si a divise le produit $b \times c$ et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.
$\left\{\begin{array}{c} \text{PGCD}(a, b) = 1 \\ a \mid b \times c \end{array}\right. \Longrightarrow a \mid c$
Cette propriété est appelée **théorème de Gauss**

Activité 39 Trouver les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $5(x - 1) = 7y$.

Activité 40 Soit a, b, c trois nombres entiers relatifs non nuls.
Démontre que

1. Si a et b divisent c et si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, alors $a \times b \mid c$
2. si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, alors $\text{PPCM}(a, b) = |ab|$

Résultat
1. Il existe un entier relatif a' tel que : $c = aa'$. b divise aa' et est premier avec a ; donc, d ?après le théorème de GAUSS , il existe un entier relatif b' tel que : $a' = bb'$. On en déduit que : $c = abb'$; donc ab divise c.
2. a et b divisent $PPCM(a; b)$ et a et b sont premiers entre eux, donc ab divise $PPCM(a; b)$. ab est multiple de a et de b, donc ab est multiple de$PPCM(a; b)$. On en déduit que : $PPCM(a; b) = |ab|$

Propriété 26 Soit a, b, c trois nombres entiers relatifs non nuls.

— Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux, alors $a \times b \mid c$

— Si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{PPCM}(a, b) = |a \times b|$.

Activité 41 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Démontre que $[\text{PGCD}(a, n) = 1 \text{ et } ab \equiv ac[n]] \Longrightarrow b \equiv c[n]$

Propriété 27 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

— SI $\text{PGCD}(a, n) = 1$ et $a \times b \equiv ac[n]$ alors $b \equiv c[n]$

— $\forall\, m \in \mathbb{N} \mid \text{PGCD}(m, n) = 1,\ a \equiv b[m \times n] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \equiv b[m] \\ a \equiv b[n] \end{array}\right.$

Activité 42 Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls, δ leur pgcd et ţ leur ppcm.
Démontre que $\delta \times$ ţ $= a \times b$

Démonstration : Les entiers naturels a' et b' tels que : $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ sont premiers entre eux.
Donc : $PPCM(a; b) = \delta PPCM(a'; b') = \delta a'b'$. On en déduit, en multipliant membre à membre par δ, que : $\delta\mu = ab$.

Propriété 28 Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls.

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = a \times b$$

En général pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, on a :

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = |a| \times |b|$$

Retenons

Méthode de calcul

1. du PGCD $(a\,,\,b)$

1. Listes des diviseurs
2. Algorithme de soustraction
3. Algorithme d'Euclide
4. Décomposition en produit de facteurs premiers

2. du PPCM $(a\,,\,b)$

1. Liste des multiples
2. Décomposition en produit de facteurs premiers
3. Formule reliant **PGCD** et**PPCM**

Exemple

Détermine le PPCM de 30 621 et 92 276.

Activité de réinvestissement

1. Détermine tous les nombres entiers naturels a et b tels que $PGCD(a\,;\,b) + PPCM(a\,;\,b) = b + 9$. ?
2. (a) Montre que si deux nombres entiers x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour les entiers $2x + y$ et $5x + 2y$.

   (b) Détermine les entiers naturels non nuls a et b vérifiant
$$\begin{cases}(2a+b)(5a+2b) = 1620\\ ab = 3m\end{cases}$$
   où m désigne le ppcm de a et b .

Activité 43 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)\colon ax + by = c$. On désigne par (S) l'ensemble solution de (E) et on pose $\delta = \text{PGCD}\,(a\,,\,b)$

1. On suppose que δ ne divise pas c. Détermine (S).
2. On suppose que δ divise c.

   (a) Justifie qu'il existe des nombres entiers relatifs α, β, γ tels que $(E) \iff \alpha x + \beta y = \gamma$ avec $\text{PGCD}\,(\alpha\,,\,\beta) = 1$

   (b) Justifie qu'il existe un couple(u_o, v_o) d'entiers relatifs tels que $\alpha u_o + \beta v_o = 1$. Déduis-en un couple (x_o, y_o) solution de (E)

   (c) Justifie que (E) est équivalente à $\alpha(x - x_o) + \beta(y - y_o) = 0$.

   (d) Justifie que si (x, y) est solution de (E),alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\begin{cases} x - x_o &= -k\beta \\ y - y_o &= k\alpha \end{cases}$$

   (e) Vérifie que $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $(x_o - k\beta, y_o + k\alpha)$ est solution de (E).

   (f) Détermine (S).

Point-méthode

Résoudre une équation du type $ax + by = c$, avec a, b et c connus, dans $\mathbb{Z}^2$ signifie rechercher un couple de d'entiers relatifs x et y vérifiant l ?égalité.

• Si a et b sont premiers entre eux, on obtient à partir de l'algorithme d'Euclide une relation de Bézout : $ax_0 + by_0 = 1$ et, en multipliant par c : $a(cx_0) + b(cy_0) = c$.

Pour résoudre, dans Z^2, l'équation $ax + by = c$, on montre par différence des deux égalités que : $a(x - cx_0) = b(cy_0 - y)$. Puis à l'aide du théorème de Gauss, on prouve que $x = cx_0 + bk$ et $y = cy_0 - ak$, où k est dans $\mathbb{Z}$. On vérifie que de tels couples sont bien solutions.

• Si a et b ne sont pas premiers entre eux, l'équation $ax + by = c$ n'admet de solutions dans $\mathbb{Z}^2$ que si le nombre $d = PGCG(a\,;\,b)$ divise pas c.

Si $d = PGCG(a\,;\,b)$ divise c alors, en divisant par d, on se ramène au cas précédent pour la résoudre.

Résolution de l'équation diophantienne $ax + by = c$

On veut trouver toutes les solutions entières de l'équation : (E) : $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers donnés avec a et b non nuls, et x, et y sont les inconnues.

Propriété

L'équation (E) admet des solutions si et seulement si $\text{PGCD}\,(a\,,\,b)$ divise c.

Méthode pour résoudre l'équation (E).

- Si $\text{PGCD}\,(a\,,\,b)$ ne divise pas c, il n'y a pas de solution.
- Si $\text{PGCD}\,(a\,,\,b)$ divise c, il y a des solutions. Voici comment les trouver.

1. Première étape :

   - On calcule le $\text{PGCD}\,(a\,,\,b)$,

   - On divise a, b et c par $\text{PGCD}\,(a\,,\,b)$ et on obtient $a'x + b'y = c'$, avec $\text{PGCD}\,(a'\,,\,b') = 1$.

2. Deuxième étape : recherche d'une solution particulière.

   On cherche, à partir de l'algorithme d'Euclide, une relation de Bézout : $a'u + b'v = 1$ et, en multipliant par c' : $a'(c'u) + b'(c'v) = c'$, on a une solution particulière $(x_0\,,\,y_0) = (c'u\,,\,c'v)$.

3. Troisième étape : recherche de toutes les solutions.
   On désigne par x et y d'autres solutions alors on a $a'(x-x_0)+b'(y-y_0)=0$ et à l'aide du théorème de Gauss on trouve la forme générale des solutions.

Activité de réinvestissement

1. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ chacune des équations suivantes : (E_1): $7x-14y=5$, (E_2): $29x+51y=3$.
2. Déduis les solution de l'équation (E_3): $29x-51y=3$.
3. Résous dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes :
$$(E_4): (4x-3y-5)(4x+3y-1)=0 \quad , \quad x^2-9y^2=2$$
4. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $36x-25y=5$
   (a) Montre que pour toute solution $(x\,,\,y)$ de (E), x multiple de 5.
   (b) Détermine une solution particulière de (E) ; puis résous (E) ;
   (c) Soit δ le plus grand commun diviseur de x et y lorsque $(x\,,\,y)$ est solution de (E).
   Quelles sont les valeurs possibles de δ.
   (d) Quelles sont les solutions de (E) pour lesquelles x et y ont 5 pour grand commun diviseur.

Activité de réinvestissement
n est un entier naturel à six chiffres tel que lorsque l'on échange les trois premiers chiffres avec les trois derniers chiffres, le résulta obtenu est $6n+21$.
Détermine n.

2.1.8 Entiers naturels premiers

Activité 44 Détermine les diviseurs positifs de 59.

2.1.8.1 Définition

Un nombre premier p est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs positifs 1 et p.
REMARQUE

- 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.
- Deux nombres premiers et distincts sont premiers entre eux.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
N.B Un nombre qui n'est pas premier est dit composé.

Activité 45 Soit $n \geqslant 2$ et l'ensemble A= $\{d \geq 2\ ;\ d \in \mathcal{D}(n)\}$

1. Justifie que A admet un plus petit élément p premier.(tu pourras raisonner par l'absurde)
2. Justifie que Si n n'est pas premier alors il admet au moins un diviseur premier p tel que : $2 \leq p^2 \leq n$.

Résultat
(1) On a : $n \in$ A ; donc A n'est pas vide, par conséquent il admet un plus petit élément p.
Si p était composé il admettrait un diviseur propre positif p' qui serait à la fois élément de A et strictement plus petit que le plus petit élément p de A , ce qui contredit la définition de p. Donc p est un nombre premier et puisque $p \in$A, p est un diviseur de n.
(2) Si n n'est pas premier, il admet au moins un diviseur naturel d' autre que 1 et n tel que : $n=p\times d'$ et $2 \leq p \leq d'$. On a donc : $p \leq d'$; et en multipliant la seconde inégalité membre à membre par p on obtient : $p^2 \leq n$. On a donc $n=p\times q$ avec $p \leq q$. En multipliant cette dernière inégalité par p, on obtient : $p^2 \leq p\times q$, c'est-à-dire $2 \leq p^2 \leq n$.

Propriété 29

1. Tout entier naturel $n \geqslant 2$ admet au moins un diviseur premier.
2. Tout entier naturel $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et non premier admet au moins un diviseur premier p tel que $1 < p^2 \leq n$.
3. Il existe une infinité de nombres premiers.

REMARQUE
D'après la propriété 29.2, n admet un diviseur premier p et on a $p^2 \leq n$; c'est-à-dire : $\leq p \leq \sqrt{n}$
En pratique c'est la contraposée de cette dernière implication qui est utilisée : « si n n'a aucun diviseur premier p tel que : $p \leq \sqrt{n}$; alors n est premier ».
Ainsi pour démontrer qu'un entier naturel n est premier, il suffit de démontrer qu'il n'admet aucun diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.

Activité 46 109 est-il un nombre premier ?
Solution On a : $\sqrt{163}=12,7...$; les nombres premiers p vérifiant : $p \leq \sqrt{163}$ sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11.
On a : $163=2\times 81+1$ et $0<1<2$: donc 163 n'est pas multiple de 2.

$163 = 3 \times 54 + 1$ et $0 < 1 < 3$ donc 163 n'est pas multiple de 3.
$163 = 5 \times 32 + 3$ et $0 < 3 < 5$ donc 163 n'est pas multiple de 5.
$163 = 7 \times 23 + 2$ et $0 < 2 < 7$ donc 163 n'est pas multiple de 7.
$163 = 11 \times 14 + 9$ et $0 < 9 < 11$ donc 163 n'est pas multiple de 11.
163 n'est divisible par aucun des nombres premiers p vérifiant : $p \leq \sqrt{163}$; donc 163 est un nombre premier.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

Autres propriétés

$\mathbf{P}_1$ Soit p un nombre premier et a un entier relatif.
Si a n'est pas divisible par p alors a et p sont premiers entre eux.

Démonstration : Les diviseurs naturels de p sont 1 et p, donc si p n'est pas un diviseur de a alors leur seul diviseur naturel commun est 1 ; d ?où : $PGCD(a\,;p) = 1$.

REMARQUE
En particulier deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

$\mathbf{P}_2$ Soit p un nombre premier et a , b deux entiers relatifs.
$*$ Si p divise ab alors p divise a ou p divise b.
$**$ Si de plus a et b sont premiers alors $p = a$ ou $p = b$.

Démonstration

$*$ Si p divise a, alors le résultat est acquis ; sinon p divise ab et, d'après la propriété (1), p est premier avec a donc, d'après le théorème de GAUSS , p divise b.
$**$ Si de plus a et b sont premiers alors les diviseurs naturels de a sont 1 et a et ceux de b sont 1 et b, comme $p \neq 1$, on en déduit que : $p = a$ ou $p = b$.

Plus généralement ce théorème s'étend, par récurrence, à un nombre quelconque de facteurs et nous obtenons alors la conséquence suivante suivante que nous admettons.

$\mathbf{P}_3$ Soit p un nombre premier et a_1 , a_2 , $\cdots$, a_n , n entiers relatifs (avec $n \geq 2$).
① Si p divise $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ alors p divise l'un des facteurs a_i .
② Si de plus les facteurs a_i sont premiers alors p est l'un d'eux.

REMARQUE
En particulier si p divise a^n (avec $n \geq 1$) alors p divise a.

Activité 47 Détermine un entier naturel c premier tel que l'entier naturel $11c + 1$ soit le carré d'un entier.

2.1.8.2 Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété 30 Soit un entier naturel $a \geqslant 2$.
Il existe un entier naturel non nul n, n nombres premiers distincts $p_1, p_2, \cdots, p_n$ et n entiers naturels tous non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tels que

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$$

avec $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$
Cette écriture de a est unique et est appelée **décomposition en produit de facteurs premiers** .

Propriété 31 Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ avec $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

— Tout diviseur positif de n est de la forme $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}$ avec $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$; $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$; $\cdots$; $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$
— Le nombre de diviseurs positifs de n est $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_k + 1)$

Exemple

Déterminons l'ensemble des diviseurs naturels de 120. $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.
Pour déterminer tous ces diviseurs, on peut utiliser un tableau double entrée en séparant les puissances de 2 et les puissances de 3 et 5. On obtient alors :

$\times$	2^0	2^1	2^2	2^3
$3^0 \times 5^0$				
$3^0 \times 5^1$				
$3^1 \times 5^0$				
$3^1 \times 5^1$				

On obtient donc les 16 diviseurs positifs de 120 :
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$.

Activité 48 Déterminez tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que :

1. $m^2 - 5d^2 = 2000$
2. $m^2 - 7d^2 = 2000$

où $m = \text{PPCM}(a\,,b)$ et $d = \text{PGCD}(a\,,b)$.

Activité 49 Le produit de deux entiers naturels a et b $(a < b)$ est 11340. On note d leur PGCD.

1. (a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11340 ?
   (b) Pourquoi $d = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 2$?
2. On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est multiple de 5.
   (a) Démontre que $d = 18$.
   (b) Déduis-en a et b.

Activité 50 α, β et n sont trois entiers naturels tels que $n = 2^{\alpha}.3^{\beta}$.
Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1. Prouve que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2. Déduis-en n.

Activité 51

1. Trouve tous les entiers strictement positifs a et b tels que $\text{PGCD}(a\,,b) = 3$ et $ab = 2^3 \times 3^4 \times 5$.
2. n entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Détermine cet entier n.

2.1.9 Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Soit $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \cdots, \dot{\overbrace{n-1}}\right\}$.

2.1.9.1 Définition

Sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on définit une addition $\dot{+}$ et une multiplication $\dot{\times}$ de la façon suivante :

— $\forall (\dot{x}, \dot{y}) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, $\dot{x} \dot{+} \dot{y} = \dot{\overbrace{x+y}}$.

— $\forall (\dot{x}, \dot{y}) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, $\dot{x} \dot{\times} \dot{y} = \dot{\overbrace{x \times y}}$.

— $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+})$ est un groupe commutatif.

— $\dot{0}$ est l'élément neutre de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour l'addition.

— La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

— $\forall \dot{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\dot{x} \dot{\times} \dot{1} = \dot{1} \dot{\times} \dot{x} = \dot{x}$: $\dot{1}$ est l'élément neutre de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour la multiplication.

— $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un anneau commutatif et unitaire.

2.1.9.2 Propriété

On dit qu'un anneau commutatif A est intègre si et seulement si $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in A$;
$x \times y = 0 \implies x = 0$ ou $y = 0$.

Activité 52

1. (a) Dresse la table de multiplication dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$.
   (b) Existe-t-il des éléments non nuls a et b de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tels que $a \times b = \dot{0}$?
2. (a) Dresse la table de multiplication dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \times)$
   (b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ tels que $x \times y = \dot{0}$.
   Á-t-on $x = \dot{0}$ ou $y = \dot{0}$?
   (c) Soit $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tel que $\neq \dot{0}$.
   Existe-t-il $a' \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tel que $a \times a' = \dot{1}$?

SYNTHÈSE

— On a $\dot{2} \neq \dot{0}$, $\dot{3} \neq \dot{0}$ et $\dot{2} \times \dot{3} = \dot{6} = \dot{0}$: On dit que $\dot{2}$ et $\dot{3}$ sont des diviseurs de $\dot{0}$ dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$

— $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ admet de diviseurs pour l'élément $\dot{0}$, alors $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau non intègre.

— Plus généralement dans un anneau commutatif unitaire, s'il existe deux éléments non nuls dont le produit est nul :
- ces éléments sont des diviseurs de zéro ;
- l'anneau est non in intègre.

— $\forall (x, y) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$, $(\dot{x} \neq \dot{0}$ et $\dot{y} \neq \dot{0}) \Longrightarrow \dot{x} \times \dot{y} \neq \dot{0}$

— $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \times)$ n'admet pas de diviseur de zéro, alors $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire intègre.
En général, Si n est premier $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,, \dot{+}, \dot{\times})$ est anneau intègre.

— De plus $\forall\, x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{\dot{0}\}$, $\exists x' \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $|$ $x \times x' = x' \times x = \dot{1}$, alors tout élément non nul de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est inversible : on dit que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un **corps commutatif**.
En général on a :

Propriété 32 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}$, $|$ $n \geqslant 2$ et $1 < p < n$

$$p \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff \text{PGCD}(n\,,p) = 1$$

Propriété 33 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps si, et seulement si n est un nombre premier.

REMARQUE

Dans un anneau intègre, $\begin{cases} ax = bx \\ x \neq \dot{0} \end{cases} \Longrightarrow a = b$

Ceci est faut dans un anneau non intègre.
Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ on a : $\dot{2} \times \dot{2} = \dot{2} \times \dot{0}$, mais $\dot{2} \neq \dot{0}$.

Activité 53

1. Justifie que les entiers 113 et 28 sont premiers entre eux.
2. (a) Détermine un couple $(u\,,\,)$ d'entiers tel que $113\,u + 28\,v = 1$.
   (b) Déduis-en l'inverse de la classe 28 dans $\mathbb{Z}/113\mathbb{Z}$.
3. Résous dans $\mathbb{Z}/113\mathbb{Z}$ l'équation : $\dot{\widehat{28}}x + \dot{\widehat{93}} = \dot{\widehat{100}}$

Activité 54

1. Résous dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, l'équation $\dot{2}x = \dot{4}$.
2. Résous dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}$.
3. Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$.
4. Résous dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$.
5. (a) Résous dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \dot{2}x & - & \dot{4}y & = & \dot{2} \\ x & + & \dot{5}y & = & \dot{2} \end{cases}$
   (b) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \dot{3}x & - & \dot{3}y & = & \dot{3} \\ \dot{2}x & + & y & = & \dot{5} \end{cases}$

Équations de congruence

1. Quand simplifier $ab \equiv ac\,[n]$?
   Propriété 1 Soit a, b, $c \in \mathbb{Z}$. S'il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $ua \equiv 1\,(n)$ alors $ab \equiv ac\,[n] \Longrightarrow b \equiv c\,[n]$
   Propriété 2 Soit $a \in \mathbb{Z}$. Il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $au \equiv 1\,[n]$ si et seulement si $\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n) = 1$, c'est-à-dire a et n sont premiers entre eux.
   Méthode pour trouver u : si $au + nv = 1$ est une relation de Bézout entre a et n, alors $au \equiv 1\,(n)$.
2. Résoudre l'équation $ax \equiv c\,(n)$:
   On veut trouver toutes les solutions entières de l ?équation (E) : $ax \equiv c\,(n)$, où a et c sont des entiers donnés avec a non nul, et où $x \in \mathbb{Z}$ est l'inconnue.

- **Cas où a et n sont premiers entre eux.**

Propriété 3 Soit a et n des entiers premiers entre eux $(n \geq 2)$ et $u \in \mathbb{Z}$ tel que $au \equiv 1\,(n)$.

L'équation $ax \equiv c\,(n)$ est équivalente à $x \equiv uc\,(n)$.

- **Cas où a et n ne sont pas premiers entre eux.**

x solution de (E) $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,|\, ax = c + kn$
x solution de (E) $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,|\, (x\,,\,k)$ solution de $ax - kn = c$.

La dernière équation est de la forme $ax + by = c$ (avec $y = k$ et $b = n$), qui a été déjà vue.

Si $\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n)$ ne divise pas c, alors l'équation $ax - kn = c$ n'a pas de solutions.

Si $\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n)$ divise c, on pose

$$a' = \frac{a}{\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n)}\,,\; n' = \frac{n}{\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n)} \text{ et } c' = \frac{c}{\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n)}$$

On a donc $x$solution de (E) $\Longleftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{Z},\, a'x - n'k = c' \Longleftrightarrow a'x \equiv c'\,(n')$.
On est ramené au cas précédent puisque a' et n' sont premiers entre eux.

activité de réinvestissement

1. Résous dans $\mathbb{Z}$ les équations :
   (E_1) : $3x \equiv 1[7]$, $E_2)$: $5x \equiv 7[11]$
   $E_3)$: $12x \equiv 9[16]$, $E_4)$: $15x \equiv 25[35]$.
2. Résous dans $\mathbb{Z}$ les systèmes :
   $\begin{cases} x \equiv -1[8] \\ x \equiv 7[13] \end{cases}$, $\begin{cases} x \equiv 3[11] \\ x \equiv 5[7] \end{cases}$
   $\begin{cases} 7x \equiv 5[19] \\ 3x \equiv 1[11] \end{cases}$, $\begin{cases} 15x \equiv 9[12] \\ 4x \equiv 5[7] \end{cases}$

— L'équation $ax \equiv 1[n]$ admet au moins une solution si, et seulement si $\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n) = 1$.

Exemple
$3x \equiv 1[7] \Longleftrightarrow x \equiv 5[7] \Longleftrightarrow x = 7k + 5,\ k \in \mathbb{Z}$

— L'équation $ax \equiv b[n]$ a au moins une solution si et seulement si b est un multiple de $\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n)$. Si $\mathrm{PGCD}\,(a\,,\,n) = 1$ il suffit de connaître une solution particulière.

Exemple
$5x \equiv 7[11]$.

On a $5\times 8 \equiv 7[11]$ donc 8 est une solution particulière.

$$\begin{aligned}5x \equiv 7[11] &\iff 5x \equiv 5\times 8[11]\\ &\iff 5(x-8)\equiv 0[11]\\ &\iff (x-8)\equiv 0[11] \text{ car PGCD}(5\,,\,11)=1\\ &\iff x = 11k+8,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Dans le cas où a et b ne sont pas premiers entre eux, pour résoudre une telle équation, on se ramène au cas où ils sont premiers.

Exemple

$$\begin{aligned}15x \equiv 25[35] &\iff 15x = 35k+25,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\iff 3x = 5+7k,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\iff 3x\equiv 5[7]\\ &\iff x\equiv 25[7]\\ &\iff x\equiv 4[7]\\ &\iff x = 7k+4,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

— $\begin{cases} ax\equiv b[n]\\ cx\equiv d[n]\end{cases}$

- — Si $a=c$, on peut remarquer une relation particulière.

  Exemple

$$\begin{aligned}\begin{cases}x\equiv 7[8]\\ x\equiv 11[12]\end{cases} &\iff \begin{cases}x\equiv -1[8]\\ x\equiv -1[12]\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x+1\equiv 0[8]\\ x+1\equiv 0[12]\end{cases}\\ &\implies x+1\equiv 0[\text{PPCM}(8\,,\,12)]\\ &\implies x = 24k-1,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

- — Si on ne remarque pas une solution particulière, on peut en trouver une en déterminant une solution particulière d'une équation diophantienne associée au système

  Exemple

$$\begin{aligned}\begin{cases}x\equiv 7[129]\\ x\equiv 11[1\ 223]\end{cases} &\iff \begin{cases}x = 129k+7,\ k\in\mathbb{Z}\\ x = 1\ 223k'+11,\ k'\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ &\implies 129k+7 = 1\ 223k'+11,\ (k,k')\in\mathbb{Z}^2\\ &\implies 129k-1\ 223k' = 4,\ (k,k')\in\mathbb{Z}^2\ \circledast\\ 129\times 493-1\ 223\times 52 = 1 &\iff 129\times 1\ 972 - 1\ 223\times 208 = 4\\ &\implies (1\ 972, 208) \text{ est une solution particulière de l'équation diophantienne } \circledast\\ \begin{cases}x\equiv 7[129]\\ x\equiv 11[1\ 223]\end{cases} &\iff \begin{cases}x\equiv 254\ 395[129]\\ x\equiv 254\ 395[1\ 223]\end{cases}\\ &\implies x-254\ 395\equiv 0[\text{PPCM}(129\,,\,1\ 223)]\\ &\implies x = 157\ 767k+254\ 395,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

- — Si on n'est pas dans le cas où $a=c=1$, on peut cependant s'y ramener.

  Exemple

  $\begin{cases}15x\equiv 9[12]\\ 4x\equiv 5[7]\end{cases}$

$$\begin{aligned}15x\equiv 9[12] &\iff 15x = 12k+9,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\iff 5x = 4k+3,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\iff 5x\equiv 3[4]\\ &\iff x\equiv 3[4]\\ 4x\equiv 5[7] &\iff 4x = 7k+5 = 7(k-1)+12\\ &\iff 4x\equiv 12[7]\\ &\iff x\equiv 3[7]\\ \begin{cases}15x\equiv 9[12]\\ 4x\equiv 5[7]\end{cases} &\iff \begin{cases}x\equiv 3[4]\\ x\equiv 3[7]\end{cases}\\ &\implies x\equiv 3[\text{PPCM}(4\,,\,7)]\\ &\implies x = 28k+3,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Activité 55 Dans cet exercice, pour noter les entiers, on utilise le système décimal. Soit E le sous-ensemble de constitué des entiers n qui possèdent les propriétés suivantes :

- 4 divise n
- n admet au moins dix diviseurs appartenant à $\mathbb{N}$,

- il existe un entier premier p tel que $n = 37 + 1$.

1. Quel est le plus petit élément de E ?
2. Existe-t-il un élément n, de E, vérifiant $26800 < n \leq 27800$?

Activité 56

1. Trouve suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 3^n par 11.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer suivant les valeurs des entiers naturels k et m, les restes de la division par 11 des deux nombres

$$A = 1978^k \quad \text{et} \quad B = 421^{5m} + 421^{4m} + 421^{3m} + 421^{2m} + 421^m .$$

Activité 57

1. Trouve toutes les paires d ?entiers naturels a et b tels que l ?on ait :

$$\begin{cases} pgcd(a\,,\,b) = 42 \\ ppcm(a\,,\,b) = 1680 \end{cases} .$$

2. Détermine l'ensemble des entiers relatifs x tels que $8x \equiv 7\,[5]$
3. Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $336x + 210y = 294$.
   La deuxième question fournira une solution particulière de l ?équation simplifiée.

Activité 58

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ (dont les éléments sont notés $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2} \dots \dot{90}$)

1. Discute, suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, l'équation

$$a\,x = \dot{0}.$$

2. Résous l'équation :

$$x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}.$$

Activité 59

1. Soit p un nombre premier.
   Détermine tous les couples d'entiers relatifs $(x\,,\,y)$ tels que $x^2 - y^2 = p$.
2. Résous l'équation : $x^2 + 2x = y^2 = 40$ où x et y sont deux entiers naturels.

Activité 60 *Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Tu indiqueras sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*

✂ ....

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 6).$$

   A : toutes les solutions sont des entiers pairs.
   B : il n'y a aucune solution.
   C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$.
   D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$ ou $x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 6)$.
2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\ ;\ y) = (34k - 7\ ;\ 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   B : L'équation (E) n'a aucune solution.
   C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\ ;\ y) = (17k - 7\ ;\ 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\ ;\ y) = (-7k\ ;\ 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. On considère les deux nombres $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$. On a alors :
   A : $n \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$ et $p \equiv 0 \quad (\text{modulo } 17)$.
   B : p est un nombre premier.
   C : $p \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$.
   D : $p \equiv 1 \quad (\text{modulo } 17)$.

✂ ....

Exercice 17

1. Soit b un entier naturel strictement supérieur à 1. On rappelle que : $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$.
   (a) Quel est le PGCD de b^2 et $(b-1)$?
   (b) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $b^2x + (b-1)y = 1$,.
2. Résous dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0\,[11]$.

2.2 Séquence 2 : Nombres complexes

Durée : heures

2.2.1 Étude algébrique des nomb.comp.

Activité 1 Après chaque jet des quatre cauris, Dansou a formé des couples (a, b) où a désigne le nombre de cauris ouverts et b le nombre de cauris fermés.
Dansou sait que chaque couple (a, b) peut représenter les coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans le plan. Il se demande si chaque couple peut aussi caractériser d'autres objets mathématiques.
Consigne 1
Pour tous couples (a, b) et (a', b') de nombres réels, on définit :

— l'addition $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

— la multiplication $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

1. Calcule $(1, 2) + (2, 3)$ et $(2, 1) \times (2, 3)$
2. On pose $(1, 0) = 1$ et $(0, 1) = \mathrm{i}$
   (a) Exprime (a, b) en fonction de a, b et i
   (b) Calcule i^2

2.2.1.1 Définition et vocabulaire

— On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme $a + b\mathrm{i}$ tel que a et b sont des nombres réels et $\mathrm{i}^2 = -1$.

— L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

— On admet que $0\mathrm{i} = \mathrm{i}0 = 0$ donc $0 + 0\mathrm{i} = 0$

— On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

— Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + b\mathrm{i}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

  — L'écriture $z = a + b\mathrm{i}$ est la **forme algébrique** de z.

  — Le nombre réel a est la **partie réelle** de z et on note $a = \mathcal{R}e(z)$

  — Le nombre réel b est la **partie imaginaire** de z et on note $b = \mathcal{I}m(z)$

  — Si $b = 0$, alors z est un dit **nombre réel**. Ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

  — Si $a = 0$, alors z est un **nombre imaginaire**.

  — Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors z est un **nombre imaginaire pur**.

  — L'ensemble des nombres imaginaires est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

  — L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}^*$

  — 0 est le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur.

  — $\mathbb{R}$ et $\mathrm{i}\mathbb{R}$ sont deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$.

REMARQUE
$\mathbb{R} \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \{0\}$ et $\mathbb{R} \cap \mathrm{i}\mathbb{R}^* = \phi$

Activité 2 Soit $z \in \mathbb{C} \mid z = a + b\mathrm{i}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Démontre que $(z = 0) \iff (a = 0 \text{ et } b = 0)$

Propriété 1 Soit z et z' deux nombres complexes.

— $(z = 0) \iff (\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z) = 0)$

— $(z = z') \iff (\mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z)' \text{ et } \mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z)')$

Réinvestissement Exercice N°3, page 76 CIAM SM

2.2.1.2 Opération dans $\mathbb{C}$

On peut effectuer les mêmes opérations que dans $\mathbb{R}$ (addition, multiplication, division) avec les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$ (en particulier, tout nombre complexe non nul admet un inverse pour la multiplication). On tiendra compte dans les calculs que $\mathrm{i}^2 = -1$.

2.2.1.2.1 Addition-Multiplication

Soit $z = a + b\mathrm{i}$ et $z' = a' + b'\mathrm{i}$ deux nombres complexes, $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$.

— $z + z' = (a + a') + (b + b')\mathrm{i}$

— $z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)\mathrm{i}$

Définition 1 Soit z un nombre complexe non nul. on appelle inverse de z le nombre complexe noté $\dfrac{1}{z}$.

Activité 3 Soit $z = a + b\mathrm{i}$ un nombre complexe non nul.
Calcule $(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})$. Déduis-en la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.
Retenons

— L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives dans $\mathbb{C}$.

— La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$.

— 0 est l'élément neutre pour l'addition et 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$.

— Tout nombre complexe $z = a + b\mathrm{i}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ admet un opposé noté $-z = -a - b\mathrm{i}$.

— Tout nombre complexe non nul $z = a + b\mathrm{i}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) \neq (o, o)$ admet un inverse noté $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$

— Soit z et z' deux nombres complexes.

Activité 4 Soit z, z' deux nombres complexes. Démontre que $z \times z' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$

Propriété 2 $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z \times z' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$
$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

2.2.1.2.2 Soustraction et division

— La différence $z - z'$ est le nombre complexe $z + (-z)$.

— Si $z \neq 0$, le quotient de z' par z est le nombre complexe $\dfrac{z'}{z}$ tel que $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{Z}$

Activité 5

1. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   $(4 - \mathrm{i})z - \dfrac{3 + \mathrm{i}}{2 - 3\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$
   $z^3 + z = 0$
2. Résous dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant d'inconnue z et z' :
   $$\begin{cases} (1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}z' = 2 \\ (2-\mathrm{i})z + (1+2\mathrm{i})z' = \mathrm{i} \end{cases}$$

2.2.1.2.3 Produits remarquables

Propriété 3

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\,(u, v) \in (\mathbb{C}^*)^2$ on a : $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$.
En particulier :
$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
$(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

— $\forall\,(u, v) \in \mathbb{C}^2$, $(u - v)(u + v) = u^2 - v^2$.

— Puissances de i :
On veut calculer i^n où $n \in \mathbb{N}$:

$\mathrm{i}^0 = 1$
$\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$
$ic^2 = -1$
$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$
$\mathrm{i}^4 = 1$

On déduit
Si $n = 4p$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors
$\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4p} = 1^p = 1$,
Si $n = 4p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors
$\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4p+1} = \mathrm{i}^{4p} \times \mathrm{i} = \mathrm{i}$,
Si $n = 4p + 2$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors
$\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4p+2} = \mathrm{i}^{4p} \times \mathrm{i}^2 = -1$,
Si $n = 4p + 3$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors
$\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4p+3} = \mathrm{i}^{4p} \times \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$,

Exemple
Calcule i^{120} et i^{2017}

Réinvestissement
Écris sous forme algébrique $(2 + 3\mathrm{i})^7$ et $(2 - 3\mathrm{i})^7$; Exercice N°5, page 76 CIAM SM

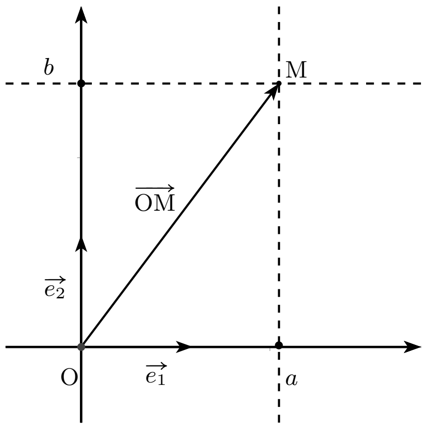
2.2.1.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d ?un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$.
- L ?application qui à tout nombre complexe de forme algébrique $z = a + b\mathrm{i}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ associe le point $\mathrm{M}(a, b)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{P}$
$\mathrm{M}(a, b)$ est appelé point image du nombre complexe $z = a + b\mathrm{i}$; z est appelé affixe du point $\mathrm{M}(a, b)$.

- L'application qui à tout nombre complexe $z = a + b\mathrm{i}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ associe le vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l ?ensemble des vecteurs du plan ,$\mathcal{P}$.
$\vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé vecteur image du nombre complexe z ; z est appelé affixe du vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
? Le plan $\mathcal{P}$ muni d ?un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé plan complexe.
Un point M d ?affixe z est souvent noté $\mathrm{M}(z)$. ? Les droites de repères $(\mathrm{O}, \vec{u})$ et $(\mathrm{O}, \vec{v})$ sont respectivement appelées **axe réel** et **axe imaginaire**.
-

— $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{M}(z) \in (\mathrm{O}; \vec{u})$

— $z \in \mathrm{i}R \iff \mathrm{M}(z) \in (\mathrm{O}; \vec{v})$



Activité 6

1. Place dans le plan complexe $\mathcal{P}$, les points d'affixes : M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 et M_6 d'affixes respectives $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -3+i$, $z_3 = 2+i$ $z_4 = -i$, $z_5 = 1+i\sqrt{3}$ et $z_6 = 2z - 1 + 3z_2$.
2. pour tout nombre complexe $z \neq 2i$, on pose $Z = \dfrac{z-3}{z-2i}$.
   On pose $z = x + iy$, avec $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$. Exprime $\mathcal{R}e\,(Z)$ et $\mathcal{I}m\,(Z)$ en fonction de x et y .
3. Détermine les nombres complexes z tels que $z^2 + 2z - 3$ soit réel. Représente l'ensemble des solutions.
4. Soit M et M' les points d'affixes respectives $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec a , b , a' , b' réels.
   Détermine : l'affixe du point I milieu de [MM'], les affixes des vecteurs $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$, $\overrightarrow{MM'}$, $\vec{v} + \vec{v}'$ et $\lambda\vec{v}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété 4 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2})$.

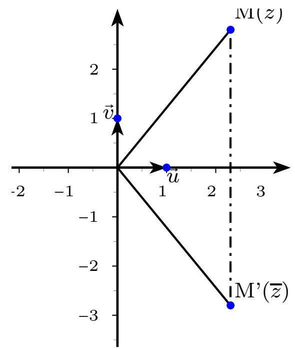
1. Si M pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, a , b , a' , b' réels, alors :
   - le milieu I de [MM'] a pour affixe $\frac{z+z'}{2}$
   - le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = a' - a + i(b' - b)$.
2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs d'affixe respectives z et z' et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Le vecteur $\vec{v} + \vec{v}'$ a pour affixe $z + z'$.
   - Le vecteur $\lambda\vec{v}$ a pour affixe λz.
3. Soit le système $S = \{(A_1(z_1), \alpha_1); (A_2(z_2), \alpha_2); \cdots; (A_n(z_n), \alpha_n)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Le barycentre G du système S a pour affixe $Z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$

2.2.1.4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2 Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - bi$.

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, soit $z = a + ib$ $(a\,,\,b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe non nul.
Les points images de z et $\overline{z}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe réel.



Activité 7 Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifie que :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z + \overline{z} = 2\,\mathcal{R}e\,(z)$
3. $z - \overline{z} = 2i\,\mathcal{I}m\,(z)$
4. $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$
5. $z \in i\mathbb{R}^* \iff (\overline{z} = -z \text{ et } z \neq 0)$

Activité 8 Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Justifie que :

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$; $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
5. Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Propriété 5 $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
$\overline{-z} = -\overline{z}$
$\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Activité de réinvestissement

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$.

1. Détermine et construis l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que le nombre complexe $\dfrac{2z-4}{z-\mathrm{i}}$ soit réel.
2. Détermine et construis l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que le nombre complexe $z^2+2\overline{z}+\mathrm{i}(z-\overline{z})-2\mathrm{i}$ soit un imaginaire.
3. Détermine et construis l'ensemble $(E_3)=\left\{\mathrm{M}(z)\,;\,Z=\dfrac{z-1}{z^2}\in\mathbb{R}\right\}$.
4. Détermine et construis l'ensemble $(E_4)=\left\{\mathrm{M}(z)\,;\,Z=\dfrac{\overline{z}}{z+\mathrm{i}}\in\mathbb{R}\right\}$..
5. Détermine et construis l'ensemble $(E_5)=\left\{\mathrm{M}(z)\,;\,Z=\dfrac{\mathrm{i}z+2}{z+\mathrm{i}}\in\mathrm{i}\mathbb{R}\right\}$..

2.2.2 Étude trigonométrique des nombres complexes

2.2.2.1 Module d'un nombre complexe

2.2.2.1.1 *Définition*

Soit z un nombre complexe. On appelle **module** de z le nombre réel positif noté $|z|$ défini par $|z|=\sqrt{z\times\overline{z}}$

Conséquence

Si $z=a+b\mathrm{i},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$, alors $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Exemple

$z=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\implies |z|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

2.2.2.1.2 *Interprétation géométrique*

Le plan complexe est muni d' repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$. Soit $z,z'\in\mathbb{C}^2$ M et M′ les points d'affixes respectives z et z'. On a :

- $|z|=\mathrm{OM}$
- $|z-z'|=\mathrm{MM}'$.
- $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$ et $\forall\,\vec{u}$ d'affixe z, on a $|\lambda z|=|\lambda|\times\|\vec{u}\|$

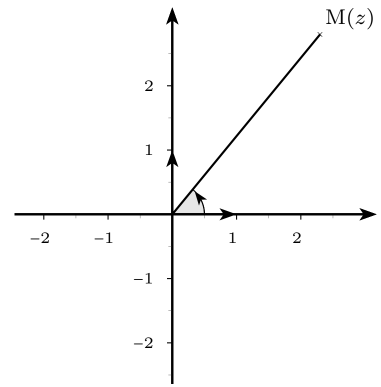
2.2.2.1.3 *Premières propriétés*

$\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et $\forall\,n\in\mathbb{Z}$, on a

- Si $z=a$ avec $a\in\mathbb{R}$, alors le module de z est égal à la valeur absolue de a.
- $|\overline{z}|=|-z|=|z|$
- Si $z\neq 0$, alors $|\overline{z}|=1\iff\left(\overline{z}=\dfrac{1}{z}\right)$
- $|z|=0\iff z=0$

2.2.2.2 Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul et M son image Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$. On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.



On sait qu'un angle orienté de deux vecteurs non nuls a une infinité de mesures, on en déduit : Tout nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si θ est un argument du nombre complexe non nul z, alors tout autre argument de z est de la forme $\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. On note alors $\mathbf{arg}\,(z)=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou encore $\mathbf{arg}\,(z)\equiv\theta[2\pi]$.

NB : - L'unique argument de z appartenant à $\left]-\pi\,;\pi\right]$ est appelé **argument principal** de z
- Le nombre complexe nul n'a pas d'arguments.

2.2.2.3 Forme trigonométrique complexe non nul

Activité 9 Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$. Soit $z=a+b\mathrm{i},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a,b)\neq(0,0)$ un nombre complexe non nul de module r, $(r\in\mathbb{R}_+^*)$ et M le point image de z. On pose $mes(\vec{e_1},\overrightarrow{\mathrm{OM}})=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \theta\in\mathbb{R}$

1. Calcule de deux manières différentes chacun des produits scalaires $\vec{e_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{e_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$
2. Déduis-en une autre écriture du nombre complexe z.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d ?argument θ.
On appelle forme trigonométrique de z l ?écriture : $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

$$\boxed{\text{Forme algébrique } z=a+bi,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2} \xrightarrow{r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r}} \boxed{\text{Forme trigonométrique } z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}$$

$$\xleftarrow[a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta]{}$$

Activité de réinvestissement

1. Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants : $\sqrt{3}+3\mathrm{i}$, $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}$, $\mathrm{i}\cos\frac{17\pi}{13}$.
2. Soit θ un nombre réel tel que $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$. Détermine en fonction de θ le module et un argument de chacun des nombres complexes $a=1+\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta$, $b=1+\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta$ et $c=\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\theta}{1-\mathrm{i}\tan\theta}$.

2.2.2.4 Propriétés des modules et arguments

Propriété 6 ① $\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*,\ z=z' \iff (|z|=|z'|$ et $\mathbf{arg}\,(z)=\mathbf{arg}\,(z')+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$

Activité 10 Soit z et z' deux nombres complexes non nul et n un nombre entier relatif.

1. En utilisant la forme trigonométrique détermine, en fonction des modules et des arguments de z et z', le module et un argument de chacun des nombres complexes $\overline{z}$, $-z$, $z\times z'$, $\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z'}{z}$.
2. Démontre que $|z^n|=|z|^n$ et $\mathbf{arg}\,(z^n)=n\times\mathbf{arg}\,(z)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Propriété 7 Pour tous nombres complexes non nuls z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

② $\mathbf{arg}\,(\overline{z})=\mathbf{arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\mathbf{arg}\,(z)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

③ $\mathbf{arg}\,(-z)=\pi+\mathbf{arg}\,(z)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

④ $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ et $\mathbf{arg}\,(z\times z')\equiv\mathbf{arg}\,(z)+\mathbf{arg}\,(z')\,[2\pi]$

⑤ $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$ et $\mathbf{arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)\equiv-\mathbf{arg}\,(z)\,[2\pi]$

⑥ $\left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{|z'|}{|z|}$ et $\mathbf{arg}\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv\mathbf{arg}\,(z)-\mathbf{arg}\,(z')\,[2\pi]$

⑦ $|z^n|=|z|^n$ et $\mathbf{arg}\,(z^n)\equiv n\,\mathbf{arg}\,(z)\,[2\pi]$

⑧ $\mathcal{R}e\,(z)\leqslant|z|$ et $\mathcal{I}m\,(z)\leqslant|z|$

⑨ $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

Activité 11 Démontre que $\forall\,(\alpha,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, on a $(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n=\cos(n\times\alpha)+\mathrm{i}\sin(n\times\alpha)$

Résultat attendu

Propriété 8 Pour tout nombre réel θ et tout nombre entier relatif n, on a :
$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n=\cos(n\times\alpha)+\mathrm{i}\sin(n\times\alpha)$
C'est la **formule de MOIVRE**

Activité de réinvestissement
Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$

1. Écris sous forme trigonométrique les nombres complexes : $z_1=2+2\mathrm{i}$ et $z_2=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$:
   Déduis-en les formes trigonométriques de : $z_1\times z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; z_1^3 ; $\overline{z_1}$; $-z_2$: $\dfrac{z_1^2}{\overline{z_2}}$.
2. Détermine chacun des ensembles suivants :
   $\Gamma_1=\left\{\mathrm{M}(z)\in\mathcal{P}\mid\left|\dfrac{z-3+2\mathrm{i}}{z+1+\mathrm{i}}\right|=1\right\}$,
   $\Gamma_2=\left\{\mathrm{M}(z)\in\mathcal{P}\mid\left|\dfrac{2\overline{z}-2}{z+\mathrm{i}}\right|=2\right\}$
   $\Gamma_3=\left\{\mathrm{M}(z)\in\mathcal{P}\mid\left|\dfrac{z+1-\mathrm{i}}{z+2+\mathrm{i}}\right|=2\right\}$.

2.2.2.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Activité 12 Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit les point A, B, et C d'affixes respectives $z_\mathrm{A}=\mathrm{i}$, $z_\mathrm{B}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\mathrm{i})$ et $z_\mathrm{C}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$.
   (a) Donne les écritures trigonométrique de z_A , z_B et z_C.
   (b) Déduis-en que A, B et C sont sur le cercle trigonométrique.
2. Soit E le point du cercle trigonométrique tel que $\mathbf{mes}\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)\equiv\dfrac{5\pi}{4}\,[2\pi]$.
   Donne l'écriture trigonométrique de l'affixe du point E.

2.2.2.5.1 *Définition*

① Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On note $e^{\mathrm{i}\theta}$ (Lire "exponentielle iθ") le nombre complexe $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$.
On a : $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$.

Interprétation graphique Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$, un point M appartient au cercle trigonométrique si, et seulement si, il a pour affixe $z=e^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta\equiv\left(\widehat{\vec{\mathrm{u}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}}\right)[2\pi]$.

Conséquence

· $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, $e^{i\pi} = -1$.
· Pour tout réel θ et tout entier k , $e^{i\theta} = e^{i(\theta+k2\pi)}$.
· Pour tout réel θ , $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$.

② Soit z un nombre complexe non nul de module $r \in \mathbb{R}_+^*$ et dont un argument est $\theta \in \mathbb{R}$. On a $z = re^{i\theta}$. Cette écriture est la **forme exponentielle de** z

2.2.2.5.2 *Propriétés*

Les résultats déjà vus s'écrivent, en utilisant la notation exponentielle :
$\forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mid z = re^{i\theta},\ z' = r'e^{i\theta'},\ (r,r') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*,\ (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$ et $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a :

— $\overline{z} = re^{-i\theta}$
— $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
— $-z = re^{i(\pi+\theta)}$
— $z \times z' = r \times r'e^{i(\theta+\theta')}$
— $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
— $z^n = r^n e^{in\theta}$

En particulier, on a :

— $e^{-i\theta} \times e^{-i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
— $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
— $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
— $-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$
— $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
— $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Activité de réinvestissement

On donne les nombres complexes $z_1 = (\sqrt{3}-i)(1+i)$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$, $z_3 = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^5(1-i)^9}{(\sqrt{3}-i)^8}$,

1. (a) Donne l'écriture exponentielle de z_1 , z_2, et z_3.
   (b) Mets z_1 et z_2 sous forme algébrique.
   (c) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Établis que

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \tag{2.1}$$

Propriété 9 Pour tout nombre réel α, on a :

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Ce sont les **formules de Euler**. Elles permettent de linéariser les polynômes trigonométriques.
On déduit pour tout entier naturel n

$$\cos n\alpha = \frac{e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \sin n\alpha = \frac{e^{in\alpha}-e^{-in\alpha}}{2i}.$$

Exemple
Linéarisation du polynôme $P = \cos^2(5x)\sin(3x)$

$$\begin{aligned}
\cos^2(5x) &= \frac{1}{4}\left(e^{i5x}+e^{-i5x)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{i10x}+e^{-i10x}+2e^{i5x}\times e^{-i5x}\right) \\
\sin(3x) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right) \\
P &= \frac{1}{8i}\left[(e^{i13x}-e^{-i13x})-(e^{i7x}-e^{-i7x})+2(e^{i3x}-e^{-i3x})\right] \\
&= \frac{1}{8i}\left[2i\sin(13x)-2i\sin(7x)+4i\sin(3x)\right]
\end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$P = \frac{1}{4}\sin(13x) - \frac{1}{4}\sin(7x) + \frac{1}{2}\sin(3x)$$

Activité de réinvestissement

1. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Prouve que

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \tag{2.2}$$

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \tag{2.3}$$

2. Déduis-en la forme trigonométrique des nombres $1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1-e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
3. Écris sous forme exponentielle le nombre complexe $\dfrac{1-i+\sqrt{2}}{1+i+\sqrt{2}}$
4. Détermine la partie réelle de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{2017}$
5. Détermine les entiers naturels n pour lesquels le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ est un imaginaire pur.
6. (a) En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, montre que
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x \quad \text{et} \quad \sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x.$$
Déduis l'expression de $\cos 3x$ en fonction uniquement de $\cos x$.

(b) En utilisant les formules d'Euler, linéarise : $\sin^5 x$ et $\sin^3 x \cdot \cos^4 x$ où x est un nombre réel.

2.2.2.6 Nombres complexes et configurations du plan

Activité 13 Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\,\vec{v})$. Soit A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives z_A , z_B.

1. En considérant le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OE}$, montre que $\mathbf{mes}\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AB}\right) \equiv \mathbf{arg}\,(z_B - z_A)\,[2\pi]$.
2. Soit C et D deux points distincts d'affixes respectives z_C , z_D .
   (a) Vérifie que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{CD}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$
   (b) Déduis-en que $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{CD}\right) \equiv \mathbf{arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Propriété 10 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\,\vec{v})$. A, B, C, D sont des points du plan d'affixes respectives z_a, z_b, z_c, z_d tels que $A \neq 0B$ et $C \neq 0D$. On a :
① $\mathbf{mes}\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AB}\right) \equiv \mathbf{arg}\,(z_B - z_A)\,[2\pi]$.
② $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right) \equiv \mathbf{arg}\left(\dfrac{z_c - z_a}{z_b - z_a}\right)[2\pi]$.
En particulier, si z et z' sont deux nombres complexes non nuls d'images respectifs M et M', alors $\mathbf{arg}\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \mathbf{mes}\left(\overrightarrow{OM}\,,\,\overrightarrow{OM'}\right)[2\pi]$

Conséquence
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\,\vec{v})$. A, B, C, D sont des points du plan d'affixes respectives z_a, z_b, z_c, z_d.

①

$$\text{A,B,C sont alignés} \iff \mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right) \equiv 0[\pi]$$
$$\iff \mathbf{arg}\left(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a}\right) \equiv 0[\pi] \iff \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \in \mathbb{R}^*$$

② ABC est un triangle rectangle en A $\iff \mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

③ ABC est un triangle rectangle en A $\iff \mathbf{arg}\left(\dfrac{z_c - z_a}{z_b - z_a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

④ ABC est un triangle rectangle en A $\iff \dfrac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \in i\mathbb{R}^*$

⑤ ABC est un triangle rectangle et isocèle en A $\iff \dfrac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \in \{-i\,;\,i\}$

⑥ ABC est un triangle équilatéral $\iff \dfrac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \in \left\{e^{-i\frac{\pi}{3}}\,,\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right\}$

⑦ $A \neq B$ et $C \neq D$; $(AB) \perp (CD) \iff \mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{CD}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

⑧ $A \neq B$ et $C \neq D$; $(AB) \perp (CD) \iff \mathbf{arg}\left(\dfrac{z_d - z_c}{z_b - z_a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

⑨ $A \neq B$ et $C \neq D$; $(AB) \perp (CD) \iff \dfrac{z_d - z_c}{z_b - z_a} \in i\mathbb{R}^*$

⑩ A,B,C,D distincts et cocycliques $\iff \dfrac{z_a - z_c}{z_b - z_c} \times \dfrac{z_b - z_d}{z_a - z_d} \in \mathbb{R}^*$

Retenons
le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\,\vec{v})$.
Soit z un nombre complexe non nul et M son point image.

$$z \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ arg(z) \equiv 0[\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} M = O \\ \text{ou} \\ mes(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM}) \equiv 0[\pi] \end{cases}$$

$$z \in \mathbb{R}_+ \iff \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ arg(z) \equiv 0[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} M = O \\ \text{ou} \\ mes(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM}) \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

$$z \in \mathbb{R}_- \iff \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ arg(z) \equiv \pi[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} M = O \\ \text{ou} \\ mes(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM}) \equiv \pi[2\pi] \end{cases}$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} M = O \\ \text{ou} \\ mes(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

$$z \in i\mathbb{R}_+ \iff \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} M = O \\ \text{ou} \\ mes(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$z \in i\mathbb{R}_- \iff \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} M = O \\ \text{ou} \\ mes(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

— L'ensemble $\left\{M \in \mathcal{P}\,;\,\mathbf{mes}\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OA}\right) \equiv \theta[2\pi]\right\}$ est la demi-droite [AT) privée du point A tel que $mes(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AT}) \equiv \theta[2\pi]$

— L'ensemble $\left\{M \in \mathcal{P}\,;\ \mathbf{mes}\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{OA}\right) \equiv \theta[\pi]\right\}$ est la droite (AT) privée du point A tel que $mes(\vec{u}\,,\overrightarrow{AT}) \equiv \theta[\pi]$

— L'ensemble $\left\{M(z)\,;\ mes(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}) \equiv \theta[2\pi]\,,\ \theta \neq k\pi\right\}$ est l'arc $\widehat{AB}$ privé des points A et B du cercle passant par A et B et tangent à la demi-droite [AT) tel que $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AT}\,,\overrightarrow{AB}\right) \equiv \theta[2\pi]$.

— L'ensemble $\left\{M(z)\,;\ \mathbf{mes}\left(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}\right) \equiv \theta[\pi]\,,\ \theta \neq k\pi\right\}$ est le cercle passant par A et B privé des points A et B, et tangent à la demi-droite [AT) tel que $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AT}\,,\overrightarrow{AB}\right) \equiv \theta[\pi]$

<u>Remarque</u>

Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, l'ensemble est le demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B et tangent à la demi-droite [AT) tel que $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AT}\,,\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, l'ensemble est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

— L'ensemble $\left\{M(z)\,;\ \mathbf{mes}\left(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}\right) \equiv \theta[2\pi]\,,\ \theta = 2k\pi\right\}$ est la réunion de deux demi-droites ouvertes : (AB)\[AB]

— L'ensemble $\left\{M(z)\,;\ mes(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}) \equiv \theta[2\pi]\,,\ \theta = \pi + 2k\pi\right\}$ est le segment ouvert :]AB[.

<u>Activité de réinvestissement</u>

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Détermine les ensembles suivants :

1. $(E_1) = \left\{M(z) \in \mathcal{P} \mid \mathbf{arg}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]\right\}$
2. $(E_2) = \left\{M(z) \in \mathcal{P} \mid Z = \dfrac{(z-2+i)}{z-1-i} \in \mathbb{R}_+\right\}$
3. $(E_2) = \left\{M(z) \in \mathcal{P} \mid Z = \dfrac{(z-2+i)}{z-1-i} \in i\mathbb{R}_-^*\right\}$
4. $(E_5) = \left\{M(z) \in \mathcal{P} \mid Z = \dfrac{(1+i)z-1}{z+i} \in i\mathbb{R}^*\right\}$

<u>Activité d'approfondissement 2</u>

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1. Soit A,B,C, les points d'affixes respectives $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, et $c = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Écris sous forme trigonométrique chacun des nombres a , b et c.
   (b) Représente les points A, B et C dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
   (c) On pose $d = b + c$ et on désigne par D le point d'affixe d.
   Montre que OBDC est un carré. Déduis alors la forme trigonométrique de d.
2. Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$ telle que $z' = 2z - z^2$.
   (a) Détermine les points invariants par f.
   Dans la suite, on suppose que M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (b) Montre que AM'=MM'.
   (c) Montre que $\dfrac{z'-1}{z}$ est réel.
   (d) Déduis-en que les points A et M' sont symétriques par rapport à la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en M.
   (e) Déduis une construction du point B' image de B par f.

<u>Activité d'approfondissement 3</u>

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A(i) et B(2i).

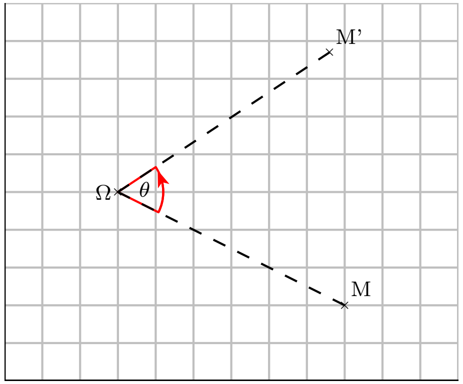
Soit l'application f de $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ dans $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{iz+2}{z-i}$.

1. Montre que $\left(\vec{i}\,,\overline{OM'}\right) \equiv \left(\vec{i}\,,\overline{OM'}\right) + \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
2. Détermine et construis les ensembles suivants :
   $E_1 = \{M(z) \mid z' \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{M(z) \mid z' \in i\mathbb{R}^*\}$.
3. (a) Montre que pour tout $z \neq i$, $(z'-i)(z-i) = 1$.
   (b) Montre que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r, alors M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont tu préciseras le centre et le rayon.
   (c) Détermine r pour que le point B appartienne à $\mathscr{C}$.

<u>Définition 3</u> Soit Ω un point du plan et θ un nombre réel non nul.

Dire que M′ est l'image de M (avec M≠ Ω) par la rotation de centre Ω et d'angle θ, signifie que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Omega M & = & \Omega M' \\ mes(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) & = & \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \tag{2.4}$$



Si Ω a pour affixe z_Ω, M a pour affixe z_{M} et M$'$ a pour affixe $z_{\mathrm{M}'}$, alors

$$
\begin{aligned}
(3.1) \iff & \left\{\begin{array}{l} |z' - z_\Omega| = |z - z_\Omega| \\ \mathbf{mes}(\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}; \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'}) \equiv \theta[2\pi] \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{lcl} \left|\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right| & = & 1 \\ \mathbf{arg}\left(\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) & = & \theta + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\
\iff & \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\
\iff & z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) z_\Omega
\end{aligned}
$$

2.2.3 Équation dans $\mathbb{C}$

2.2.3.1 Racine n–ième d'un nombre complexe non nul

Activité 14 Calcule $(1 + \mathrm{i})^6$.

Définition 4 Soit Z un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.
Tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$ est appelé **racine** n–ième du nombre Z.

Remarque

- Si $n = 2$, alors tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$ est une **racine carrée** de Z.
- Si $n = 3$, alors tout nombre complexe z tel que $z^3 = Z$ est une **racine cubique** de Z.
- Si $Z = 1$, alors tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$ est une **racine** n–ième de l'unité.
- Si $Z = 0$ alors $(z^n = 0 \iff z = 0) \implies 0$ est l'unique racine n-ième de 0.

Activité 15 n est un élément de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On pose $Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$; $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Démontre que

$$
(z^n = Z) \iff \left(\left\{\begin{array}{l} \rho^n = r \\ \alpha \equiv \dfrac{\theta}{n}[2\pi]\,,\ \text{ou}\ \alpha \equiv \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}[2\pi]\,,\ \text{ou} \cdots,\ \text{ou}\ \alpha \equiv \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n}[2\pi] \end{array}\right.\right).
$$

Tu pourras utiliser la division euclidienne par n.

Définition 5 Soit $y \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Le nombre réel positif x tel que $x^n = y$ est appelé **racine** n**–ième** de y et on note $x = \sqrt[n]{y}$ ou $x = y^{\frac{1}{n}}$.
On note simplement $\sqrt{y}$ lorsque $n = 2$.

Propriété 11 Tout nombre complexe $Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, ($r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$), admet exactement n racines n–ième z_k tels que $z_k = \sqrt[n]{r}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, avec $k \in \{0, 1 \cdots, n-1\}$

Retenons

① Les racines carrées de $Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sont : $z_o = \sqrt{r}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $z_1 = \sqrt{r}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}$.

Exemple
Déterminons les racines carrées de $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et i.

② Les racines n–ième de l'unité sont les nombres complexes w_k tels que $w_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0; 1; \cdots; n-1\}$

Exemple
Détermine sous forme algébrique les racines cubiques de l'unité.

Remarque
La somme des n racines n–ième de l'unité est égale à zéro.

③ Soit a une racine n–ième d'un nombre complexe $Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et les nombres complexes w_k, $k \in \{0, 1 \cdots, n-1\}$, racines n–ième de l'unité.

$$
\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C},\ z^n = Z \iff & z^n = a^n \\
\iff & \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1 \\
\iff & \frac{z}{a} = w_k \\
\iff & z = a \times w_k
\end{aligned}
$$

On peut donc retrouver les racines n–ièmes d'un nombre complexe non nul quelconque en multipliant l'une d'entre elles par les n racines n–ième de l'unité.

Activité 16 Calcule $(2+\mathrm{i})^3$. Déduis-en les racines cubiques de $Z = 2 + 11\mathrm{i}$.
CIAM SM Exercice 19 page 77.

Propriété 12 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\,\vec{v})$, les points images des n racines n−ième d'un nombre complexe non nul $Z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$. La longueur d'un côté de ce polygône est $2\sqrt[n]{r}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Activité de réinvestissement

1. (a) Détermine dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $(E_3)\colon z^4 = 8(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$ puis les écrire sous forme trigonométrique.
   (b) Vérifie que le nombre complexe $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de $8(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$
   (c) Déduis-en la forme algébrique des solutions de l'équation (E_3).
   (d) Détermine alors les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

2.2.3.2 Recherche des rac. carr. d'un nb. compl. sous forme alg.

Activité 17 Soit z et z' deux nombres complexes non réels.
Démontre que

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \mathcal{R}e\,(z) = \mathcal{R}e\,(z') \\ \mathcal{I}m\,(z) \times \mathcal{I}m\,(z') > 0 \end{cases}$$

Propriété 13 Soit z et z' deux nombres complexes non réels.

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \mathcal{R}e\,(z) = \mathcal{R}e\,(z') \\ \mathcal{I}m\,(z) \times \mathcal{I}m\,(z') > 0 \end{cases}$$

Remarque
$\mathcal{I}m\,(z) \times \mathcal{I}m\,(z') > 0$ signifie que $\mathcal{I}m\,(z)$ et $\mathcal{I}m\,(z')$ ont même signe.

Exemple
Détermine les racines carrées de $-8+6\mathrm{i}$ et $1-2\sqrt{2}\mathrm{i}$.

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, une racine carrée de $5-12\mathrm{i}$.

$$z^2 = -8+6\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x^2-y^2 = -8 \\ xy > 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy > 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$
$$\iff z = 1+3\mathrm{i} \text{ ou } z = -1-3\mathrm{i}$$

Les racines carrées de $-8+6\mathrm{i}$ sont : $1+3\mathrm{i}$ et $-1-3\mathrm{i}$

Remarque

① Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors les racines carrées de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
② Si $a \in \mathbb{R}_-^*-$, alors les racines carrées de a sont $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$
③ Si $a = 2\mathrm{i}$, alors on a : $a = (1+\mathrm{i})^2$ et donc les racines carrées de a sont $1+\mathrm{i}$ et $-1-\mathrm{i}$
④ Si $a = -2\mathrm{i}$, alors on a : $a = (1-\mathrm{i})^2$ et donc les racines carrées de a sont $1-\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$
⑤ Si $a = \mathrm{i}b$ avec $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors on a : $a = \frac{b}{2}(2\mathrm{i}) = \frac{b}{2}(1+\mathrm{i})^2$, et donc les racines carrées de a sont $\sqrt{\frac{b}{2}}(1+\mathrm{i})$ et $\sqrt{\frac{b}{2}}(-1-\mathrm{i})$
⑥ Si $a = \mathrm{i}b$ avec $b \in \mathbb{R}_-^*$, alors on a : $a = -\frac{b}{2}(-2\mathrm{i}) = -\frac{b}{2}(1-\mathrm{i})^2$, et donc les racines carrées de a sont $\sqrt{-\frac{b}{2}}(1-\mathrm{i})$ et $\sqrt{-\frac{b}{2}}(-1+\mathrm{i})$

2.2.3.3 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

(a) *Équation du 2^{nd} degré dans $\mathbb{C}$*

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $(b,c) \in \mathbb{C}^2$, l'équation dans $\mathbb{C}$: $(E) : az^2 + bz + c = 0$, et Δ le discriminant de (E).

— Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une seule solution $-\dfrac{b}{2a}$
— Si $\Delta \neq 0$ et δ une racine carrée de Δ, alors (E) admet deux solutions : $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$

Activité 18 Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(E_1) : (2+\mathrm{i})z^2 - (3-2\mathrm{i})z + 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i} = 0$
2. $(E_2) : z^2 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 0$ avec $\theta \in \left[0\,;\pi\right]$.
   Écris les solutions sous forme exponentielle.

(b) Équation se ramenant au 2nd degré

Propriété 14 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $P(z)$ un polynôme de degré n.
Si z_o est une racine de $P(z)$, alors il existe un polynôme $Q(z)$ de degré $n-1$ tel que $P(z) = (z - z_o)Q(z)$.

Activité de réinvestissement

1. Soit $P(z) = z^3 - (5+\mathrm{i})z^2 + 4(2-\mathrm{i})z - 12 + 4\mathrm{i}$.
   (a) Vérifie que $P(2\mathrm{i}) = 0$.
   (b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 + 9\mathrm{i}z^2 + 2(6\mathrm{i} - 11)z - 3(4\mathrm{i} + 12) = 0$ sachant que (E) admet une solution réelle.

Activité d'approfondissement 1

Soit un réel θ de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation (E) : $\mathrm{i}z^2 + 6\sin\theta - 9\mathrm{i} = 0$.

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). Écris sous forme exponentielle les solutions de (E).
2. Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes $3\mathrm{i}$, $z_1 = 3(\cos\theta)$ et $z_2 = 3(-\cos\theta)$.
   (a) Vérifie que les points A, M_1 et M_2 sont sur un même cercle que tu préciseras.
   (b) Détermine la valeur de θ pour laquelle le quadrilatère $\mathrm{OM}_1\,\mathrm{AM}_2$, soit un losange.
3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z^4 + 3\sqrt{3}z^2 - 9\mathrm{i} = 0$.
   Place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Activité d'approfondissement 2

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe i. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\setminus\{A\} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mathrm{M}(z) & \longmapsto & \mathrm{M}'(z') \end{array}$ telle que $\dfrac{z' = \mathrm{i}\overline{z}}{\mathrm{i} - \overline{z}}$.

1. Détermine l'ensemble des points invariants par f.
2. (a) Montre que que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$, $(z' + \mathrm{i})(\overline{z} - \mathrm{i}) = 1$.
   (b) Déduis-en que AM'·AM=1 et que $\mathrm{M}' \in [\mathrm{AM})$.
3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$.
   Montre que l'affixe de $f(\mathrm{M})$ est égale $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si, et seulement si, $z = -\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\right)$.
   (b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.
   (c) déduis en les solutions de l'équation $\mathrm{i}z^3 = (-i - z)^3$.

Activité de réinvestissement

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
(E) : $z^3 + \alpha z^2 - \overline{\alpha} z - 1 = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}^\star$.

1. (a) Montre que si z_0 , z_1 et z_2 sont les solutions de (E) alors $z_0 z_1 z_2 = 1$.
   (b) Montre que si z est solution de (E) alors $\frac{1}{\overline{z}}$ est aussi solution de (E).
   (c) Déduis-en que (E) admet au moins une solution de module 1.
2. On suppose que $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
   Vérifie que $-\alpha$ est une solution de (E) puis détermine les autres solutions.
3. Utilise ce qui précède pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
   (E) : $2z^3 + (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z^2 - (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z - 2 = 0$.

Activité de réinvestissement

Soit m un réel non nul.

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\mathrm{i}z - (1 + m^2) = 0$.
2. Pour tout nombre complexe z, on pose : $f(z) = z^3 - 3\mathrm{i}z^2 - (3 + m^2)z + \mathrm{i}(1 + m^2)$.
   (a) Vérifie que $f(\mathrm{i}) = 0$; déduis-en une factorisation de $f(z)$.
   (b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, M' et M" d ?affixes respectives i , $\mathrm{i} + m$ et $\mathrm{i} - m$.
   (a) Vérifie que A est le milieu du segment [M'M"] .
   (b) Montre que le triangle OM'M" est isocèle.
   (c) Détermine les valeurs de m pour que le triangle OM'M" soit équilatéral.

Activité de réinvestissement

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3} + \mathrm{i})z^2 + 4(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z - 8\mathrm{i} = 0$.

1. (a) Montre que (E) admet une solution imaginaire puer que tu détermineras.
   (b) Résous (E) dans $\mathbb{C}$. Donne la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).
2. Soit θ un réel et (E_θ) l'équation : $z^3 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\sqrt{3} + \mathrm{i})z^2 + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z - 8\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} = 0$.

(a) Montre que $(ze^{-i\theta})$ est une solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_θ).

(b) Déduis-en les solutions de l'équation (E_π) : $z^3 + 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z + 8i = 0$.

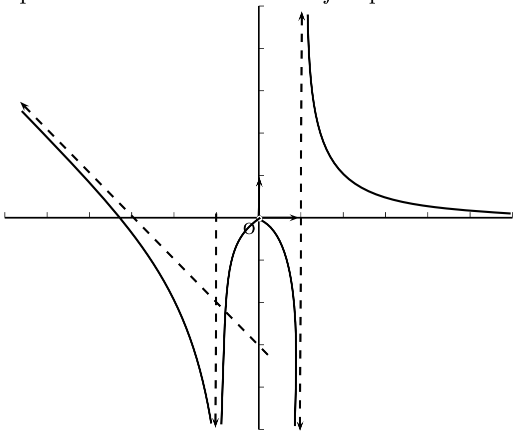
3. Représente dans Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les images des des solutions des équations (E) et (E_π) er vérifie qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier.

2.3 Séquence 3 : Limites et Continuité

Durée : heures

Activité 1

Dansou constate que, un des cauris jetés a une trajectoire assimilable à la courbe représentative d'une fonction f représentée ci-dessous.



Un deuxième cauris a l'allure de la courbe représentative de la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2+5}{2-x}}$$

Consigne 1

1. Quel et l'ensemble de définition de f.
2. Précise les asymptotes de $\mathcal{C}$.
3. Donne les limites de f aux borne de son ensemble de définition.

2.3.1 Généralités sur le calcul de limites

Soit $f$une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D et a un nombre réel ou $-\infty$ ou $+\infty$.

① Étudier la limite de f en a c'est étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a.

Pour étudier la limite de f en a, il est donc nécessaire que f soit définie au voisinage de a. C-à-d que D contienne des ensembles de la forme $\left]a-h\,;a\right[\cup \left]a\,;a+h\right[$ ou $\left]a-h\,;a\right[$ ou $\left]a\,;a+h\right[$ où $h \in \mathbb{R}_+^*$ ou $\left]-\infty\,;b\right[$ ou $\left]b\,;+\infty\right[$ où $b \in \mathbb{R}$ selon le cas.

② Si f est définie en a et admet une limite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$.

③ Soit ℓ un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$ et a un réel.

Si l'expression de f à gauche en a est différente de celle à droite en a, alors :

- si f est définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \ell$
- si f n'est pas définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$

④ Limites de référence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

⑤ • La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

• La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient simplifié de ses termes de plus hauts degrés.

2.3.2 Compléments sur les limites

2.3.2.1 Limites de fonctions composées

Consigne 2

1. Détermine les limites de la fonction $u : x \longmapsto \dfrac{x^2+5}{2-x}$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Détermine les limites de la fonction $u * v : x \longmapsto \sqrt{x}$ aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) Déduis-en les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

Propriété 1 Soit f et g deux fonctions ; a, b et ℓ des nombres réels ou $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \ell$

Remarque

Le résultat de la propriété reste valable lorsque x tend vers a à droite ou lorsque x tend vers a à gauche.

Activité de réinvestissement

1. Calcule les limites suivantes :

— $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^3+3x-5}{2x^2-3x+1}\right)$

— $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{|-3x+6|}\right)$

— $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+2}{|-3x+6|}\right)$

— $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}\right)$

— $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}\right)$

— $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}\right)$

— $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{\sin x}\right)$

— $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}+mx-1\right)$ où m est un paramètre réel.

— $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$

2. On pose $f(x)=E\left(\dfrac{3x^2-3}{2x^2+1}\right)$ où $E(x)$ est la fonction partie entière de x.

   Calcule les limites de f en $+\infty$; 1 ; et 0.

3. Soit la fonction f dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

En utilisant ce tableau, détermine $\lim\limits_{x\to +\infty} f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{f(x)+3}\right)$

2.3.2.2

Lim de la som d'une fonc born et d'une fonc tendant vers l'∞

Le calcule d'une limite dans ce cas se fait en utilisant les propriétés de comparaison ci-après :

Propriété 2 Soit a un réel fini ou infini, ℓ et ℓ' deux réels.

— Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell'$ et $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\ell\leqslant\ell'$

— Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ et $g(x)\leqslant f(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

— Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ et $g(x)\geqslant f(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

— Si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell$ et $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$

  En particulier si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\forall x\in I\setminus\{a\}$, $a\leqslant f(x)\leqslant b$, alors $\ell\in\left[a\,;b\right]$

— Si $|f(x)-\ell|\leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$

<u>Remarque</u>
Les résultats précédents restent valables lorsqu'on remplace a par a^+ ou par a^-

Activité de réinvestissement

1. Soit f la fonction définie sur $\left[1\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{2x+\cos x}$.
   (a) Montre que $\forall x\geqslant 1$; $\dfrac{x-1}{2x+1}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x+1}{2x-1}$.
   (b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$
2. Étudie les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{3+9x}-3x\right)\sin\pi x$
3. Soit la fonction $h\colon x\longmapsto\dfrac{1}{x^2}+\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt{x}$
   (a) Montre que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $h(x)\geqslant\dfrac{1}{x^2}$
   (b) Déduis-en $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

2.3.2.3

Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Propriété 3 Soit f une fonction croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $\left]a\,;b\right[$; $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $a<b$

— Si f est majorée sur $\left]a\,;b\right[$, alors f admet une limite finie à gauche en b (respectivement à droite en a).

— Si f est non majorée sur $\left]a\,;b\right[$, alors $limtxb^-f(x)=+\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$).

— Si f est minorée sur $\left]a\,;b\right[$, alors f admet une limite finie à droite en a (respectivement à gauche en b).

— Si f est non minorée sur $\left]a\,;b\right[$, alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty$).

2.3.2.4 Interprétation graphique des limites

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\mathrm{M}(x,y)$ un point de $\mathscr{C}$.
On dit que $\mathscr{C}$ admet une branche infinie dans l'une des situations suivantes :
- à l'infini, f admet une limite finie ou infinie,
- en un réel x_0 ou à gauche en x_0 ou à droite en x_0 f admet une limite infinie

2.3.2.4.1 Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées

① La droite d'équation $x = x_0$, $(a \in \mathbb{R})$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.
NB : L'étude de cette asymptote se fait aux points n'appartenant pas à l'ensemble de définition de f.

② La droite d'équation $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ eau voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$) si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$).
NB : Le signe de $f(x) - b$ permet de déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote.

2.3.2.4.2 Asymptote « obliques »

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ si et seulement si, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.
NB : Le signe de $f(x) - (ax+b)$ permet de déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote.

- Si de manière remarquable, on a $f(x) = ax + b + \ell(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = éx + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $+\infty$.
  - Si Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses en $+\infty$.
  - Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, $(a \in \mathbb{R}^*)$, alors deux cas peuvent être envisagés :
    - si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$, $(b \in \mathbb{R})$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$,
    - si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, alors $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$

Activité de réinvestissement

Dans chacun des cas suivants, étudie les branches infinies de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{(x+2)^2} - \dfrac{3}{x-1} \end{array}$ *quad*, 2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2 + \sin x}{x} \end{array}$

3. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + x + 1}{1 - x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$.

2.3.3 Continuité

2.3.3.1 Continuité en un point

Définition 1

① Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in \mathrm{I}$.
f est dite continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

② Si f est définie sur un intervalle de la forme $\left[a\,;a+h\right[$ avec $(h \in \mathbb{R}_+^*)$;
$(f$ est continue à droite en $a) \iff \left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)\right)$

③ Si f est définie sur un intervalle de la forme $\left]a-h\,;a\right]$ avec $(h \in \mathbb{R}_+^*)$;
$(f$ est continue à gauche en $a) \iff \left(\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right)$

Illustration graphique

Propriété 4 Soit f une fonction définie sur i=un intervalle ouvert I contenant a.
$(f$ est continue en $a) \iff \left(\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)\right)$

Activité de réinvestissement

1. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$\begin{cases} f(x) = x + a + \sqrt{x^2+x+1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) = x^2 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ f(x) = bx - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$; avec a et b des constantes réelles.
   (a) Étudie la continuité de f soit continue en 0 et 1.
   (b) Déduis-en les valeurs de a et b pour lesquelles f soit continue en 0 et 1.
2. soit la fonction $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \end{array}$.
   (a) Étudie la limite de h en 2.
   (b) h est-elle continue en 2 ?

Définition 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un élément a de I.
Si f admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction g définie sur I par
$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq a \\ g(a) = \ell \end{cases}$ est continue en a : On dit que f est prolongeable par continuité en a et que g est le prolongement par continuité de f en a.

Activité de réinvestissement

1. Peut-on prolonger par continuité en 1 et en (-1) la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{1-|x|}$.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$.
Existe-t-il des nombres réels où f peut être prolongeable par continuité ?

2.3.3.2 Continuité sur un intervalle

Définition 3

— On dit qU'une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.

— Une fonction f est continue sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$ si elle est continue sur $\left]a\,;b\right[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

— De la même manière on définit la continuité de f sur les intervalles $\left]a\,;b\right]$, $\left[a\,;b\right[$, $\left[a\,;+\infty\right[$, $\left]a\,;+\infty\right[$, $\left]-\infty\,;b\right]$, $\left]-\infty\,;b\right[$.

— Graphiquement la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par un seul trait continue de crayon (La courbe est construite en un seul morceau sur I).

2.3.3.3 Opérations de fonctions continues sur un intervalle

Propriété 5

— Les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto x^3$ sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

— La fonction cosinus et la fonction sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

— La fonction tangente est continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

— La somme, le produit ou le quotient de deux quelconque des fonctions citées ci-dessus sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Propriété 6 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

① Les fonctions $\lambda f (\lambda \in \mathbb{R})$, $|f|$, f^n, $(n \in \mathbb{N}^*)$; $f+g$; $f \times g$ sont continues sur I.

② Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$; $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.

③ Continuité de fonctions composées : Si f est continue sur I et g est continue sur J tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.
On déduit :
$\star$ Si f est une fonction continue et positive sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

④ Les fonctions polynômes et continue sur R.

⑤ Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Activité de réinvestissement

1. Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-2 < \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) == \tan\left[\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)\right]$
Étudie la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

2.3.3.4 Propriétés fondamentales des fonctions continues

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble E de $\mathbb{R}$.

— L'image de E par f noté $f(\mathrm{E})$ est l'ensemble de tous les nombres $f(x)$ où $x \in \mathrm{E}$.

$f(\mathrm{E}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ avec } x \in \mathrm{E}\}$

NB : L'application $h: \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & f(\mathrm{E}) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est surjective.

— On appelle **segment de** $\mathbb{R}$ tout intervalle fermé borné $\left[a\,;b\right]$, $(a < b)$ de $\mathbb{R}$

Propriété 7 Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Propriété 8 L'image d'un intervalle fermé borné $\left[a\,;b\right]$ par une fonction continue f est un un intervalle fermé borné $\left[m\,;M\right]$. m est le minimum de f sur $\left[a\,;b\right]$ et M est le maximum de f sur $\left[a\,;b\right]$: On dit que f est bornée sur $\left[a\,;b\right]$ et f atteint ses bornes.

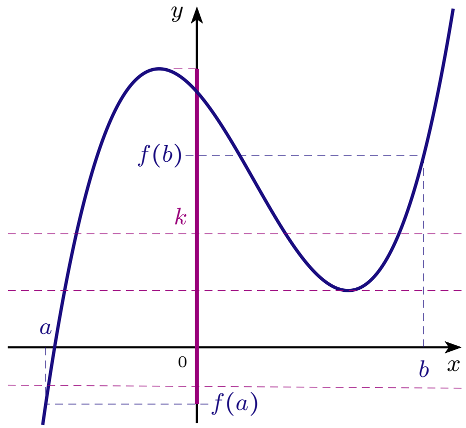
Activité 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

Démontre que tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent compris entre a et b.

Propriété 9 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$.
Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent dans l'intervalle $\left[a\,;b\right]$.
Autrement dit : Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a;b]$.
Cette propriété est connue sous le nom de **théorème des valeurs intermédiaires**
NB : On obtient des résultats analogues lorsque a ou b sont infinis.

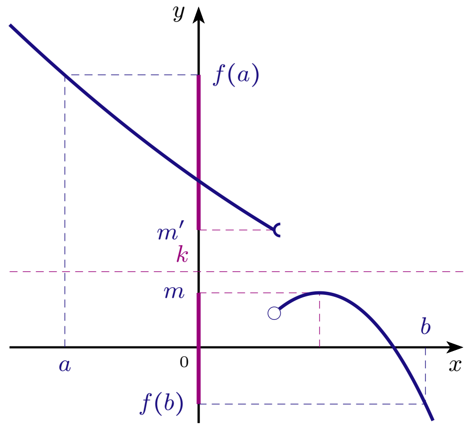
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

f **est continue sur** I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ est un intervalle.
Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a;b]$.

f **n'est pas continue sur** I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

Conséquence
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et $f(a) \times f(b) < 0$
L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\left]a\,;b\right[$.
NB : On obtient des résultats analogues lorsque a et b sont infinis.

REMARQUE
Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Propriété 10 (THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I, $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** c appartenant à $[a;b]$.

Démonstration
Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

1. Existence

Par hypothèse, f est continue sur $[a;b]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a;b]$.

2. Unicité

   Supposons que l'équation $f(x)=k$ admette deux solutions distinctes c_1 et c_2 appartenant à $[a;b]$

   Par hypothèse, f est strictement monotone sur $[a;b]$ alors $c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(c_1) \neq f(c_2)$

   Ce qui aboutit à une contradiction puisque $f(c_1) = f(c_2) = k$

   Donc $c_1 = c_2$, ce qui prouve que l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans $[a;b]$

Conséquence
Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[a;b]$

Remarque
Le théorème s'applique aussi lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme $[a;b[$, $]a;b]$, $]a;b[$, $[a;+\infty[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$.

Activité 3 Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que f ne s'annule pas sur I. Justifie que f garde un signe constant sur I.

Propriété 11 Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule pas sur I, alors f garde un signe constant sur I.
NB : Pour trouver le signe de $f(x)$ sur I, on choisit un réel a de I et on calcule $f(a)$. Le signe de $f(x)$ sur I est celui de $f(a)$.
Exemple
Résolution dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ de l'inéquation $2\cos(3x+\frac{\pi}{2})-1<0$

Activité 4 Soit une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Démontre que si f est continue strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$.
Indication Tu pourras démontrer que f est injective et surjective.
Démonstration
• f est bien entendu surjective de I sur f(I) ;
• Supposons f strictement croissante sur I.
Soient a , $b \in$ I , avec $a \neq b$,
ou bien $a \leq b$ et on a $f(a) < f(b)$ (f étant strictement croissante sur I)
ou bien $a \geq b$ et on a $f(a) > f(b)$ (f étant strictement croissante sur I)
donc $f(a) \neq f(b)$.
• Supposons f strictement décroissante
Soient a , $b \in$ I , avec $a \neq b$,
ou bien $a \leq b$ et on a $f(a) > f(b)$ (f étant strictement croissante sur I)
ou bien $a \geq b$ et on a $f(a) < f(b)$ (f étant strictement croissante sur I)
donc $f(a) \neq f(b)$.
Dans tous les cas, si $a \neq b$ alors $f(a) \neq f(b)$ donc f est injective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Propriété 12 Soit une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f est continue strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$.

Définition 4 (fonction réciproque)
Soit f une fonction bijective de I sur J, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction réciproque de f l'application notée f^{-1} définie sur J par $f^{-1}(y)=x$, où x est l'unique élément de I tel que $f(x)=y$.

Propriété 13 Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

① L'application $g : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & f(\mathrm{I}) \\ x & \longmapsto & g(x)=f(x) \end{array}$ est une bijection. (on dit que f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$).

② La fonction réciproque g^{-1} de g est une bijection de $f(\mathrm{I})$ sur I. On a :
- $\forall x \in \mathrm{I}$ et $\forall y \in f(\mathrm{I})$, $g(x)=y \iff x=g^{-1}(y)$.
- $\forall x \in \mathrm{I}$, $g^{-1}\circ g(x)=x$.
- $\forall y \in f(\mathrm{I})$, $g\circ g^{-1}(y)=y$.

③ g^{-1} est continue, strictement monotone et a le même de variation que g.

④ Les courbes représentatives des fonctions g et g^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice [1]

NB : Soit f une fonction définie d'un intervalle I dans un intervalle J.
f est une bijection de I sur J si, et seulement si f est continue, strictement monotone sur I et $f(\mathrm{I})=\mathrm{J}$.

1. la droite d'équation $y=x$

Propriété 14 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur $\left[a\,;b\right]$, alors le sens de variation de f sur $\left[a\,;b\right]$ est celui de f sur $\left]a\,;b\right[$.

NB : On obtient des résultats analogues sur tout intervalle de la forme $\left[a\,;b\right[$ ou $\left]a\,;b\right]$ ou $\left[a\,;+\infty\right[$ ou $\left]-\infty\,;b\right]$.

2.3.3.4.1 *Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone*

Propriété 15 L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.
a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$; f une fonction admettant une limite finie à gauche en b et une limite finie à droite en a.

K	f est continue et strictement croissante sur K	f est continue et strictement décroissante sur K
$\left[a\,;b\right]$	$f\left(\left[a\,;b\right]\right) = \left[f(a)\,;f(b\right]$	$\left[f(b)\,;f(a)\right]$
$\left]a\,;b\right]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,;f(b)\right]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_{a^+} f\right[$
$\left[a\,;b\right[$	$f\left(\left]a\,;b\right[\right) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,;f(a)\right]$
$\left]a\,;b\right[$	$f\left(\left]a\,;b\right[\right) = \left]\lim\limits_{a^+} f\,;\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f\,;\lim\limits_{a^+} f\right[$

NB : • Lorsque l'intervalle est ouvert en une borne, cette borne peut-être infinie.
• Si f n'est pas strictement monotone sur I, alors on découpe I en une réunion d'intervalles disjoints sur chacun desquels f est continue et strictement monotone.

Activité de réinvestissement
Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$.

1. Démontre que f est continue et strictement croissante sur $\left[6\,;+\infty\right[$.
2. Déduis-en que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que tu préciseras.
3. Donne le tableau de variation de f^{-1}.
4. On pose $h(x) = x^2 - x\sqrt{x^2-8} - 12$.
   (a) Montre que h ne s'annule pas sur I.
   (b) Déduis-en le signe de $h(x)$ sur I.
   (c) Calcule, pour tout x dans I, $f^{-1}(x)$.

Activité de réinvestissement

1. Démontre que l'application $h : \begin{array}{ccc} \left]2\,;+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2-4x+3}{x-2} \end{array}$ est bijective puis détermine sa réciproque.
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \left[0\,;+\infty\right[& \longrightarrow & \left[0\,;+\infty\right[\\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
   Démontre que f est une bijection.

Définition 5 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est bijective. Sa bijection réciproque est appelée **racine n-ième** et est notée $\sqrt[n]{\ }$. Ainsi l'image de tout nombre réel positif x par la fonction racine n-ième est notée $\sqrt[n]{x}$.

Propriété 16 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

— $(y = x^n) \iff (x = \sqrt[n]{y})$
— $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ et $\sqrt[n]{0} = 0$

REMARQUE

① Pour $n = 2$, la fonction $\sqrt[2]{\ }$ est la fonction **racine carrée**.
② Pour $n = 3$, la fonction $\sqrt[3]{\ }$ est la fonction **racine cubique**.
③ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$; $(n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2)$
④ $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ \\ y = x^{\frac{1}{n}} \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+ \\ x = y^n \end{cases}$.

Propriété 17 $(n,p) \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$; $(a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

— $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
— $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
— Si $b \neq 0$, alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

— $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$

— $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

— $\sqrt[n]{1} = 1$

Définition 6 Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
La puissance d'exposant rationnel $\frac{p}{q}$ de x est le nombre réel positif noté $x^{\frac{p}{q}}$ et défini par $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$
L'égalité ci-dessus s'écrit aussi $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$

Exemple

$(216)^{\frac{2}{3}} = \left(216^{\frac{1}{3}}\right)^2$.

Règles de calcul

Soient x, y deux nombres réels strictement positifs, r et r' deux nombres rationnels, on a :
$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$; $x^r \times y^r = (xy)^r$; $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$.

Activité de réinvestissement

1. Démontre que le nombre $X = \sqrt{\dfrac{25^{\frac{2}{3}} \times 16^{\frac{23}{24}}}{(0,1)^{\frac{1}{6}} \times \sqrt{5^3}}}$ est un entier naturel.
2. Écris le nombre réel $C = \dfrac{\sqrt[3]{2} - 1}{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$ sous forme d'un quotient à dénominateur entier.
3. Résous dans R chacune des équations suivantes :
   $\sqrt[4]{2x-1} = 2$; $\sqrt[3]{x^2+1} = \frac{1}{2}$

Activité d'approfondissement

On considère les fonctions $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^4+1}{x^3-1} \end{array}$, et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^4 - 4x - 3 \end{array}$.

1. Étudie les variations de la fonction g.
2. (a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur $\mathbb{R}$ telles que : $\alpha < 0 < \beta$.
   (b) Détermine un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et β.
   (c) Détermine le signe de $g(x)$ en fonction de x.
3. Étudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. (a) Détermine les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \neq 1$:
   $f(x) = ax + b + \dfrac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$.
   (b) Déduis que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f, dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, admet une asymptote oblique que tu indiqueras.
   (c) Précise la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
5. Démontre que pour tout $x \neq 1$: $f(x) = \dfrac{x^2 g(x)}{(x^3-1)^2}$.
   Déduis-en les variations de f.
6. En utilisant la question 2.(b), détermine un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.
7. Dresse le tableau de variation de f.

Activité de réinvestissement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x \in \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi(1-x)} & \text{si } x \in \left]-1 ; 1\right[\end{cases}$

1. Étudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 1.
3. Sachant que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; -1\right[$ et strictement crissante sur $\left]1 ; +\infty\right[$, détermine $f(\left]-\infty ; -1\right[)$ et $f(\left]1 ; +\infty\right[)$.
4. Montre que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{\pi}$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]\frac{1}{6} ; \frac{1}{2}\right[$.
5. Soit h la restriction de f à $\left]-\infty ; -1\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$ et $g = h \circ h$.
   (a) Détermine l'ensemble de définition E de h.
   (b) Détermine les limites de g aux bornes de E.

Activité d'approfondissement

A-) On considère la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 1 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\sin(x) - x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montre que f est prolongeable par continuité en 0.
2. (a) Montre que la droite $\Delta : y = -(x+1)$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
   (b) Montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ et interprète graphiquement le résultat.
   (c) Calcule $(f \circ f)(\pi)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \circ f)(x)$
3. Montre que l'équation $2f(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.

4. Soit la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(\tan x)}{\tan x} & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

   (a) Justifie que g est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.

   (b) Vérifie que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, on a : $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

   (c) Déduis que g est continue à gauche en 0.

Activité d'approfondissement

Réponds par "vrai" ou "faux" en justifiant ton choix.

№	PROPOSITIONS	vrai	faux
№1	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$		
№2	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$		
№3	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$		
№4	Si $\forall\, x \in D_f ; \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant 2$		
№5	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$		
№6	Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lambda$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2) = \lambda^2$		
№7	La fonction $f: x \mapsto \cos x - x$ n'a pas de limite en $+\infty$		
№8	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f \circ g(x) = 3$		
№9	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f(x) = 2$		
№10	La fonction $f: x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en 0		
№11	L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé		
№12	L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert		
№13	L'image de l'intervalle $[1;2]$ par la fonction $f: x \mapsto x^2 - 1$ est l'intervalle $[0;3]$		
№14	Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$		
№15	L'image d'un intervalle par une fonction discontinue n'est pas un intervalle		
№16	Il existe une fonction continue et strictement croissante de $[-1;1[$ vers $]-1;1]$		
№17	Il existe une fonction continue et strictement décroissante de $[-1;1[$ vers $]-1;1]$		
№18	L'équation $x^3 + x = 1$ admet une unique solution dans $]0;1[$		
№19	Soit $a \in \mathbb{R}$, et $f: x \mapsto x^5 - 7x + a$, alors : 1. f s'annule au plus une fois dans $[-1;1]$ 2. f s'annule au moins une fois dans $[-1;1]$ 3. Si $\lvert a\rvert > 6$, alors f ne s'annule pas dans $[-1;1]$ 4. Si $\lvert a\rvert \leqslant 6$, alors f s'annule exactement une fois dans $[-1;1]$		

2.4 Séquence 4 : Dérivabilité && Étude de fonctions

Durée : heures

Activité 4.1 Après le jet des cauris, Dansou s'intéresse à l'allure de l'un d'eux, représentée, dans un repère orthogonal, par la courbe $(\mathscr{C})$ représentative d'une fonction f continue sur un intervalle K contenant un nombre réel x_0, et et tel que la fonction $T_{x_0} : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à gauche en x_0 ou à droite en x_0 et éventuellement en x_0. Pour cela il décide d'étudier le comportement de la courbe $(\mathscr{C})$ au point $\mathrm{M}_0(x_0\,,\,f(x_0))$.

Consigne Donne suivants les cas possibles une interprétation graphique de chacune de ces limites.

Activité de réinvestissement

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + |x+2| - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ f(x) = (x-1)\sqrt{x-1} + 3x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

1. Étudie la dérivabilité de f en -2. Interprète graphiquement le résultat.
2. Montre que f est dérivable en 1 et donne $f'(1)$.
3. Déduis-en $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+nh)-f(1)}{h}$ puis calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$, $(n \in \mathbb{Z}^*)$.
4. Examine si la courbe représentative de la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \left|x^2+x\right| + 1\,, & \text{si } x \leqslant -1 \\ g(x) = 1 + \sqrt{x+1}\,, & \text{si } x > -1 \end{cases}$ admet une tangente ou des demi-tangentes au point d'abscisses -1.

2.4.1 Rappel et Compléments

2.4.1.1 Définitions et propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a.
f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Le réel ℓ est appelé **nombre dérivé de f en** a et est noté $f'(a)$.

Propriété 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

— $\lim\limits_{a} \dfrac{f(a+x)-f(a)}{x} = \ell$ et $\ell \in \mathbb{R}$

— f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$

— Pour x voisin de 0 tel que $a + x \in \mathrm{I}$, il existe une fonction $\mathbf{h}$ définie au voisinage de 0 telle que $f(a+x) = f(a) + \ell x + x\mathbf{h}(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \mathbf{h}(x) = 0$

NB :

— Dans les conditions de la propriété, le réel $f(a) + \ell x$ (avec $\ell = f'(a)$) est appelé **approximation affine de** $f(a)$.

— Si f est dérivable en a, alors on peut écrire $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

Définition 1

— Si f est définie sur $\big]a-\epsilon\,;a\big]$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{f(a)} = m \;\mid\; m \in \mathbb{R}$. Le réel m est le **nombre dérivé de f à gauche en** a et on note $f'_g(a) = m$.

— Si f est définie sur $\big[a\,;a+\epsilon\big[$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{f(a)} = p \;\mid\; p \in \mathbb{R}$. Le réel p est le **nombre dérivé de f à droite en** a et on note $f'_d(a) = p$.

Propriété 2

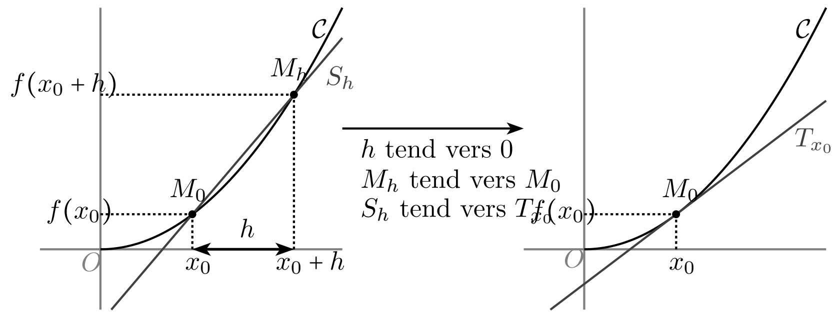
(1) Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a, alors f est dérivable en a si, et seulement si f est dérivable à gauche en a et à droite en a telle que $f'_g(a) = f'_d(a)$.

(2) Si f est une fonction dérivable en un point a alors elle est continue en a.

On en déduit par contraposition que si f n'est pas continue en a alors elle n'est pas dérivable en a.

2.4.1.2 Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On note M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 et M_h le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x_0 + h$. Le coefficient directeur de la sécante $S_h = (M_0M_h)$ à la courbe $\mathcal{C}$ est le taux d'accroissement $\tau_{x_0,h}f$. Lorsque h tend vers 0, la position limite de M_h est celle du point M et la position limite de la sécante S_h est la tangente T_{x_0} à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0. Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(x_0)$, la limite des coefficients directeurs des sécantes.



Définition 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

— Si f est dérivable en a, alors $\mathscr{C}$ admet une tangente (T) d'équation cartésienne $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$ au point $A(a; f(a))$.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de (T) et $\vec{u}(1; f'(a))$ est un vecteur directeur de (T).

— Si f n'est pas dérivable en a telle que $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont différents, alors :
$\mathscr{C}$ admet au point $A(a; f(a))$ une demi-tangente à gauche en A d'équation
$(T_g) : \begin{cases} y = f'_g(a) \times (x-a) + f(a) \\ x \leqslant a \end{cases}$ et
$\mathscr{C}$ admet au point $A(a; f(a))$ une demi-tangente à droite en A d'équation
$(T_d) : \begin{cases} y = f'_d(a) \times (x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$

— Si f est continue à gauche ou à droite en a et f n'est pas dérivable en a telle que :
  — $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, alors $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente « verticale » à gauche ou à droite au point $A(a; f(a))$ dirigée vers le "haut " $(T) : \begin{cases} x = a \\ y \geqslant f(a) \end{cases}$
  — $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, alors $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente « verticale » à gauche ou à droite au point $A(a; f(a))$ dirigée vers le "bas " $(T) : \begin{cases} x = a \\ y \leqslant f(a) \end{cases}$

Remarque

Dans les conditions de la définition, si $\mathscr{C}$ admet deux demi-tangentes de supports distincts, alors le point $A(a; f(a))$ est un **point anguleux** de $\mathscr{C}$. C'est le cas par exemple lorsque $f'_g(a) \neq f'_d(a)$

Activité 1.2

1. Soit la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \left|x^2 + x\right| + 1, & \text{si } x \leqslant 0 \\ g(x) = 1 + \sqrt{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$
   (a) Étudie la continuité de g en 0 et en -1 .
   (b) Étudie si la courbe de g admet en ses points d'abscisse 0 et -1 des tangentes ou des demi-tangentes que tu préciseras puis place la courbe .
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^3-1} & ; x \neq 0 \\ f(1) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$
   (a) Étudie la continuité de f au point $x_0 = 1$.
   (b) Étudie la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$. Interprète , graphiquement , si possible les résultats

Propriété 3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I. Si f est dérivable en a alors, f est continue en a.

Remarque

La réciproque du théorème est fausse : Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel. Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en ce réel.

2.4.2 Fonction dérivée

2.4.2.1 Rappel et compléments

Définition 3 Soit f une fonction numérique. L'ensemble des réels en lesquels f est dérivable est appelé **ensemble de dérivabilité** de f.
L'application $x \longmapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f notée f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
NB : L'ensemble de définition de définition de f' est bien l'ensemble de dérivabilité de f.

Propriété 4

① Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I.

② Soit deux réels a et b tels que $a < b$.
Une fonction est dérivable sur le segment $\left[a\,;b\right]$ si elle est dérivable sur $\left]a\,;b\right[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

③ On définit de même la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles $\left[a\,;b\right[$ et $\left]a\,;b\right]$ où a et b sont finis ou infinis(quand l'intervalle est ouvert en une borne).

2.4.2.2 Opération sur les fonctions dérivées

2.4.2.2.1 Rappel

Dérivées de fonctions usuelles		
Fonction f	Fonction dérivée f'	sur
$x \longmapsto a; (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n; n \in \mathbb{Z}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $n < 0$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$x \longmapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan x$	$x \longmapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Dérivées et opérations		
	u et v dérivables sur un K	Fonction dérivée
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit par un réel k	kÖu	kÖu'
Produit	uv	$u'v + uv'$
Quotient	$\dfrac{u}{v}$; ($v \neq 0$ sur K)	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Inverse	$\dfrac{1}{v}$; ($v \neq 0$ sur K)	$\dfrac{-v'}{v^2}$

2.4.2.2.2 Dérivée de fonctions composées

Propriété 5 Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout x de I,
$(v \circ u)'(x) = u'(x)$Ö$v' \circ u(x)$
On note $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ v)$.

Preuve. On calcule le taux d'accroissement : pour h tel que $v(u(x+h)) - v(u(x)) \neq 0$:

$$\tau_{x,h} v \circ u = \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{h} = \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Or $\lim\limits_{x \to h} u(x+h) = u(x)$ donc par composition, en posant $X = u(x+h)$ et $X_0 = u(x)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{u(x+h) - u(x)} = \lim_{X \to X_0} \frac{v(X) - v(X_0)}{X - X_0} = v'(X_0) = v'(u(x))$$

et par produit : $\lim\limits_{h \to 0} \tau_{x,h} v \circ u = v'(u(x)) \times u'(x)$.

Cette propriété nous a permis d'établir les égalités suivantes

Dérivées de fonctions composées		
u dérivable sur un intervalle I		
Fonction f	Fonction dérivée f'	Remarque éventuelle sur u
u^n; $(n \in \mathbb{Z})$	$nu'u^{n-1}$	$u \neq 0$ sur I si $n < 0$
$\dfrac{1}{u^n}$; $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$	$u \neq 0$ sur I
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$\cos u$	$-u' \times \sin u$	sur I
$\sin u$	$u' \times \cos u$	sur I
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u$	$u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sur I

Activité de réinvestissement

1. Dans chacun des cas, détermine l'ensemble de dérivabilité de f et sa fonction dérivée.
   (a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x(1-3x^2)^3 \end{array}$, (b) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+3x-6}{2-5x} \end{array}$,
   (c) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \end{array}$, (d) $f : \begin{array}{ccc} \left[-\pi\,;\pi\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2\cos x - 1} \end{array}$,
   (c) $f : \begin{array}{ccc} \left[0\,;1\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{array}$
2. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1+x)^5 - 243}{x-1}$
3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.
   Détermine les limites suivantes :
   $$\lim_{x \to 2} \frac{f(\sqrt{2+x})}{x-2} \quad , \quad \lim_{x \to 2} \frac{f\left(2\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x-2}$$

2.4.2.3 Dérivée et sens de variation

Étudier le sens de variation d'une fonction f c'est préciser les intervalles de son ensemble de définition sur lesquels elle est strictement monotone ou constante.
Lorsque f est dérivable, le signe de la fonction dérivée permet de donner son sens de variation. Néanmoins cela n'est pas toujours nécessaire dans certains cas simples (trinôme du second degré, fonctions associées, $\cdots$).

Propriété 6 Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

— Si f est constante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.

— Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$.

— Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$.

La propriété suivante permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

Propriété 7 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.

— Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

— Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

— Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Activité de réinvestissement
Soit f la fonction définie sur $\left[1\,;+\infty\right[$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ et g la fonction définie sur $\left[0\,;\pi\right]$ par $g(x) = sin(x) - x\cos(x)$.

1. Calcule $f(2)$ et $f(4)$.
2. Étudie les variations de g et déduis-en le signe de $g(x)$.
3. Justifie la dérivabilité de f sur $\left[1\,;+\infty\right[$ et écris $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
4. Précise l'image de $\left[1\,;+\infty\right[$ par f.

Activité de réinvestissement
Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1

1. (a) La fonction f est-elle continue sur $]-3;+\infty[$?
   (b) Donne deux intervalles où f est continue mais pas monotone.
   (c) Donne deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. (a) Détermine le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution unique ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dis si elle est vraie ou si elle est fausse.
   (a) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5;+\infty[$
   (b) $f'(-2) \times f'(0) \leqslant 0$
   (c) $f'(-2) \times f'(3) \leqslant 0$

2.4.2.4 Dérivée et extremum

Définition 4 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.

① On dit que f admet un maximum relatif ou local en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que $\forall x \in$ J, $f(x) \leqslant f(a)$. Dans ce cas le réel $f(a)$ est le **maximum relatif** de f en a.

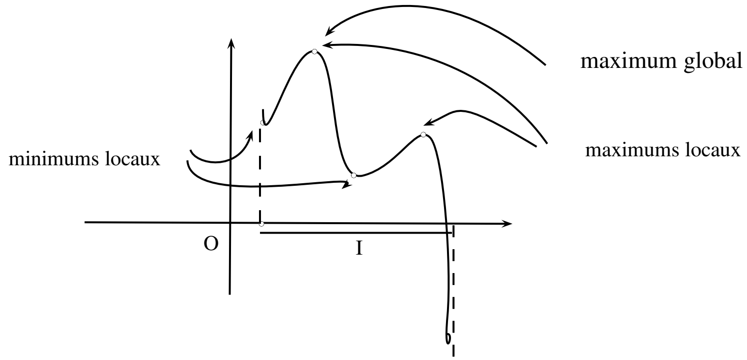
② On dit que f admet un minimum relatif ou local en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que $\forall x \in$ J, $f(x) \geqslant f(a)$. Dans ce cas le réel $f(a)$ est le **minimum relatif** de f en a.

③ Lorsque f admet un minimum relatif ou un maximum relatif en a, on dit que f admet un extremum relatif ou local en a.

Propriété 8
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.
(1) Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
(2) Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

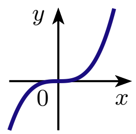
x	a	x_0	b
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	*minimum*	$\nearrow$

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	*maximum*	$\searrow$

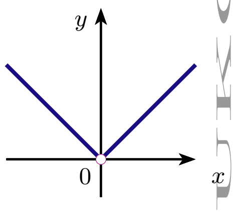


Remarques

1. Dans la propriété 4.7.(2) du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.
   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   $f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.
   La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.



2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.
   Considérons la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
   f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
   f admet un minimum $f(0) = 0$ or f n'est pas dérivable en 0.



Activité de réinvestissement

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
m étant un paramètre réel, on considère les courbes $\mathcal{C}_m$ d'équation $y = f_m(x)$ où $f_m(x) = mx^3 + (m-1)x^2 - (4m-1)x - 4m + 3$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontre que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par trois points fixes A, B et C dont tu préciseras les coordonnées, quand le paramètre m varie.
2. Discute suivant les valeurs de m le nombre d'extrémums de f_m

Activité de réinvestissement

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + x - 2$.
   (a) Dresse le tableau de variation de g.
   (b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in \left]0,8 ; 0,9\right[$.
   (c) Détermine le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 4x + 4}$
   (a) Calcule la fonction dérivée de f, puis vérifie que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
   (b) Dresse le tableau de variation de f.

2.4.2.5 Dérivées successives

2.4.2.5.1 Définition 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

— Si f est dérivable sur I, sa dérivée f' est appelée **dérivée première** de f, encore notée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

— Si la fonction f' est dérivable sur I, sa dérivée est appelée **dérivée seconde** de f et notée $f^{(2)}$ ou f'' ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De proche en proche, si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, sa dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ème}}$ de f notée $f^{(n)}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. On a $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$
La dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est encore appelée **dérivée d'ordre n** de f.

Remarque
Par convention $f^{(0)} = f$

Activité de réinvestissement

1. Détermine les dérivées d'ordre 1, 2, 3 et 4 de la fonction $g :: x \longmapsto 2x^3 - 4x^2 + x - 1$.
2. Soit f la fonction définie sur $\left]2 ; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.
   (a) Calcule, pour tout x de $\left]2 ; +\infty\right[$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$.
   (b) Montre que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$.

2.4.2.5.2 Développement limité

Définition 5 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant zéro et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en zéro** lorsqu'il existe un polynôme P de degré n et une fonction ϕ définie au voisinage de zéro tels que pour tout x I, on a :
$f(x) = P(x) + x^n\phi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x) = 0$
Le polynôme P s'écrit alors $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x^1 + a_0$ et est appelé **partie régulière** du développement et la fonction $x \longmapsto x^n\phi(x)$ est appelée **reste du développement**.

$P(x)$ est l'**approximation polynomiale** de degré n de f.

Propriété 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est une fonction n fois dérivable en zéro, alors f admet un développement limité d'ordre n en zéro , et on a :

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(x)}{2!} + \cdots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^n\phi(x) \text{ avec ; } \lim_{x\to 0}\phi(x) = 0$$

Activité de réinvestissement

1. Détermine le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de chacune des fonctions cos et sin .
2. Déduis-en le calcule des limites suivantes :

Détermine le développement limité d'ordre 3 de la fonction $\longmapsto \sin x$ en zéro puis calcule

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + \sin x}{2x - x^2}$$

2.4.2.6 Dérivée de la bijection réciproque

Activité 1 Soit f une fonction bijective d'un intervalle K sur $f(\mathrm{K})$, x_0 un réel de K et $y_0 = f(x_0)$.
Démontre que si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Propriété 10 (1) Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur $f(\mathrm{I})$ x_0 un réel de K et $y_0 = f(x_0)$.
Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

On déduit :

(2) Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur $f(\mathrm{I})$
Si f est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $f(\mathrm{I})$ et on a :
$\forall y \in f(\mathrm{I}),\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}$
En posant $(f^{-1})(y) = x$, on a : $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.
On note $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$
Remarque
Si f est dérivable sur I, alors l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} est $\mathrm{J} \setminus \{f(x),\ f'(x) \neq 0\}$

Activité de réinvestissement
Soit f la fonction définie sur $\left[0;1\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x$

1. Dresse le tableau de variations de f.
2. (a) Montre que f est une bijection de $\left[0;1\right]$ sur $\left[0;2\right]$.
   (b) On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f. Montre que f^{-1} est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$.
   (c) Calcule $f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{4}\right)$
3. Montre que, pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right[$ $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{-4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}$

Activité de réinvestissement
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$.

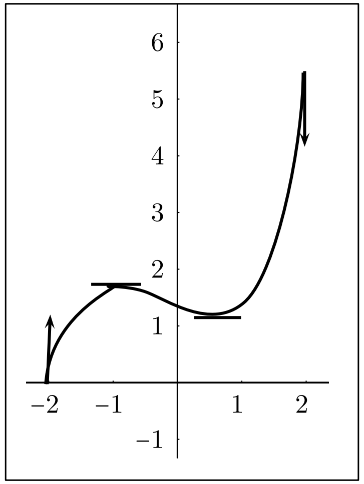
1. Étudie les variations de f.
2. Pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose $g(x) = f(\tan x)$.
   (a) Montre que g réalise une bijection de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]1;+\infty\right[$.
   (b) Montre que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$ et que $\forall x \in \left]1;+\infty\right[$ $(,g^{-1})'(x) = \dfrac{-2x}{1+(x^2-1)^2}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(x) = g^{-1}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + g^{-1}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)$.
   (a) Montre que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calcule $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Calcule $g^{-1}(\sqrt{2})$ et déduis que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Activité de réinvestissement

Dans le graphique ci-contre on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe $(\mathcal{C})$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $\left[-2\,;2\right]$ ainsi que les tangentes à $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses -1 et $\frac{1}{2}$ ainsi que les demi-tangentes à $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses -2 et 2. oOn donne $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$ et $f(-1) = \frac{3}{2}$.

On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$.



1. Par lecture graphique :
   (a) Détermine $f'(-1)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{f(x)}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2f(x)-11}{2x-4}$.
   (b) Justifie que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle K à préciser.
2. Répons par **VRAI ou FAUX** :
   (a) F réalise une bijection de $\left[-2\,;2\right]$ sur $\left[0\,;\frac{11}{2}\right]$.
   (b) Le domaine de dérivabilité de g^{-1} est $\left[\sqrt{2}\,;\frac{11}{2}\right]$.
   (c) Le tableau de variation suivant est celui de la fonction g^{-1}.

x	$\sqrt{2}$		$\frac{11}{2}$
$(g^{-})'(x)$	‖	$+$	0
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	2

Activité de réinvestissement

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,;+\infty\right[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1+\tan x} & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;0\right] \\ f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2+2x} & \text{si } x \in \left]0\,;+\infty\right[\end{cases}$.

1. Montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
2. (a) Vérifie que f est continue en 0.
   (b) Étudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat.
3. On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.
   (a) Montre que g réalise une bijection de $\left]0\,;+\infty\right[$ sur un intervalle I que tu préciseras.
   (b) Détermine $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ I.
4. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\,;0\right]$.
   (a) Montre que h une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4}\,;0\right]$ de $\left[1\,;+\infty\right[$.
   (b) Montre que h^{-1} est dérivable sur $\left[1\,;+\infty\right[$ et que pour tout $x \in \left[1\,;+\infty\right[$, $\left(h^{-1}\right)'(x) = \dfrac{-1}{2x^2-2x+1}$.
5. Soit φ la fonction définie sur $\left]-\infty\,;0\right]$ par $\begin{cases} \varphi(x) = h^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \varphi(0) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.
   (a) Montre que φ est continue en 0.
   (b) Montre que φ est dérivable sur $\left]-\infty\,;0\right[$ et calcule $\varphi'(x)$ pour tout $x < 0$.

Activité 2

1. Détermine la fonction dérivée de la fonction racine n-ième .
2. Soit g la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $g(x) = x^r$ $(r \in \mathbb{Q}^\star)$.
   Détermine la fonction dérivée de g

Propriété 11 Soit r un nombre rationnel non nul $(r \in \mathbb{Q}^\star)$.

— La fonction $x \longmapsto x^r$ est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto r\,x^{r-1}$.

— Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction u^r est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $ru'u^{r-1}$.

Exemple

$x \longmapsto x^{\frac{3}{5}}$, $x \longmapsto x^{-\frac{3}{5}}$, $x \longmapsto x^{\frac{5}{3}}$,

Remarque

La fonction $x \longmapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}^\star)$ est dérivable sur $\left[0\,;+\infty\right[$ si et seulement si $r \geq 1$.

Activité de réinvestissement

1. Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$
2. Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \sqrt[3]{2\cos x - 1}$
   (a) Étudie la dérivabilité de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.
   (b) Montre que f est une bijection de $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ sur $\left[0\,;1\right]$. On note f^{-1} sa réciproque.
   (c) i. Calcule $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\right)$
   ii. Précise le domaine K de dérivabilité de f^{-1} et puis calcule $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in$ K.

2.4.2.7 Inégalités des accroissements finis

Activité 3 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$; m et M deux nombres réels tels que $\forall x \in \left[a\,;b\right]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

1. Démontre que
   (a) la fonction $g\colon\longmapsto f(x) - mx$ est croissante sur $\left[a\,;b\right]$
   (b) la fonction $h\colon\longmapsto f(x) - Mx$ est décroissante sur $\left[a\,;b\right]$
2. Déduis-en que $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$

Propriété 12 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que $\forall x \in \left[a\,;b\right]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$: c'est le **théorème des inégalités des accroissements finis**.

Propriété 13 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
S'il existe un nombre réel k strictement positif tel que $\forall x \in$ I, $|f'(x)| \leqslant k$, alors pour tout nombre réel a et b de I, on a $|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b-a|$

Activité de réinvestissement

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \left]0\,;3\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \end{array}$

1. Dresse le tableau de variation de f.
2. Démontre que l'équation $f(x) = -x$ admet une solution unique α dans $\left]1\,;2\right[$.
3. Dresse le signe de $f(x) + x$ dans $\left[1\,;2\right]$
4. (a) Prouve que pour tout $x \in \left[1\,;2\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{9}{\sqrt{5}}$
   (b) Déduis-en que pour tout $x \in \left[1\,;2\right]$, $|f(x) + \alpha| \leqslant \frac{9}{\sqrt{5}}\,|x - \alpha|$

Activité de réinvestissement

1. Prouve que $1 + \dfrac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$ pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.
2. Déduis-en un encadrement de $\sqrt{1+10^{-10}}$.

Activité de réinvestissement

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-3}{x^2+x-2}$.

1. Étudie les variations de f.
2. Prouve que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I dont tu donneras les coordonnées.
3. Étudie les branches infinies de $\mathcal{C}_f$ puis trace $\mathcal{C}_f$.

Une application du théorème des inégalités des accroissements fins

Lorsqu'une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I, le signe de sa dérivée seconde permet d'étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse x_0 élément de I.

Propriété 14 Soit f ue fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 ,et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

— Si pour tout $x \in$ I , $f''(x) <$ alors $(\mathcal{C})$ est en-dessous de la tangente en-dessous de ses points.

— Si pour tout $x \in$ I , $f''(x) >$ alors $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la tangente en-dessous de ses points.

— Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point $\mathrm{M}^*{}_0(x_o\,, y_0\,, z_o)$ est un point d'inflexion.

2.4.3 Étude de Fonctions

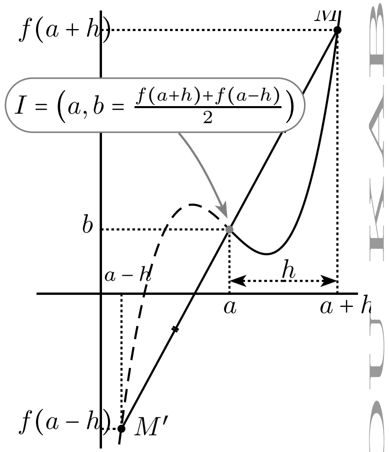
2.4.3.1 Éléments de symétrie

2.4.3.1.1 Centre de symétrie

Propriété 15 La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathcal{D}$ admet le point $I(a,b)$ comme centre de symétrie si et seulement si pour tout réel h tel que $a+h \in \mathcal{D}$,

$$a-h \in \mathcal{D} \text{ et } \frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b.$$

ou bien
le point $I(a,b)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si pour tout réel $x \in \mathcal{D}$ tel que $2a-x \in \mathcal{D}$ et $f(2a-x)+f(x)=2b$.
ou bien
le point $I(a,b)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si pour tout réel $x \in \mathcal{D}$ tel que $a+x \in \mathcal{D}$ la fonction $x \longmapsto f(a+x)-b$ est impaire.



Exemple 1. *Démontre que $I(1;0)$ est le centre de symétrie de la courbe de la fonction* $f : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

Définition 1. $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *est* impaire *si, et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ et $f(x) = -f(-x)$.*

La courbe d'une fonction impaire est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

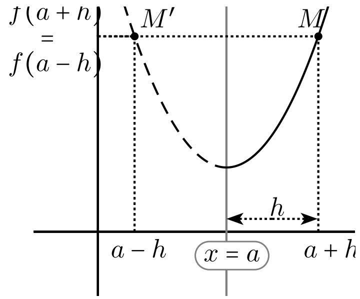
Exemple 2. *Fonctions impaires :* ....

2.4.3.1.2 Axe de symétrie

Propriété 16 La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathcal{D}$ admet la droite d'équation $x=a$ comme axe de symétrie si et seulement si pour tout réel h tel que $a+h \in \mathcal{D}$,

$$a-h \in \mathcal{D} \text{ et } f(a+h) = f(a-h).$$

ou bien
La droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si pour tout réel $x \in \mathcal{D}$ $2a-x \in \mathcal{D}$, et $f(2a-x) = f(x)$.
ou bien
La droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si pour tout réel $x \in \mathcal{D}$ tel que $x+a \in \mathcal{D}$, la fonction $x \longmapsto f(x+a)$ est paire.



Idée. Dans le cas où le point I$(a\ ,\ b)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, ou la droite d'équation $x=a$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, on peut étudier f sur $\mathcal{D} \cap \left[a;+\infty\right[$ pour construire $\mathcal{C}_f$.

Définition 2. $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *est* paire *si, et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ et* $f(x) = f(-x)$.
La courbe d'une fonction paire est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(x=0)$.

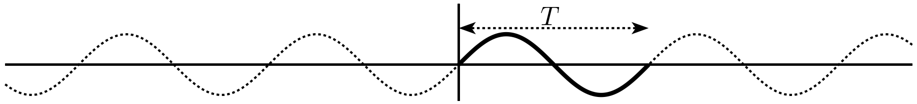
Exemple 3. ✎ *Prouve que la fonction carrée est paire* ....

2.4.3.1.3 Périodicité

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}$ et p un nombre réel non nul.
On dit que f est périodique, de période p, si pour $x \in \mathcal{D}$, $x+T$ et $x+T$ appartiennent $\in \mathcal{D}$ et $f(x+T) = f(x)$.
On dit que T est une période de f et le petit nombre réel strictement positif satisfaisant les conditions ci-dessus est appelée la période de f.

Point méthode
Pour représenter graphiquement une fonction périodique de période p, il suffit de :
¬ choisir un intervalle deI de longueur p inclus dans $\mathcal{D}$,

¬ tracer la partie de $\mathcal{C}_f$ restreinte à cet intervalle I,
¬ translater cette partie par les translations de vecteurs $kp\vec{\imath}$ pour obtenir $\mathcal{C}_f$.
Notons que la courbe $\mathcal{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $p\vec{\imath}$



Notons que les fonctions $x \longmapsto \cos(ax+b)$ et $x \longmapsto \sin(ax+b)$, $a \neq 0$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$; la fonction $x \longmapsto \tan(ax+b)$, $a \neq 0$ est périodique de période $\frac{\pi}{|a|}$

Exemple
Détermine la période de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x) + 2\sin(3x)$ puis celle de $g(x) = \sin(\frac{1}{2}x)\cos(\frac{1}{3}x)$

2.4.3.1.4 *Construction d'une courbe à partir d'une fonction de référence*

Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; avec $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f
- Si $g(x) = f(x) + b$, alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $b\vec{\jmath}$.
- Si $g(x) = f(x-a)$, alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{\imath}$.
- Si $g(x) = f(x-a) + b$, alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.
- Si $g(x) = -f(x)$, alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe $(0\ ,\ \vec{\imath})$.
- Si $g(x) = f(-x)$, avec $-x \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe $(0\ ,\ \vec{\jmath})$.
- Si $g(x) = -f(-x)$, avec $-x \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie centrale de centre O.
- Si $g(x) = f(|x|)$, alors g est paire : $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, avec $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}_2$ le symétrique de $\mathcal{C}_1$ par la symétrie orthogonale d'axe $(0\ ,\ \vec{\jmath})$.
- Si $g(x) = |f(x)|$, $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, avec $\mathcal{C}_1 = \{\mathrm{M}(x\,,\,y) \in \mathcal{C}_f\,;\, y \geq 0\}$ et $\mathcal{C}_2$ le symétrique de $\{\mathrm{M}(x\,,\,y) \in \mathcal{C}_f\,;\, y < 0\}$ par la symétrie orthogonale d'axe $(0\ ,\ \vec{\imath})$.

2.4.3.2 Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f on peut adopter le plan ci-après :
- Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f,
- Rechercher éventuellement un ensemble d'étude en étudiant la parité de f, sa périodicité ou les éléments de symétrie. Ceci permet de réduire l'ensemble d'étude de f.(Plutôt que de travailler sur $\mathbb{R}$, il est plus intéressant de se ramener à $\left[0;+\infty\right[$, ou $\left]-\infty;0\right[$, ou $\left[-\pi;\pi\right[$, $\cdots$),
- Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle d'étude,
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f (on pourra étudier si nécessaire les points anguleux, les points d'inflexion ou les demi-tangentes),
- Déterminer la fonction dérivée, son signe fournit le sens des variations de f,
- Établir le tableau des variations de f,
- Rechercher éventuellement les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$ de f,
- Tracer $\mathcal{C}$ à l'aide des informations précédentes et de quelques points particuliers .

Activité de réinvestissement

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$. On désigne par (Γ_1) sa courbe représentative dan le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Dresse le tableau de variation de f. Tu étudieras la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (Γ_1) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ puis construis (T) et (Γ_1).
3. Sur le même graphique, construis (Γ_2) la courbe symétrique de (Γ_1) par la symétrie d'axe $(\mathrm{O}; \vec{\imath})$.
4. On pose $(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$.
   Montre qu'une équation de (Γ) a pour équation cartésienne (E) : $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.
5. Soit (Δ) la droite passant par O et de coefficient directeur t.
   Détermine en fonction de t les coordonnées des points d'intersection de (Γ) et (Δ).

Activité de réinvestissement

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2x) - 2\cos x \end{array}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; (Unité graphique 2cm).

1. Compare $f(\pi - x)$ et $f(x)$ puis montre qu'on peut étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
2. Étudie f puis représente la partie de $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$
3. Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ par
   $$\begin{cases} g(x) = \dfrac{2\cos^2 x}{1+\sin x} & ; \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0 & \end{cases}$$
   (a) Montre que g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
   (b) Étudie la dérivabilité de g.
   (c) Démontre que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $g(x) = -f(x)$ puis construis la courbe $\mathscr{C}_g$ de g.

Activité de réinvestissement

À l'aide du graphique, réponds aux questions ci-après :

1. Détermine en fonction de $f(x)$: $f(-12-x)$, $\forall x \in \left[-7\,;-5\right]$ et $f(-5-x)$, $\forall x \in \left[-\frac{7}{2}\,;-\frac{5}{2}\right]$

2. (a) Donne, en justifiant, le domaine de continuité et le domaine de dérivabilité de f .

   (b) Étudie les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to(-4)^-}\left(\dfrac{f(x)-2}{x+4}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$, et $\lim\limits_{x\to(-\frac{5}{2})}\left(\dfrac{2f(x)+6}{2x+5}\right)$.

   (c) Détermine la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[-5\,;-4\right]$.

3. (a) Montre que les restrictions f_1 de f à $\left]-\infty\,;-7\right]$ et f_2 de f à $\left[2\,;+\infty\right[$ sont bijectives. Dresse le tableau de variation f_1^{-1} et f_2^{-1} .

   (b) Étudie les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f_1^{-1}(x)}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{f_1^{-1}(x)+7}{x-2}\right)$, et $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{f_2^{-1}(x)-2}{x-2}\right)$.

4. (a) Détermine le domaine de dérivabilité de $h\,.(\mathcal{C}_h)$ et $(\mathcal{C}_h^{-1})$ dans un même repère orthonormé.

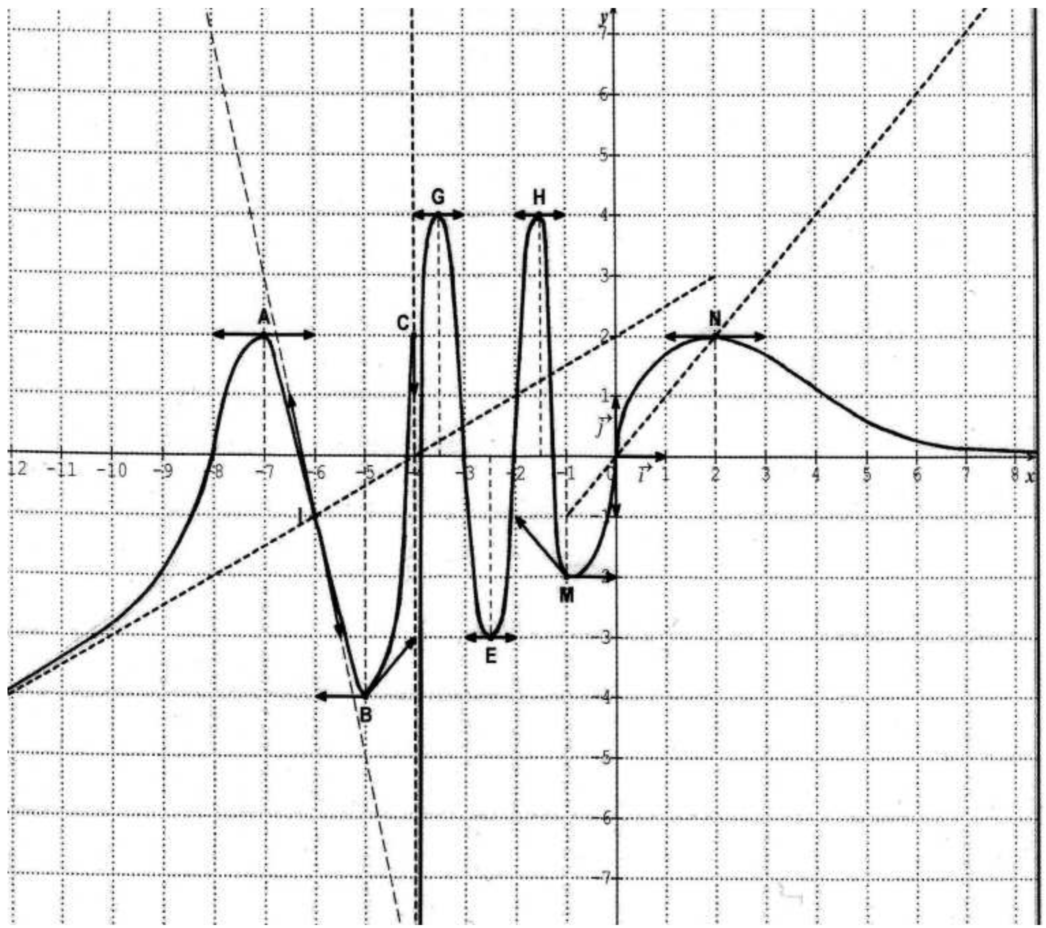
   (b) Construis Montre que la restriction h de f à $\left[-1\,;2\right]$ est bijective.

5. Montre que f est une primitive d'une fonction g sur $\left[-\frac{7}{2}\,;-1\right]$ et donne le signe de $g(x)$.

6. (a) Montre que f admet des primitives sur $\left[-7\,;-5\right]$. Soit F la primitive de f sur $\left[-7\,;-5\right]$ égale (-3) en (-6).

   (b) Détermine $F'(-7)$, $F'(-6)$, $F'(-5)$ et $F''(-6)$.

   (c) Donne les variations de la fonction $G : x \longmapsto F(x) - \frac{x^2}{4} - 2x$ sur $\left[-7\,;-5\right]$, puis déduis le signe de $g(x)$.



Activité de réinvestissement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\,\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$.

1. (a) Montre que 2π est une période de f .

   (b) Montre que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

2. (a) Étudie les variations de f sur un ensemble d'étude de f .

   (b) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left[0\,;\pi\right]$. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

   (c) Trace la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\pi\,;2\pi\right]$.

Activité de réinvestissement

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n\sqrt{1-x} \end{array}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

1. (a) Justifie que f_n est dérivable sur $\left]-\infty\,;1\right[$ et montre que

   $$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}}(2n-(2n+1)x)$$

   (b) Étudie la dérivabilité de f_n en 1. Interprète graphiquement le résultat.

   (c) Étudie les variations de f_n .(Tu pourras discuter suivant la parité de n).

2. Construis $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ dans le même repère.

Activité 4

1. Étudie les variations de la fonction

   $f_n : \begin{array}{ccc} \left[0\,;+\infty\right[& \longrightarrow & \left[0\,;+\infty\right[\\ x & \longmapsto & ,\ \sqrt[n]{x} \end{array} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\ ;\ 1\}$

   Étudie les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_n$ de f_n, puis construis dans le même repère $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.

2. Étudie les variations de la fonction

   $g_r : \begin{array}{ccc} \left]0\,;+\infty\right[& \longrightarrow & \left]0\,;+\infty\right[\\ x & \longmapsto & ,\ x^r \end{array} \quad r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\ ;\ 1\}$

   Tu vérifieras que g_r est prolongeable par continuité en 0 si $r > 0$

   Étudie les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_r$, de g_r puis donne l'allure de $\mathcal{C}_r$ selon les différents cas étudiés.

2.5 Séquence 5 : Primitives de fonctions continues

Activité 1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$.

1. Détermine, si elle existe une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = f(x)$.
2. F est-elle unique ?

2.5.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, une fonction F , dérivable sur I, telle que, pour tout x appartenant à I, $F'(x) = f(x)$.

Exemple

— $F : x \longmapsto \frac{1}{4}x^4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto x^3$ puisque $F'(x) = f(x)$.

— $F : x \longmapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ puisque $F'(x) = f(x)$.

Propriété 1 Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exemple

La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (puisqu ?elle est dérivable sur $\mathbb{R}$), donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2 Soit F une primitive de f sur un intervalle I.

· Pour tout nombre réel k, $x \longmapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.

· Si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$.

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle I ne diffèrent que d'une constante réelle.

Exemple

La fonction $x \longmapsto \sin^2 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto 2\sin x \cos x$.

Les fonctions $x \longmapsto \sin^2 x + 2$, $x \longmapsto \sin^2 x - 1$, $x \longmapsto -\cos^2 x \ldots$ sont aussi des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3 Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Un réel x_0 de I et un réel y_0 étant données (appelés conditions initiales), il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

REMARQUE

Pour une représentation graphique des primitives :

· les courbes de primitives de la fonction f sur I se déduisent l'une de l'autre par des translations de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}$.

· Pour tout point $A(x_0, y_0)$ avec $x_0 \in$ I (situé dans la bande), il existe une primitive unique dont la courbe représentative passa par A.

2.5.2 Primitives et opérations

Primitives des fonctions usuelles		
Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto a; (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n; (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}; (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto x^r; (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0 ; +\infty[$, si $r \geqslant 0$ $]0 ; +\infty[$, si $r < 0$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$	$](2k-1)\frac{\pi}{2} ; (2k+1)\frac{\pi}{2}[; k \in \mathbb{Z}$

Activité de réinvestissement

Soit f la fonction définie sur I$=\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan^2 x$.

Détermine la primitive $G(x)$ de f sur I qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

Propriété 4 Soit f et g deux fonctions admettant pour primitives respectives F et G sur un intervalle K.

— La fonction $F + G$ est une primitive sur K de la fonction $f + g$.

— La fonction αF, $\alpha \in \mathbb{R}$, est une primitive sur K de la fonction αf.

Propriété 5 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, f' sa dérivée et n un entier naturel non nul.

— La fonction $\dfrac{1}{n+1}f^{n+1}$ est une primitive sur K de la fonction $f' \times f^n$

— Si f ne s'annule pas sur K et $n \geqslant 2$, alors la fonction $\dfrac{1}{1-n}f^{1-n}$ est une primitive sur K de la fonction $\dfrac{f'}{f^n}$

— Si f est strictement positive sur K, alors la fonction $\sqrt{f}$ est une primitive sur K de la fonction $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

— Si g une fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(\mathrm{K})$, alors une primitive sur K de la fonction $f' \times (g' \circ f)$ est $g \circ f$.

Ceci nous a permis d'obtenir les résultats du tableau ci-dessous :

Primitives des fonctions composées		
Fonction f	Une primitive de f	Commentaires
$u'u^n$, $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	sur tout intervalle où u est dérivable
$\dfrac{u'}{u^n}$, $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive
$u'u^r; (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	sur tout intervalle où u est dérivable et positive, (strictement positive si $r < 0$)
$u' \cos u$	$\sin u$	sur tout intervalle où u est dérivable
$u' \sin u$	$-\cos u$	sur tout intervalle où u est dérivable

Activité de réinvestissement

Détermine une primitive de la fonction f sur I dans chacun des cas suivants

1) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}^*$

2) $f(x) = \dfrac{5}{7\sqrt{3x-1}}$ $\quad \mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$

3) $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+1)^3}$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad \mathrm{I} = \left]1; +\infty\right[$

5) $f(x) = \dfrac{3}{(2x-4)^2} + \dfrac{1}{4(5-x)^7}$ $\quad \mathrm{I} = \left]2; 5\right[$

6) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(2x^3+3x^3)^4}$ $\quad \mathrm{I} = \left]0; +\infty\right[$

7) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} + \sin x$ $\quad \mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

8) $f(x) = \dfrac{5x^4 + 2x^3 - 4x + 1}{x^3}$ $\quad \mathrm{I} = \left]0; +\infty\right[$

Activité de réinvestissement

1. Montre que pour tout réel x , $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Déduis-en une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $u : x \longmapsto \cos^2 x$.
2. la question précédente montre que tout réel x , $\cos^4 x = \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}$. Déduis-en une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $v : x \longmapsto \cos^4 x$.

Activité de réinvestissement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ par $f(x) = \frac{3x^2+12}{(x^2-4)^2}$

1. Détermine deux réels$a$ et b tels que, pour tout x distinct de -2 et de 2 : $f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$
2. Déduis-en la primitive F de f sur $\left]-2; 2\right[$ qui prend la valeur 1 en 0.

Activité de réinvestissement

Soit F la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et dont la dérivée est donnée par $F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, pour tout réel x. On suppose que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de $F(x)$. $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de F dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = F(x) + F(-x)$.
   (a) Montre que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calcule $G'(x)$.
   (b) Calcule $G(0)$ et Déduis que F est une fonction impaire.
2. Soit H la fonction définie sur $\left]0; +\infty\right[$ par $H(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$.
   (a) Montre que H est dérivable sur $\left]0; +\infty\right[$ et calcule $G'(x)$.
   (b) Montre que pour tout réel x appartenant à $\left]0; +\infty\right[$, $H(x) = 2F(1)$.
   (c) Déduis-en que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2F(1),$.
   (d) Que peux-tu en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
3. — Démontre que, pour tout x élément de $[0; 1]$, $\frac{1}{2} \leq F'(x) \leq 1$.
   Déduis que $\frac{1}{2} \leq F(1) - F(0) \leq 1$ puis une valeur approchée de $F(1)$.
   — Soit U la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $U(x) = F(\tan x) - x$.
   Démontre que U est une fonction constante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Déduis-en la valeur exacte de $F(1)$.
4. Dresse le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$. Trace la courbe $(\mathcal{C})$, ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses -1, 0 et 1.
   Unités graphiques : $2\,cm$ sur $(\mathrm{O}; \vec{\imath})$ et $4\,cm$ sur $(\mathrm{O}; \vec{\jmath})$. Tu prendras $F(1) = 0,78$.

Activité de réinvestissement

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ et soit F la primitive sur $\left]1\,;+\infty\right[$ de f qui s'annule en $\sqrt{2}$.

1. Montre que F est strictement décroissante sur $\left]1\,;+\infty\right[$.
2. Déduis-en le signe de $F(x)$.
3. Soit G la fonction définie sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.
   (a) Montre que G est dérivable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$et calcule $G'(x)$.
   (b) Déduis-en que pour tout x on : $G(x) = x - \frac{\pi}{4}$.
   (c) Calcule $F(2)$.

Activité de réinvestissement Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Prouve l'existence et l'unicité d'une primitive F de f ui s'annule en 0.
2. Soit G la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F(\tan x)$
   (a) Montre que G est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et calcule $G'(x)$
   (b) Calcule $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
3. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $H(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$
   (a) Montre que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et détermine $H'(x)$
   (b) Déduis-en que $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

2.6 Séquence 6 : Fonctions logarithmes

Activité 1 Le devin Gouton ayant jeté les quatre cauris, Dansou se rend compte que deux d'entre eux décrivent des trajectoires assimilables aux branches de la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
par ailleurs il se rend compte que la fonction f n'a pas été prise en compte dans le calcul de primitives des fonctions usuelles. Il décide alors d'étudier les caractéristiques de la primitive de f qui s'annule en 1.

1. Justifie que la fonction f admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une unique primitive F qui s'annule en 1.
2. Donne le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+^*$

✂ ....

2.6.1 Généralités

Définition 1 La fonction $f \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.
On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction notée ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

$$\begin{array}{llll} \ln : &]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

Propriété 1

— La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

— $\ln 1 = 0$

Propriété 2

— $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} > 0$, alors ln est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$

— $\forall x \in \left]0\,;1\right[$, $\ln(x) < 0$ et $\forall x \in \left]1\,;+\infty\right[$, $\ln(x) > 0$

Activité 2 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \ln(ax)$

1. Justifie que F est aussi une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
2. Déduis-en une écriture de $F(x)$ en fonction de $\ln(x)$.
3. En calculant $F(1)$ de deux manières différentes, montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x) \tag{2.5}$$

4. En utilisant la relation (2.5), démontre que pour tous a et b dans $x \in \mathbb{R}_+^*$:
   — $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
   — $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

✂ ....

Propriété 3 Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier relatif.

— $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
— $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
— $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
— $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
— $\ln(a^n) = n\ln(a)$

2.6.2 Étude de la fonction ln

2.6.2.1 Limites aux bornes

Activité 3

1. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Démontre que $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ (pose $x = \frac{1}{t}$)
2. (a) Par l'étude de ses variations, étudie le signe de la fonction $u\,x \longmapsto u(x) = \ln x - \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant \sqrt{x}$
3. Déduis-en que pour tout $x > 1$, $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$
4. Déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

✂ ....

Propriété 4

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

② $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$.

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

2.6.2.2 Tableau de variation et courbe de ln

① La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

② $\ln\left(\left]0\,;+\infty\right[\right) = \mathbb{R}$, alors la fonction ln est une bijection de $\left]0\,;+\infty\right[$ sur $\mathbb{R}$

③ L'unique solution dans $\left]0\,;+\infty\right[$ de l'équation $\ln x = 1$ est le nombre réel strictement positif noté e. On an donc $\ln e = 1$

④ Une valeur approchée de e est 2,718

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+		
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

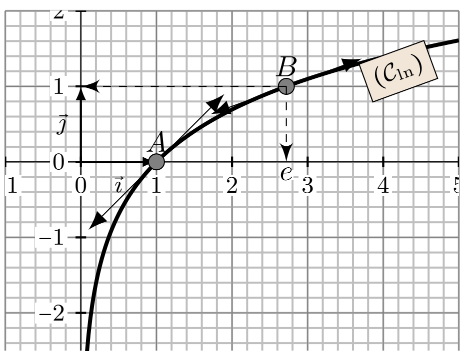
⑤ La droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote à la courbe de ln

⑥ La courbe de ln admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses en $+\infty$

⑦ La tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$

⑧ La tangente à la courbe de ln au point d'abscisse e a pour équation $y = \frac{1}{e}x$

⑨ Pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $\ln''(x) < 0$ (car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$), alors la courbe de ln est en dessous de ses tangentes.



⑩ $\forall x \in \left]0\,;1\right[$, $\ln(x) < 0$ et $\forall x \in \left]1\,;+\infty\right[$, $\ln(x) > 0$:

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	‖ −	0	+

Propriété 5

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, on a :

① $\ln a = \ln b \iff a = b$

② $\ln a < \ln b \iff a < b$

③ $\ln a \leq \ln b \iff a \leq b$

Activité 3

1. Exprimer, à l'aide des réels $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des réels ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{3}\right)$, $\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$, $\ln 108$, $\ln\left(\frac{81}{8}\right)$, $\ln\left(\sqrt[5]{2^3}\right)$ et $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right)$.

2. Simplifier les écritures ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{e}\right)$, $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$, $\ln\left(e^3\right)$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)$ et $\ln\left(\sqrt[4]{e}.\sqrt[3]{e}\right)$.

3. Soit a et b deux réels strictement positifs. Exprimer à l'aide de $\ln a$ et $\ln b$, les

$\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$, $\ln\left(\sqrt{a}.b^2\right)$ et $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

Activité 4

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\sqrt{2}\right)^n \geq 10^5$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations ci-dessous.

$2\ln x = 1$. $(\ln x)^2 + 2\ln x = 3$. $\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)(\ln x - 2) = 0$.

$\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$.

$\ln x \geq -2$. $2\ln x < 1$. $(1 - \ln x)(2 - \ln x) \geq 0$.

Activité 6

Déterminer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{3x+4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$.

Activité 4

✂ ....

Propriété 6

① Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln \circ u$ encore notée $\ln u$ est dérivable sur I et on a :

$\forall x \in \mathrm{I},\ (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

② Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I, alors la fonction $x \longmapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et on a :
$\forall x \in \mathrm{I},\ (\ln|u(x)|)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

③ Toute fonction dérivable de la forme $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitives les fonctions $\ln|u| + k$ ($k \in \mathbb{R}$) sur tout intervalle où u ne s'annule pas.
La fonction $\dfrac{u'}{u}$ est appelée dérivée logarithmique de u.

✂ ....

Activité 5

1. Dans chaque cas détermine l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calcule $f'(x)$
   (a) $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ (b) $f : x \longmapsto \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|\right)$ (c) $f : x \longmapsto 2x(1-\ln x)$.
2. Soit la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| \end{array}$.
   (a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   (b) Montre que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calcule $f'(x)$.
   (c) Détermine la primitive sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ de la fonction $u : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x}$ qui d'annule en $\dfrac{\pi}{3}$.
3. Détermine ue primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :
   (a) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ $\mathrm{I} = \left]1 ; +\infty\right[$. (b) $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{3x-2}$ $\mathrm{I} = \left]-\infty ; \dfrac{2}{3}\right[$.
   (c) $f : x \longmapsto \dfrac{i}{x\ln x}$ $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{e} ; 1\right[$. (d) $f : x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^3}{x}$ $\mathrm{I} = \left]0 ; +\infty\right[$.
   (e) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{2+\cos^2(x)}$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. (f) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-x+5}{x-1}$ $\mathrm{I} = \left]-\infty ; 1\right[$.

✂ ....

2.6.2.3 Limites de référence

① La fonction ln est dérivable sur $\left]0 ; +\infty\right[$, alors :
$\forall (x,a) \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\ln x - \ln a}{x-a}\right) = \ln' a = \dfrac{1}{a}$
- si $a = 1$, alors on a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- Puis en posant $x = 1+h$, alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$
-

② $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$ et $x\ln x < 0$

③ $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*,\ \lim\limits_{x\to 0} x^r\ln x = 0$ et $x^r\ln x < 0$

④ $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*,\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^r} = 0$

Activité 6 Calcule les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\ln x)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x^2)+\ln(1-x^2)}{x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2x)\ln x$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+3x)}{2x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\ln(1+3x)-\ln 7}{2-x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + \dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

✂ ....

2.6.2.4 Fonction logarithme de base a

Définition 2 Pour tout nombre réel a strictement positif et différent de 1, on appelle **fonction logarithme de base** a notée $\log_a$, la fonction définie sur $\left]0 ; +\infty\right[$ par
$\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
$\log_a : \begin{array}{rcl} \left]0 ; +\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array}$

Remarque
- $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$
- $\log_e(x) = \ln x$

Propriété 7 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Pour tous nombres réels x, y strictement positifs :

① $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

② $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

③ $\forall r \in \mathbb{Q},\ \log_a(x^r) = r\log_a(x)$ et $\log_a(a^r) = r$

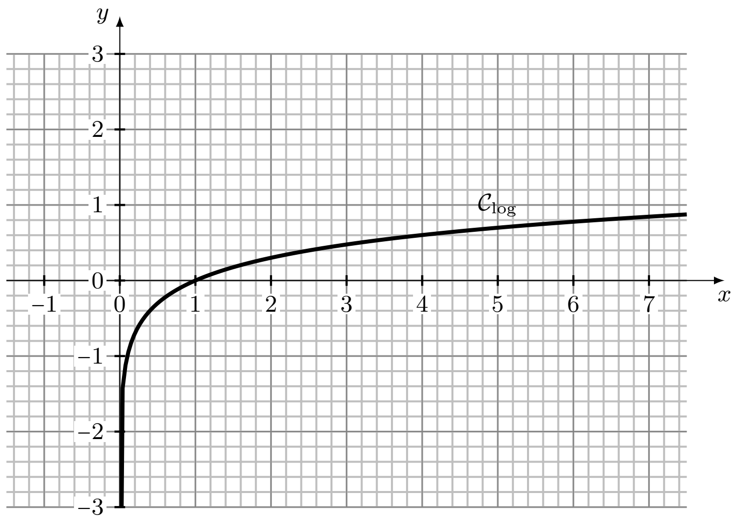
NB : Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, l'étude de la fonction $\log_a$ se ramène à un facteur multiplicatif près à celle de la fonction logarithme népérien. Ainsi :

① si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$, alors $\log_a$ est strictement décroissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$

② si $1 < a$, $\ln a > 0$, alors $\log_a$ est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

③ Pour $a = 10$, la fonction $\log_{10}$ se note simplement log et est appelée **fonction logarithme décimal**.

④ La fonction log est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$



Activité de réinvestissement

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| + \dfrac{1}{x} \end{array}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D de f puis détermine les limites de f aux bornes de D.
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par $g : x \longmapsto \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.
   Étudie les variations de g. Déduis-en le signe de g.
3. (a) Montre que f admet un prolongement par continuité en -1 et détermine son prolongement h.
   (b) Étudie la dérivabilité de h en -1.
   (c) Étudie la fonction h et trace sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

✂ ....

Activité de réinvestissement 1

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \end{array}$.

1. Étudie la fonction f et trace sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.
   Montre que courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de g et la courbe $(\mathscr{C})$ de f sont symétriques par rapport au point $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$. Construis $(\mathscr{C}')$.

✂ ....

Activité de réinvestissement 2

1. Soit f la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$.
   (a) Étudie les variations de f
   (b) Montre que l'équation $f(x) = 0$ dans $\left]0\,;+\infty\right[$ admet une unique solution ℓ puis détermine l'entier n tel que $\ell \in \left]n\,;n+1\right[$.
   (c) Détermine le signe de $f(x)$
2. g est la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par
   $$g(x) = \begin{cases} -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x & ;\ \text{si } x > 0 \\ 0 & ;\ \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   (a) Étudie la continuité et a dérivabilité de g en 0
   (b) Montre que $\forall x > 0$, $g'(x) = xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (c) Montre que $g\left(\dfrac{1}{\ell}\right) = \dfrac{1+4\ell}{8\ell^2}$
   (d) Achève l'étude des variations de g
   (e) Donne les équations des tangentes à la courbe représentative Γ de g aux points d'abscisses 0 ; 1 et $\dfrac{1}{\ell}$ Construis dans le même plan muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe Γ et celle de la fonction définie par $x \longmapsto g(x+1)$

✂ ....

Activité de réinvestissement 3

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| + \dfrac{1}{x} \end{array}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D de f puis détermine les limites de f aux bornes de D.
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par
$g : x \longmapsto \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.
Étudie les variations de g. Déduis-en le signe de g.
3. (a) Montre que f admet un prolongement par continuité en -1 et détermine son prolongement h.
   (b) Étudie la dérivabilité de h en -1.
   (c) Étudie la fonction h et trace sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

✂ ....

Activité de réinvestissement 4

On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \end{array}$.

1. Étudie la fonction f et trace sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par
$g : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.
Montre que courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de g et la courbe $(\mathscr{C})$ de f sont symétriques par rapport au point $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$. Construis $(\mathscr{C}')$.

✂ ....

Activité de réinvestissement

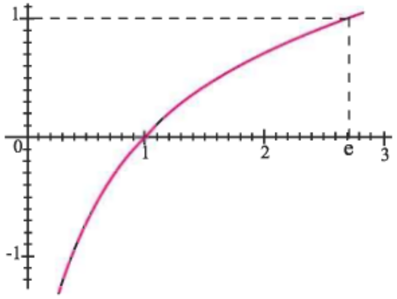
1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$.
   (a) Étudie les variations de f
   (b) Montre que l'équation $f(x) = 0$ dans $]0; +\infty[$ admet une unique solution ℓ puis détermine l'entier n tel que $\ell \in]n; n+1[$.
   (c) Détermine le signe de $f(x)$
2. g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par
$$g(x) = \begin{cases} -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x & ; \text{ si } x > 0 \\ 0 & ; \text{ si } x = 0 \end{cases}$$
   (a) Étudie la continuité et a dérivabilité de g en 0
   (b) Montre que $\forall x > 0,\ g'(x) = xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (c) Montre que $g\left(\dfrac{1}{\ell}\right) = \dfrac{1+4\ell}{8\ell^2}$
   (d) Achève l'étude des variations de g
   (e) Donne les équations des tangentes à la courbe représentative Γ de g aux points d'abscisses 0 ; 1 et $\dfrac{1}{\ell}$ Construis dans le même plan muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe Γ et celle de la fonction définie par $x \longmapsto g(x+1)$

2.7 Séquence : Fonctions exponentielles

2.7.1 Fonction exponentielle népérienne

Activité 1 La trajectoire de l'un des cauris jetés, caractérisée par la courbe de la fonction ln .

1. Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction logarithme népérien.
Donner graphiquement une valeur approchée de l'antécédent de chacun des réels $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. Montrer que la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ admet une fonction réciproque que l'on désignera par exp. Tracer la courbe représentative de la fonction exp.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction exp et ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Que valent $\exp(0)$, $\exp(1)$, $\exp(2)$ et $\exp(-1)$?



✂ ....

2.7.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1 La **fonction exponentielle népérienne** ou simplement **fonction exponentielle** notée exp est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ln.

on a : $\ln : \left]0\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln x$ alors

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \left]0\,;+\infty\right[$, $x \longmapsto \exp(x)$

Par définition on a donc, pour tout nombre y strictement positif :

$$y = \exp(x) \iff \ln(y) = \ln(\exp(x)) = x$$

De la définition précédente on peut déduire les premières propriétés suivantes, :

Propriété 1

— $\exp(0) = 1$;

— $\exp(1) = e$;

— Comme la fonction logarithme est définie sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$; en particulier $\exp(x) > 0$ pour tout réel x ;

— Les fonctions exponentielle et logarithme sont des fonctions dites *réciproques* car, par définition, on a :
$\ln(\exp(x)) = x$ pour tout réel x et $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout réel $x > 0$;

— $\exp(x) = \exp(y) \iff x = y$;
En effet, $\exp(x) = \exp(y) \iff \ln(\exp(x)) = \ln(\exp(y)) \iff x = y$.

Notation $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\ln(\mathrm{e}^r) = r$, alors $\exp(\mathrm{e}^r) = r$ d'où $\exp(r) = \mathrm{e}^r$.
On convient de noter pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

Propriété 2

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$

— $\left(y \in \left]0\,;+\infty\right[\text{ et } x = \ln y\right) \iff (x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \mathrm{e}^x)$

— La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

  — $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$

  — $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$

  — $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \iff a \leqslant b$

— La courbe de la fonction exp est le symétrique de celle de ln par rapport à la première bissectrice [2]

2.7.1.2 Étude de la fonction exp

— $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \implies \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \implies \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

— ln est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $\ln' x \neq 0$ alors $\exp(\ln^{-1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \dfrac{1}{\ln'(\exp(x))} = \dfrac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$

— Tableau de variation de exp

2. axe d'équation $y = x$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	e $\nearrow$	$+\infty$

REMARQUE
La fonction exp est égale à sa fonction dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

.
Il en résulte que les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction exp sont les fonctions $x \longmapsto \exp(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Activité 2 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Justifie que $\exp \circ u$ est dérivable sur I et détermine sa dérivée
✂ ....

Propriété 3
(1) Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\exp \circ u$ encore notée e^u est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times (\exp \circ u)(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$$

On note $(\exp \circ u)' = u' \times \exp \circ u$ ou encore $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
Il en résulte :
(2) Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet pour primitives sur I les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$

2.7.1.3 Propriétés de la fonction exp

Activité 3

1. a et b sont deux nombres réels et r un nombre rationnel. Démontre que
   (a) $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$ (b) $\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$
   (c) $\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$ (d) $(\mathrm{e}^a)^r = \mathrm{e}^{ar}$

2. (a) En posant $y = \mathrm{e}^x$ calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$
   (b) Soit $x_o \in \mathbb{R}$, calcule $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_o}}{x - x_o}$
   (c) Déduis-en $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$
   (d) Démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\ln x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

✂ ....

Propriété 4 Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

$\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$	ou	$\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)$
$\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$	ou	$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
$\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$	ou	$\frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b)$
$(\mathrm{e}^a)^r = \mathrm{e}^{ar}$	ou	$(\exp(a))^r = \exp(ar)$

Propriété 5

— $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\ln x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$
— $\lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a}{x - a} = \mathrm{e}^a$
— $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$
— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$

Retenons

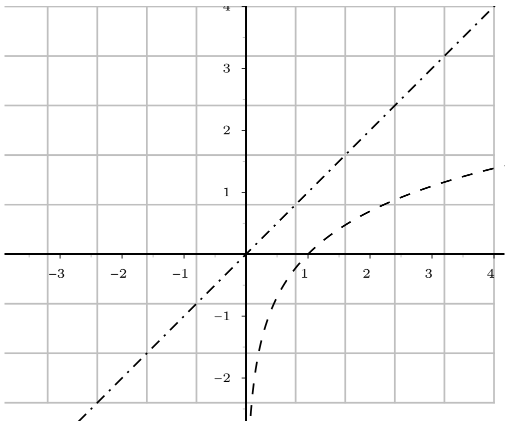
❶ La courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ de la fonction exp admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $+\infty$ et l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.

❷ $\mathscr{C}_{\exp}$ est le symétrique de celle de ln par rapport à la première bissectrice[3]

❸ La courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ est au-dessus de la tangent en chacun de ses points.($\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp''(x) > 0$)

- La tangente à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \mathrm{e}^x + 1$.
- La tangente à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point d'abscisse a pour équation $y = e\,x$.

3. axe d'équation $y = x$



Activité 4

1. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations d'inconnues x suivantes :

   (a) $e^x = 2$ (b) $e^{2x} - 9 = 0$ (c) $e^{\frac{x+1}{2x-3}} = 7$

   (d) $e^{2x} + 3e^x - 10 = 0$ (e) $e^{x^2} = (e^2)^3 e^{-x}$ (f) $e^{2x} - 3 < 0$ (g) $e^x < \frac{1}{e^x}$

   (h) $e^{2x} + 3e^x - 10 < 0$ (i) $(e^x)^3 < e^{x^3}$ (j) $(e^x)^3 \geqslant e^{x+4}$ (k) $(e^x - 1)\,e^x > e^x - 1$

2. Détermine un intervalle I sur lequel la fonction f est dérivable et calcule $f'(x)$ pour tout $x \in$ I dans chacun des cas suivants :

   (a) $f\colon x \longmapsto (x^2 - 2x)e^x$ (b) $f\colon x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x - x}$ (c) $f\colon x \longmapsto x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$

   (d) $f\colon x \longmapsto \exp\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$ (e) $f\colon x \longmapsto \exp(\tan x)$

3. Détermine un intervalle I sur lequel la fonction f admet de primitives et détermine les primitives de f sur I dans chacun des cas suivants :

   (a) $f\colon x \longmapsto e^{2x-1}$ (b) $f\colon x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

   (c) $f\colon x \longmapsto \frac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$ (d) $f\colon x \longmapsto \sin x \exp(\cos x)$

4. Soient les fonctions numériques de la variable réelle $f : x \longmapsto x^2 e^{2x}$ et $g : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

   (a) Détermine a et b pour que g soit une primitive de f.

   (b) Déduis-en la primitive F de f qui s'annule en 0.

5. Calcule les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - x)$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)$ (e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{e^{x+1} - 1}{x+1}$

   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left|e^x - e^{\sqrt{x}}\right|$

✂ ....

Activité de réinvestissement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|}\,e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f en tout réel différent de 0 et de 1.
   b. Etudier la continuité de f en 0 et en 1.
   c. Etudier la dérivabilité de f en 1.
   d. Montrer que f est dérivable à gauche en 0.
2. a. Pour tout x non nul et différent de 1, calculer $\ln(f(x))$ et en déduire $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
   b. Etudier le sens de variation de f.
3. Etudier la limite de $f(x)$, puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter.
4. Dresser le tableau de variation de f puis représenter graphiquement f.

✂ ....

2.7.2 Généralités des fonctions exponentielles

Notation Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre rationnel r, on a : $\ln(a^r) = r\ln a$, alors $e^{r\ln a} = a^r$. Or $e^{x\ln a}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc :

Définition 2 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

La **puissance de** a **d'exposant** b, noté a^b est définie par $a^b = e^{b\ln a}$

Exemple

$3^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{2}\ln 3}$; $\forall x \in \mathbb{R},\ 2^x = e^{x\ln 2}$; $\forall x > 0,\ x^{-1,5} = e^{-1,5\ln x}$.

2.7.2.1 Fonction exponentielle de base a

Définition 3 Soit a un nombre réel strictement positif ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On appelle **fonction exponentielle de base** a la fonction notée $\exp_a$ définie par :

$$\begin{array}{llll} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a} \end{array}$$

Propriété 6 Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, pour tous nombres réels x et y,

- $\ln(a^x) = x\ln(a)$
- $a^x \times b^x = (ab)^x$
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Remarque

— La fonction $\exp_e$ est la fonction exponentielle népérienne

— La fonction $\exp_{10}$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme décimal.

— la fonction $\exp_1$ est la fonction constante $x \longmapsto 1$

Étude de la fonction $\exp_a$

Comme $a^x = e^{x\ln a}$, $\exp_a$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :
$\exp'_a(x) = \ln a \times \exp_a(x\ln a) = \ln a \times a^x$.
Le signe $\exp'_a(x)$ dépend donc du signe de $\ln a$. On a alors :

⋆ si $0 < a < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'_a(x) < 0$. La fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

⋆ si $a > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'_a(x) > 0$. La fonction $\exp_a$ est est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites en l'infini

• $a > 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

Par composition, on a

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

De même, on montre que :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

• $0 < a < 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

Par composition, on a

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

De même, on montre que :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

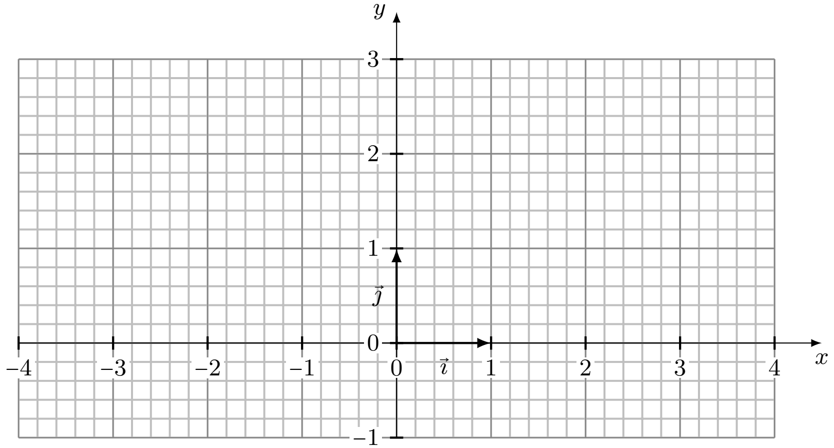
Tableaux des variations

1^{er} cas : $0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'_a(x)$		$-$		
$\exp_a(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	a ↘	0

2^{e} cas : $a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'_a(x)$		$+$		
$\exp_a(x)$	0 ↗	1 ↗	a ↗	$+\infty$



Remarque

Les courbes représentatives des fonctions : $x \longmapsto a^x$ et $x \longmapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques d'axe l'axe des abscisses (droite d'équation $x = 0$).
En effet $a^x = \cdots$ et $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \cdots = \cdots$.

Propriété 7 $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

❶ a étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, la fonction $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$:

❷ $(a^x = a^y) \iff (x = y)$

❸ si $0 < a < 1$, alors $[(a^x < a^y)] \iff (x > y)$

❹ si $a > 1$, alors $[(a^x < a^y)] \iff (x < y)$

❺ Les fonctions $\exp_a : x \longmapsto a^x$ admettent pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{\ln a}a^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2.7.2.2 Fonction puissance

Définition 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** α, toute fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Étude de la fonction $\exp_a$

Comme $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, f_a est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} \times e^{\alpha \ln x} = \dfrac{\alpha}{x} \times x^\alpha$.

Le signe $f'_\alpha(x)$ dépend donc du signe de α. On a alors :

- ⋆ si $\alpha < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_\alpha(x) < 0$. La fonction f'_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ⋆ si $\alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_\alpha(x) > 0$. La fonction f'_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Limites en l'infini

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

❶ si $\alpha > 0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$

❷ si $\alpha < 0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$

Remarque

Lorsque $\alpha > 0$, d_α admet un prolongement par continuité en 0.

Propriété 8 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln(x) = 0$; $r \in \mathbb{Q}_+^*$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^r} = 0$; $r \in \mathbb{Q}_+^*$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = +\infty$; $r \in \mathbb{Q}_+^*$

Tableaux des variations et courbes

$\alpha < 0$

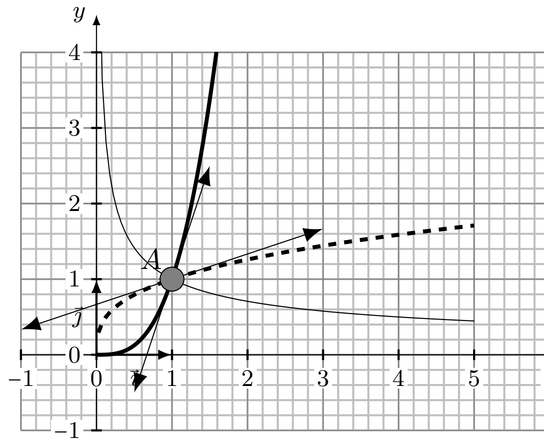
x	0		1		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖		$-$		
$f_\alpha(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0

$\alpha > 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	0		$+$		
$f_\alpha(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

$0 < \alpha < 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖		$+$		
$f_\alpha(x)$	‖ 0	↗	1	↗	$+\infty$



Propriété 9

① Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ un nombre réel non nul. La fonction puissance d'exposant α est une bijection strictement de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$

② Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $(x; y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

— $(x^\alpha = y^\alpha) \iff (x = y)$

— si $\alpha < 0$, alors $(x^\alpha < y^\alpha) \iff (x > y)$

— si $\alpha > 0$, alors $(x^\alpha < y^\alpha) \iff (x < y)$

Propriété 10

① Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$

— La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_\alpha(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

— si g est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors la fonction g^α est dérivable sur K et on a $\forall x \in K, (g^\alpha)'(x) = \alpha g'(x) \times g^{\alpha-1}(x)$

② Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

— Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

— Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors une primitive sur K de la fonction $u'u^\alpha$ est la fonction $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

2.7.2.3 Fonctions u^α et u^f

Soit u et f deux fonctions d'ensembles de définitions respectifs $\mathcal{D}u$ et $\mathcal{D}f$ et $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$.

— La fonction u^α a pour ensemble de définition $\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D}u \mid u(x) > 0\}$ et $\forall x \in \mathcal{D},\ u(x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln u(x)}$

— La fonction u^f a pour ensemble de définition $\mathbb{E} = \{x \in \mathcal{D}u \cap \mathcal{D}f \mid u(x) > 0\}$ et $\forall x \in \mathbb{E},\ u^{f(x)} = \mathrm{e}^{f(x)\ln(u(x))}$

— Si u et f sont dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{E}$, alors la fonction u^f est dérivable sur I et on a : $\forall x \in \mathrm{I},\ \left(u^f\right)'(x) = [f(x)\ln(u(x))]'\,\mathrm{e}^{f(x)\ln(u(x))}$

2.7.2.4 Croissances comparées

On admet les résultats suivants :

❶ $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a > 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$

En particulier ....

❷ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a > 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\log_a(x)}{x^\alpha}\right) = 0\,;\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(|x|^\alpha a^x\right) = 0$

En particulier ....

Activité de réinvestissement 1

Soit f, et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^{\frac{2}{3}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = x^{\frac{10}{3}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

1. (a) Montre que f et g sont continues en 0.
   (b) Étudie la dérivabilité de f et g à droite en 0.
2. Étudie et représente les fonctions f, et g.
3. Montre que f, et g sont des bijections et détermine leurs fonctions réciproques.
4. Étudie et représente la fonction $h : x \longmapsto x^{-\frac{4}{3}}$.

✂ ....

Activité d'approfondissement

A) Calcule les limites ci-après :

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{x^2-2x} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} 2^{x^2-2x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \quad , \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$$

B) On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = x^{\frac{1}{x-1}} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ f(1) = e \end{cases}$

On donne le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$:
$\ln(1+t) \simeq t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

1. Démontre que la fonction $u : x \longmapsto 1 - \frac{1}{x} - \ln x$ admet sur $\left]0\,;+\infty\right[$ un maximum global et précise la valeur de ce maximum.
2. Déduis-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
3. (a) Étudie la continuité de f en 1.
   (b) Justifie que pou tout $x > 0\,, x \neq 1$, on a
   $\dfrac{f(x)-\mathrm{e}}{x-1} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x-1}} - \mathrm{e}}{\frac{\ln x}{x-1} - 1} \times \dfrac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1}$.
   (c) Déduis-en l'étude de la dérivabilité de f en 1.(tu pourras utilise le développement limité d'ordre 3 de la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ en 0)
   (d) Étudie les variations de f.
   (e) Construis la courbe $\mathscr{C}$ de f ainsi que sa tangente au point d'abscisse 1, dans un repère orthonormé.

Activité d'approfondissement

Soit la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \end{array}$.

1. Montre que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que $-1 < f(x) < 1$ pour tout réel x.
2. (a) Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ pour tout $,x \in \mathbb{R}$.
   (b) Déduis-en le signe de $f'(x)$.
3. Étudie les variations de f.
4. Montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur in intervalle J que tu préciseras. Explicite f^{-1}.
5. (a) Écris une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point O où $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.
   (b) Étudie la position de $(\mathcal{C})$ et (T).
   (c) Trace $(\mathcal{C})$ et (T).

✂ ....

Activité de réinvestissement

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(\,\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$ du plan.

1. Dresse le tableau de variation de f.
2. (a) Montre que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes obliques d ?équations respectives : $\Delta\,:\,y = x$ et $\Delta'\,:\,y = x + 1$.

   (b) Montre que $\Omega(0\,;\,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

   (a) Montre que g réalise une bijection de $\left]0\,;+\infty\right[$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déduis-en que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution et α et que $\ln 2 < \alpha < 1$.

   (c) Montre que $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$.

   (d) Écris une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse α.

   (e) Tracer (T), Δ Δ' et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(\,\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$. (Prends $\alpha = 0,8$).
4. On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative.

   (a) Montre que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calcule $(g^{-1})'(0)$ en fonction de α.

   (b) La courbe $(\mathcal{C}')$ coupe l'axe $(\,\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,)$ en un point I, écris une équation de la tangente (T ?) à $(\mathcal{C}')$ en I.

   (c) Trace $(\mathcal{C}')$ et (T) dans le même repère

2.8 Séquence : Calcul intégral

2.8.1 Généralités

Activité 1 Après les connaissances établies sur la notion de primitives de fonctions, Dansou affirme « si F et G sont des primitives d'une fonction f sur un intervalle I, alors pour tous nombres réels a et b de I, on a : $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ ».
Justifie cette affirmation de Dansou.

✂ ....

Définition 1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I.
On appelle **intégrale** de a à b de la fonction f, le nombre réel $F(b) - F(a)$ et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Notation

① $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)dx$ ».
Dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
- les nombres réels a et b sont les **bornes** de cette intégrale.
- x est une **variable neutre** et donc être remplacée par n'importe quelle lettre à l'exception des lettres déjà utilisées dans l'intégrale c-à-d a, b, f et d. On a donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(i)\,\mathrm{d}i = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(\ell)\,\mathrm{d}\ell \cdots$

② Si F est une primitive de f sur un intervalle I et a et b deux éléments de I, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi notée $[F(x)]_a^b$.

③ $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

Activité 2 calcule les intégrales suivantes :

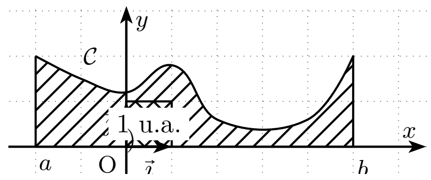
1. $\int_0^\pi \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{-1}^3 (5t^2 + 3t - 1)\,\mathrm{d}t$
3. $\int_1^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$
4. $\int_{-1}^1 \frac{4x^3}{(x^4+1)^4}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^\pi \sin^3 t\,\mathrm{d}t$
8. $\int_0^1 2^t\,\mathrm{d}t$.

✂ ....

2.8.2 Interprétation graphique

Définition 2 Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, a et b deux éléments de I avec $a < b$.
Le nombre réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur de l'aire en unité d'aire de la région $\mathscr{D}$ délimitée par la courbe de f, l'ae des abscisses et les droites d'équations $x = a$, $x = b$.

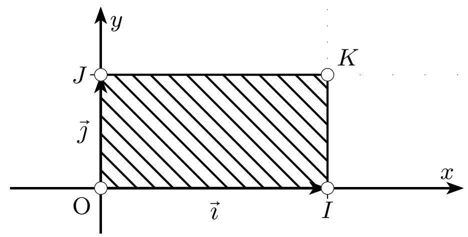
$\mathscr{D} = \{\mathrm{M}(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$



Remarque

Si le plan est muni du repère orthogonal (O ; I, J), une unité d'aire est l'aire du rectangle construit sur les côtés [OI] et [OJ].

Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire(OIKJ) = 1 u.a.



Remarque

- Si OIKJ est un carré , le repère est alors orthonormal.
- Si l'on a, par exemple, $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

2.8.3 Propriétés algébriques de l'intégrale

Activité 3 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a , b et c des éléments de I.
Démontre chacune des relations suivantes :

1. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$

2. $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
3. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$
4. $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

✂ ....

Propriété 1

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I contenant les nombres réels a, b et c.
F et G les primitives respectives de f et g sur I.

① $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$

② $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$

③ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$: Relation de Chasles.

④ $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

⑤ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Activité 4

1. Calcule : $\int_0^3 |x-1|\,\mathrm{d}x$; et $\int_1^2 \frac{t^2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{2t+1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$
2. Soit les intégrales $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2}\,\mathrm{d}x$.
   Calcule I+2J et 2J-I. Déduis-en les valeurs de I et J.
3. Linéarise $\cos^6 t$, pour tout réel t.
   Calcule alors $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t\,\mathrm{d}t$.

✂ ....

Remarque

— Plus généralement, une fonction qui se présente comme un polynôme où les indéterminées sont les fonctions cos et sin est appelé polynôme trigonométrique.
— Pour intégrer un polynôme trigonométrique, on peut le linéariser ; c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions $t \longmapsto \cos(nt)$ et $t \longmapsto \sin(nt)$ où n désigne un entier naturel.

Activité 5 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a , b deux éléments de I.

1. On suppose que f est positive sur I et $a \leq b$. Montre que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
2. On suppose que $f \leq g$ sur I et $a \leq b$. Montre que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
3. On suppose que $a \leq b$. Démontre que : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

✂ ....

Propriété 2 Comparaison d'intégrales.

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

① Si $a \leq b$ et f est positive sur $[a;b]$ et , alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

② Si $a \leq b$ et $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

③ Si $a \leq b$, alors $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Activité 6

1. Montre que $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} \geq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,\mathrm{d}x$.
2. (a) Justifie que pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, : $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$.
   (b) Montre que $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, : $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 < \frac{1}{1-x}$.
   (c) Montre que $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x < \ln 2$.

✂ ....

Activité 7 Soit f une fonction continue sur un intervalle I, symétrique par rapport à 0, et a un élément de I.

1. Démontre , en posant $t = -x$,que :
   (a) Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Si f est impaire, alors et $\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Déduis-en que Si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et Si f est impaire $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

✂ ....

Propriété 3 Intégrale de fonction paire et impaire.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.

— Si f est **paire** sur I, alors pour tout élément a de I, on a :
$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$

— Si f est **impaire** sur I, alors pour tout élément a de I, on a :
$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$

Propriété 4 Intégrale d'une fonction périodique.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique et périodique de période T.
Pour tous nombres réels a et b, on a :

① $\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$

② $\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$

Activité 8 Calcule les intégrales suivantes

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} x^5 \sin^6 x\,\mathrm{d}x\ ,\ \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{t^6+1}\,\mathrm{d}t\ ,\ \int_{-5\pi}^{5\pi} x^{100}\cos^{100}(x)\,\mathrm{d}x\ ,\ \int_{-1\pi}^{1\pi} \left|t^3+t\right|\mathrm{d}t\,.$$

✂ ....

Activité 9 Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de fonctions dérivées u' et v' continues sur I, a et b deux éléments de I.
Démontre que $\int_{a}^{b} u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\times v(t)]_a^b - \int_{a}^{b} u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t$

✂ ....

Propriété 5 Formule d'intégration par parties.
Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I dont les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur I, alors pour tous éléments a et b de I on a :
$\int_{a}^{b} u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\times v(t)]_a^b - \int_{a}^{b} u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t$

Activité 10 Calcule, à l'aide d'intégrations par partie, les intégrales suivantes, :

1. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos t\,\mathrm{d}t$,
3. $\int_{1}^{x} t\ln t\,\mathrm{d}t\,, x>0$,
4. $\int_{0}^{-1} (3t^2-t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$,
5. $\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t$,
6. $I_2 = \int_{1}^{x} \ln t\,\mathrm{d}t$ avec $x>0$.

✂ ....

Intégration par changement de variable affine

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les nombres réels n et m et telle que , pour tout $x\in$ I, $(ax+b)\in$ I pout tous réels a et b.
On a : $\int_{n}^{m} f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \int_{am+b}^{an+b} f(u)\,\mathrm{d}u$
On pose $u = ax+b$

Exemple

Calcule $I = \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,\mathrm{d}x$

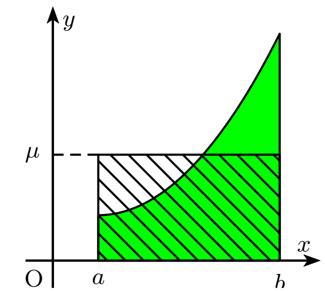
Activité 11 Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a\le b$, m et M deux nombres réels tels que pour tout $t\in\left[a\,;b\right]$, $m\leqslant f(t)\leqslant M$.
Démontre que $m(b-a)\leqslant \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$

✂ ....

Propriété 6 Inégalité de la moyenne.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a\le b$, ,m et M deux nombres réels tels que pour tout élément, t, de $\left[a\,;b\right]$, $m\leqslant f(t)\leqslant M$. Alors

$$m(b-a)\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$$

Interprétation graphique : Lorsque la fonction f est positive sur $[a\,,b]$, ce théorème signifie que l'aire du domaine hachuré est encadrée entre les aires des rectangles de base, $b-a$, et de hauteurs m et M.



Conséquence

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a\le b$, et M un nombres réel tel que pour tout $t\in\left[a\,;b\right]$, | $|f(t)|\leqslant M$. Alors

$$\left|\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M\,|b-a|$$

Définition 3 La **valeur moyenne** d'une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Activité 12

1. soit la fonction f définie sur $\left[0;2\right]$ pzr $f(x) = 3x - 1$.

   Calcule la valeur moyenne de f sur $\left[0;2\right]$, puis la comparer à $f(1)$.

2. Démontre que :

$$0,5 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq 1 \quad ,\text{et} \quad \frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

✂ ....

2.8.4 Applications du calcul intégral

2.8.4.1 Calcul d'aires

Activité 13 Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$, ,$(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs représentations graphiques respectives.

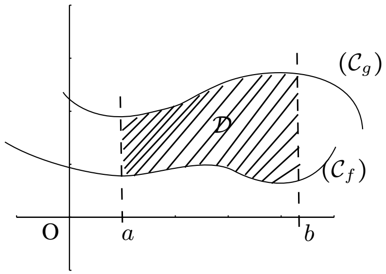
On pose

$\mathcal{D}_1 = \{\mathrm{M}(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et

$\mathcal{D}_2 = \{\mathrm{M}(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}$.

1. Exprime l'aire de $\mathcal{D}$ en fonction de celle de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2. Déduis-en l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à partir des fonctions f et g.



✂ ....

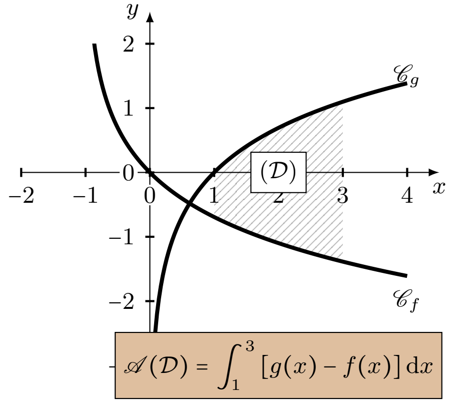
On déduit de façon générale :

Propriété 7

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes respectives de f et g dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

Lorsque $f \leqslant g$ sur $\left[a\,;b\right]$, alors l'aire du domaine $(\mathcal{D})$ du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est (en unité d'aire) :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t.$



En général, on a

Définition 4 Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f et g deux fonctions continues sur $\left[a\,;b\right]$.

L'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$.

L'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Exemple

Activité 14 Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité $2\,cm$.

1. f et g sont deux fonctions définies sur $\left[-\frac{1}{2}\,;1\right]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes

   Calcule l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.

2. Calcule, dans chacun des cas suivants, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de h, l'axe des abscisses , les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

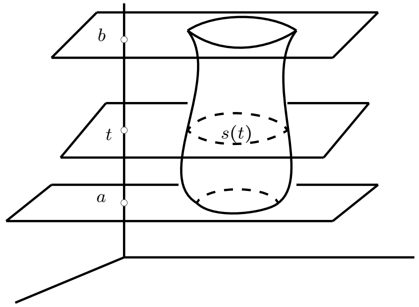
   $h : x \longmapsto \sin(2x) \quad , a = -\frac{\pi}{3}\,,\ b = \frac{\pi}{4} \quad , \quad h : x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^4} \quad , a = -2\,,\ b = 1$

✂ ....

2.8.4.2 Intégrale et volume

Propriété 8

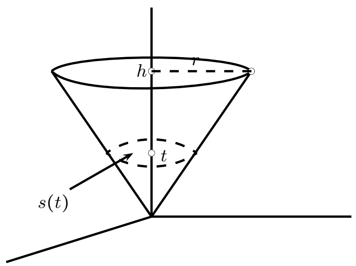
L'espace est muni du repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Le volume $\mathcal{V}$ (en unité de volume) de la partie d'un solide (Σ) limitée par les plans $(\mathtt{P}_a): z=a$ et $(\mathtt{P}_b): z=b$, $(a<b)$, est déterminé par $\mathcal{V}=\int_a^b s(t)\,\mathrm{d}t$ où $s(t)$ est l'aire de la section du solide par le plan $(\mathtt{P}_t): z=t$ / $a\leqslant t\leqslant b$ et la fonction $t\longmapsto s(t)$ est continue sur $\left[a\,;b\right]$



2.8.4.2.1 *Volume d'un cône de révolution de rayon r et de hauteur h*

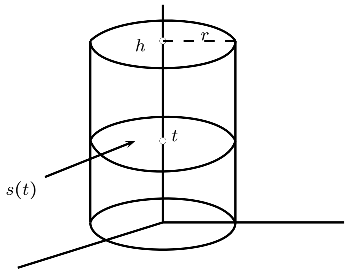
$s(t)$ est l'aire d'un disque de rayon $r(t)$. D'après la conséquence de la propriété de Thalès on peut écrire $\dfrac{t}{h}=\dfrac{r(t)}{r}$ ce qui donne $r(t)=\dfrac{r}{h}t$ d'où

$\mathcal{V}=\int_0^h s(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^h \pi\,(r(t))^2\,\mathrm{d}t=$
$\int_0^h \pi\left(\dfrac{r}{h}t\right)^2\mathrm{d}t=$ ....



2.8.4.2.2 *Volume d'un cylindre de révolution : rayon $=r$; hauteur h*

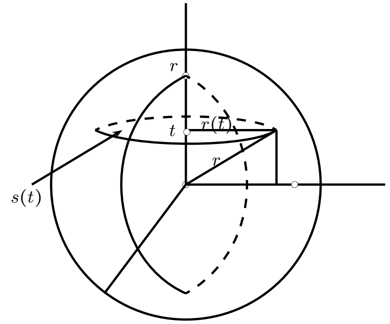
$s(t)$ est l'aire d'un disque de rayon r, alors on a : $s(t)=\pi r^2$. On obtient donc $\mathcal{V}=\int_0^h s(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^h \pi r^2\,\mathrm{d}t=\pi r^2\int_0^h \mathrm{d}t$
$\mathcal{V}=\pi r^2[t]_0^h=$ ....



2.8.4.2.3 *Volume d'une sphère : rayon r, centre A*

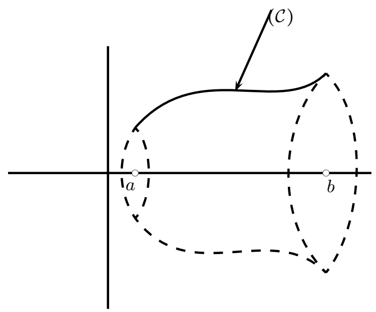
$s(t)$ est l'aire d'un disque de rayon $r(t)=\sqrt{r^2-t^2}$ (propriété de Pythagore), alors on a : $s(t)=\pi(r^2-t^2)$. On obtient $\mathcal{V}=\int_{-r}^{r} s(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-t^2)\,\mathrm{d}t=$

$\mathcal{V}=$ .... $=$ ....



Propriété 9

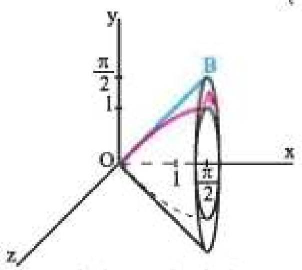
Soit f une fonction continue sur un intervalle K, $a;b$ deux éléments de K tels que $a<b$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
La rotation complète de $(\mathcal{C})$ autour de l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath})$ et dans l'intervalle $\left[a\,;b\right]$, engendre un solide $(\mathcal{S})$.
Le volume $\mathcal{V}$ de ce solide $(\mathcal{S})$ est $\mathcal{V}=\int_a^b \pi\,(f(t))^2\,\mathrm{d}t$



35 Soit $C = \left\{M(x, y) \text{ tels que } y = \sin x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$

et $C' = \left\{M(x, y) \text{ tels que } y = x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

On note S et S' les solides obtenus respectivement par rotation de C et C' autour de l'axe (Ox).



Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides S et S'.

Activité 15

✂ ....

Activité 16 Soit la fonction $f : \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\longrightarrow [1; +\infty[$.
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montre que f est une bijection.
2. Montre que la réciproque f^{-1} est dérivable sur $]1; +\infty[$ et calcule $\left(f^{-1}\right)'(x)$.
3. Calcule l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$.

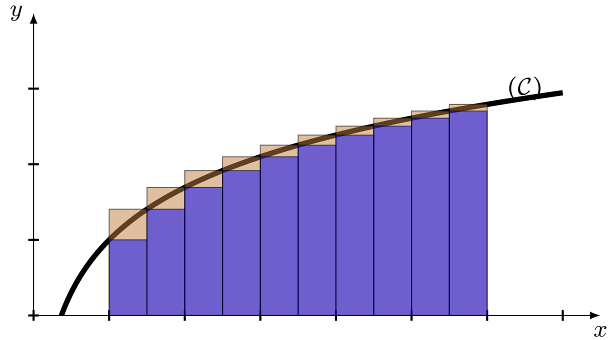
✂ ....

2.8.5 valeurs approchées d'une intégrale

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. f une fonction continue et positive sur un intervalle K ; a et b deux éléments de K. $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une primitive de f sur $[a; b]$, on peut toute fois calculer une valeur approchée de $\mathcal{A}$ par les méthodes des rectangles ou des trapèzes en découpant $[a; b]$ en n $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$ intervalles de même amplitude $\ell = \dfrac{b-a}{n}$ de bornes $x_0 = a; x_1 = a + \ell; \cdots; x_n = a + n\ell = b$.

2.8.5.1 Méthode des rectangles



Une valeur approchée de $\mathcal{A}$ est :

$\mathcal{A}_1 = \dfrac{b-a}{n}\left[f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$ ou $\mathcal{A}_2 = \dfrac{b-a}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(b)\right)$

Remarque

- Si f est croissante sur $[a; b]$, on a $\mathcal{A}_1 \le \mathcal{A} \le \mathcal{A}_2$.
- Si f est décroissante sur $[a; b]$, alors $\mathcal{A}_2 \ge \mathcal{A} \le \mathcal{A}_1$.

2.8.5.2 méthode des trapèzes

Une valeur approchée de $\mathcal{A}$ par la méthode des trapèzes est :

$$\frac{1}{2}\ell\left[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2).$$

Activité de réinvestissement

Soit $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}} \sqrt{1+t^2}\,dt$.

Calcule une valeur approchée de I par la méthode des rectangles en subdivisant l'intervalle $\left]\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$ en cinq segment de même amplitude.

Donne une valeur approchée de I par la méthode des trapèzes.

✂ ....

Activité 17 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.
Justifie que la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

✂ ....

Propriété 10

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.
La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Propriété 11 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. la fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I},\ F'(x) = f(x)$.

Activité 18 Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \left[-1;1\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_1^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$

Justifie que f est dérivable sur $\left[-1;1\right]$ puis calcule $f'(x)$ pour tout $x \in \left[-1;1\right]$.

✂ ....

Propriété 12

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, u une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ et a un élément de I, alors la fonction F définie sur J par
$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et $\forall x \in \mathrm{J},\ F'(x) = u'(x) \times f(u(x))$

✂ ....

Activité d'approfondissement

On pose

$$H(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad x \in \left]0;+\infty\right[.$$

1. Justifie que H est définie sur $\left]0;+\infty\right[$.
2. Soit U une primitive sur $\left]0;+\infty\right[$ de la fonction $u : t \longmapsto \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$.
   (a) En exprimant $H(x)$ en fonction de $U(x)$ et $U(2x)$, démontre que H est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et que :
   $$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \quad H'(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{2x} - 1}(3 - \mathrm{e}^x).$$
   (b) Étudie le sens des variations de H.
3. Détermine un encadrement de $H(\ln 3)$ par la méthodes, des rectangles en utilisant la subdivision $\left(\ln 3;\ \frac{4}{3}\ln 3;\ \frac{5}{3}\ln 3;\ 2\ln 3\right)$. Tu utiliseras des valeurs approchées à 10^{-3} près des images par u des termes de la subdivision .

✂ ....

Activité de réinvestissement

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudie la parité de f.
2. Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et détermine $f'(x)$.
3. Montre que $\forall\, x \geq 0$, on a : $f(x) \leq \int_0^x \frac{1}{e}\,\mathrm{d}t$. Déduis-en la position de la courbe $\mathcal{C}$ de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse nulle.
4. (a) Prouve que $\forall\, x \geq 0$, on a : $f(x) \leq \int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$, Déduis que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déduis que f possède une limite ℓ quant $x, \longmapsto +\infty$.
   (c) Démontre que $\ell \leq \dfrac{1}{2}$.
   (d) Démontre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que tu préciseras.
5. Trace $\mathcal{C}$

✂ ....

Activité de réinvestissement

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie par
$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montre que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis détermine $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Activité 19 CIAM SM exo 54 Page 319

2.9 Séquence : Équations différentielles

Activité 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5\mathrm{e}^{-x}$. On note f' sa dérivée.

1. Détermine une relation entre f' et f.
2. Donne d'autres fonctions qui vérifient la relation trouvée.

✂ ....

2.9.1 Généralités

Définition 1 On appelle **équation différentielle** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute relation liant une fonction inconnue f et ses dérivées successives f', f'', $f^{(3)}, \cdots$
Dans une équation différentielle, la fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives y', $y'' \cdots$.
Lorsque le plus grand ordre de dérivée intervenant dans une équation différentielle est n, on dit que l'équation différentielle est d'ordre n.

Définition 2 Étant donné une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I, on appelle **solution** de cette équation différentielle toute fonction f définie sur I , n fois dérivable sur I et vérifiant l'équation différentielle donnée pour tout x de I.

Remarque

Si u est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors l'équation différentielle $y' = u(x)$ admet comme solution toute fonction primitive de u sur I.

Exemple

$(\mathbb{E})\colon y' = 2x - 3$

Définition 3 Soit $(\mathbb{E})$ une équation différentielle.

- **Résoudre** ou **intégrer** une équation différentielle sur un intervalle I, revient à rechercher toutes les fonctions f définies sur I et vérifiant l'équation différentielle $(\mathbb{E})$.
- Toute fonction f solution de l'équation différentielle $(\mathbb{E})$ est encore appelée **intégrale** de l'équation différentielle $(\mathbb{E})$ et la courbe représentative de f est appelée **courbe intégrale** de l'équation différentielle $(\mathbb{E})$.

2.9.2 Éq diff linéaire du 1er ordre à coef cst sans 2nd mbre

Définition 4 Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant sans second membre est une équation différentielle $\mathbb{E}$ pouvant se mettre sous la forme $ay' + by = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

Activité 2 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et l'équation différentielle $(\mathbb{E})\colon ay' + by = 0$.

1. Détermine la constante réelle r telle que $y = \mathrm{e}^{rx}$ soit une solution de $(\mathbb{E})$.
2. On suppose que $y = z\mathrm{e}^{rx}$ est une solution de $(\mathbb{E})$, avec z une fonction de x. Détermine z.

✂ ....

Propriété 1
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

① Les solutions sur de l'équation différentielle (E) : $ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$ avec k une constante réelle.

② Pour tout couple $(x_o\,;\,y_o)$ de nombres réels, il existe une unique solution de (E) prenant la valeur y_o en x_o.
C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto y_0\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}(x-x_0)}$.

Activité 3

1. Résous sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$(\mathbb{E}_1) : y' + 2y = 0 \quad , \quad (\mathbb{E}_2) : (\ln 2)y' + y = 0 \quad , \quad (\mathbb{E}_4) : 2y' + 5y = 1$$

2. Résous sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(\mathbb{E}_2)\colon y' = (x^2 + 2x + 3)\ln x$.
3. Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Représente graphiquement la fonction f dont la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $\mathrm{A}(1, 2)$ et telle que la tangente en tout point M de $\mathscr{C}_f$ à un coefficient directeur égal au double de l'ordonnée de M.

✂ ....

Remarque

❶ Pour tous nombres réels a et b avec $a \neq 0$, les solutions sur de l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$ sont les fonctions $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a}$ avec k une constante réelle.

❷ Pour tous nombres réels a , b et c avec $a \neq 0$, les solutions sur de l'équation différentielle (E) : $ay' + by = c$ sont les fonctions $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b}$ avec k une constante réelle.

2.9.3 Éq diff linéaire du 2nd ordre à coef cst sans 2nd mbre

Définition 5 Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants "sans second membre" est toute équation différentielle pouvant se mettre sous la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Définition 6 Soit l'équation différentielle $(\mathbb{E})$: $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'équation $(\mathbb{E}')$: $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$ est appelée **équation caractéristique** associée à $(\mathbb{E})$.

Propriété 2
Soit l'équation (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d'équation caractéristique $(\mathrm{E}_c) : ar^2 + br + c = 0$ et Δ le discriminant de E_c).

① Si $\Delta < 0$, alors (E_c) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

② Si $\Delta = 0$, alors(E_c) admet une solution double $r_o - \frac{b}{2a}$ et les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{r_o x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

③ Si $\Delta > 0$, alors (E_c) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet	Alors les solutions de $\mathbb{E}$ sont :
deux solutions réelles r_1 et r_2	$x \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}$ A et B des constantes réelles
une seule solution $r_0 = -\frac{b}{2a}$	$x \longmapsto (Ax + B)\mathrm{e}^{r_0 x}$ A et B des constantes réelles
deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$	$x \longmapsto (A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))\mathrm{e}^{\alpha x}$ A et B des constantes réelles

Propriété 3
Soit l'équation (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d'équation caractéristique $(\mathrm{E}_c) : ar^2 + br + c = 0$ et Δ le discriminant de E_c).

Pour tout triplet de nombres réels $(x_o; y_o; z_o)$ il existe une solution de (E) et une seule vérifiant $y(x_o) = y_o$ et $y'(x_o) = z_o$.

Activité 4 Résous sur I les équations différentielle suivantes :

1. $(\mathbb{E}_1)$: $y'' = 2x$; I=$\mathbb{R}$
2. $(\mathbb{E}_3)$: $g''(x) + \pi^2 g(x) = 0$, qui vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. I=$\mathbb{R}$

✂ ....

Activité 5

1. Linéarise $\cos^4(x)$.
2. Détermine les réels a, b et c pour que la fonction $g : x \longmapsto a\cos(4x) + b\cos(2x) + c$ soit solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y' = \cos^4(x)$.
3. Démontre qu'une f est solution de (E) si, et seulement si la fonction $(f - g)$ est une solution de l'équation différentielle (E'): $y'' + y' = 0$.
4. Déduis-en toutes les solutions de (E), puis celle qui vérifie $y(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

✂ ....

Activité 6

1. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathbb{E})$: $y'' + 2y' + 5y = 0$
2. Détermine la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
   On pose $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$.
3. Démontre que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
4. Explicite $F(x)$.
5. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

✂ ....

Activité d'approfondissement
Une grandeur (non nulle) y évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans.
Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

Activité d'approfondissement

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
   (E) : $y'' + (\ln 4)y' + (\ln^2 2)y = 0$.
   Détermine la solution h de (E) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$.
2. n étant un entier naturel non nul, on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f_n(x) = (x\ln 2 + 2)\cdot 2^{-\frac{x}{2}} + nx - 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ f_n(x) = x^n \cdot 2^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

   (a) Étudie la continuité de f_n en 0.
   (b) Étudie la dérivabilité de f_n en 0.
   (c) Étudie les variations de f_n suivant les valeurs de n.

✂ ....

2.10 Séquence : Suites numériques

Dans toute cette séquence, $\mathbb{E}$ est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ avec la condition que si $k \in \mathbb{E}$, alors $k+1 \in \mathbb{E}$ sauf peut-être pour le plus grand élément de $\mathbb{E}$.

2.10.1 Définitions-notations

Activité 1

Dansou veut savoir si le marché Tokpa s'animera l'un des 3 jours du déroulement du baccalauréat.

Après avoir déterminé le nombre de jour qui sépare la date de consultation de celle du début du baccalauréat prévu pour le 18 Juin. , sa maman l'informe que le marché de Tokpa s'animera deux jours après la date des consultations.

Consignes

On pose $\mathcal{U}_0$ le nombre de jours après où le marché s'est animé pour la première fois après la date des consultations et $\mathcal{U}_n$ le nombre de jours après où le marché s'est animé pour la n−ième fois après la date des consultations.

1. détermine $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, puis l'expression de $\mathcal{U}_n$ en fonction de n .
2. Détermine le nombre de jour qui sépare la date des consultations du début de la composition du baccalauréat.
3. Répond à la préoccupation de Dansou.

✂ ....

Définition 1

Une **suite numérique** est une fonction d'une partie $\mathbb{E}$ de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de nombres réels (généralement).

NOTATION Une suite numérique est souvent notée $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ (où $\mathbb{E}$ est l'ensemble sur lequel elle est définie) ; ou $(\mathcal{V}_n)_{n\geqslant n_0}$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$)

Exemple

$(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(\mathcal{W}_n)_{n\geqslant n_0}$. Dans ce dernier exemple,

— $\mathbb{E} = \{n_0; n_0+1; n_0+2; \cdots\}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

— L'image de n par la suite $(\mathcal{W}_n)$ est notée $\mathcal{W}_n$ et est appelée **terme de rang** n.

— L'expression $\mathcal{W}_n$ est appelée **terme générale** de la suite $(\mathcal{W}_n)_{n\geqslant n_o}$

2.10.2 Détermination d'une suite

▸ Une suite $(\mathcal{U}_n)$ peut-être définie par une formule explicite, c'est-à-dire une expression de u_n en fonction de n $(\mathcal{U}_n = f(n))$.

Exemple : la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 2}$ dont le terme général est $u_n = n - \sqrt{n-2}$ a pour fonction associée la fonction $f : x \longmapsto x - \sqrt{x-2}$?

$u_n = \cdots$. On a $u_2 = \cdots$; $u_7 = \cdots$; $u_{18} = \cdots$.

▸ Une suite $(\mathcal{U}_n)$ peut-être définie par récurrence entre deux termes consécutifs :

$$\begin{cases} \text{le terme initial : } u_{n_0} = a \\ \text{la relation de réccurence : } u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$, où f est une fonction associée à $(\mathcal{U}_n)$.

Exemple : la suite (v_n) telle que $\begin{cases} \mathcal{V}_1 = 2 \\ \mathcal{V}_{n+1} = 1 + \frac{3}{2}\mathcal{V}_n^2 \end{cases}$ est une suite récurrente dont la fonction associée est $f : x \longmapsto 1 + \frac{3}{2}x^2$.

$\mathcal{V}_0$ n'est pas définie. $\mathcal{V}_1 = 2$; $\mathcal{V}_2 = 1 + \frac{3}{2}\mathcal{V}_1 = 7$; $\mathcal{V}_3 = \frac{149}{2}$.

2.10.3 Utilisation du raisonnement par récurrence

Activité 2

1. Soit la suite $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathcal{V}_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_{n+1} = \sqrt{\mathcal{V}_n + 2} \end{cases}$

   Montre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n < 2$.
2. Soit la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{U}_{n+1} = {}^2\mathcal{U}_n - 3 \end{cases}$

   Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = 3 - 2^n$.
3. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

✂ ....

2.10.4 Propriétés des suites numériques

2.10.4.1 Suite bornée

Définition 2 (1) Dire qu'une suite est majorée (respectivement minorée) signifie que l'ensemble des termes de cette suite est majoré (respectivement minoré).

(2) Une suite à la fois majorée et minoré est dite bornée.

Propriété 1

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$, $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$, une suite numérique.

$*$ $(\mathcal{U}_n)$ est majorée sur I, si et seulement si, il existe un réel fixé M tel que : $\forall n \in \mathbb{E}$, $u_n \leq M$. Le réel M est un majorant de U.

$*$ $(\mathcal{U}_n)$ est minorée sur I, si et seulement si, il existe un réel fixé m tel que : $\forall n \in \mathbb{E}$, $u_n \leq m$. Le réel M est un majorant de U.

$*$ $(\mathcal{U}_n)$ est dite positive sur I lorsque : $\forall n \in \mathbb{E}$, $u_n n \geq 0$.

NB : La suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ est bornée si, et seulement si il existe un nombre réel k strictement positif tel que $\forall n \in \mathbb{E}$, $|\mathcal{U}_n| \leqslant k$.

Point-méthode : Pour montrer qu'une suite est minorée ou majorée ou bornée, on utilise en général le raisonnement par récurrence.

Exemple

Montrer que $\forall n \in \mathbb{E}$, $a \leqslant \mathcal{U}_n \leqslant b$.

❶ Différence : on démontre que $u_{n+1} - b \leq 0$ et que $u_{n+1} - a \geq 0$.

❷ récurrence : Si $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$, on utilise les variations de f. Ainsi :

On vérifie que $a \leqslant \mathcal{U}_{n_0} \leqslant b$.

On suppose que pour un entier $k \geqslant n_0$, $a \leqslant \mathcal{U}_k \leqslant b$ et on montre que $a \leqslant \mathcal{U}_{k+1} \leqslant b$.

- $a \leqslant \mathcal{U}_k \leqslant b$ et f croissante, alors $f(a) \leqslant \mathcal{U}_{k+1} \leqslant f(b)$. Puis on vérifie que $a \leqslant f(a) \leqslant \mathcal{U}_{k+1} \leqslant f(b) \leqslant b$
- $a \leqslant \mathcal{U}_k \leqslant b$ et f décroissante, alors $f(b) \leqslant \mathcal{U}_{k+1} \leqslant f(a)$. Puis on vérifie que $a \leqslant f(b) \leqslant \mathcal{U}_{k+1} \leqslant f(a) \leqslant b$.

  Il faut donc montrer que $f(\left[a\,;b\right]) \subset \left[a\,;b\right]$

❸ si $u_n = f(n)$, démontrer que la fonction f est minorée ou majorée ou bornée sur un intervalle du type $\left]a\,;+\infty\right[$ où a avec $a \geq 0$.

Activité 3

1. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n+1}{v_n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

   Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \in \left[0\,;2\right]$.

✂ ....

2.10.4.2 Suites monotones

Définition 3 Soit la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$.

(1) Dire que $(\mathcal{U}_n)$ est **croissante** (resp. **décroissante**) signifie que $(\mathcal{U}_n)$ est une fonction croissante (resp. décroissante).

(2) Les suite décroissante et croissante sont dites monotones.

Propriété 2

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ une suite numérique.

① $(\mathcal{U}_n)$ est croissante $\Longleftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{E}$, $\mathcal{U}_{n+1} \geqslant \mathcal{U}_n$

② $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante $\Longleftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{E}$, $\mathcal{U}_{n+1} \leqslant \mathcal{U}_n$

③ $(\mathcal{U}_n)$ est strictement croissante $\Longleftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{E}$, $\mathcal{U}_{n+1} > \mathcal{U}_n$

④ $(\mathcal{U}_n)$ est strictement décroissante $\Longleftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{E}$, $\mathcal{U}_{n+1} < \mathcal{U}_n$

⑤ $(\mathcal{U}_n)$ est constante $\Longleftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{E}$, $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n$

⑥ $(\mathcal{U}_n)$ est stationnaire lorsqu'il existe un entier $p \in \mathbb{E}$ tel que $\forall n \geqslant p$, $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_p$

<u>Remarque</u>

1. Les suites constantes sont les suites à la fois croissantes et décroissantes.
2. Les suites stationnaires sont les suites constantes à partir d ?un certain indice.
3. Les suites constantes sont des cas particuliers de suites stationnaires.

Point-méthode : Pour étudier la monotonie d'une suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$, soit :

❶ on étudie le signe de $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$,

❷ Si $\mathcal{U}_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{E}$, on compare $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n}$ à 1

- si $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} < 1$, alors $(\mathcal{U}_n)$ est strictement décroissante
- si $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} > 1$, alors $(\mathcal{U}_n)$ est strictement croissante

❸ Si $\mathcal{U}_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de la fonction f sur un intervalle contenant $\mathbb{E}$. Le sens de variation de f est celui de $(\mathcal{U}_n)$.

❹ si $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$, on compare $f(x)$ et x sur un intervalle contenant tous les termes $\mathcal{U}_n$. (étudier $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{E}$)

- si $f(x) < x$, alors $(\mathcal{U}_n)$ est strictement décroissante
- si $f(x) > x$, alors $(\mathcal{U}_n)$ est strictement croissante

  En conséquence :

  ▸ Si f est croissante sur I et $\mathcal{U}_{n_0} < \mathcal{U}_{n_0+1}$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

  ▸ Si f est croissante sur I et $\mathcal{U}_{n_0} > \mathcal{U}_{n_0+1}$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Activité 4 Dans chaque cas, étudie le sens de variation de la suite $(\mathcal{U}_n)_n$ dont le terme général est $(_n)_n$: **Exemple**

1. $\mathcal{U}_n = \frac{n}{n+1}$.
2. $\mathcal{U}_n = n - \ln(n+1)$.
3. $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} \mathcal{V}_0 = 2 \\ \mathcal{V}_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\mathcal{V}_n}{2}} \end{cases}$
4. $(\mathcal{W}_n)_{n\geq 3}$ la suite définie par $\mathcal{W}_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

✂ ....

2.10.5 Limite et convergence d'une suite

2.10.5.1 Définitions

Définition 4 Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ une suite numérique l un nombre réel.

▸ On dit que la suite (u_n) admet l pour limite pour exprimer que $|u_n - l|$ peut devenir aussi petit que l'on veut dès que n est suffisamment grand. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

▸ On dit que la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite pour exprimer que u_n finit par dépasser n'importe quel nombre réel positif dès que n est suffisamment grand. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

— La limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$ quand n tend vers $+\infty$ peut exister ou peut ne pas l'être. Lorsque la limite de $(\mathcal{U}_n)$ existe, alors elle est soit finie (un nombre réel) ou infinie ($\pm\infty$).

— La limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$ lorsqu'elle existe est unique.

▸ La suite $(\mathcal{U}_n)$ est **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie.

▸ Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

NB : Une suite qui n'admet pas de limite ou qui admet une limite infinie est une suite divergente.

Activité 5 Dans chacun des cas suivants, étudie la convergence de la suite (u_n) définie par son terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{1-2n^2}{n+1}$, 2. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

(a) (b) $u_n = \dfrac{n+2}{\ln n}$, (c) $u_n, = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$.

✂ ....

2.10.5.2 Propriétés

Propriété 3
Soit $(\mathcal{U}_n)_{,n\geq n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, une suite numérique.

① Si la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel ℓ et pour $n \geq n_0$, $\mathcal{U}_n \leq \ell$

② Si la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel ℓ' et pour $n \geq n_0$, $\mathcal{U}_n \geq \ell'$.

③ Si la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

④ Si la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Propriété 4
$(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$, $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ et $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ sont des suites numériques, ℓ et ℓ' des nombres réels.

① S'il existe $p \in \mathbb{E}$ | $\forall n \geqslant p$, $\mathcal{U}_n \leqslant \mathcal{V}_n$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{V}_n = +\infty$

② S'il existe $p \in \mathbb{E}$ | $\forall n \geqslant p$, $\mathcal{U}_n \geqslant \mathcal{V}_n$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{V}_n = -\infty$

③ S'il existe $p \in \mathbb{E}$ | $\forall n \geqslant p$, $\mathcal{U}_n \leqslant \mathcal{V}_n$ et si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{U}_n = \ell \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{V}_n = \ell' \end{cases}$, alors $\ell \leqslant \ell'$

④ S'il existe $p \in \mathbb{E}$ | $\forall n \geqslant p$, $\mathcal{U}_n \leqslant \mathcal{V}_n \leqslant \mathcal{W}_n$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{U}_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{W}_n = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{V}_n = \ell$

⑤ S'il existe $p \in \mathbb{E}$ | $\forall n \geqslant p$, $|\mathcal{V}_n - \ell| \leqslant \mathcal{U}_n$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{V}_n = \ell$

Activité 6

1. Trouve la seule bonne réponse :

   (a) Soit les suites $(\mathcal{U}_n)$ et $(\mathcal{V}_n)$ telles que $\forall n; \mathcal{U}_n \geqslant \mathcal{V}_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n = +\infty$, alors on a

   ❶ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$ ❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$ ❸ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$

   (b) Soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite croissante non majorée, alors :

   ❶ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = -\infty$ ❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = +\infty$ ❸ $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{U}_n = 0$

   (c) Étudie la limite de chacune des suites suivantes :

   $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | $\mathcal{V}_n = \dfrac{n+\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | $\mathcal{W}_n = 1 + \dfrac{\sqrt{n}}{2n+(-1)^n}$.

✂ ....

Activité 7

Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$:

1. $\mathcal{U}_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ 2. $\mathcal{U}_n = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$ 3. $\mathcal{U}_n = \left(\sqrt{\pi}\right)^n$

✂ ....

Propriété 5

Soit $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

① Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} q^n = +\infty$

② Si $-1 < q < 1$ (c'est-à-dire $|q| < 1$), alors $\lim\limits_{x\to+\infty} q^n = 0$

③ Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} q^n = 1$

④ Si $q \leqslant -1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

Les propriétés de croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites de types a^n, n^α et $\ln n$. On retiendra :

⑤ Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.

⑥ Si $a > 1$, et $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

⑦ Si $0 < a < 1$, et $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$.

Activité 8

Dans chaque cas, détermine la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. $\mathcal{U}_n = \dfrac{5^n - 2^3}{5^n + 3^3}$, 2. $\mathcal{U}_n = \dfrac{(\sqrt{5})^n}{n^2}$, 3. $\mathcal{U}_n = 2^n + 2^{n+2} - 2^{n+3}$.

✂ ....

Définition 5 Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ une suite numérique et f une fonction définie sur un intervalle contenant tous les termes $\mathcal{U}_n$.

La suite $(\mathcal{V}_n)$ définie par $\mathcal{V}_n = f(\mathcal{U}_n)$ est appelée **suite image** de $(\mathcal{U}_n)$ par la fonction f.

Propriété 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ une suite à valeurs dans I, c-à-d I contient tous les termes $\mathcal{U}_n$.

① Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{U}_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\mathcal{U}_n) = \ell$

② Si la suite $(\mathcal{U}_n)$ est définie par $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$ et converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$

NB : Dans les conditions de la propriété,

❶ Si $\forall n \in \mathbb{E}$, $\mathcal{U}_n \in \left]a\,;b\right]$ ou $\mathcal{U}_n \in \left]a\,;b\right[$ ou $\mathcal{U}_n \in \left[a\,;b\right[$ ou $\mathcal{U}_n \in \left[a\,;b\right]$ avec a et b des nombres réels, alors $\ell \in \left[a\,;b\right]$

❷ Si $\forall n \in \mathbb{E}$, $\mathcal{U}_n \in \left]-\infty\,;a\right]$ ou $\mathcal{U}_n \in \left]-\infty\,;a\right[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $\ell \in \left]-\infty\,;a\right]$

❸ Si $\forall n \in \mathbb{E}$, $\mathcal{U}_n \in \left[a\,;+\infty\right[$ ou $\mathcal{U}_n \in \left]a\,;+\infty\right[$, alors $\ell \in \left[a\,;+\infty\right[$

Activité 9

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} \mathcal{U}_0 = 1 \\ \mathcal{U}_{n+1} = \frac{4\mathcal{U}_n}{2+\mathcal{U}_n} \end{cases}$

1. Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq U_n < 2$.
2. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
3. Déduis-en que (U_n) est convergente et calcule sa limite.

✂ ....

2.10.6 Suites arithmétiques et géométriques

Suite arithmétique $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ de raison r	**Suite géométrique $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ de raison q**
$(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ est une suite arithmétique si et seulement s'il existe un réel fixe r tel que $\forall n\in\mathbb{E},\ \mathcal{U}_{n+1}=\mathcal{U}_n+r$	$(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{E}}$ est une suite géométrique si et seulement s'il existe un réel fixe q tel que $\forall n\in\mathbb{E},\ \mathcal{V}_{n+1}=q\times\mathcal{V}_n$
$\forall(n,m)\in\mathbb{E}^2,\ \mathcal{U}_n=\mathcal{U}_m+(n-m)r$ Si $m=0$, alors $\forall n\in\mathbb{E},\ \mathcal{U}_n=\mathcal{U}_0+nr$	$\forall(n,m)\in\mathbb{E}^2,\ \mathcal{V}_n=\mathcal{V}_m\times q^{n-m}$ Si $m=0$, alors $\forall n\in\mathbb{E},\ \mathcal{V}_n=\mathcal{V}_0\times q^n$
$S=\mathcal{U}_p+\mathcal{U}_{p+1}+\cdots+\mathcal{U}_n$ est la somme des $n-p+1$ termes consécutifs de la suite $(\mathcal{U}_n)$ Exemple : $S=\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_{17}$ est la somme des 17-0+1=18 termes consécutifs de $(\mathcal{U}_n)$	$S=\mathcal{V}_p+\mathcal{V}_{p+1}+\cdots+\mathcal{V}_n$ est la somme des $n+p-1$ termes consécutifs de la suite $(\mathcal{V}_n)$ Exemple : $S=\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2+\cdots+\mathcal{V}_{17}$ est la somme des 17-1+1=17 termes consécutifs de $(\mathcal{V}_n)$
Soit $\mathcal{S}_N$ la somme des N termes consécutifs de $(\mathcal{U}_n)$ à partir de $\mathcal{U}_p$ $\mathcal{S}_N=\mathcal{U}_p+\mathcal{U}_{p+1}+\cdots+\mathcal{U}_{N+p-1}$ $\mathcal{S}_N=\frac{N}{2}(\mathcal{U}_p+\mathcal{U}_{N+p-1})$ $\mathcal{S}_N=\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_1+\cdots+\mathcal{U}_{N-1}$ $\mathcal{S}_N=\frac{N}{2}(\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_{N-1})$	Soit $\mathcal{S}_N$ la somme des N termes consécutifs de $(\mathcal{V}_n)$ à partir de $\mathcal{V}_p$ $\mathcal{S}_N=\mathcal{V}_p+\mathcal{V}_{p+1}+\cdots+\mathcal{V}_{N+p-1}$ Si $q\neq 1,\ \mathcal{S}_N=\mathcal{V}_p\left(\frac{1-q^N}{1-q}\right)$ Si $q=1,\ \mathcal{S}_N=N\times\mathcal{V}_p$
Exemple : $\mathcal{S}_{12}=\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_1+\cdots+\mathcal{U}_{12+0-1}$ $\mathcal{S}_{12}=\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_1+\cdots+\mathcal{U}_{11}$ $\mathcal{S}_{12}=\frac{12}{2}(\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_{11})$	Exemple : $\mathcal{S}_{12}=\mathcal{V}_0+\mathcal{V}_1+\cdots+\mathcal{V}_{12+0-1}$ $\mathcal{S}_{12}=\mathcal{V}_0+\mathcal{V}_1+\cdots+\mathcal{V}_{11}$ Si $q\neq 1,\ \mathcal{S}_{12}=\mathcal{V}_0\left(\frac{1-q^{12}}{1-q}\right)$ Si $q=1,\ \mathcal{S}_{12}=12\times\mathcal{V}_0$
a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique $\iff a+c=2b$	a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique $\iff a\times c=b^2$

Remarque

Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q\neq 1$.

$\mathcal{V}_0+\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2+\cdots+\mathcal{V}_n=\mathcal{V}_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$\iff \mathcal{V}_0+q\times\mathcal{V}_0+q^2\times\mathcal{V}_0+\cdots+q^n\times\mathcal{V}_0=\mathcal{V}_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$\iff \mathcal{V}_0\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right)=\mathcal{V}_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$\iff 1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété 7

— $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ 1=\frac{1-x^{0+1}}{1-x}$
— $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ 1+x=\frac{1-x^{1+1}}{1-x}$
— $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ 1+x+x^2=\frac{1-x^{2+1}}{1-x}$
— $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3$ et $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ 1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Activité 10

1. Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On sait que $\mathcal{U}_5=125$ et $\mathcal{U}_{16}=48$.
   (a) Calcule la raison et le premier terme de cette suite.
   (b) Déduis-en $\mathcal{U}_n$ en fonction de n.
   (c) À partir de quel rang a-y-on $\mathcal{U}_n\leq -250$.
   (d) Calcule la somme $S=\sum_{k=1789}^{2007}\mathcal{U}_k$.
2. Existe-t-il trois coefficients binomiaux successifs d'une même ligne, qui soient en progression arithmétique ?

✂ ....

Activité 11

On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 mètre. À chaque rebond elle rebondit des $\frac{3}{4}$ de la hauteur d'où elle est tombée.

1. On note $\mathcal{U}_n$ la hauteur atteinte au n-ième rebond.
   Calcule la hauteur atteinte au $2^{\text{ème}}$ rebond, au $10^{\text{ème}}$, au $1000^{\text{ème}}$.
2. À quel rebond la hauteur atteinte est-elle inférieure à 10^{-12} ?. Quelle est alors la distance parcourue par la balle ?

✂ ....

Activité 12

Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases}\mathcal{U}_0=1\\ \mathcal{U}_{n+1}=\frac{4\mathcal{U}_n}{2+\mathcal{U}_n}\end{cases}$ On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_n=1-\dfrac{2}{U_n}$.

1. Montre que la suite $\mathcal{V}_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

2. Exprime V_n puis U_n en fonction de n.

3. (a) Montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|U_{n+1}-2|\leq\frac{2}{3}|U_n-2|$.

   (b) Déduis que, $|U_n-2|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (c) Déduis que $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. Détermine, à l'aide d'une calculatrice, l'entier n_0 à partir duquel $|U_n-2|\leq 10^{-6}$.

✂ ....

Activité 13

Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{-1}{\cos x}+\frac{3}{2}$.

1. Dresse le tableau de variation de f.

2. Montre que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution α et que $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$.

3. Montre que pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ on a : $|f'(x)|\leq\frac{2}{3}$.

4. Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases}\mathcal{U}_0=1\\ \mathcal{U}_{n+1}=f(\mathcal{U}_n),\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

   (a) Montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0\leqslant\mathcal{U}_n\leqslant\frac{\pi}{6}$.

   (b) Montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|\mathcal{U}_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{2}{3}|\mathcal{U}_n-\alpha|$.

   (c) Déduis que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|\mathcal{U}_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$; puis que $(\mathcal{U}_n)$ est convergente.

   (d) Détermine le plus petit entier naturel p tel que $\mathcal{U}_p$ soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près. Calcule $\mathcal{U}_p$.

Exemple de suites définies par une intégrale

Activité 14

1. On pose $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$ et $J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$. Montrer que $I_1=1$ et $J_1=\frac{\pi}{2}-1$.

2. On pose pour tout $n\geq 2$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\sin x\,dx$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cos x\,dx$.

a. Calculer I_2 et J_2.

b. Montrer que $I_n=nJ_{n-1}$ et que $J_n=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-nI_{n-1}$.

c. Calculer I_3, J_3, I_4 et J_4.

✂ ....

Activité 15

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^{\pi}e^x\cos(nx)\,dx$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi)=(-1)^n$ et que $\sin(n\pi)=0$.

2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I_n=\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel $|I_n|\leqslant\frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

On pose, pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1} x}\,dx$.

1. (a) Justifier l'existence de I_n.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - I_{n-1} = J_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

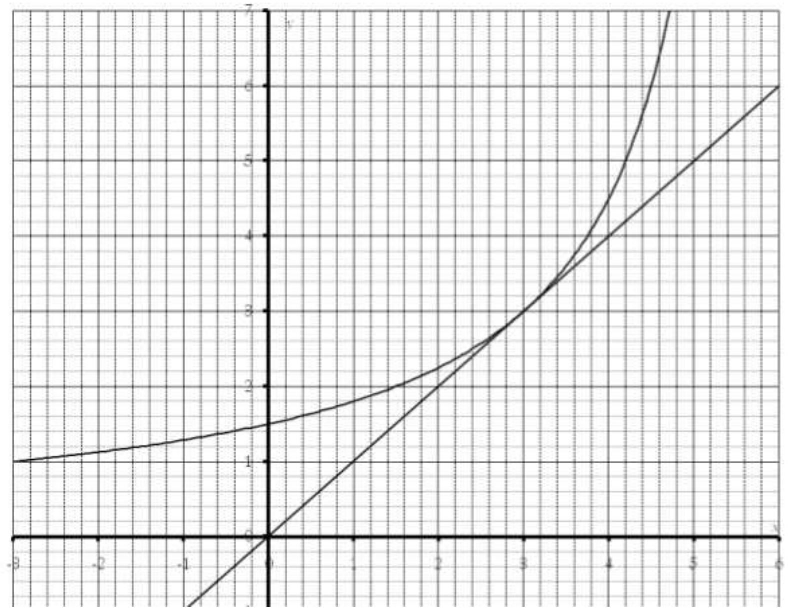
2. Déterminer a et b pour que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1+\sin x} + \frac{b\cos x}{1-\sin x}$. En déduire le calcul de I_0.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)J_n$.

   (On pourra remarquer que $\frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\cos^{2n-1} x}$).

   (b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2}n}$. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$.



Activité 16

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,6[$ par $f(x) = \frac{9}{6-x}$. On définit pour tout entier n la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur ce graphique les points $M_0(U_0\,;\,0)$, $M_1(U_1\,;\,0)$, $M_2(U_2\,;\,0)$, $M_3(U_3\,;\,0)$ et $M_4(U_4\,;\,0)$.
Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2. a. Démontrer que si $x < 3$ on a alors $\frac{9}{6-x} < 3$. En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n.

b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de la suite (U_n).

2.11 Séquence : Calculs des probabilités

Activité 1

Gouton possède dans un sac 5 cauris blancs, 4 noirs et 3 verts.
En tirant 4 cauris du sacs, Gouton annonce que le succès est assuré lorsque, dans un tirage , on a moins 2 cauris verts.
Dansou, ayant suivi l'histoire du Fâ, a établi un lien entre la manipulation des cauris et ses connaissances sur la notion de dénombrement. Il se demande comment ces charlatans opèrent-ils alors qu'ils sont pour la plupart des illettrés. Il se préoccupe de connaître sa chance de réussir à l'examen.
Tâche Tu vas, comme Dansou, découvrir de nouvelles connaissances en maths.
Consignes
Gouton tire les quatre cauris successivement sans remise.

1. Détermine le nombre de tirage possibles.
2. Détermine le cardinal de chacun des ensembles suivants :
   A " les tirages comportent des cauris de même couleur "
   B " des cauris dont on distingue deux couleurs et deux seulement ",
   C " les tirages comportent au plus un cauris vert " ,
   D " les tirages comportent au moins deux cauris verts ".
3. Quel est le pourcentage de réussite de Dansou.

✂ ....

2.11.1 Rappels des notions de dénombrement

Ensemble fini : Définitions et vocabulaires

On appelle ensemble une collection d'objets(pas nécessairement de meme nature) , ces objets sont appelées éléments de l'ensemble.
Un ensemble E est dite fini s'il contient un nombre fini d ?éléments. Le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de E et noté $card\,E$.
Exemple
$A = \{1, a, b, 5\}$, $card\,A = 4$

Propriétés des ensembles finis Soient A et E deux ensembles finis.
⋆ On dit que A est inclus dans E, ce que l'on note $A \subset E$, lorsque tout élément de A est élément de E.
On dit aussi que A est un sous-ensemble, ou une partie , de E.
Notons que ϕ et E sont des parties de E et on convient que $card\phi = 0$

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.
Exemple : $E=\{a, b, c\}$
$\mathscr{P}(E) = \{\{\phi\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
Soient A , B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$:
⋆ On appelle réunion de deux ensembles A et B l'ensemble, noté A,∪ , tel que : $A \cup B = \{x \in E/ \mid x \in A \,\text{ou}\, x \in B\}$
⋆ On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble, noté $A \cap B$, tel que : $A \cap B = \{x \in E/ \mid x \in A \,\text{et}\, x \in B\}$
Lorsque $A \cap B = \phi$, on dit que A et B sont disjoints.
⋆ On appelle différence A moins B, l'ensemble noté $A \setminus B$, tel que $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \,\text{et}\, x \notin B\}$
⋆ On appelle différence symétrique de A et B, et on note $A \Delta B$, l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à un, et à un seul, des deux ensembles A et B.
⋆ On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble,noté C_E^A ou $\overline{A}$ défini par : $\overline{A} = \{x \in E/ \mid x \notin A\}$.

Types de tirages

Types de tirages	Successif avec remise	Successif sans remise	simultané
Ordre	L'ordre intervient	L'ordre intervient	L'ordre n'intervient pas
Un cas possible	un p−uplet avec possibilité de répétition	un p−uplet d'éléments distincts	une partie de p éléments
$Card\Omega$	n^p	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Propriétés Pour tout (n, p) de $\mathbb{N}^2$ avec $0 < p \leq n$:
Par convention $0! = 1$.

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	$C_n^0 = C_n^n = 1$	$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$	$C_n^p = C_n^{n-p}$

Formule de Pascal

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \mid 1 \leq k \leq n$: $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Formule du Binôme de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

Nombre de parties

Le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments avec $n \in \mathbb{N}^*$ est 2^n.

2.11.2 Probabilité d'un événement

2.11.2.1 Langage probabiliste

Définition 1 Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat(encore appelé issue) est soumis au hasard et est donc imprévisible. L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers et noté Ω..

Soit Ω l'univers associé à une expérience, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Le tableau ci-dessous indique le Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2;4;6;8;10;12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3;6;9;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10;11;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2;3;4;5;6\}$
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement impossible (noté ϕ)	C'est un événement qui ne peut pas se produire	" Obtenir 13 " est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement	" Obtenir entre 2 et 12 " est un événement certain.
Événement " A et B " (noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{6;12\}$
Événement " A ou B " (noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements	$A \cup B = \{2;3;4;6;8;9;10;12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \phi$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \phi$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement " obtenir une somme impaire ". On a alors : — $A \cap \overline{A} = \phi$ (ensembles disjoints) — $A \cup \overline{A} = \Omega$

Exemple

: On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie normale. .
L'univers des cas possible est $\Omega = \{PPP; PFP; FFP; FFF; FPF; PFF; FPP; PPF\}$
Un cas possible est : 3 lancers $\longrightarrow$ P, F ; $X = \{PFP\}$ est une éventualité.

2.11.2.2 Probabilité d'un événement

Définition 2 ⋆ Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.
On appelle *probabilité* sur $\mathcal{P}(\Omega)$, toute application p de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\left[0;1\right]$, vérifiant les conditions ci-dessous :
⋄ $p(\Omega) = 1$,
⋄ Si A et B sont deux événements incompatibles , alors $\mathcal{P}(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

NB : La probabilité d'un événement est la fréquence de réalisation de cet événement lors d'un grand nombre de répétition d'une même expérience.

Conséquences :
Si l'univers Ω est tel que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}$, :
On associe à chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ un nombre $p_i \geq 0$ appelé probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ de telle sorte que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.
La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilité des événements

élémentaires $\{\omega_i\}$ contenus dans A.

Activité 2 Réinvestissement On associe au lancer d'un dé cubique pipé, l'univers $\Omega = \left\{-\sqrt{3}\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,\sqrt{3}\,;\,2\right\}$ et la probabilité p satisfaisant aux conditions $p(-\sqrt{3}) = p(-1)$, $p(0) = 3p(-\sqrt{3})$, $p(1) = p(\sqrt{3}) = 2p(-\sqrt{3})$, $p(2) = 2p(0)$ où $p(k)$ est la probabilité de la face marquée k.

1. Détermine la probabilité de chacun des événements élémentaires.

2. On lance deux fois de suite ce dé et on lui associe un nombre complexe $z = az + b$ où a est le résultat du premier lancer et b celui du second lancer.
   Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
   A « le nombre complexe z est réel »,
   B « le nombre complexe z a pour module 2 »,
   C « le point M d'affixe z appartient à la droite d'équation $y = x$ ».

✂ ....

Activité 0
p est une probabilité sur un univers Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.

1. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$.
   (a) Que peux-tu dire des événements A et $\overline{A}$?
   (b) Exprime $p(\overline{A})$ en fonction de $p(A)$
2. A , B sont deux éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ tels que $A \subset B$
   Démontre que $p(A) \leqslant p(B)$
3. A , B sont deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.
   Démontre que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

✂ ....

Propriété 1
p est une probabilité sur un univers Ω d'une épreuve donnée.

① $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
② $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $(A \subset B) \Longrightarrow (p(A) \leqslant p(B))$
③ $\forall A_i, (1 \leqslant i \leqslant n; n \in \mathbb{N}; n \geqslant 2)$ des événements deux-à-deux incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$; on a $p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$
④ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
⑤ $p(\phi) = 0$

2.11.2.3 Équiprobabilité

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on jette un dé non pipé ou on effectue un tirage au hasard, les issues ont la même probabilité de réalisation, on dit qu'on est en présence d'une situation d'équiprobabilité.

Définition 3 Soit Ω un univers fini d'une expérience aléatoire, p une probabilité sur Ω.
① On dit que deux événements A et B de Ω sont équiprobables si et seulement si $p(A) = p(B)$.
② Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 2
Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement élémentaire $\{\omega_i\}$ on a :
$$p(\omega_i) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$
On dit que p est une probabilité uniforme sur Ω.

Propriété 3
Soit p une probabilité uniforme sur univers Ω d'une expérience aléatoire. Pour tout événement A de Ω, on a :
$$p(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}.$$

N.B Les situations d'équiprobabilité se traduisent souvent par les expressions telles que «dé équilibré » «dé non truqué », « pièce de monnaie bien battue » ?, « tirage au hasard » « boules indiscernables au toucher »

Activité 3 Réinvestissement.
Une urne contient 6 boules : trois numérotées 1, deux numérotées 2 et une numérotée 3. On tire au hasard, successivement sans remettre deux boules de cette urne. Le résultat d'un tel tirage est le couple (a, b) où a et b sont les nombres inscrite sur la première et la seconde boule.

1. Calcule la probabilité de chaque événement élémentaire.

2. Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

   A ≪ les deux numéros tirés sont égaux ≫ .

   B ≪ le premier numéro tiré est strictement supérieur au second ≫ .

   C ≪ le premier numéro tiré est inférieur ou égal au second ≫ .

   D ≪ la somme des deux numéros tirés est égale à 4 ≫ .

   E ≪ la somme des deux numéros tirés est égale à 4 ou le premier numéro tiré est strictement supérieur au second ≫ .

✂ ....

Activité d'approfondissement 1.

Une urne contient douze boules indiscernable au toucher : m boules blanches et n boules noires (m et n sont des entiers naturels non nuls).

1. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne.
   Détermine les couples $(m\,,\,n)$ pour que la probabilité p d'obtenir 2 boules de couleurs différentes soit égales à $\frac{16}{33}$.
2. On prend désormais $m = 8$ et $n = 4$.
   (a) Calcule la probabilité p' d'obtenir exactement une boule blanche.
   (b) Calcule la probabilité p'' d'obtenir au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

2.11.3 Probabilités conditionnelles

Activité 4

Un enquêteur effectue un sondage auprès de familles ayant deux enfants et s'intéresse à la composition des enfants suivant le sexe (F ou G) et leurs âges.
On suppose que les naissances des filles et des garçons s ont équiprobables.

1. Il choisit une famille au hasard. On désigne respectivement par A et B, les événements ≪ la famille a une fille ≫ et ≪ la famille a un garçon ≫.
   (a) Détermine les quatre éléments possibles de l'univers de cette expérience.
   (b) Quelle est la probabilité p_1 que l'aîné des enfants soit une fille ?
   (c) Quelle est la probabilité p_2 que cette famille ait une fille ?
   (d) Quelle est la probabilité p_2 que cette famille ait un garçon et une fille ?
2. Il sonne à la porte de la demeure de l'une de ces familles. Une fille vient ouvrir la porte.
   (a) Quelle est alors p_4 la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
   (b) Compare cette probabilité au nombre réel $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$.

✂ ....

Définition 4 Soient p une probabilité sur un univers Ω, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, avec $\mathrm{A} \neq \phi$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, notée $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, est définie par :

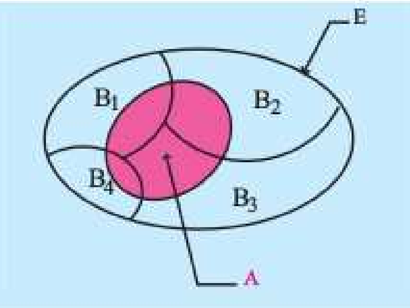
$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$$

$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ s'écrit aussi $p(\mathrm{A}/\mathrm{B})$.

remarque : $p(\overline{\mathrm{B}}/\mathrm{A}) = 1 - p(\mathrm{B}/\mathrm{A})$

Propriété 4 Formule des probabilités composées.
p est une probabilité sur un univers Ω. A , B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $p(\mathrm{A}) \neq 0$ et $p(\mathrm{B}) \neq 0$
$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{A}/\mathrm{B})$:
En effet : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ d'une part.
$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$ d'autre part.

Définition 5 Soit E un ensemble fini, les parties B_1 , B_2, ... B_n forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux **disjoints** et leur **réunion** est E.
En termes probabilistes, on dira que des événements B_1 , B_2, ... B_n d'un univers Ω forment un système complet d'événements de Ω lorsqu'ils sont deux à deux **incompatibles** et leur **réunion** est Ω.



Propriété 5 Formule des probabilités totales
Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A un événement possible de Ω.

Si $(B_1\,,\,B_2\,,\,\dots,\,B_n\,)$ est un système complet d'événements de Ω tels que, pour $i \in \{1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n\}$, on a $p(\mathrm{B}_i) \neq 0$, alors :

$$p(\mathrm{A}) = p(A \cap \mathrm{B}_1) + p(A \cap \mathrm{B}_2) + \cdots + p(A \cap \mathrm{B}_n) = \sum_{i=1}^{i=n} p(\mathrm{B}_i) \times p_{\mathrm{B}_i}(\mathrm{A})\,.$$

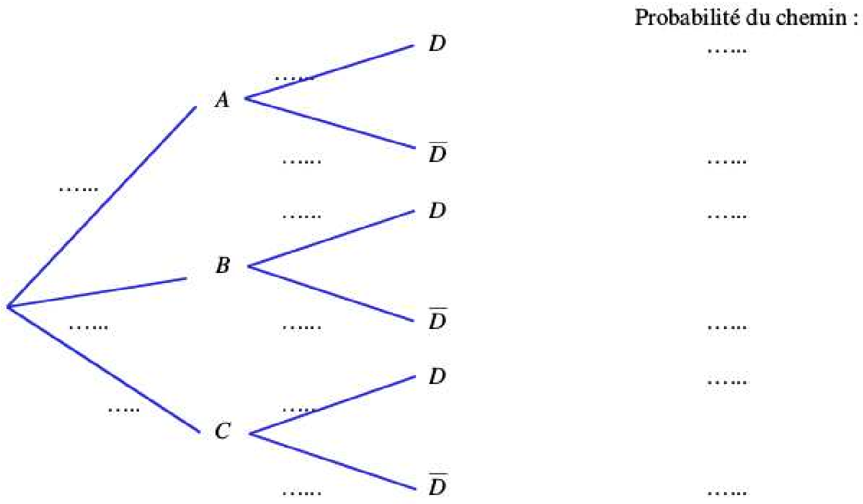
2.11.3.1 Arbre pondéré

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de choix. L'arbre de probabilité ci-dessous modélise la situation de conditionnement suivante. On effectue une expérience I comportant deux issues contraires B et B . L'expérience I étant effectuée, on procède à une expérience II comportant deux issues contraires A et $\bar{A}$. L'utilisation de ces formules est souvent facilitée par un ou plusieurs arbres pondérés où :

❶ la somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.

❷ la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

Exemple d'arbre pondéré.



En utilisant la formule des probabilités totales, on a :

$p(\mathrm{D}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.

Activité 5

Un centre de santé se propose de dépister une maladie auprès d'une population de 1000 individus. On dispose des données suivantes :

La proportion des personnes malades est de 10%.

Sur 100 personnes malades, 98 ont un test positif.

Sur 100 personnes non malades, une seule personne a un test positif.

On choisit une personne au hasard et on la soumet à un test de dépistage.

On note M « la personne est malade » et T « la personne a un test positif ».

1. Détermine la probabilité qu'une personne malade ait un test positif ainsi que la probabilité qu'une personne malade ait un test négatif.
2. Détermine la probabilité qu'une personne non malade ait un test négatif, ainsi que la probabilité qu'une personne non malade ait un test positif.
3. Détermine, à l'aide d'un arbre, les probabilités des événements ci-dessous.
   « La personne choisie est malade et a un test positif ».
   « La personne choisie est malade et a un test négatif ».
   « La personne choisie n'est pas malade et a un test positif ».
   « La personne choisie n'est pa s malade et a un test négatif ».
4. Détermine les probabilités des événements ci-dessous :
   « La personne choisie a un test positif ».
   « La personne choisie est malade sachant qu'elle a un test négatif ».

✂ ……………………………………………………………………………………

Activité 6

Un sac contient 5 billes blanches et 8 billes noires, indiscernables au touché. On tire successivement et sans remise trois billes.

1. Décris l'univers Ω associé à cette expérience.
2. En utilisant un arbre pondéré à trois niveau, détermine la probabilité de chaque événement élémentaire.
3. Détermine la probabilité d'obtenir une bille blanche au deuxième tirage.
4. Détermine la probabilité d'obtenir une bille noire au deuxième tirage et une bille blanche au troisième tirage.
5. Détermine la probabilité d'avoir obtenu au deuxième tirage une bille noire, sachant que la bille obtenue au troisième tirage était blanche.

✂ ……………………………………………………………………………………

2.11.3.2 Indépendance de deux événements

Activité 7

On jette un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements : A « Obtenir un numéro pair », B « Obtenir un multiple de 3 » et C « Obtenir un multiple de 6 ».
Calcule la probabilité de chacun des événements A , B , C , $A \cap B$ et $A \cap C$.

✂ ....

Définition 6 Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux événements de Ω.
On dire que les deux événements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Propriété 6

p est une probabilité sur un univers Ω. A , B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
- (A et B sont indépendants)b si, et seulement si, ($p_B(A) = p(A) \iff p_A(B) = p(B)$.
- La réalisation de A n'influence pas B ; de même la réalisation de B n'influence pas A.

NB : Ne pas confondre **événements indépendants en probabilité** et **événements incompatibles** qui se traduisent respectivement par $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ et $A \cap B = \phi$.

Activité 8

Une urne U_1 contient trois boules noires et six boules vertes. Une urne U_2 contient deux boules noires et trois boules vertes.
On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, en remettant chaque fois la boule, dans l ?urne choisie.
On considère les événements A « obtenir une boule verte au premier tirage » et B « obtenir une boule verte au deuxième tirage ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

✂ ....

Activité 9

Soient A et B deux événements indépendants d'un univers Ω muni d'une probabilité p.
Montre que si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Propriété 7

p est une probabilité sur un univers Ω. A , B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

① A et B sont indépendants.

② A et $\overline{B}$ sont indépendants.

③ $\overline{A}$ et B sont indépendants.

④ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.

Activité 10

1. Soit p une probabilité sur un univers fini Ω, A, B, C et D des événements de Ω tels que $p(A)=\frac{3}{8}$, $p(B)=\frac{5}{8}$, $p(C)=0,3$ $p(D)=0,5$, $p(A \cup B) = 0,75$ et $p(C \cup D) = 0,65$.
   Les événements A et B sont-ils indépendants ? ; Les événements C et $\overline{D}$ sont-ils indépendants ?

2. Deux chasseurs, Bio et Cossi, aperçoivent simultanément un lapin et tirent de façons indépendantes sur cet animal. La probabilité que Bio tue l'animal est $\frac{2}{5}$ et celle que Cossi le tue est $\frac{3}{7}$.
   Quel est la probabilité qu'un seul chasseur tue l'animal ?

✂ ....

Activité 11

On considère trois urnes U_1 ; U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.

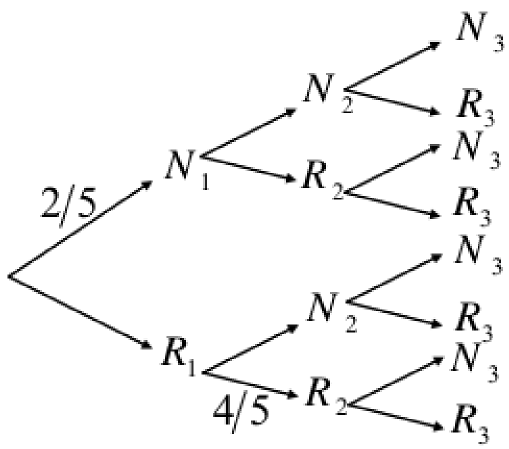
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges.

L'urne U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2 , à les mettre dans U_3 , puis à tirer au hasard une boule de U_3 .

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on désigne par N_i (resp R_i) l'évènement : ≪ on tire une boule noire de l'urne U_i ≫ (resp ≪ on tire une boule rouge de l'urne U_i ≫).

1. Reproduis et complète l'arbre de probabilités suivant :



2. (a) Calcule $p(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3)$ et $p(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{N}_3)$.
   (b) Déduis-en $p(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3)$.
   (c) Calcule de manière analogue $p(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{N}_3)$.
   (d) Déduis-en $p(\mathrm{N}_3)$.
3. Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants.
4. Sachant que la boule tirée de U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U 1 soit rouge.

✂ ....

2.11.4 Variables aléatoires réelles

Activité 12

Une urne contient 6 boules : trois numérotées 1, deux numérotées 2 et une numérotée 3. On tire au hasard, successivement sans remettre deux boules de cette urne. Le résultat d'un tel tirage est le couple (a, b) où a et b sont les nombres inscrite sur la première et la seconde boule.

On note X la valeur absolue de la différence des deux nombres tirés ($X = |a-b|$).

1. Quelle est l'ensemble E des valeurs prises par X.
2. Pour toute valeur x_i de E, calcule la probabilité l'événement A : ≪ $X = x_i$ ≫ :

✂ ....

2.11.4.1 Définition

On appelle *variable aléatoire* définie sur un univers Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω :

① $X(\Omega)$ est appelé **univers image** de Ω par X.

② ≪ $X = x_i$ ≫ désigne l'événement ≪ X prend la valeur x_i ≫. Cet événement est noté : $\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$, et sa probabilité $p(X = x_i)$.

③ $\{X \leq a\}$ désigne l'événement ≪ X prend une valeur inférieure ou égale à a ≫ et sa probabilité $p(X‘x_i)$.

2.11.4.2 Éléments caractéristiques

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω muni d'une probabilité p, et tel que $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$.

① On appelle **loi de probabilité** de X $\quad P_X : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & x_i \\ X(\Omega) & \longmapsto & p(X = x_i) \end{array}$.

Il est d'usage de représenter une loi de probabilité par un tableau et il recommandé de vérifier que $\sum_{i=1}^{i=n} p(X = x_i) = 1$.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$\cdots$	$p(X = x_i)$

② On appelle **espérance mathématique** de la variable X, le nombre réel noté $E(X)$ ou $\overline{X}$ et défini par $E(X) = \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i)$

③ On appelle **variance** de X est le nombre réel positif ou nul habituellement noté $V(X)$ défini par $V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p(X = x_i)\right) - \overline{X}^2$ avec $\overline{X}$ l'espérance de X.

④ **L'écart-type** de X est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

⑤ La **fonction de répartition** de X est l'application $\quad F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ t & \longmapsto & F(t) = p(X \leq t) \end{array}$.

Elle est définie de la façon suivante :

Avec $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$ et $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$,

si $t \in \left]-\infty\,;x_1\right[$; $F(t)=0$,
si $t \in \left[x_1\,;x_2\right[$; $F(t)=p(x=x_1)=p_1$,
si $t \in \left[x_2\,;x_3\right[$; $F(t)=p_1+p_2$,
si $t \in \left[x_{n-1}\,;x_n\right[$; $F(t)=p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}$,
... ...
si $t \in \left[x_n\,;+\infty\right[$; $F(t)=1$,

Remarque
• F est une fonction en escalier, définie et croissante sur $\mathbb{R}$.
• La représentation graphique de F est l'équivalent, en probabilité, de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique.

Activité 13
Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est égale à 0.6. On lance la pièce trois fois et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de piles obtenus.

1. Détermine la loi de probabilité de X .
2. Détermine et représente la fonction de répartition F de X .
3. Calcule $F(1-\sqrt{2})$ et $F(\frac{7}{2})$.

✂ ....

Activité 14
On considère deux dés identiques parfaits dont les faces sont marquées :0, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.
On lance simultanément les deux dés et on lit les résultats α et β de leurs faces supérieurs.
Soit X la variable aléatoire qui a chaque lancer des deux dés associe la valeur $sin(\alpha+\beta)$

1. Détermine la loi de probabilité de X.
2. Calcule $E(X)$ et $V(X)$.
3. Détermine la fonction de répartition F de X et construis sa courbe dans un repère orthogonal.

✂ ....

2.11.5 Schéma de Bernoulli

Activité 15

Activité 1 La probabilité qu'un joueur de fléchettes atteigne sa cible est égale à 0.9.

1. On suppose que le joueur effectue deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès réalisés.
   (a) Détermine la loi de probabilité de X.
   (b) Détermine la probabilité de l'événement « le joueur atteint au moins une fois sa cible ».
2. On suppose que le joueur effectue dix tirs et on note Y la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès réalisés.
   (a) Calcule la probabilité des événements suivants :
   « le joueur réalise neuf succès »
   « le joueur réalise au moins un succès »
   (b) Détermine la loi de probabilité de Y .

✂ ....

Définition 7 ① On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux événements contraires : **"Succès (S) " et "Échec (E) "**. On note p la probabilité du succès et donc celle de l'échec est $1-p$.
② Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Une expérience aléatoire constituée de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes est appelée "**schéma de Bernoulli**".

Propriété 8
On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves, où pour chaque épreuve, la probabilité du **succès** est p .
① Alors la probabilité d'obtenir exactement k succès est

$$p_k = \mathrm{C}_n^k\, p^k\,(1-p)^k \quad , \quad k\in\{0\,,1\,,2\,...\,,n\}$$

(2) Si X désigne la variable aléatoire associant à un schéma de Bernoulli le nombre de succès obtenus au cours des n épreuves, alors la loi de probabilité de X est définie par :
$p(X=k)=\mathrm{C}_n^k\, p^k\,(1-p)^k$ avec $k\in\{0\,,1\,,2\,...\,,n\}$.
On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p .

Dans cas on a : $\boxed{E(X)=n\,p \quad , \quad V(X)=np(1-p) \quad \text{et} \quad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}}$

N.B Les situations de tirages avec remise obéissent à une loi binomiale.

Activité 16

Dans une loterie, on suppose que chaque billet a une chance sur 100 d'être gagnant.

1. On suppose qu'on achète n billets et on note A l'événement « avoir au moins un billet gagnant ». Exprime en fonction de n la probabilité de l'événement A.
2. Combien de billets faut-il acheter pour que la probabilité d ?avoir au moins un billet gagnant soit supérieur à 0,5 ?

Activité *Approfondissement1*

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Tu porteras sur ta copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

   D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

   On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

   (a) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

   Réponse A : $\frac{3}{5}$ **Réponse B :** $\frac{4}{5}$ **Réponse C :** $\frac{3}{50}$ **Réponse D :** $\frac{6}{25}$

   (b) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

   Réponse A : $\frac{21}{50}$ **Réponse B :** $\frac{33}{50}$ **Réponse C :** $\frac{3}{5}$ **Réponse D :** $\frac{12}{25}$

   (c) Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

   Réponse A : $\frac{4}{11}$ **Réponse B :** $\frac{6}{25}$ **Réponse C :** $\frac{7}{11}$ **Réponse D :** $\frac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.

   Les boules sont indiscernables au toucher.

   L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

   (a) La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

   Réponse A : $\frac{11}{81}$ **Réponse B :** $\frac{2}{7}$ **Réponse C :** $\frac{5}{84}$ **Réponse D :** $\frac{4}{63}$

   (b) La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

   Réponse A : $\frac{2}{7}$ **Réponse B :** $\frac{1}{7}$ **Réponse C :** $\frac{1}{21}$ **Réponse D :** $\frac{79}{84}$

   (c) On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.

   Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'événement «obtenir au moins une fois trois boules jaunes «soit supérieure ou égale à 0,99 est :

   Réponse A : 76 **Réponse B :** 71 **Réponse C :** 95 **Réponse D :** 94

✂ ....

Activité 17 Approfondissement 2.

Un entraineur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (penalty) de ses joueurs . Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque :

5 buts avec une probabilité de 0.2

4 buts avec une probabilité de 0.5

3 buts avec une probabilité de 0.3.

Chaque joueur à l'entrainement tire 2 séries de 5 ballons .On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendantes.

Soit X la variable aléatoire égale aux nombre de tirs aux buts réussit au cours d'un entrainement.

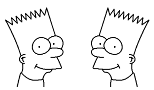
1. (a) Calcule la probabilité ,pour un joueur prix au hasard, de réussir tous ses tirs au but lors d'un entrainement.

   (b) Détermine la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.
2. L'entraineur considère que le joueur a réussit à l'épreuve si $X > 8$. Montre que la probabilité qu'un joueur réussit à cette épreuve lors d'une séance d'entrainement est égale à 0.61.

3. Chaque joueur participe à 10 séances d'entrainements. On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendants les unes des autres. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours de ces 10 entrainements. Si un joueur ne marque pas au moins 10 buts on dit qu'il a eu échec.
   Les résultats seront donner arrondi à 10^{-2} prés.
   Calcule pour un joueur :
   (a) la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
   (b) la probabilité d'avoir exactement 6 succès.
   (c) la probabilité d'avoir au moins 1 succès.
4. Calcule le nombre minimal d'entrainements auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0.99.

Activité 18 Approfondissement 2.
Une urne U_1 contient sept boules noires et trois boules vertes. Une urne U_2 contient deux boules noires et huit boules vertes.
On effectue une suite de tirages en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne, suivant la règle suivante. Si au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage , on a obtenu une boule noire alors le $n^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans U_1 ,
Si au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage , on a obtenu une boule verte alors le $n^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans U_2.

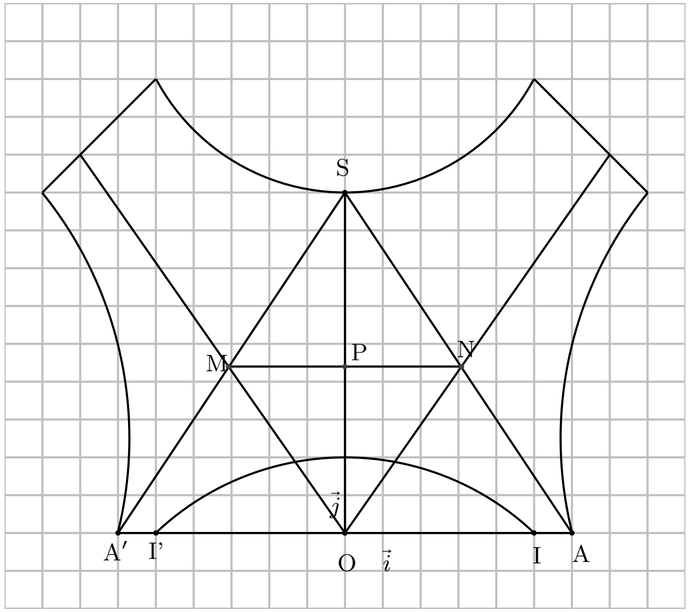
1. On choisit une urne au hasard et on fait le premier tirage.
   Détermine la probabilité p_1 d'obtenir une boule noire.
2. On désigne par p_n la probabilité de tirer une boule noire au $n^{\text{ème}}$ tirage.
   (a) Calcule p_2 .
   (b) Prouve que $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{5} \quad , \quad n \geq 2$.
3. (a) Montre que la suite (q_n) définie par $q_n = p_n - \frac{2}{5} \quad , n \geq 1$ est une suite géométrique.
   (b) Détermine p_n et déduis-en $\lim_{n\to+\infty} p_n$.



Chapitre3

LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

<u>Contexte</u> : La coupe d'une tenue.
Codjo est un élève en classe terminale. Son frère aîné Adotévi, un étudiant, l'envoie chez son couturier pour la confection d'un gilet. Il dessine la coupe du gilet sur une feuille de papier et la lui remet avec le tissu. Impressionné, Codjo désire savoir les principes mathématiques ayant guidé son frère dans la réalisation de ce dessin.



<u>Tâche</u> Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques ; pour cela, tu auras tout au long de la S.A. à :

exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
analyser chacun des problèmes posés ;
mathématiser chacun des problèmes posés ;
opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
améliorer au besoin ta production.

<u>Activité 1</u> Lis attentivement le texte et exprime toutes les idées qu'il t'inspire.

<u>NB</u> : Dans cette S.A, $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des points du plan et $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

3.1 <u>Séquence 1 :</u> Isométries

<u>Activité 2</u>
Á la vue du dessin, Dansou a identifié des éléments de symétries qu'il a étudiés en classe de Première.
Consigne Rappelle quelques éléments de symétries que tu as pu identifier sur le dessin.
✂ ....

3.1.1 <u>Généralités sur les applications affines du plan</u>

Elles se définissent de la même manière comme dans l'espace.

<u>Définition 1</u>

— On appelle **application ponctuelle** du plan $\mathcal{P}$, toute application
$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}' \end{array}.$$
— Une application ponctuelle bijective est appelée **transformation**.
— L'application $\mathscr{I}\mathbf{d}_{\mathcal{P}}: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} \end{array}$ est appelée **application identique** du plan $\mathcal{P}$

<u>Définition 2</u> Soit f une application ponctuelle du plan.

— Un point M est dit **invariant** par f lorsque $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$. Dans ce cas M est dit **point fixe** de f
— Soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathcal{P}$. On dit que $\mathcal{E}$ est **globalement invariant** par f lorsque $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}$, $f(\mathrm{M}) \in \mathcal{E}$.

— On appelle **application vectorielle associée** à f l'application ponctuelle

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & \overrightarrow{\mathrm{MN}} & \longmapsto & \overrightarrow{f(\mathrm{M})f(\mathrm{N})} \end{array}$$

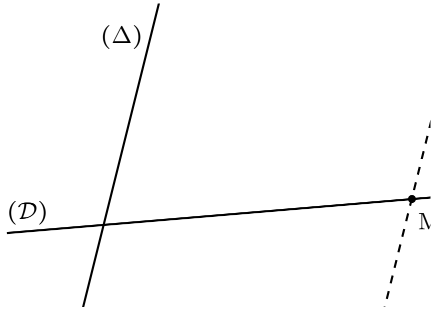
3.1.2 Exemples d'applications ponctuelles

3.1.2.1 Projection

Définition 3 Soit $(\mathcal{D})$ et (Δ) deux droites de directions différentes. La **projection** sur $(\mathcal{D})$ de direction celle de (Δ) est l'application

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}' \end{array} \quad \text{telle que :}$$

- si $\mathrm{M}\in(\mathcal{D})$, alors $\mathrm{M}'=\mathrm{M}$
- si $\mathrm{M}\notin(\mathcal{D})$, alors M' est le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ avec la parallèle à Δ passant par M.



Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ,

$$p(\mathrm{M})=\mathrm{M}' \iff \begin{cases} \mathrm{M}'\in(\mathcal{D}) \\ \exists t\in\mathbb{R} \mid \overrightarrow{\mathrm{MM}'}=t\vec{u} \end{cases}$$

NB : La droite $\mathcal{D}$ est a base de la projection p.

Propriété 1

— L'ensemble des points invariants par une projection sur une droite $\mathcal{D}$ est la droite $\mathcal{D}$.

— La projection sur une droite n'est pas une transformation (elle n'est pas bijective).

NB : Lorsque les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont perpendiculaires, la projection p sur $\mathcal{D}$ de direction Δ est appelée **projection orthogonale** sur $\mathcal{D}$.

Activité 3

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Détermine l'expression analytique de la projection sur la droite $\mathcal{D}: 2x+3y-4=0$ de direction celle de la droite $\Delta: x+y+3=0$
2. Écris l'expression analytique de la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D}: x+3y-1=0$.
3. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & \mathrm{M}(x;y) & \longmapsto & \mathrm{M}'(x';y') \end{array} \quad \Big| \begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2} \\ y'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2} \end{cases}$$

Démontre que f est une projection dont tu préciseras la base et la direction.

✂ ....

3.1.2.2 Homothétie et translation

Mêmes caractérisations comme dans l'espace.

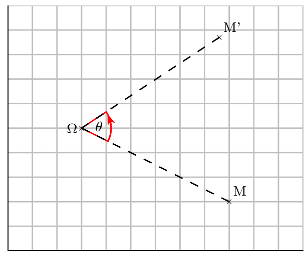
3.1.2.3 Rotation

Définition 4

Soit Ω un point du plan orienté et θ un nombre réel non nul.

Dire que M' est l'image de M (avec $\mathrm{M}\neq\Omega$) par la rotation de centre Ω et d'angle θ, signifie que :

$$\begin{cases} \Omega\mathrm{M} = \Omega\mathrm{M}' \\ mes(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}};\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}) = \theta+2k\pi;k\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{3.1}$$



Si Ω a pour affixe z_Ω, M a pour affixe z_M et M' a pour affixe $z_{\mathrm{M}'}$, alors

$$(3.1) \iff \begin{cases} |z'-z_\Omega| = |z-z_\Omega| \\ \mathbf{mes}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}};\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right| = 1 \\ \mathbf{arg}\left(\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\iff z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})z_\Omega$$

C'est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ..

3.1.2.4 Réflexion

Définition 5

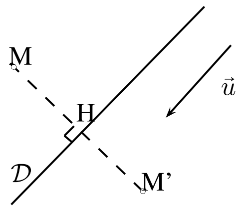
Soit Δ une droite du plan. On appelle **symétrie orthogonale** d'axe Δ (réflexion de base Δ), l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{S}_\Delta : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}'/ \end{array}$$

- Si M$\in\Delta$, alors M$'$=M
- Si M$\notin\Delta$, alors Δ est la médiatrice du segment [MM$'$]

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ, alors :

$$\mathcal{S}_\Delta(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \begin{cases} \text{le milieu H de } [\mathrm{MM}'] \text{ appartient à } \Delta \\ \overrightarrow{\mathrm{MM}'}\cdot\vec{u} = 0 \end{cases}$$



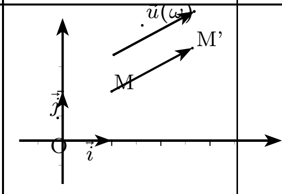
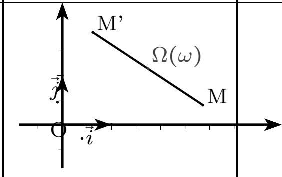
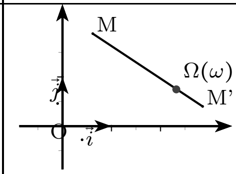
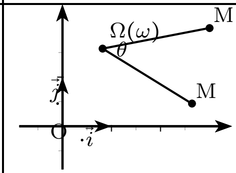
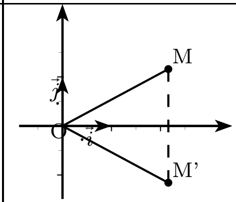
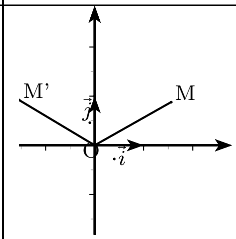
Propriété 2

Soit $\mathcal{S}_\Delta$ la réflexion de base Δ.

- L'ensemble des points invariants par $\mathcal{S}_\Delta$ est la droite Δ
- $\mathcal{S}_\Delta$ est une transformation du plan et $\mathcal{S}_\Delta^{-1} = \mathcal{S}_\Delta$

Tableau récapitulatif

Dans le tableau ci-dessous, pour chaque transformation, M désigne un point d'affixe z et M' désigne l'image de M. L'écriture complexe exprime l'affixe z' de M' en fonction de celle de M.

Transforamtion	M a pour image M'	Définition géométrique	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(\omega)$		$\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \vec{u}$	$z' = z + u$; $u \in \mathbb{C}$.
Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = -\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$	$z' = -z + 2\omega$; $\omega \in \mathbb{C}$.
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k.		$\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = k\,\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$	$z' = k(z-\omega)+\omega$; $\omega \in \mathbb{C}\ k \in \mathbb{R}^*$.
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.		$\begin{cases} \Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{M} \\ \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$	$z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$; $\omega \in \mathbb{C}\ \theta \in \mathbb{R}^*$.
Réflexion par rapport à l'axe réel		$\Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{M}$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) = -\left(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right)$	$z' = \overline{z}$; $\omega \in \mathbb{C}\ \theta \in \mathbb{R}^*$.
Réflexion par rapport à l'axe imaginaire		$\Omega\mathrm{M}' = \Omega\mathrm{M}$ et $\left(\vec{j}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) = -\left(\vec{j}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right)$	$z' = -\overline{z}$; $\omega \in \mathbb{C}\ \theta \in \mathbb{R}^*$.

3.1.3 Isométries

Activité 4

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mathrm{M}(z) & \longmapsto & \mathrm{M}'(z') \mid z' = -\mathrm{i}z + 2 \end{array} \quad \text{et } g: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mathrm{M}(z) & \longmapsto & \mathrm{M}'(z') \mid z' = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\overline{z} + \mathrm{i} \end{array}.$$

1. Soit A et B deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_{A} et z_{A}.
   Compare $d(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}))$ et $d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, puis $d(g(\mathrm{A}), g(\mathrm{B}))$ et $d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.
2. Soit A, B, C et D quatre points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_{A}, z_{A}, z_{C} et z_{D} tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$.
   Compare les angles orientés $\left(\overrightarrow{\mathrm{f(A)f(B)}}, \overrightarrow{\mathrm{f(C)f(D)}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)$; puis $\left(\overrightarrow{\mathrm{g(A)g(B)}}, \overrightarrow{\mathrm{g(C)g(D)}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)$

✂ ....

Définition 6

Une application du plan dans lui-même est une **isométrie** si elle conserve les distances.
C'est-à-dire, si M'N'=MN pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N'.

Conséquence

L'identité du plan, les translations, les rotations, les symétries orthogonales sont des isométries.

Propriétés 1

Soit f une isométrie plane.

$\boxed{\mathrm{P}_1}$ Pour tous points A, B, C et D d'images respectives A′, B′, C′ et D′, par f, on a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$. On dit que les isométries conservent le produit scalaire.

$\boxed{\mathrm{P}_2}$ Soit A, B, C, G des points d'images respectifs A', B', C' et G' par f α, β, γ des nombres réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. On a :

$$\mathrm{G} = \mathbf{bar}\{(\mathrm{A}, \alpha), (\mathrm{B}, \beta), (\mathrm{C}, \gamma)\} \iff \mathrm{G}' = \mathbf{bar}\{(f(\mathrm{A}), \alpha), ;(f(\mathrm{B}), \beta), (f(\mathrm{C}), \gamma)\}$$

. On dit que les isométries conservent le barycentre.
En particulier,

- toute isométrie conserve le milieu.
- toute isométrie conserve l'alignement.

$\boxed{\mathrm{P}_3}$ f est une transformation et sa réciproque est une isométrie.

Il résulte que :

- Pour toute isométrie f et tout point M, $f(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$, si et seulement si, $f^{-1}(\mathrm{N}) = \mathrm{M})$.
- La réciproque d'une symétrie orthogonale est elle même.
- La réciproque d'une symétrie centrale est elle même.
- La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

$\vec{u}$ La réciproque d'une rotation de centre I et d'angle α est la rotation de centre I et d'angle $-\alpha$.

$\boxed{\mathrm{P}_4}$ Si une isométrie laisse invariants deux points distincts A et B, alors elle laisse invariant tout point de la droite (AB).

$\boxed{\mathrm{P}_5}$ f est une transformation et sa réciproque est une isométrie plane.

Soit A et B deux point distinctes du plan d'images respectives A′ et B′ par f

- L'image par f de la droite (AB) est la droite (A′B′). L'image par f du segment [AB] est le segment [A′B′].
- L'image par f de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A′B′).

$\boxed{\mathrm{P}_6}$ Si A, B et C sont trois points distincts du plan d'images respectives A', B' et C' par f, on a :

- Si A, B et C sont alignés, alors Si A', B' et C' sont non alignés.
- $\mathbf{mes}\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = \mathbf{mes}\left(\widehat{\mathrm{B'A'C'}}\right)$. On dit que les isométries conservent les angles géométriques.
- Si le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ est orthonormé alors le repère $\left(\mathrm{A'}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}, \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right)$ est orthonormé. De plus, pour tout point M d'image M', $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ avec x et y réels, implique que $\overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = x\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} + y\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$.

$\boxed{\mathrm{P}_7}$ L'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme.

$\boxed{\mathrm{P}_8}$ L'image par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $f(\mathrm{I})$ et de rayon r.

$\boxed{\mathrm{P}_9}$ Les images de deux droites parallèles par une isométrie sont deux droites parallèles. (On dit qu'une isométrie conserve le parallélisme).

$\boxed{\mathrm{P}_{10}}$ Les images de deux droites perpendiculaires par une isométrie sont deux droites perpendiculaires. (On dit qu'une isométrie conserve l'orthogonalité).

$\boxed{\mathrm{P}_{11}}$ L'image par une isométrie de la tangente en un point M à un cercle est la tangente au cercle image, au point M c image de M.(On dit qu'une isométrie conserve le contact.)

$\boxed{\mathrm{P}_{12}}$ f conserve les aires.

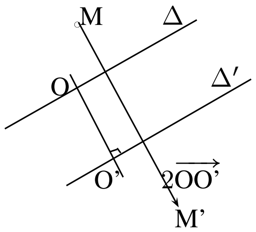
3.1.3.1 Composées d'isométries

3.1.3.1.1 Composée de symétries orthogonales

Propriété 3

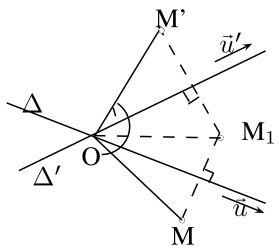
① Soit Δ et Δ' deux droites parallèles ; O un point de ,Δ et O' son projeté orthogonal sur Δ'.

La composée $\mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs Δ et Δ' est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.



② Soit Δ et Δ' deux droites sécantes en un point O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

La composée $\mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_{\Delta}$ des réflexions d'axes respectifs Δ et Δ' est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u}\,,\,\vec{u}')$.



Si $\Delta \perp \Delta'$ alors $\mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_{\Delta} = \mathcal{S}_{\Delta} \circ \mathcal{S}_{\Delta'} = \mathcal{S}_{O}$, avec S_O la symétrie centrale de centre O.

③ **Décomposition d'une translation :**

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$.

Alors $t_{\vec{u}}$ peut s'écrire comme composée de deux réflexions d'axes parallèles et de vecteur normal $\vec{u}$ tel que $t_{\vec{u}} = \mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_{\Delta}$.

- Si Δ est choisie arbitrairement, alors $(\Delta') = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$
- Si Δ' est choisie arbitrairement, alors $(\Delta) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta')$

④ **Décomposition d'une rotation :**

Le plan est orienté. Soit $r_{(\Omega\,,\,\theta)}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ .

Pour toute droite Δ passant par Ω, il existe une droite Δ' et une seule telle que $\mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_{\Delta} = r_{(\Omega\,,\,\theta)}$

NB : : Si $\mathcal{D}$ est une droite passant par Ω, alors $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{\Delta} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{S}_{\Delta'}$ avec $\Delta = \mathcal{R}_{(A,\frac{\theta}{2})}(\mathcal{D})$ et $\Delta' = \mathcal{R}_{(A,-\frac{\theta}{2})}(\mathcal{D})$

Activité 5

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O.

1. Détermine les droites Δ_1 et Δ_1' telles que : $r_{(A\,,\,\frac{\pi}{2})} = S_{\Delta_1'} \circ S_{(AB)} = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_1}$.
2. Détermine les droites Δ_2 et Δ_2' telles que : $t_{\overrightarrow{AC}} = S_{\Delta_2'} \circ S_{(BD)} = S_{(BD)} \circ S_{\Delta_2}$.
3. Détermine les droites Δ_3 et Δ_3' telles que : $S_O = S_{\Delta_3'} \circ S_{(AC)} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta_3}$.

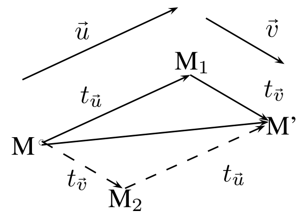
✂ ....

3.1.3.1.2 Composée de deux translations

Propriété 4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ les translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La composée de $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.



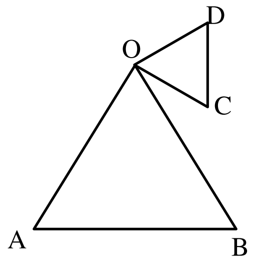
3.1.3.1.3 Composée d'une rotation et d'une translation

La composée d'une translation t et d'une rotation r d'angle θ non nul est une rotation d'angle θ. On a : $t \circ r \neq r \circ t$.

Activité 6

On considère deux triangles équilatéraux directs OAB et OCD et on désigne par E le quatrième sommet du parallélogramme BOCE.

1. Soit $f = r \circ t$, où r désigne la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BO}}$.
   (a) Détermine $f(\mathrm{B})$.
   (b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. Détermine $f(\mathrm{E})$ et déduis-en la nature du triangle AED.



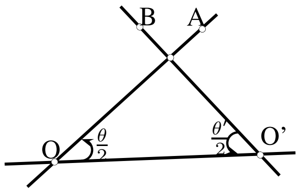
✂ ....

3.1.3.1.4 Composée de deux rotations

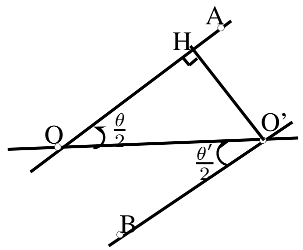
Activité 7

Soit r et r' deux rotations d'angles respectifs θ et θ' et de centre respectifs distincts O et O'.

1. On considère les points A et B tels que $2\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OO'}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}}\right) \equiv \theta[2\pi]$ et $2\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O'B}}, \overrightarrow{\mathrm{O'O}}}\right) \equiv \theta'[2\pi]$.
   Montre que $r = S_{(\mathrm{OA})} \circ S_{(\mathrm{OO'})}$ et $r' = S_{(\mathrm{OO'})} \circ S_{(\mathrm{O'B})}$
2. On suppose que $\theta + \theta' \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Justifie que les droites (OA) et (O'B) sont sécantes et montre que $r \circ r'$ est une rotation dont tu détermineras le centre.



3. On suppose que $\theta + \theta' = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Justifie que les droites (OA) et (O'B) sont parallèles.
   (b) Montre que $r \circ r'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\mathrm{O'H}}$ où H est le projeté orthogonal de O' sur (OA).



Indication utilise les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O'B}}$.

✂ ....

Résultat

Résultat

Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle θ_1 ; r_2 la rotation de centre B et d'angle θ_2.

— Si A et B sont des points confondus, alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ sont des rotations de centre A (ou B) et d'angle $\theta_1 + \theta_2$

— Si A et B sont deux points distincts et $\mathcal{D}$ la droite (AB), alors on a successivement :
$\mathcal{R}_1 = \mathcal{S}_{\mathcal{D}'} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}''}$ avec $\mathcal{D}'$ est l'image de $\mathcal{D}$ par la rotation de centre A d'angle $\frac{1}{2}\theta_1$ et $\mathcal{D}''$ est l'image de $\mathcal{D}$ par la rotation de centre A d'angle $-\frac{1}{2}\theta_1$
$\mathcal{R}_2 = \mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{S}_{\Delta''}$ avec Δ' l'image de $\mathcal{D}$ par la rotation de centre B d'angle $\frac{1}{2}\theta_2$ et Δ'' l'image de $\mathcal{D}$ par la rotation de centre B d'angle $-\frac{1}{2}\theta_2$
$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = (\mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}}) \circ (\mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}''}) = \mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}''}$
$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = (\mathcal{S}_{\mathcal{D}'} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}}) \circ (\mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{S}_{\Delta''}) = \mathcal{S}_{\mathcal{D}'} \circ \mathcal{S}_{\Delta''}$

  — Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0[2\pi]$, alors $\theta_2 \equiv -\dfrac{\theta_1}{2}[2\pi]$.
  On trouve $\Delta' \parallel \mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}' \parallel \Delta''$. Ainsi $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ sont des translations.

  — Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0[2\pi]$, alors Δ' et $\mathcal{D}''$ sont sécantes ainsi que $\mathcal{D}'$ et Δ''. $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ sont des rotations d'angles $\theta_1 + \theta_2$.

Propriété 5

Soit $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux rotations de centres respectifs A et B, d'angles respectifs θ_1 et θ_2.

① Si A=B=Ω, alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ sont des rotations de même centre Ω d'angle $\theta_1 + \theta_2$ et on a : $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$

② Si A≠ B, et :

- $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0[2\pi]$, alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ sont des translations et on a $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \neq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$
- $\theta_1 + \theta_2 \neq 0[2\pi]$, alors $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ sont des rotations d'angle $\theta_1 + \theta_2$ mais de centres distincts et distincts de A et B, et on a : $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \neq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$

3.1.3.1.5 *Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation*

Activité 8

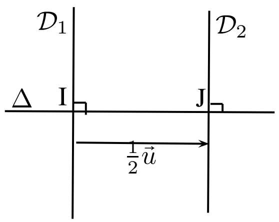
$\vec{u}$ es un vecteur directeur d'une droite donnée Δ du plan, $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $\mathcal{S}_\Delta$ la réflexion d'axe Δ.

1. Démontre que $\mathcal{S}_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta$. (utilise une décomposition de $t_{\vec{u}}$)
2. Détermine l'ensemble des points invariants par $\mathcal{S}_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

✂ ....

Résultat

1. Il existe deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $t_{\vec{u}} = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$ avec $S_{\Delta_2} = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta_1)$.



$\Delta_1 \perp \Delta$ soit $\{I\} = \Delta_1 \cap \Delta$; $\Delta_2 \perp \Delta$ soit $\{J\} = \Delta_2 \cap \Delta$. On a : $2\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \vec{u}$. S_I est la symétrie centrale de centre I et S_J est la symétrie centrale de centre J.

On a :

$$\begin{aligned} S_\Delta \circ t_{\vec{u}} &= S_\Delta \circ (S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}) \\ &= (S_\Delta \circ S_{\Delta_2}) \circ S_{\Delta_1} \text{ or } S_\Delta \circ S_{\Delta_2} = S_{\mathrm{J}} \text{ donc} \\ S_\Delta \circ t_{\vec{u}} &= S_{\mathrm{J}} \circ S_{\Delta_1} \\ &= (S_{\Delta_2} \circ S_\Delta) \circ S_{\Delta_1} \text{car } S_{\mathrm{J}} = S_{\Delta_2} \circ S_\Delta \\ &= S_{\Delta_2} \circ (S_\Delta \circ S_{\Delta_1}) \end{aligned}$$

or $S_\Delta \circ S_{\Delta_1} = S_{\Delta_1} \circ S_\Delta = S_{\mathrm{I}}$ donc

$$\begin{aligned} S_\Delta \circ t_{\vec{u}} &= S_{\Delta_2} \circ S_{\mathrm{I}} \\ &= S_{\Delta_2} \circ (S_{\Delta_1} \circ S_\Delta) \\ &= (S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}) \circ S_\Delta = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta \end{aligned}$$

D'où

$$S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta \,.$$

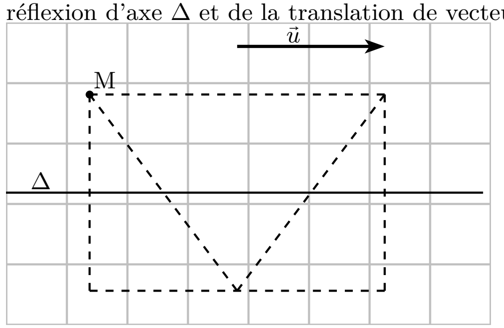
2. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$.
   $(S_\Delta \circ t_{\vec{u}})(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff S_\Delta[t_{\vec{u}}(\mathrm{M})] = \mathrm{M}$
   Posons $t_{\vec{u}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$, on a ! $\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \vec{u}$ et

$$\begin{aligned} (S_\Delta \circ t_{\vec{u}})(\mathrm{M}) = \mathrm{M} &\iff S_\Delta(\mathrm{M}') = \mathrm{M} \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{MM'}} \perp \vec{u} \\ &\iff \vec{u} \perp \vec{u} \\ &\iff \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \\ &\Longrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{o}} \end{aligned}$$

   Il y a contradiction car $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ donc $\vec{u} \neq \overrightarrow{\mathrm{o}}$.
   Par conséquent $S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ n'admet pas de points invariants.

Définition 7

Soit dans le plan $\mathcal{P}$ une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$.
On appelle **symétrie glissée** d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$, la composée commutative de la réflexion d'axe Δ et de la translation de vecteur $\vec{u}$



Propriété 6

① Une symétrie glissée n'admet pas de points invariants.

② Si f la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$. On a : $\mathcal{S}_\Delta \circ_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta$.

Activité 9

$t_{\vec{u}}$ est une vecteur non nul et Δ une droite du plan, $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ et $\mathcal{S}_{Delta}$ la réflexion d'axe Δ.
Démontre que :

1. si $\vec{u}$ est un vecteur normal à Δ, alors $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta$ est une symétrie orthogonale.
2. si $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à Δ, alors $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta$ est une symétrie glissé.

Indication Tu pourras utiliser une décomposition de $t_{\vec{u}}$

✂ ....

Résultat

1. Il existe une droite Δ' telle que $t_{\vec{u}} = \mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_\Delta$ avec $\mathcal{S}_{\Delta'}$ la réflexion d'axe Δ' telle que Δ' est l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

   $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta = (\mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_\Delta) \circ \mathcal{S}_\Delta = \mathcal{S}_{\Delta'}$.

   $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta$ est la réflexion d'axe Δ' telle que Δ' est l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

2. $\vec{u}$ n'est pas normal à Δ.

   On peut écrire $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ avec $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur normal à Δ

   $t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}} = t_{\overrightarrow{u_1}} \circ t_{\overrightarrow{u_2}} = t_{\overrightarrow{u_2}} \circ t_{\overrightarrow{u_1}}$

   $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta = \left(t_{\overrightarrow{u_1}} \circ t_{\overrightarrow{u_2}}\right) \circ \mathcal{S}_\Delta = \left(t_{\overrightarrow{u_1}}\right) \circ \left(t_{\overrightarrow{u_2}} \circ \mathcal{S}_\Delta\right)$

   $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur normal à Δ, alors $t_{\overrightarrow{u_2}} = \mathcal{S}_{\Delta'} \circ \mathcal{S}_\Delta$ avec Δ' l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ et donc $t_{\overrightarrow{u_2}} \circ \mathcal{S}_\Delta = \mathcal{S}_{\Delta'}$

   $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta = t_{\overrightarrow{u_1}} \circ \mathcal{S}_{\Delta'}$ et on a $\Delta' \parallel \Delta$.

   Or $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur directeur de la droite Δ, donc $\overrightarrow{u_1}$ est vecteur directeur de la droite Δ'.

   $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta$ est donc une symétrie glissée d'axe Δ' et de vecteur $\overrightarrow{u_1}$.

Ainsi on a :

Propriété 7

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et $\mathcal{S}_\Delta$ la réflexion d'axe Δ.

① Si $\vec{u}$ est un vecteur normal à Δ, alors $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta$ et $\mathcal{S}_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ sont des réflexions.

② Si $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à Δ, alors $t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta$ et $\mathcal{S}_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ sont des symétries glissées.

Activité 10

Soit f la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$

1. Montre que $f \circ f = t_{2\vec{u}}$
2. Montre que pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ d'image M$'$ par f le milieu de [MM'] appartient à la droite Δ.

✂ ....

Propriété 8

Soit f la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.

— Pour tout point M de $\mathcal{P}$ d'image M' par f, le milieu du segment [MM'] appartient à Δ. On dit que l'axe d'une symétrie glissée est l'ensemble des milieux des segment [MM'] où M' est l'image M par f.
— $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ et $\Delta = \{M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u}\}$
— Étant donnés une droite Δ et un vecteur non nul $\vec{u}$,

$$(\mathcal{S}_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ \mathcal{S}_\Delta) \iff (\vec{u} \text{ est un vecteur directeur de la droite } \Delta)$$

Activité 11

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un losange ABCD tel que AC= 2BD. Soit s la réflexion d'axe (AB) et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ s$.

✂ ....

3.1.3.2 Classification des isométries

3.1.3.2.1 *Décomposition d'une isométrie*

Activité 12

Soit f une isométrie du plan, A un point du plan et A$'$ son image par f. Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.

1. Démontre que $t_{\vec{u}}^{-1} \circ f$ est une isométrie g laissant invariant le point A et que $f = t_{\vec{u}} \circ g$.
2. On suppose que g' est une isométrie et t' une translation tel que $g'(A) = A$ et $f = t \circ g = t' \circ g'$
   Démontre que $t = t'$ et que $g = g'$

✂ ....

Propriété 9
Soit f une isométrie du plan et A un point.
Il existe une unique isométrie g et une unique translation t telle que $g(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et $f = t \circ g$

① Si g est l'application identique, alors f est une translation.

② Si g est une rotation, alors f est une rotation.

③ Si g est une réflexion, alors f est une réflexion ou une symétrie glissée

3.1.3.2.2 *Isométries laissant invariants trois points non alignés*

Activité 13
Soit f une isométrie laissant invariants trois points non alignés du plan.
Démontre que f laissent invariant tout point M du plan et déduis la nature de f.

Propriété 10
Une isométrie du plan laissant invariants trois points non alignés du plan est l'application identique.

Propriété 11
Si deux isométries f et g du plan coïncident en trois points non alignés, alors $f = g$.

3.1.3.2.3 *Isométries laissant invariants exactement deux points distincts*

Activité 14
Soit f une isométrie distincte de l'application identique du plan, laissant invariant deux points distincts A et B. Soit C le point du plan n'appartenant pas à la droite (AB), C′ l'image de C par f.

1. Prouve que C est distinct de C′ et que (AB) est la médiatrice de [CC′].
2. Soit s la réflexion d'axe (AB).
   (a) Démontre que $s \circ f$ laisse invariants les points A, B et C.
   (b) Déduis-en que $f = s$.

✂ ....

Propriété 12
Une isométrie f du plan distincte de l'application identique, laissant invariant deux points distincts A et B est la réflexion d'axe (AB).
NB :
Si l'image A' de A par f est distinct de A, alors tout point fixe M par f, s'il existe, est situé sur la médiatrice du segment [AA'].

3.1.3.2.4 *Isométrie laissant un seul point*

Activité 15
Soit f une isométrie du plan laissant invariant un seul point A. Soit B un point du plan distinct de A. On pose $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$.

1. Justifie que B est distinct de B′.
2. Soit Δ la médiatrice du segment [BB′] et s la réflexion d'axe Δ.
   (a) Démontre que A$\in \Delta$
   (b) Démontre que $s \circ f$ est la réflexion d'axe (AB).
   (c) Déduis-en la nature de f

✂ ....

Propriété 13
Une isométrie plane qui laisse invariant un unique point A est une rotation de centre A.

Propriété 14
Si f est une isométrie qui n'admet aucun point fixe, alors f est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissée.

Propriété 15 Caractérisation d'une isométrie
Une isométrie plane est soit translation, soit une rotation, soit une symétrie orthogonale,soit une symétrie glissée, soit l'application identique.
NB : Toute isométrie est la composée d'au plus trois réflexions.

Retenons
Si ABC et A'B'C'sont deux triangles isométriques (triangles superposables), alors il existe une unique isométrie f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$.

3.1.3.3 Déplacements et antidéplacements

3.1.3.3.1 *Définitions et propriétés*

On appelle **déplacement** toute isométrie plane qui conserve les angles orientés.
On appelle **antidéplacement** toute isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

	avec point invariant	sans point invariant
Déplacements	Rotation	translation
Antidéplacements	symétrie orthogonal	Symétrie glissée

Propriétés 2

① Toute isométrie du plan est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

② Tout **déplacement** est soit une **translation**, soit une **rotation**.

③ Tout **antidéplacement** est soit une **réflexion**, soit une **symétrie glissée.**

④ La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.

⑤ La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

⑥ La transformation réciproque d'un déplacement est un déplacement.

⑦ La transformation réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

3.1.3.3.2 *Détermination d'une isométrie*

Propriété 16
Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que AB=A'B' et A distinct de B.
Il existe un unique déplacement f transformant A en A' et B en B'.

① Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

② Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, alors f est la rotation d'angle $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ et de centre Ω tel que :

- si A=A', alors $\Omega = A$.
- si B=B', alors $\Omega = B$.
- si (AA') et (BB') sont sécantes, alors Ω est le point d'intersection des médiatrices de [AA'] et de [BB']
- si (AA') et (BB') sont parallèles, alors Ω est le point d'intersection de (AB) avec la médiatrice Δ commune des segments [AA'] et [BB'].

Propriété 17
Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que AB=A'B' et A $\neq$ B.

Il existe un unique antidéplacement f transformant A en A' et B en B'.

Dans ce cas :

① si (AA')∥(BB'), alors f est la réflexion d'axe Δ médiatrice de [AA'] et de [BB$'$]

② si (AA') n'est pas parallèle à (BB'), alors f est une symétrie glissée.

3.1.3.3.3 *Écriture complexe d'un déplacement*

Tout déplacement f du plan a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}$.

① Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

② Si $a \neq 1$, alors f est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \mathbf{arg}\,(a)$

3.1.3.3.4 *Écriture complexe d'un antidéplacement*

Tout antidéplacement a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}$

① Si $a\overline{b} + b = 0$, alors f est une réflexion.

② Si $a\overline{b} + b \neq 0$, alors f est une symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $\frac{1}{2}(a\overline{b} + b)$ et d'axe $\mathcal{D} = \left\{M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{MM'} = \vec{u}\right\}$. . $\mathcal{D}$ passe par le point d'affixe $\dfrac{b}{2}$.

Déplacements	Antidéplacements
Toute isométrie f qui conserve les mesures des angles orientés	Toute isométrie g qui change les mesures des angles orientés en leurs opposés
Les déplacements sont : l'identité, les translations, les rotations, les symétries centrales	Les antidéplacements sont : les symétries orthogonales et les symétries glissées.
Si AB=CD et AB≠ 0 Alors il existe un <u>seul déplacement</u> f tel que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$ l'angle de f est $\alpha \equiv \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)[2\pi] \Longrightarrow$ $\begin{cases} f = t_{\vec{u}} & \text{si} \quad \alpha \equiv 0[2\pi] \\ f = r_{(\mathrm{I},\alpha)} & \text{si} \quad \alpha \not\equiv 0[2\pi] \end{cases}$	Si AB=CD et AB≠ 0 Alors il existe un <u>seul antidéplacement</u> g tel que $g(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$ et $g(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$. Si méd[AC]=méd[BD] alors g est symétrie orthogonale d'axe méd[AC]. Si méd[AC]≠méd[BD] alors g est une symétrie glissée.
<u>Compositions de déplacements</u> : ⋆ $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$. ⋆ $t_{\vec{u}} \circ r_{(\mathrm{I},\alpha)}$ est une rotation d'angle α. ⋆ $r_{(\mathrm{I},\alpha)} \circ r'_{(\mathrm{I},\beta)} = R_{(\mathrm{I},\alpha+\beta)} = r'_{(\mathrm{I},\beta)} \circ r_{(\mathrm{I},\alpha)}$ ⋆ $r_{(\mathrm{I},\alpha)} \circ r'_{(\mathrm{J},\beta)} =$ $\begin{cases} \text{rotation d'angle } \alpha+\beta & \text{si} \quad \alpha+\beta \not\equiv 0[2\pi] \\ \text{translation} & \text{si} \quad \alpha+\beta \equiv 0[2\pi] \end{cases}$ ⋆ $S_{\mathrm{I}} \circ S_{\mathrm{J}} = t_{2\overrightarrow{\mathrm{JI}}}$. ⋆ $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} =$ $\begin{cases} Id_{\mathcal{P}} & \text{si } \Delta = \Delta' \\ r_{(\mathrm{I},\alpha)} \text{ si} \Delta \cap \Delta' & = \{\mathrm{I}\} \text{ et } \alpha \equiv 2(\vec{u}_{\Delta}, \vec{u}_{\Delta'})[2\pi] \\ S_{\mathrm{I}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} & \text{si } \Delta \perp \Delta' \\ t_{2\overrightarrow{\mathrm{JI}}} & \text{si } \Delta \parallel \Delta' \end{cases}$	$t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ → symétrie orthogonale si $\vec{u} \perp \Delta$ avec $t_{\vec{u}}$ en $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} \cdots$ $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ → symétrie glissée sinon **Symétrie glissée** : $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\mathcal{D}}$ avec $\vec{u}$ **directeur** de $\mathcal{D}$, on a : ⋆ $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{u}}$ ⋆ $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ ⋆ $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ ⋆ pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{D}$ $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \vec{u}$ ⋆ pour tout point M , M'= $f(\mathrm{M})$, le milieu de [MM'] appartient à $\mathcal{D}$.

Activité 16

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\widehat{vect\mathrm{CA}\overrightarrow{\mathrm{CB}}} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, on désigne par O le milieu du segment [BC].

1. Montre que le triangle OCA est équilatéral.
2. (a) Montre qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur A et B sur C.
   (b) Montre que f est une rotation. Construire son centre I.
   (c) En calculant $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{\mathrm{IB}}, \overrightarrow{\mathrm{IO}}\right)$ et $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{\mathrm{IO}}, \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)$, Montre que I appartient au segment [AB].
   (d) Calcule le rapport $\dfrac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IB}}$, déduis-en que I est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}, 2)$ et $(\mathrm{B}, 1)$.
3. Soit r la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ r$.
   (b) Soit C' l'image de C par f. Montre que O, I et C' sont alignés.
4. (a) Montre qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme O en A et B en C.
   (b) Montrer que g est une symétrie glissée dont tu préciseras l'axe et le vecteur.
   (c) Montrer que $g(\mathrm{C}) = C'$.
5. Soit $h = t_{\overrightarrow{\mathrm{BC}}} \circ S_{(\mathrm{AB})}$. Donne la nature et les éléments caractéristiques de h.

✂ ....

Activité 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1. Détermine l'écriture complexe de la réflexion d'axe $\mathcal{D}: -x + y - 1 = 0$
2. Soit f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe
   $z' = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{2})\overline{z} - \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Donne la nature et les éléments caractéristiques de f.

Activité 18

Le plan est orienté. ABCD est un carré direct tel que $\mathbf{mes}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Δ est la médiatrice du segment [BC].
Soit f une isométrie distincte de la symétrie orthogonale S_{Δ} et telle que : $f(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ et $f(\mathrm{D}) = \mathrm{A}$.

1. (a) Montre que le point O, milieu du segment [BD] est invariant par f et que c'est l'unique point du plan invariant par f .
   (b) déduis-en la nature et les caractéristiques de f .

2. Soit $g = f \circ S_{\Delta}$ et $\varphi = S_{\Delta} \circ f$.
   (a) Cherche $g(\mathrm{A})$ et $g(\mathrm{C})$. Déduis-en que $g = S_{(\mathrm{AC})}$.
   (b) Montre que $\varphi = S_{(\mathrm{BD})}$.
   (c) Déduis-en la nature de $g \circ \varphi$.

3.2 Séquence 2 : Applications affines du plan

3.2.0.1 Définitions et propriétés

Définition 1
Soit f une application ponctuelle du plan.

— On dit que f est une application affine du plan si et seulement si f conserve le barycentre de deux points :
$\mathrm{G} = \textbf{bar}\{(\mathrm{A},\alpha);(\mathrm{B},\beta)\}\} \Longrightarrow f(\mathrm{G}) = \textbf{bar}\{(f(\mathrm{A}),\alpha);(f(\mathrm{B}),\beta)\}$

— Une application affine bijective du plan est appelée **transformation affine**.
Exemple

- Les isométries et les homothéties du plan sont des transformations affines du plan.
- La projection sur une droite est une application affine du plan mais elle n'est pas une transformation

— La composée de deux applications affines du plan est une application affine.

— L'application réciproque d'une application affine du plan est une transformation affine du plan.

3.2.0.2 Application vectorielle associée à une application affine

Définition 2 On appelle application vectorielle associée à une application affine f, l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ \overrightarrow{\mathrm{MN}} & \longmapsto & \overrightarrow{\varphi(\mathrm{M})\varphi(\mathrm{N})} \end{array}$$
où M et N sont deux points du plan.

Propriété 1
Soit φ l'application vectorielle associée à une application affine f.
φ est linéaire c-à-d :

- $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2,\ \varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
- $\forall(\alpha,\vec{u}) \in \mathbb{R}\times\mathcal{V},\ \varphi(\alpha\times\vec{u}) = \alpha\times\varphi(\vec{u})$.

Propriété 2 Toute application affine du plan conserve le barycentre de n points pondérés.

3.2.0.3 Détermination d'une application affine

Propriété 3
Soit A, B, C trois points non alignés du plan et A', B', C' trois autres points.
Il existe une et une seule application affine f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$.
On dit qu'une application affine est déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

Propriété 4
Soit f une application affine du plan.

① L'ensemble des points invariants par f est soit l'ensemble vide (par exemple la translation de vecteur non nul, la symétrie glissée), soit un singleton (la rotation ou l'homothétie de rapport $k \neq 0$), soit une droite (la réflexion, l'affinité), soit le plan (l'application identique).

② Soit A, A', B et B' des points distincts du plan tels que A≠ B, $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$.
- Si $\mathrm{A}' = \mathrm{B}'$, alors l'image par f de la droite (AB) est le singleton $\{\mathrm{A}'\}$.
- Si $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$, alors l'image par f de la droite (AB) est la droite $(\mathrm{A}'\mathrm{B}')$.

③ Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles.
Si l'image par f de $\mathcal{D}_1$ est une droite $\mathcal{D}_1'$, alors l'image par f de la droite $\mathcal{D}_2$ est une droite $\mathcal{D}_2'$ parallèle à $\mathcal{D}_1'$

④ f est une bijection si l'image par f d'un repère du plan est un repère du plan.
- Si f est une bijection, alors $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$
- Si f n'est pas une bijection, alors $f(\mathcal{P})$ est soit un singleton, soit une droite.

Propriété 5 Expression analytique
Le plan est muni du repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Une application f du plan dans lui-même est une application affine si et seulement si son expression analytique est de la forme :
$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$
avec a, a', b, b', c, c' sont des constantes réelles données.

Activité 1
Le plan est muni du repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les point A(2 ;0), B(1 ;1), C(-2 ;1) , A'(3 ;10), B'(4 ;6) et C''(-3 ;-1).

1. Démontre qu'il existe une et une seule application affine f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$; $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$
2. Démontre que f est bijective.
3. Détermine l'expression analytique de f.

✂ ....

3.2.0.4 Affinités

3.2.0.4.1 Définitions et propriétés

Définition 3

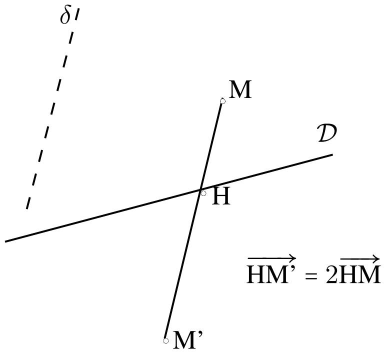
Soit $\mathcal{D}$ une droite et δ une direction de droites distincte de celle de $\mathcal{D}$ et k un nombre réel non nul.

On appelle **affinité** d'axe $\mathcal{D}$ (ou de base $\mathcal{D}$) de direction δ et de rapport k, l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}' \mid \overrightarrow{\mathrm{HM}'} = k\overrightarrow{\mathrm{HM}} \end{array}$$

où H est la projection de M sur la droite $\mathcal{D}$ suivant la direction de $\vec{u}$.

Exemple



Remarque

Dans les conditions de a définition,

- lorsque la direction de $\mathcal{D}$ est orthogonale à δ, on dit que f est l'**affinité orthogonale** d'axe $\mathcal{D}$ et de rapport k.
- si $k = 0$, alors f est une projection sur $\mathcal{D}$ suivant la direction δ.
- si $k = 1$, alors f est l'application identique du plan.
- si $k = -1$, alors f est aussi appelée **symétrie axiale** de base $\mathcal{D}$ et de direction δ.

  Exemple

  La réflexion d'axe $\mathcal{D}$ est l'affinité orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ de rapport -1.

Exemple

La réflexion d'axe $\mathcal{D}$ est l'affinité orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ de rapport -1.

Propriété 6

Soit $\mathcal{D}$ une droite et δ une direction de droites ne contenant pas $\mathcal{D}$ et k un nombre réel non nul, f l'affinité d'axe $\mathcal{D}$ de direction δ et de rapport k.

① Si $k \neq 1$, alors l'ensemble des points invariants par f est la droite $\mathcal{D}$

② f est une transformation et sa réciproque f^{-1} est l'affinité d'axe $\mathcal{D}$ de direction δ et de rapport $\frac{1}{k}$

3.2.0.4.2 Affinité et application affine

Une affinité du plan est une application affine

3.2.0.4.3 Affinité et fonctions associées à une fonct. num. donnée

Activité 2

Soit f et g deux fonctions numériques de variable réelle, $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ du plan ; $(\mathcal{C}_g)$ celle de g dans le même repère.

a est une constante réelle différente de 0 et de 1.

1. On pose $g(x) = f(ax)$. Démontre que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par l'affinité d'axe l'axe des ordonnées, de direction celle de l'axe des abscisses et de rapport $\dfrac{1}{a}$.
2. On pose $g(x) = af(x)$. Démontre que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par l'affinité d'axe l'axe des abscisses, de direction celle de l'axe des ordonnées et de rapport a.

Éléments de solution

Propriété 7

Soit f et g deux fonctions numériques de variable réelle, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ du plan, a un nombre réel différent de 0 de 1.

① Si $g(x) = f(ax)$ alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité par rapport à l'axe des ordonnées, de direction celle de l'axe des abscisses et de rapport $\frac{1}{a}$

② Si $g(x) = af(x)$ alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité par rapport à l'axe des abscisses, de direction celle de l'axe des ordonnées et de rapport a.

Point-méthode : Pour démontrer qu'une application affine f est une affinité connaissant son expression analytique,

— On détermine l'ensemble $\mathcal{D}$ des points invariants par f,

— Pour tout point M du plan, n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, d'image M' par f, on montre que le vecteur $\overrightarrow{\text{MM'}}$ a une direction fixe Δ distincte de celle de $\mathcal{D}$

— On montre qu'il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{\text{MM'}} = k\overrightarrow{\text{HM}}$ où H est le projeté de M sur $\mathcal{D}$ suivant Δ.

Activité de réinvestissement

1. Le plan est muni du repère orthonormé $(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'application f qui, à tout point $\text{M}(x;y)$ associe le point $\text{M}'(x';y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(3x - y + 1) \\ y' = \frac{1}{4}(-x + 3y + 1) \end{cases}$$
   (a) Démontre que f est une affinité dont tu préciseras les éléments caractéristiques

   (b) Détermine une équation de l'image $'$ par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre I(1 ;0) et de rayon 2.

2. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(\text{O}\,;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Soit l'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & \text{M}(z) & \longmapsto & \text{M}'(z') \mid z' = \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} + 1 \end{array}$$
   (a) Détermine l'expression analytique de φ.

   (b) Démontre que φ est une affinité dont tu détermineras les éléments caractéristiques.

   (c) Soit l'application $\begin{array}{rccl} \sigma : & \mathcal{P}\setminus\{\text{O}\} & \longrightarrow & \mathcal{P}\setminus\{\text{O}\} \\ & \text{M}(z) & \longmapsto & \text{M}'(z') \mid z' = \dfrac{1}{\overline{z}} \end{array}$

   σ est-elle une application affine ?

✂ ....

3.3 Séquence 3 : Similitudes planes

Généralités

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit $\mathrm{M}(x;y)$ et $\mathrm{M'}(x';y')$ deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z et z', et l'application $\begin{array}{l} f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ \quad \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M} \end{array}$

On dit que f est une transformation lorsqu'elle est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$.

- Dans ce cas l'application $\begin{array}{l} F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad z \longmapsto z' \end{array}$ est la bijection complexe associée à f. Elle permet de déterminer l'affixe z' du point M' en fonction de l'affixe z de M .
- On appelle point invariant par F tout point M de $\mathcal{P}$ tel que $f(\mathrm{M})$=M .

Exemples de quelques transformations

Les translations , les homothéties , les rotations sont des transformations du plan.

3.3.1 Similitudes planes

3.3.1.1 Définitions

① Soit f une application de $\mathcal{P}$ dans lui-même .
On dit que f est une **similitude** si et seulement si il existe un réel k **strictement positif** tel que : pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a : M'N'=kMN.
Le réel k s'appelle le rapport de la similitude f.

Exemple 4. *. :*

- *Toute isométrie est une similitude de rapport* :
- *Toute homothétie de rapport λ est une similitude de rapport ....*

Propriété 1 La composée de deux similitudes est une similitudes de rapport le produit des rapports.

3.3.1.2 Décomposition d'une similitude

Activité 1

1. Soit h une homothétie de rapport λ et i une isométrie. On pose $f = h \circ i$.
   Montre que f est une similitude et précise son rapport.
2. Soit f une similitude de rapport $k\,(k > 0)$ et A un point du plan.On pose $h = h_{(\mathrm{A}\,,\,k)}$ et $i = h^{-1} \circ f$.
   Montre que i est une isométrie et déduis que f est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

✂ ....

Propriété 2

Le plan est orienté.
Une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est une similitude de rapport k si et seulement si elle s'écrit sous la forme $f = h \circ i$, où h est une homothétie de rapport k et i est une isométrie.

① Si l'isométrie i est un **déplacement** alors $f = h \circ i$ conserve les angles orientés, on dit que f est une **similitude plane directe**.
① Si l'isométrie i est un **antidéplacement** alors $f = h \circ i$ transforme un angle orienté en son opposé, on dit que f est une **similitude plane indirecte**.

Conséquences :

L'isométrie i et l'homothétie h étant des transformations affines alors $f = h \circ i$ est transformation affine. De ce fait, de la propriété précédente on déduit que :

$\mathbf{C}_1$ Toutes les propriétés communes aux homothéties et aux isométries restent valables pour les similitudes (conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du barycentre, du contact, ...)

$\mathbf{C}_2$ Toute similitude de rapport k :

- multiplie les longueurs par k, les aires par k^2
- conservent les mesures des angles géométriques.
- f est déterminée par la donnée de deux points distincts et leurs images.
- L'image d ?une droite par une similitude est une droite.
- L'image d ?un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r par une similitude f de rapport k est un cercle $\mathcal{C}'$ de centre O'=$f(\mathrm{O})$ et de rayon kr.
- Soit A, B, C, D, E, F des points du plan et A', B', C', D', E', F' leurs images respectives par une similitude.

Si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\,\overrightarrow{\mathrm{CD}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = a\,\overrightarrow{\mathrm{C'D'}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{E'F'}}$

✂ ....

Propriété 3

① Toute similitude de rapport k est une bijection dont la réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

② La composée de deux similitudes planes de rapport k et k' est une similitude de rapport kk'.

③ Deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés coïncident sur tout le plan.(sont égales

④ Soient f , g et h trois similitudes.
  · $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
  · $(f = g)$, si et seulement si $h \circ f = h \circ g$.

⑤ La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

⑥ La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

⑦ La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

⑧ La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.

⑨ La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

✂ ....

Propriété 4
Soit A, B, C et D des points du plan tels que A ≠ C et B ≠ D.
ň Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur B et C sur D.
ň Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur B et C sur D.

3.3.1.3 Similitudes directes

3.3.1.3.1 Angle d'une similitude directe

Définition 1
Soit f une similitude directe et A, B, C et D des points tels que AB ≠ 0 et CD ≠ 0 . Soit A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D .
Alors $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv \widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}[2\pi]$.
En désignant par θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ on dit que f est une similitude directe d'angle θ .

3.3.1.3.2 centre d'une similitude directe

Toute similitude directe de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.
Conséquence
Une similitude directe de rapport différent de 1 est parfaitement déterminée par la donnée de son centre, son rapport et son angle.
Le centre, le rapport et l'angle d ?une similitude directe sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude. On a donc :

Propriété 5 fondamentale.
Une application f est une similitude directe de rapport $k \neq 1$, de centre I et d'angle θ si et seulement si pour tout point M distinct de I, d'image M' , on a :

$$\text{IM'} = k\text{IM} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{\text{IM}}, \overrightarrow{\text{IM'}}) \equiv \theta\,[2\pi]$$

NB : Cette propriété permet de construire le centre d'une similitude plane directe connaissant sont rapport, son angle , un point et son image.
Exemple
A, B, C et D sont des points distincts tels que BD= 3 AC et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
Construis le centre Ω de la similitude s qui transforme A en B et C en D
Le point Ω appartient à l'intersection du cercle de diamètre [IJ] et de l'arc de cercle ensemble des points du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; où I = bar $\{(A, 1), (B, 3)\}$ et J = bar $\{(A, 1), (B, -3)\}$

3.3.1.3.3 Forme réduite d'une similitude directe

Propriété 6 Toute similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ se décompose sous la forme $f = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre I et de rapport k et r est la rotation de centre I et d'angle θ . Cette décomposition s'appelle forme réduite de f.

3.3.1.3.4 Similitudes directes et nombres complexes

Propriété 7
$\boxed{P_1}$ Toute similitude plane directe de rapport k , $k \in \mathbb{R}_+^\star$ a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^\star$ tel que $k = |a|$ et $b \in \mathbb{C}$.
$\boxed{P_2}$ Toute écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^\star$ et $b \in \mathbb{C}$, est celle de la similitude plane directe s de rapport $k = |a|$.
Remarque
☞ si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b et, si de plus $b = 0$, alors f est l'identité du plan.
☞ si $a \neq 1$ alors s admet un seul point invariant Ω .
Soit α un argument de a et $k = |a|$.
s peut se décomposer sous la forme $s = h \circ r$ ou $s = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k et r la rotation de centre Ω et d'angle α .
La composée $h \circ r = r \circ h$ est la forme réduite de s .
☞ si $a \neq 1$ et $|a| = 1$, alors s est la rotation d'angle un argument de a et dont le centre a pour affixe $\frac{b}{1-a}$.

☞ si $a \in \mathbb{R}^{\star} \setminus \{1\}$ alors s est l'homothétie de rapport a et de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$.
☞ si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on dit que alors s est la similitude plane directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$, d'angle α de rapport k.

Propriété 8
① Soit s une similitude plane directe de rapport k et d'angle α, et s' une similitude plane directe de rapport k' et d'angle α'.
- La composée $s' \circ s$ est une similitude plane directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.
- La réciproque de s est la similitude de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

☞ si s a pour écriture complexe $z' = az + b$ et s' a pour écriture complexe $z' = \lambda z + \beta$, alors $s' \circ s$ a pour écriture complexe $z' = \lambda(az + b) + \beta$ et, $s \circ s'$ a pour écriture complexe $z' = a(\lambda z + \beta) + b$.
② Soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, $k \in \mathbb{R}_+^{\star}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
f est une similitude plane directe de rapport k et d'angle α si, et seulement si, $\forall\,(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{P}^2$ tels que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M'}$ et $f(\mathrm{N}) = \mathrm{N'}$, on a $\begin{cases} M'N' = kMN \\ mes(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

3.3.1.3.5 *Détermination d'une similitude plane directe*

- Toute similitude plane directe de centre d'affixe w, de rapport $k \in \mathbb{R}_+^{\star}$ et d'angle θ a pour écriture complexe $z' = ke^{i\theta}z + (1 - ke^{i\theta})w$.
- Étant donnés trois points Ω A et A', il existe une seule similitude plane directe de centre Ω qui transforme A en A'.

Le système $\begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \\ z_{A'} = az_A + b \end{cases}$ permet de trouver a et b, puis l'écriture complexe de cette similitude
- Soit $k \in \mathbb{R}_+^{\star}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, A et A' deux points de $\mathcal{P}$.

Il existe une seule similitude plane directe de rapport k et d'angle α qui transforme A en A'.
L'égalité $z_{A'} = ke^{i\alpha}z_A + b$ permet de déterminer son écriture complexe.
- Soit A, A', B et B' des points de $\mathcal{P}$ tels que A ≠ B et A' ≠ B' : il existe une seule similitude plane directe qui transforme A en A' et B en B'.

Le système $\begin{cases} z_{\mathrm{A'}} = az_{\mathrm{A}} + b \\ z_{\mathrm{B'}} = az_{\mathrm{B}} + b \end{cases}$ permet de déterminer son écriture complexe.

Activité 2
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.
1. Soit les point $\mathrm{A}(1+i)$, $\mathrm{B}(3-i)$, $\mathrm{C}(4-5i)$.
   Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe s de centre A qui transforme B en C.
2. Soit les points $\mathrm{C}(1+i)$ et $\mathrm{D}(2-3i)$. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s de rapport 2 et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ qui transforme C en D.
3. Soit les points $\mathrm{A}(1+i)$, $\mathrm{B}(3-i)$, $\mathrm{C}(3+2i)$, $\mathrm{D}(4+3i)$.
   Détermine l'écriture complexe de la similitude plane directe s qui transforme A en B et C en D.

✂ ....

Activité 3
Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$. Tu feras une figure que tu compléteras tout au long de l'exercice.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$. Soit la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.
1. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. (a) Détermine l'affixe du point B' image du point B par f.
   (b) Montre que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.
3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
   Soit M' l'image de M par f.
   Montre que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CM'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ sont orthogonaux si, et seulement si $x + 3y = 2$.
4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Vérifie que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E).
   (b) Résous l'équation (E).
   (c) Déduis-en l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CM'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ soient orthogonaux.
   Place ces points sur la figure.

✂ ....

3.3.1.4 similitude plane indirecte

Rappelons qu'une similitude indirecte est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Définition et propriété
Une similitude indirecte de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Propriété 9

Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$ et h l'homothétie de centre I et de rapport k. Il existe une droite $\mathcal{D}$ telle que f se décompose de manière unique sous la forme $f = h \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ h$, où $S_{\mathcal{D}}$ est la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$.

Dans ce cas, la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que

$\overrightarrow{\text{IM'}} = k\,\overrightarrow{\text{IM}}$ où M'=f(M).

Cette décomposition est appelée forme réduite de f.

La droite $\mathcal{D}$ est appelée axe de la similitude indirecte f .

Conséquence

· Une similitude plane indirecte de rapport différent de 1, est parfaitement déterminée par son rapport, son centre et son axe, qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.

· L'axe $\mathcal{D}$ d ?une similitude plane indirecte de centre I et la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par I sont globalement invariants par f.

· Si f est une similitude plane indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2 .

Propriété 10

Soit f une similitude plane indirecte de centre I, de rapport différent de 1 et d ?axe $\mathcal{D}$.

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, alors $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{\text{IM'}}\right) \equiv -(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{\text{IM}})[2\pi]$ pour tout M distinct de I.

La droite $\mathcal{D}$ porte donc la bissectrice intérieure de $\widehat{\text{MIM'}}$

N.B Cette propriété permet de construire l'axe d'une similitude plane indirecte connaissant un point et son image ainsi que le centre de cette similitude.

3.3.1.4.1 Similitudes indirectes et nombres complexes

Propriété 11

Le plan est est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O}\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\,)$.

p1 Toute similitude plane indirecte est définie par une relation de la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^\star$, $b \in \mathbb{C}$.

p2 Soit σ une similitude plane indirecte plane définie par la relation $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^\star$, $b \in \mathbb{C}$.

⋆ Si $|a| = 1$ alors σ est un antidéplacement et cet antidéplacement est une réflexion si et seulement si $a\overline{b} + b = 0$.(sinon c'est une symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $\frac{1}{2}(a\overline{b} + b)$ et d'axe $\mathcal{D} = \{\text{M} \in \mathcal{P}\,,\,\overrightarrow{\text{MM'}} = \vec{u}\,\}$ où M'=f(M)).

⋆ Si $|a| \neq 1$ alors σ admet un seul point invariant Ω d'affixe $\left(\dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2}\right)$. Dans ce cas $\sigma = h \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}} \circ h$ où $s_{\mathcal{D}}$ est une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ passant Ω et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

Le point Ω , la droite $\mathcal{D}$ et le nombre réel strictement positif $|a|$ sont les éléments caractéristiques de σ .

$\mathcal{D} = \left\{\text{M} \in \mathcal{P}\,,\,\overrightarrow{\Omega\text{M'}} = |a|\,\overrightarrow{\Omega\text{M}}\right\}$ où M'=f(M).

Propriété 12

Soit A, A', B et B' des points de $\mathcal{P}$ tels que A ≠ B et A' ≠ B' : il existe une seule similitude plane indirecte qui transforme A en A' et B en B'.

Activité 4

Soit ABCD un carré direct de centre O. On note I le milieu de[AB].

1. Soit f la similitude directe telle que f(A)=B et f(D)=I.
   Détermine le rapport et l'angle de f et construis son centre Ω .
2. Soit $g = f \circ S_{(\Omega\text{C})}$.
   Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera les éléments caractéristiques.

✂ ....

Activité 5

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O}\,,\,\vec{e_1}\,,\,\vec{e_2}\,)$.

1. Soit l'application $\begin{array}{rcl} s : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \text{M}(x\,,\,y) & \longmapsto & \text{M}'(x'\,,\,y') \end{array}$ tels que : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \end{cases}$
   (a) Détermine l'écriture complexe de s .
   (b) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de s
2. Soit l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \text{M}(x\,,\,y) & \longmapsto & \text{M}'(x'\,,\,y') \end{array}$ tels que : $\begin{cases} x' = 3x + 4y + 1 \\ y' = 4x - 3y + 2 \end{cases}$
   (a) Détermine l'écriture complexe de f .
   (b) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de f .

✂ ....

Activité 6

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un rectangle ABCD de centre O tel que $\text{AB} = 2\text{BC}$ et **mes**$\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I, J, K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [BC].

Partie I

1. (a) Montre qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A sur C et I sur J.
   (b) Prouve que $f(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$.
   (c) Montre que f est une symétrie glissée.
2. Soit $\mathrm{E} = f(\mathrm{C})$.
   (a) Montre que $(\overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{DE}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   (b) Prouve que D est le milieu de [AE].
   (c) Soit $\mathrm{F} = f(\mathrm{D})$.. Montre que ABFE est un carré direct.
3. Montre que $f \circ s_{(\mathrm{AB})}$ est une symétrie centrale dont tu préciseras le centre.
   Déduis-en la forme réduite de f.
4. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles de diamètres respectifs [AB] et [CD]. Les droites (AC) et (CE) recoupent respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ en M et M'.
   On pose $\mathrm{N} = s_{(\mathrm{OI})}(\mathrm{M}')$. Montre que les droites (MN) et (AD) sont parallèles.

Partie II

1. Soit s la similitude directe telle que $s(\mathrm{A}) = \mathrm{J}$ et $s(\mathrm{I}) = \mathrm{E}$.
   (a) Détermine le rapport et une mesure de l'angle de s.
   (b) On note Ω le centre de s. Montre que Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   Déduis-en que $\mathrm{IJ} = \mathrm{IA} = \mathrm{I}\Omega$.
   (c) Montre que $\mathrm{EJ} = \mathrm{E}\Omega$.
   (d) Déduis que Ω est le symétrique de J par rapport à (IE).
2. Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(\mathrm{E}) = \mathrm{J}$ et $\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{I}$. On désigne par h l'homothétie de centre B et de rapport 2.
   (a) Détermine $h \circ \sigma(\mathrm{E})$.
   (b) Caractérise $h \circ \sigma$. Déduis-en la forme réduite de σ.

✂ ....

Activité 7

ABC est un triangle isocèle et rectangle en A tel que : $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I, J K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [AC] et [JC].

1. Soit f la similitude direct de centre J qui envoie A sur K.
   (a) Détermine l'angle et le rapport de f.
   (b) Justifie que $f(\mathrm{K}) = \mathrm{L}$.
   (c) Soit H le milieu de [AJ]. Justifie que $f(\mathrm{I}) = \mathrm{H}$.
2. On munit le plan du repère orthonormé direct $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ et on considère l'application
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mathrm{M}(z) & \longmapsto & \mathrm{M}'(z') \mid z' = -\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+\mathrm{i}}{2} \end{array}.$$
   (a) Montre que φ est une similitude indirecte de centre C.
   (b) Donne les affixes des points I, K, J et H.
   (c) Détermine $\varphi(\mathrm{I})$ et $\varphi(\mathrm{J})$.
   (d) Déduis que $\varphi = f \circ S_{(\mathrm{IK})}$.
3. Soit Δ, l'axe de φ.
   (a) Trace Δ.
   (b) La droite Δ coupe (IK) et (HL) respectivement en P et Q.
   Montre que $\varphi(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P})$ et déduis que $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.

✂ ....

Activité 8

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
On désigne par I le milieu de [BC] et par J le projet é orthogonal de B sur la droite (DC).
Soit f la similitude indirecte de Centre C qui transforme A à C.

1. (a) Montre que le rapport de f est $\sqrt{3}$.
   (b) Précise l'axe Δ de f.
2. Soit Soit B'=$f(\mathrm{B})$.
   (a) Précise la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ f$.
   (b) Déduis-en que $\overrightarrow{\mathrm{CB'}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{CA}}$. Construis le point B'.
   (c) Montre que BB'=BC. Déduis-en que $f(\mathrm{I}) = \mathrm{J}$.
3. Soit $S = f \circ S_{\mathrm{BC}}$ où S_{BC} désigne la symétrie orthogonale d'axe (BC).
   Détermine la nature et les éléments caractéristiques se S.

✂ ....

Activité 9

on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; on désigne par I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].

1. on note s la similitude directe telle que $s(\mathrm{D}) = \mathrm{O}$ et $s(\mathrm{C}) = \mathrm{I}$.
   (a) Détermine l'angle et le rapport de s.
   (b) Trouve une construction géométrique du centre Ω de s.
2. (a) Précise les images respectives des droites (BD) et (BC) par s.

(b) Détermine alors $s(\mathrm{B})$ et $s(\mathrm{A})$.

(c) Montre que Ω est le barycentre des points pondérés (B,1) et (J,4).

3. soit r la rotation de centre O d ?angle $\dfrac{\pi}{2}$, on pose $h = r \circ s$.

   (a) Précise $\mathrm{h}(\mathrm{B})$ puis caractérise h.

   (b) soit Ω' le milieu de $[\Omega\mathrm{B}]$, justifier que $\mathrm{O}\Omega\Omega'$ est rectangle isocèle.

4. soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(\mathrm{D}) = \mathrm{O}$ et $\sigma(\mathrm{C}) = \mathrm{I}$.

   (a) vérifie que $\sigma = S_{(\mathrm{OI})} \circ s$; puis déterminer $\sigma(\mathrm{B})$.

   (b) Donne la forme réduite de σ.

✂ ....

Activité 10

dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle et isocèle tel que $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$;, on pose $\mathrm{D} = S_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$, $\mathrm{E} = S_{\mathrm{B}}(\mathrm{B})$ où S_{C} et S_{B} sont les symétries centrales de centres respectifs C et B ; H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
Soit s la similitude directe tel que $s(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$.

1. (a) Détermine l'angle et le rapport de s.

   (b) Montre que $s(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.

2. soit Ω le centre de s .

   (a) montrer que Ω est définie par : $\dfrac{\Omega\mathrm{C}}{\Omega\mathrm{A}} = 2$ et $(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

   (b) Construis alors Ω.

3. Le plan est rapporté au repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

   (a) Détermine l ?expression complexe associé à la similitude s.

   (b) Détermine alors l'affixe z_Ω de Ω.

4. Soit σ la similitude indirecte définie par $\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $\sigma(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$.
   Détermine le centre ω de σ et vérifie que $\omega = \mathrm{D}$.

5. On pose $\varphi = \sigma \circ s^{-1}$.

   (a) montrer que φ est une symétrie orthogonale que tu préciseras.

   (b) Détermine alors $\varphi(\mathrm{C})$.

6. Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mathrm{M}(z) & \longmapsto & \mathrm{M}'(z') \end{array}$ tel que $z' = (-1+\mathrm{i})\overline{z} + 1$.
   Montre que $f = \sigma$.

3.4 Séquence 4 : Étude des coniques

Activité 1

Adotévi, utilise pour certaines parties de la coupe, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = x^2$, dans le plan muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -\frac{1}{4}$ et le point $\mathrm{F}(0, \frac{1}{4})$

Soit un point M de coordonnées (x, y) et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$.

1. Calcule les distances MF et MH.

2. Prouve que $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = 1$, si et seulement si, M appartient à $\mathcal{C}$.

✂ ....

Qu'est-ce qu'une conique ?

Étymologiquement, une conique est une courbe plane obtenue en coupant un cône de révolution par un plan . Les coniques propres obtenues ainsi sont les cercles, les ellipses, les paraboles, les hyperboles, mais dans certains cas, l'intersection d'un cône et d'un plan donne un point , une droite ou deux droites, ce sont des coniques impropres ou dégénérées.

Plusieurs définitions des coniques sont possibles (foyers et directrice, définition bifocale,..), la seule qui englobe tous les cas particuliers est la définition analytique suivante : une conique est une courbe plane définie par une équation qui peut s'écrire sous la forme
$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

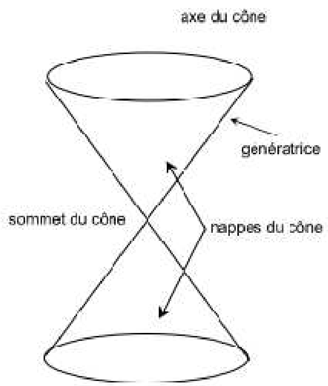
Suivant la position qu'il occupe par rapport à un cône, un plan qui coupe ce dernier déterminera une intersection qui sera :

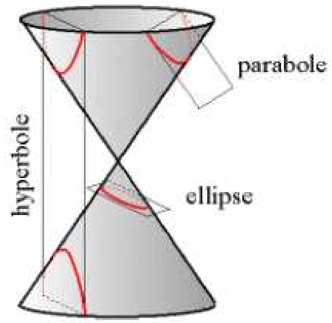
❆ un cercle : le plan est perpendiculaire à l'axe ;

❆ une ellipse : le plan est incliné sur l'axe, mais il ne coupe qu'une seule des deux nappes ;

❆ une hyperbole : le plan est incliné ou parallèle à l'axe et coupe les deux nappes ;

❆ une parabole : le plan est parallèle à un plan tangent au cône.





Remarque

Si le plan contient l'axe et coupe les deux nappes selon une génératrice, l'intersection sera un couple de droites. Si le plan coupe les deux nappes à leur point commun, l'intersection sera ce point. Ces deux cas limites font encore partie des coniques.

Définition 1 **Définitions par foyer,directrice et excentricité**.

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, F un point du plan n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$ et e un nombre réel strictement positif.

On appelle **conique de foyer F**, de **directrice** $(\mathcal{D})$ et d'**excentricité** e, l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\mathrm{MF} = e \times d(\mathrm{M}, \mathcal{D}) = e$ où $d(M, \mathcal{D})$ est la distance du point à la droite $\mathcal{D}$.

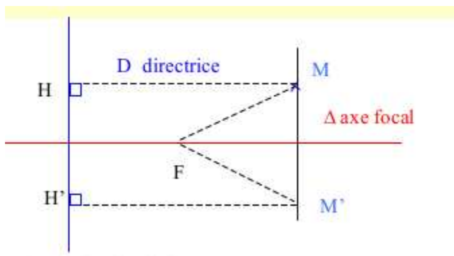
On peut aussi noter donner la définition $\mathrm{M} \in \Gamma \iff \mathrm{MF} = e\mathrm{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

Ainsi :

① si $e = 1$, Γ est appelée **parabole**,

② si $0 < e < 1$, Γ est appelée **ellipse**,

③ si ,$e > 1$, Γ est appelée **hyperbole**.



Sur le dessin ci-dessus , on a $MF = eMH$ avec e tel que 0< e < 1 (e de l'ordre de 0,6)

La définition de Γ à l'aide du triplet $(\mathrm{F}, \mathcal{D}, e)$ est appelé **définition monofocale** de Γ.

Dans toute la suite : $\Gamma = \mathcal{C}(\mathbf{F}, \mathcal{D}, e)$ **est la conique de foyer F, de directrice** $\mathcal{D}$ **et d'excentricité** e.

3.4.1 Axe focal d'une conique

Activité 2

Soit $e \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{D}$ une droite de $\mathcal{P}$, F un point de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et $\Gamma = \mathscr{C}(\mathrm{F}, \mathscr{D}, e)$.

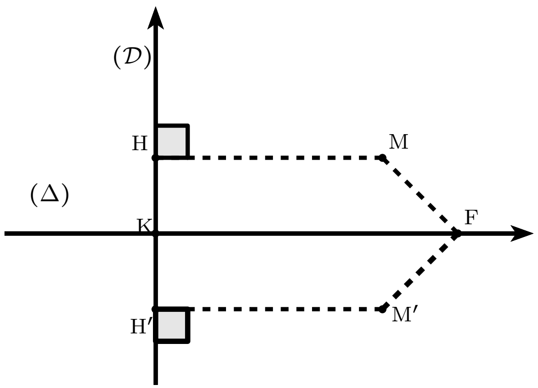
Démontre que la droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à $\mathscr{D}$ est un axe de symétrie de Γ.

✂ ....

Propriété 1

Soit $\Gamma = \mathscr{C}(\mathrm{F}, \mathcal{D}, e)$.

La droite Δ passant par F et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ est un axe de symétrie de Γ. Elle est appelée **axe focal** de Γ.



NB : Pour la suite, on pose $\{K\} = \mathcal{D} \cap \Delta$ où Δ est l'axe focal de la conique Γ.

3.4.2 Intersection d'une conique et de son axe focal

Activité 3

Soit $e \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{D}$ une droite de $\mathcal{P}$, F un point de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et $\Gamma = \mathscr{C}(\mathrm{F}, \mathscr{D}, e)$. On désigne par Δ l'axe focal de Γ.

Détermine, en discutant suivant les valeurs de e, le nombre de points d'intersection de Γ et Δ.

✂ ....

Retenons

Soit $\Gamma = \mathscr{C}(\mathrm{F}, \mathcal{D}, e)$ d'axe focal Δ

① Si $e = 1$, Γ (qui est ici une parabole) coupe Δ es un seul point S appelé **sommet** de la parabole. S est le milieu de [KF] ; $\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SK} = \vec{0}$.

② Si $e \neq 1$, Γ (Qui est une ellipse ou une hyperbole) coupe Δ en deux points A et A′ appelés sommets de Γ et tels que $\overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{A'F} - e\,\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

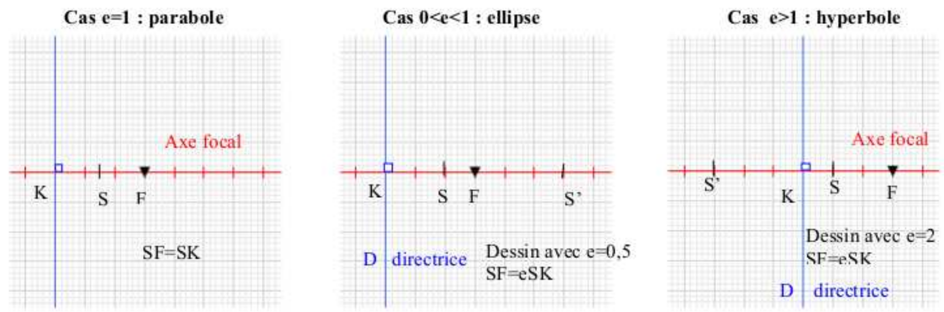
Position de A *et* A′ *par rapport à* [KF].

$\overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{KA} = \frac{1}{1+e}\overrightarrow{KF}$

$e > 0 \Longrightarrow 1 + e > 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{1+e} < 1 \Longrightarrow \mathrm{A} \in [\mathrm{KF}]$

$\overrightarrow{A'F} - e\,\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{KA'} = \frac{1}{1-e}\overrightarrow{KF}$

- ⋆ si $0 < e < 1$, on a : $1 - e > 0$ et $0 < 1 - e < 1$, et donc $\frac{1}{1-e} > 1$ d'où $\mathrm{A}' \in [\mathrm{KF})$ et $\mathrm{A}' \notin [\mathrm{KF}]$
- ⋆ si $e > 1$, $1 - e < 0$ et $\frac{1}{1-e} < 0$, alors A′ appartient à la demi-droite opposée à [KF)



(A≡S et A'≡S')

3.4.3 régionnement du plan par une conique

Soit $\Gamma = \mathscr{C}(\mathrm{F}, \mathcal{D}, e)$.

M un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

① L'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = e$ est la conique Γ

② L'ensemble des point M du plan tels que $\dfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} < e$ est l'intérieur de la conique Γ

③ L'ensemble des point M du plan tels que $\dfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} > e$ est l'extérieur de la conique Γ

3.4.4 Étude de la parabole

3.4.4.1 Rappels

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, F un point du plan n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.
La parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que MF=MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

① Soit Γ la parabole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, d'axe focal Δ. On pose $\{K\} = \mathcal{D} \cap \Delta$

② Le sommet de Γ est la point S milieu du segment [KF]

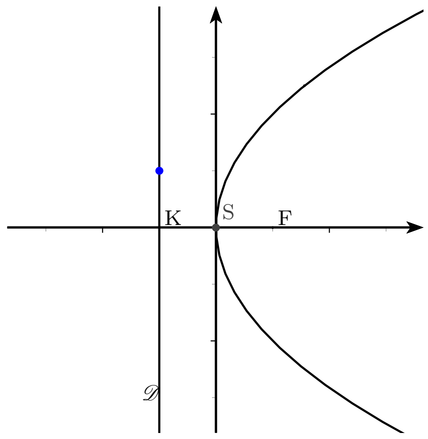
③ Le réel strictement positif $p = KF$ est appelé **paramètre** de Γ

3.4.4.2 Construction point par point de Γ

Soit Γ la parabole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'axe focal Δ. Soit M un point quelconque du plan et H le projeté de M sur la droite $\mathcal{D}$.
$M \in \Gamma \iff MF = MH$., alors M appartient à la médiatrice de [FH]. De plus M appartient à la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par H. Ainsi, pour construire un point de Γ,
on choisit un point H sur $\mathcal{D}$, on trace la médiatrice Δ_H de [FH] et la droite $\mathcal{D}_H$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en H. $\mathcal{D}_H$ et Δ_H se coupent en un point M de Γ.

3.4.4.3 Étude analytique

Activité 4 Soit Γ la parabole de foyer F de directrice $\mathscr{D}$, de sommet S, K le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}$, p le paramètre de Γ.
On pose $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, et on munit le plan $\mathcal{P}$ du repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

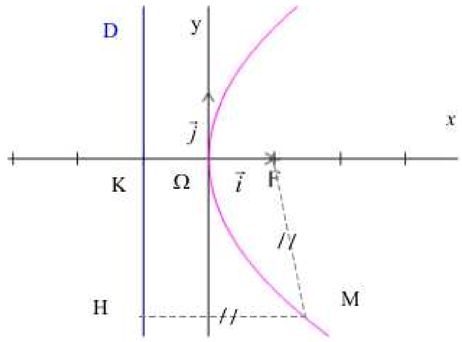


Soit $M(x, y)$ un point quelconque de $\mathcal{P}$.

1. Démontre que $M \in \Gamma \iff y^2 = 2px$.
2. On pose $E_1 = \{M(x, y) \mid y^2 = -2px\}$
   (a) Montre que E_1 est le symétrique de Γ par rapport à la symétrie orthogonale d'axe $(S, \vec{j})$.
   (b) Déduis-en que E_1 est une parabole dont tu préciseras l'axe et la directrice.
3. En considérant la réflexion d'axe la droite Δ d'équation $y = x$, Détermine l'ensemble $E_2 = \{M(x, y) \mid x^2 = 2py\}$

✂ ....

Propriété 2
① Soit Γ la parabole de sommet S, de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et de paramètre p.
Dans un repère orthonormé $(S; \vec{i}, \vec{j})$, tel que $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, Γ a pour équation $y^2 = 2px$ appelée **équation réduite** de la parabole Γ.
Dans ce repère, on a : $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D} : y = -\frac{p}{2}$.



$\Omega \equiv S$

Propriété 3

② Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, la courbe d'équation $y^2 = 2ax$ avec $a \neq 0$, est la parabole de sommet O, de paramètre $|a|$ d'axe focal $(O\,;\vec{\imath})$, de foyer $F\left(\frac{a}{2}\,,0\right)$, de directrice $\mathcal{D} : x = -\frac{a}{2}$

③ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, la courbe d'équation $x^2 = 2ay$ avec $a \neq 0$, est la parabole de sommet O, de paramètre $|a|$, d'axe focal $(O\,;\vec{\jmath})$, de foyer $F\left(0,\,\frac{a}{2}\right)$, de directrice $\mathcal{D} : y = -\frac{a}{2}$.

3.4.4.4 Équation cartésienne de la tangente à une parabole

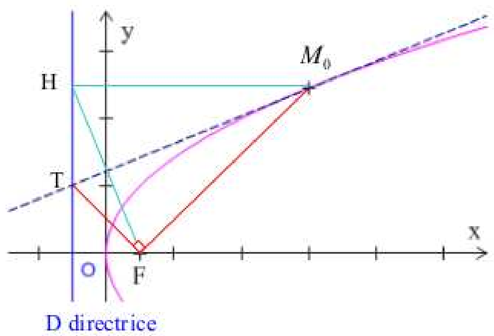
Propriété 4

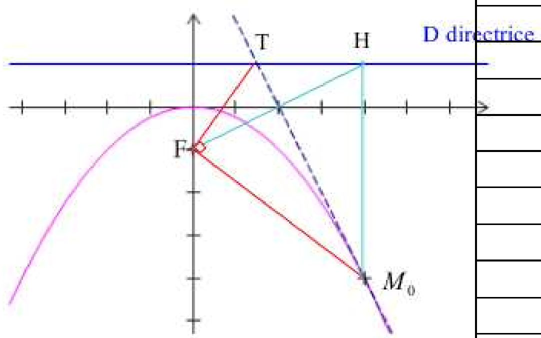
① Soit $\Gamma : y^2 = 2ax$ avec $a \neq 0$, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.
Γ admet de tangente en chacun de ses points. Soit $M_o\,(x_o\,,\,y_o)$ un point de Γ. Une équation de la tangente à Γ au point M_o est : $yy_o = a(x + x_o)$.

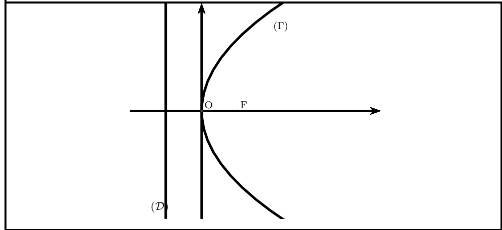
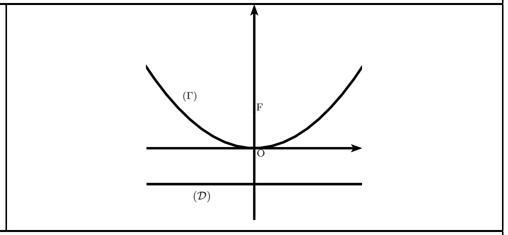
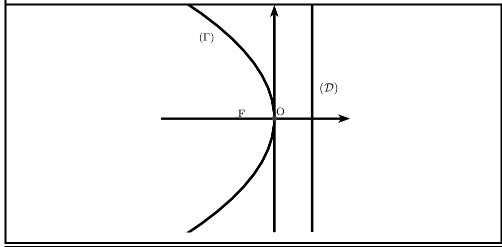
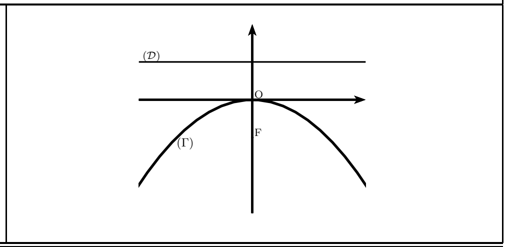
② Si Γ est la parabole d'équation $x^2 = 2ay$ avec $a \neq 0$, alors la tangente à Γ au point $M_o\,(x_o\,,\,y_o)$ est la droite d'équation $xx_o = a(y + y_o)$.

Remarque

La tangente en M_o à Γ est la médiatrice du segment [FH] où H est le projeté orthogonal de M_o sur $\mathcal{D}$.
Le segment de la tangente en un point M_o de la parabole distincts du sommet, situé entre le point M_o et la directrice $\mathcal{D}$ est vue du foyer sous un angle droit.





PARABOLE DE SOMMET $O\,(0\,,\,0)$	
Axe focal $(O\,,\,\vec{\imath})$	Axe focal $(O,\,\vec{y})$
Équation réduite dans $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$	
$y^2 = 2px$	$x^2 = 2py$
$p > 0$: Parabole dirigée vers les axes positifs	
	
$p < 0$: Parabole dirigée vers les axes négatifs	
	
Foyer	
$F\left(\frac{p}{2}\,,0\right)$	$F\left(0,\,\frac{p}{2}\right)$
Directrice	
$\mathcal{D} : x = -\frac{p}{2}$	$\mathcal{D} : y = -\frac{p}{2}$
Équation de la tangente au point $M_o\,(x_o\,,\,x_o)$ dans $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$	
$yy_o = p(x + x_o)$	$xx_o = p(y + y_o)$
Parabole de sommet $S\,(x_S\,,\,y_S)$	
Axe focal : (S, x)	Axe focal : (S, y)
Équation dans $(S\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$	
$(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S)$	$(x - x_S)^2 = 2p(y - y_S)$
$p > 0$: parabole dirigée vers les axes positifs	
$p < 0$: parabole dirigée vers les axes négatifs	
Foyer	
$F\left(\frac{p}{2} + x_S\,,\,y_S\right)$	$F\left(x_S\,,\,\frac{p}{2} + y_S\right)$
Directrice	
$\mathcal{D} : x = x_S - \frac{p}{2}$	$\mathcal{D} : y = y_S - \frac{p}{2}$
Équation de la tangente au point $M_o\,(x_o\,,\,x_o)$ dans $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$	
$(y - y_S)(y_o - y_S) = p(x + x_o - 2x_S)$	$(x - x_S)(x_o - x_S) = p(y + y_o - 2y_S)$

Activité 5

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Dans chacun des cas ci-après, donne la nature et les éléments caractéristiques de la courbe :
   (a) $\Gamma : y^2 = x$ (b) $\Gamma : 6y = -x^2$ $\Gamma : y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$ $\Gamma : 10y = -x^2 + 4x + 21$
2. Donne l'équation cartésienne de la parabole de foyer $\mathrm{A}(3, 0)$ et de directrice $\mathscr{D} : x = -3$.
3. (a) Détermine une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ et de directrice $\mathcal{D} : x = 3$.
   (b) Détermine une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer $\mathrm{F}(1, 2)$ et de directrice $\mathcal{D}$ dans les cas suivants :
      i. $\mathcal{D} = (\mathrm{AB})$ avec $\mathrm{A}(0, 1)$ et $\mathrm{B}(3, 0)$.
      ii. $\mathcal{D}$ passe par O et est orthogonale o la droite $\mathcal{D}' : 2x - y + 3 = 0$.
4. Construis la courbe d'équation $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$ en précisant foyer(s), directrice(s) et excentricité.
   Détermine une équation cartésienne de la tangente à la courbe aux points d'abscisses -1.

✂ ....

3.4.4.5 Régionnement du plan par une parabole

Dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la parabole Γ d'équation $y^2 = 2ax$ avec $a \neq 0$.

① L'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y)$ du plan tels que $y^2 < 2ax$ est l'intérieur de Γ

② L'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y)$ du plan tels que $y^2 > 2ax$ est l'extérieur de Γ

3.4.5 Conique à centre

3.4.5.1 Notation et calculs communs

❶ à l'ellipse et à l'hyperbole

Soit $\Gamma = \mathscr{C}(\mathrm{F}, \mathcal{D}, e)$ avec $e \neq 1$, Δ l'axe focal de, Γ. On pose $\{\mathrm{K}\} = \mathcal{D} \cap \Delta$.

Gamma admet sur Δ deux sommets $\mathrm{A} = \textbf{bar}\{(\mathrm{F}, 1); (\mathrm{K}, e)\}$ et $\mathrm{A}' = \textbf{bar}\{(\mathrm{F}, 1); (\mathrm{K}, -e)\}$. On note O le milieu de [AA']. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ puis on pose OA=a et OF=c.

❷ Position relative des points O, A, F, et K

$$\begin{cases} \mathrm{A} = \textbf{bar}\{(\mathrm{F}, 1); (\mathrm{K}, e)\} \\ \mathrm{A}' = \textbf{bar}\{(\mathrm{F}, 1); (\mathrm{K}, -e)\} \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA'}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OF}} = e\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OK}} = \dfrac{1}{e}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \end{cases}$$

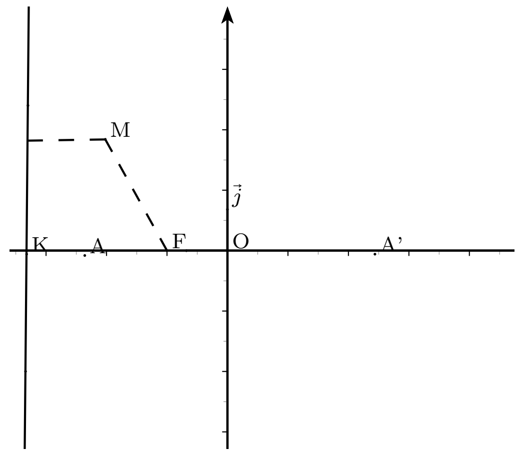
D'où on a : $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = e\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$; $c = e \times a$; $\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \dfrac{1}{e}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\mathrm{OK} = \dfrac{1}{e}\mathrm{OA} = \dfrac{a^2}{c}$

3.4.5.2 Équation réduite

Activité 6 Soit $\Gamma = \mathscr{C}(\mathrm{F}, \mathscr{D}, e)$, Δ son axe focal, et $\{\mathrm{K}\} = \mathscr{D} \cap \Delta$ $(e \neq 1)$.

On munit munit le plan $\mathcal{P}$ du repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{\mathrm{OF}}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, avec O le milieu de [AA'].

Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point quelconque du plan.



Détermine une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que M appartienne à Γ.

Éléments de réponse

....

Propriété 5

Soit $\Gamma = \mathscr{C}(\mathrm{F}, \mathcal{D}, e)$ avec $e \neq 1$. On désigne par A et A′ les sommets de Γ situés sur l'axe focal. Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que O est le milieu de [AA′] et $\vec{\imath} = \dfrac{1}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, Γ est la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ où $\mathrm{OA} = a$ et $\mathrm{OF} = c$. Cette équation est appelée **équation réduite** de Γ

Conséquence

L'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et l'origine O sont des éléments de symétrie de $\mathscr{C}$.

3.4.5.3 Foyers et directrices associés

Par symétrie soit par rapport à O, soit par rapport à Δ', on peut alors définir : $F' = \mathcal{S}_{\Delta'}(F)$ ou $F' = \mathcal{S}_O(F)$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{S}_{\Delta'}(\mathcal{D})$ ou $\mathcal{D}' = \mathcal{S}_O(\mathcal{D})$
$M \in \Gamma \iff \frac{MF}{MH} = e \iff \frac{\mathcal{S}_{\Delta'}(M)\mathcal{S}_{\Delta'}(F)}{\mathcal{S}_{\Delta'}(M)\mathcal{S}_{\Delta'}(H)} = e \iff \frac{M'F'}{M'H'} = e$
avec H′ le projeté orthogonal de M′ sur $\mathcal{D}'$. On déduit alors que Γ est la conique de foyer F′ de directrice $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e. Ainsi, une ellipse et une hyperbole ont deux foyers et de directrices allant par paire $(F, \mathcal{D})$ et $(F', \mathcal{D}')$ et aussi deux axes et un centre de symétrie.

3.4.5.4 Sommets d'une conique à centre

Retenons

1. Si $e > 1$, la conique Γ (qui est une hyperbole) admet deux sommets A et A′ sur l'axe focal et n'admet aucun sommet sur l'axe non focal.
2. Si $0 < e < 1$, la conique Γ (qui est une ellipse) admet quatre sommets : deux sommets A et A′ sur l'axe focal et deux sommets B et B′ sur l'axe non focal. $(AA' > BB')$.

3.4.5.5 Étude de l'ellipse

❶ **Rappel**
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, F, un point du plan n'appartenant pas à la droite $\mathcal{D}$ et e un nombre réel tel que $0 < e < 1$.
On appelle **ellipse** de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$.

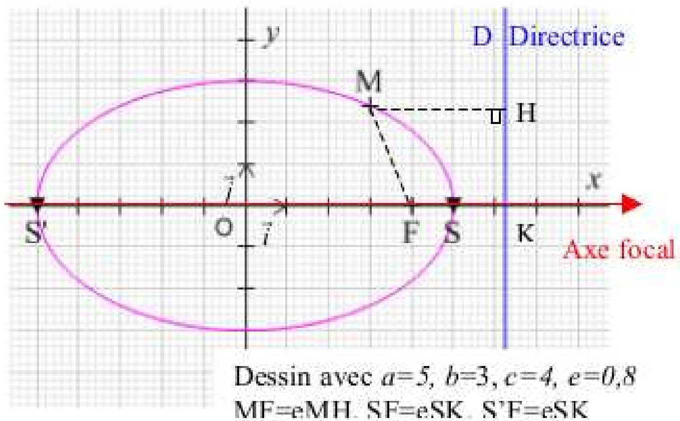
$$\frac{MF}{MH} = e \iff MF = e \times MH \iff MF = e \times d(M, \mathcal{D}) \qquad (3.2)$$

❷ **Étude analytique**

Activité 7 Soit l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec\imath, \vec\jmath)$ du plan.
Soit $M(x, y)$ un point du plan.

1. Démontre que $(\mathscr{E})$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{array}$ et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction $-f$.
2. Justifie que l'on peut étudier f sur l'intervalle $[0; a]$.
3. Étudie les variations de f sur $[0; a]$. tu étudieras la dérivabilité de f en a.
4. Montrer que la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de $(\mathscr{E})$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.
5. Construis $(\mathscr{E})$ dans les cas $a > b$ et $a < b$.

Une ellipse $\mathcal{E}$ est une conique à centre donc elle a une équation caractéristique réduite de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}$ dans le repère orthonormé $(O; \vec\imath, \vec\jmath)$ où $\vec\imath = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$, F est un foyer de $\mathcal{E}$, A un sommet de $\mathcal{E}$ sur l'axe focal $(O; \vec\imath)$.
On a : $0 < e < 1$; $e = \frac{c}{a}$; $e = OF$; $a = OA$. En posant $b^2 = a^2 - c^2$ avec $b \in \mathbb{R}_+^*$.
L'équation réduite de $\mathcal{E}$ est alors : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



(A≡S et A′≡S′)

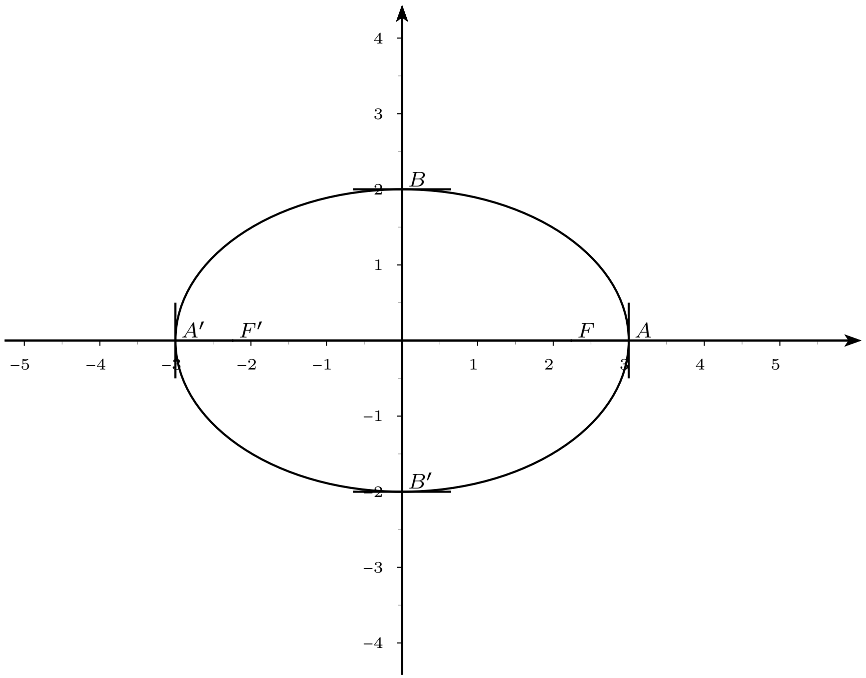
$(\mathscr{E})$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{array}$ et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction $-f$.

f est définie sur $[-a; a]$ et étant paire, son étude sur $[0; a]$, a donné le tableau suivant :

x	0		a
Signe de $f'(x)$	0	$-$	‖
Variation de f	b	$\searrow$	0

Exemple

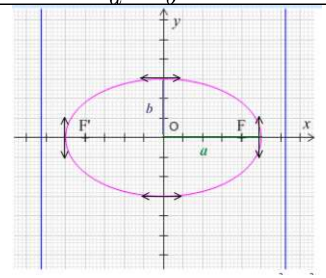
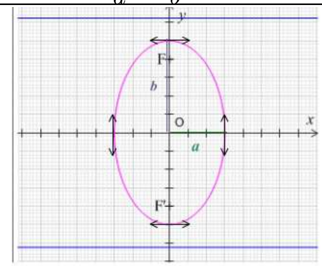
$\mathcal{H}\ :\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$



Propriété 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\,\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. $\mathcal{E}$ admet de tangente en chacun de ses points. Soit $\mathrm{M}_o\,(x_o\,,\,x_o)$ un point de $\mathcal{E}$. Une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{E}$ au point M_o est $\dfrac{xx_o}{a^2}+\dfrac{yy_o}{b^2}=1\,.$

❸ Éléments caractéristiques de l'ellipse

Ellipse centrée en $\mathrm{O}\,(0,\,0)$ $(\,\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$	
$a>b$	$b>a$
Axe focal : (O,x)	Ae focal : (O,y)
Équation réduite	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
	
$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
excentricité $e=\frac{c}{a}$	excentricité $e=\frac{c}{b}$
Sommets	
$\mathrm{A}\,(a\,,\,0)$; $\mathrm{A'}\,(-a\,,\,0)$; $\mathrm{B}\,(0\,,\,b)$; $\mathrm{B'}\,(0\,,\,-b)$	$\mathrm{A}\,(a\,,\,0)$; $\mathrm{A'}\,(-a\,,\,0)$; $\mathrm{B}\,(0\,,\,b)$; $\mathrm{B'}\,(0\,,\,-b)$
Foyers	
$\mathrm{F}\,(c\,,\,0)$; $\mathrm{F'}\,(-c\,,\,0)$	$\mathrm{F}\,(0\,,\,c)$; $\mathrm{F'}\,(0\,,\,-c)$
Directrices	
$\mathcal{D}: x=\frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}': x=-\frac{a^2}{c}$	$\mathcal{D}: y=\frac{b^2}{c}$ et $\mathcal{D}': y=-\frac{b^2}{c}$
Tangente au point $\mathrm{A}\,(x_o\,,\,x_o)$	
$\dfrac{xx_o}{a^2}+\dfrac{yy_o}{b^2}=1$	$\dfrac{xx_o}{a^2}+\dfrac{yy_o}{b^2}=1\,.$

Ellipse de centre $\Omega(x_\Omega\,,\,y_\Omega)$	
Axe focal $(\Omega\,,\vec{i})$	Axe focal $(\Omega\,,\vec{j})$
Équation réduite	
$\dfrac{(x-x_\Omega)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_\Omega)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-x_\Omega)^2}{b^2}+\dfrac{(y-y_\Omega)^2}{a^2}=1$
Sommets	
A $(a+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$; A' $(-a+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$; B $(x_\Omega\,,\,b+y_\Omega)$ et B' $(x_\Omega\,,\,-b+y_\Omega)$	A $(a+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$; A' $(-a+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$; B $(x_\Omega\,,\,b+y_\Omega)$ et B' $(x_\Omega\,,\,-b+y_\Omega)$
Foyers	
F $(c+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$; F' $(-c+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$	F $(x_\Omega\,,\,c+y_\Omega)$; F' $(x_\Omega\,,\,-c+y_\Omega)$
Directrices	
$\mathcal{D}: x=\frac{a^2}{c}+x_c$ et $\mathcal{D}': x=-\frac{a^2}{c}+x_c$	$\mathcal{D}: y=\frac{b^2}{c}+y_c$ et $\mathcal{D}': y=-\frac{b^2}{c}+y_c$
Tangente au point A $(x_o\,,\,x_o)$	
$\dfrac{(x-x_\Omega)(x_0-x_\Omega)}{a^2}+\dfrac{(y-y_\Omega)(y_0-y_\Omega)}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-x_\Omega)(x_0-x_\Omega)}{a^2}+\dfrac{(y-y_\Omega)(y_0-y_\Omega)}{b^2}=1$

Activité de réinvestissement

Dans Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(\,O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$ on considère l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

1. (a) Détermine s'il existe des points de $(\mathscr{E})$ d'abscisse 2.

   (b) Déduis-en les équations des tangentes à $(\mathscr{E})$ en ces points.

2. Détermine les points de $(\mathscr{E})$ en lesquels les tangentes à $(\mathscr{E})$ ont pour coefficient directeur $\frac{3}{8}$

❹ Construction d'un point d'une ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

☛ On construit le point S barycentre des points pondérés (F,1) et (K,e) où K le projeté orthogonal de F sur D.

☛ On trace le cercle $(\mathcal{C})$ de centre S passant par F.

☛ On choisit un point B sur le cercle (C) autre que F.

☛ On trace la droite (FB) qui coupe la directrice D en un point I.

☛ On construit la parallèle à (BS) passant par F. Cette droite coupe (IS) en un point M de l'ellipse.

NB : L'axe focal de l'ellipse est le grand-axe et l'axe non focal est le petit-axe.

❺ Représentation paramétrique d'une ellipse

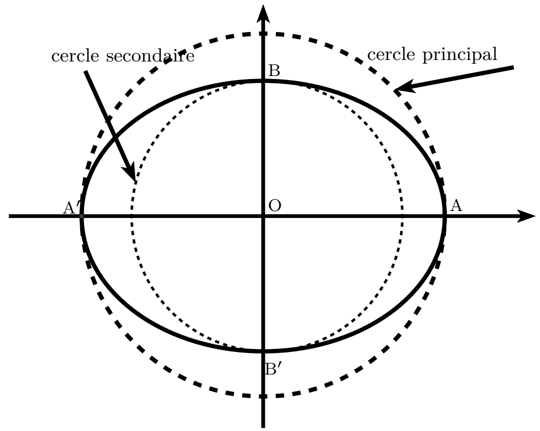
Dans le plan muni du repère orthonormé $(\,O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$, l'ellipse d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ a pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$; $(\theta\in\mathbb{R})$

❻ Ellipse et cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\,O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$, soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; $(a>0;\,b>0)$. A et A′ les sommets de $\mathcal{E}$ situés sur l'axe focal ; B et B′ les sommets sur l'axe non focal.

❈ Le cercle de diamètre [AA′] est appelé **cercle principal** de $\mathcal{E}$

❈ Le cercle de diamètre [BB′] est appelé **cercle secondaire** de $\mathcal{E}$.



Activité 8 Soit l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0\,,\,b>0)$. A et A' sont les sommets de $(\mathscr{E})$ situés sur l'axe focal, B et B' ses sommets situés sur l'axe non focal.

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle principal de $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{C}')$ son cercle secondaire.

1. Détermine l'image de $(\mathscr{C})$ par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\dfrac{b}{a}$.
2. Détermine l'image de $(\mathscr{C}')$ par l'affinité orthogonale d'axe (BB') et de rapport $\dfrac{a}{b}$.

Propriété 7

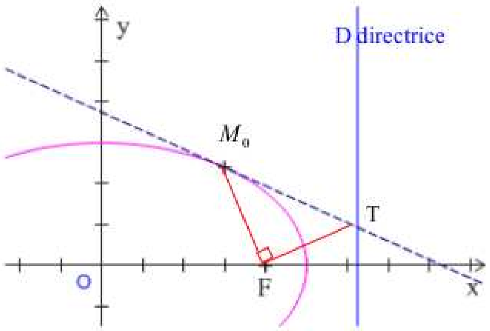
Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de grand axe $[\mathrm{AA}']$ et de petit axe $[\mathrm{BB}']$.

① L'image du cercle de diamètre $[\mathrm{AA}']$ (cercle principal de $\mathcal{E}$) par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\dfrac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{AA}'}$ est l'ellipse $\mathcal{E}$

② L'image du cercle de diamètre $[\mathrm{BB}']$ (cercle secondaire de $\mathcal{E}$) par l'affinité orthogonale d'axe (BB') et de rapport $\dfrac{\mathrm{AA}'}{\mathrm{BB}'}$ est l'ellipse $\mathcal{E}$

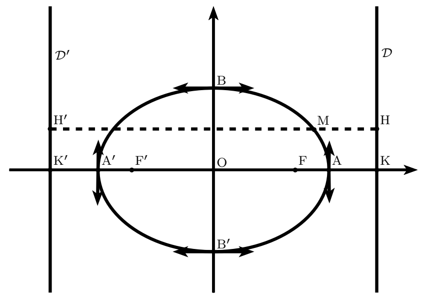
❼ Propriété géométrique

T étant le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{E}$ en $\mathrm{M_0}$ avec la directrice $\mathcal{D}$, le triangle $\mathrm{M_0FT}$ est un triangle rectangle en F.



❽ Définition bifocale de l'ellipse

Soit l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et de couples foyers-directrices $(\mathrm{F}, \mathcal{D})$ et $(\mathrm{F}', \mathcal{D}')$.



Soit M un point du plan, H et H′ les projetés orthogonaux de M respectivement sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathcal{E} &\iff \mathrm{MF} = e\,\mathrm{MH} \text{ et } \mathrm{MF}' = e\,\mathrm{MH}' \\ &\iff \mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = e\,(\mathrm{MH} + \mathrm{MH}') \\ &\iff \mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = e\,\mathrm{HH}' = e\,\mathrm{KK}' \\ &\iff \mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2\,e\,\mathrm{OK} = 2\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a^2}{c}\right) = 2a \end{aligned}$$

Propriété 8

Soit l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$, de foyers F et F′.
$\mathcal{E}$ est l'ensemble des point M du plan tels que $\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2\,a$

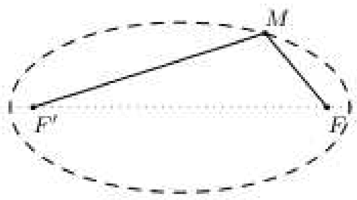
☞ Réciproquement, étant donnés deux points distincts F et F′ du plan et un réel a strictement positif tels que $\mathrm{FF}' < 2\,a$
L'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2\,a$ est l'ellipse de foyers F et F′, de centre O milieu de $[\mathrm{FF}']$, d'axe focal (FF'), d'axe non focal la perpendiculaire à (FF') passant par O.

* La distance des sommets à l'axe focal est égale à $2\,a$
* Les sommets de cette ellipse sur l'axe non focal sont les points B et B′ tels que $\mathrm{OB} = \mathrm{OB}' = \sqrt{a^2 - c^2}$ avec $c = \mathrm{OF}$.

Application : construction d'une ellipse : ovale des jardiniers

Pour tracer une ellipse, on peut fixer les extrémités d'une ficelle en deux points (F et F'), la ficelle étant de longueur $\ell = 2a$ avec $\ell > \mathrm{FF'}$. On peut ensuite faire coulisser un stylo le long de la ficelle tendue.

La position du stylo étant notée M , à tout instant on a MF+MF'= $\ell = 2a$. Le stylo décrit bien l'ellipse de foyers F et F' .



Ellipse du jardinier

Ce principe est utilisé par les jardiniers pour tracer des parterres ovoïdes. Une corde étant attachée à ses extrémités à deux pieux, en faisant coulisser un morceau de bois, ils peuvent ainsi tracer un sillon dans le sol.

NB :

- Si $\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'<2a$, alors M est à l'intérieur de $\mathcal{E}$
- Si $\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'>2a$, alors M est à l'extérieur de $\mathcal{E}$

Activité 9 Soit l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0\,,\,b>0)$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ du plan.
En utilisant le changement de variable $x=a\sin t$, calcule l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathscr{E})$.

Éléments de correction

Propriété 9
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, l'aire du domaine représenté par l'intérieur de l'ellipse $(\mathscr{E})$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, est exprimée en unités d'aire par le nombre $\pi a b$.

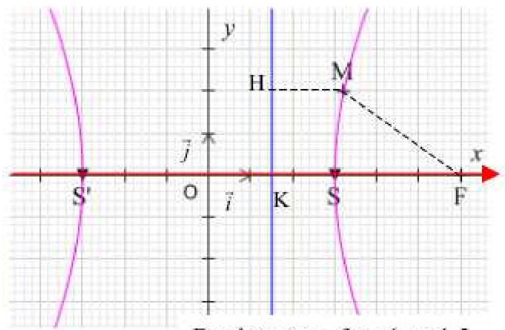
3.4.5.6 Étude de l'hyperbole

Activité 10 Soit l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0\,,\,b>0)$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ du plan.
Soit $\mathrm{M}(x\,,\,y)$ un point du plan.

1. Démontre que $(\mathscr{H})$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\end{array}$ et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction $-f$.
2. Justifie que l'on peut étudier f sur l'intervalle $\left[a\,;+\infty\right[$.
3. Étudie les variations de f sur $\left[a\,;+\infty\right[$. tu étudieras la dérivabilité de f en a.
4. Montrer que la tangente en un point $\mathrm{M}_0(x_0\,,\,y_0)$ de $(\mathscr{E})$ a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$.
5. Construis $(\mathscr{H})$.

❶ Équation réduite

Une hyperbole $\mathcal{H}$ est une conique à centre, donc son équation est $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath}=\dfrac{1}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ avec OA$=a$ et O le centre de $\mathcal{H}$; F le foyer de $\mathcal{H}$, OF$=c$, $c\in\mathbb{R}_+^*$; A et A′ les sommets de $\mathcal{H}$ situés sur l'axe focal ; $e=\dfrac{c}{a}$, $e>1$ donc $\dfrac{c}{a}>1$ et $c>a$.
En posant $b^2=c^2-a^2$, l'équation réduite de $\mathcal{H}$ devient $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.



Dessin avec $a=3$, c=6, e=1,5
MF=eMH, SF=eSK et S'F=eS'K

(A≡S et A'≡S')

❷ Tracé de $\mathcal{H}$

$(\mathcal{H})$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\end{array}$ et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction $-f$.

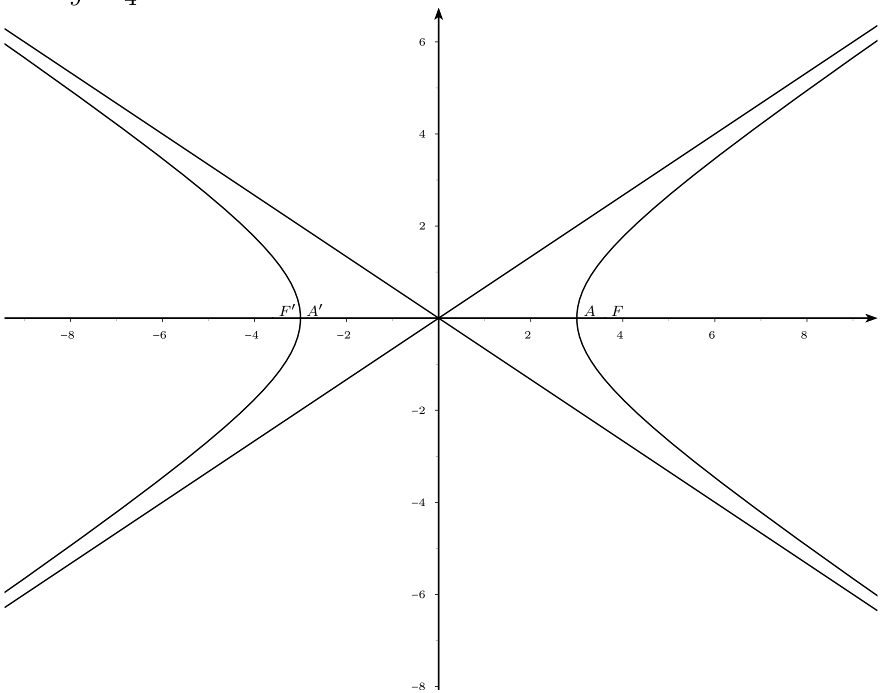
f est définie sur $\left]-\infty\,;-a\right]\cup\left[a\,;+\infty\right[$ et étant paire, son étude sur $\left[a\,;+\infty\right[$, a donné le tableau suivant :

x	a $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖ $\qquad$ +
Variation de f	0 ↗ $+\infty$

$\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse a une demi-tangente d'équation $\begin{cases} x = a \\ y \geq 0 \end{cases}$ et la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ comme asymptote en $+\infty$.

Exemple

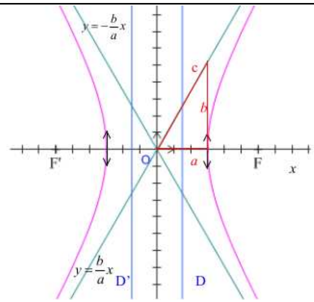
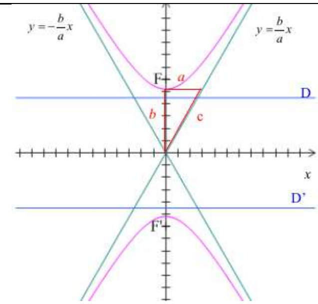
$\mathcal{H}\ :\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$



Propriété 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. L'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, admet de tangente en chacun de ses points. Soit $M_o\,(x_o\,,x_o)$ un point de $\mathcal{H}$. Une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{H}$ au point M_o est $\dfrac{xx_o}{a^2} - \dfrac{yy_o}{b^2} = 1$.

Éléments caractéristiques de l'hyperbole

Hyperbole centrée en $O\,(0\,,0)$	
Équation : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Équation : $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Axe focal : $(O\,,\ \vec{i}\ )$	Axe focal : $(O\,,\ \vec{j}\ )$
	
$c = \sqrt{a^2+b^2}$	
excentricité $e = \frac{c}{a}$	excentricité $e = \frac{c}{b}$
Sommets	
$A\,(a\,,0)$; $A'\,(-a\,,0)$	$B\,(0\,,b)$; $B'\,(0\,,-b)$
Foyers	
$F\,(c\,,0)$; $F'\,(-c\,,0)$ avec $c^2 = a^2+b^2$	$F\,(0\,,c)$; $F'\,(0\,,-c)$ avec $c^2 = a^2+b^2$
Directrices	
$\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : x = -\frac{a^2}{c}$	$\mathcal{D} : y = \frac{b^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : y = -\frac{b^2}{c}$
Asymptotes	
$\mathcal{D}\ :\ y = \dfrac{b}{a}x$ et $\mathcal{D}\ :\ y = -\dfrac{b}{a}x$	
Tangente au point $M_o\,(x_o\,,x_o)$	
$\dfrac{xx_o}{a^2} - \dfrac{yy_o}{b^2} = 1$	$-\dfrac{xx_o}{a^2} + \dfrac{yy_o}{b^2} = 1$

Hyperbole centrée en $\Omega\,(x_\Omega\,,\,y_\Omega)$	
Équation : $\dfrac{(x-x_\Omega)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_\Omega)^2}{b^2}=1$	Équation : $-\dfrac{(x-x_\Omega)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_\Omega)^2}{b^2}=1$
Axe focal : $(\Omega\,,\,\vec{i})$	Axe focal : $(\Omega\,,\,\vec{j})$
Sommets	
A $(a+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$; A' $(-a+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$	B $(x_\Omega\,,\,b+y_\Omega)$; B' $(x_\Omega\,,\,-b+y_\Omega)$
Foyers	
F $(c+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$; F' $(-c+x_\Omega\,,\,y_\Omega)$	F $(x_\Omega\,,\,c+y_\Omega)$; F' $(x_\Omega\,,\,-cy_\Omega)$
Directrices	
$\mathcal{D}: x=\frac{a^2}{c}+x_c$ et $\mathcal{D}': x=-\frac{a^2}{c}+x_c$	$\mathcal{D}: y=\frac{b^2}{c}+y_c$ et $\mathcal{D}': y=-\frac{b^2}{c}+y_c$
Asymptotes	
$\mathcal{D}\,:\,y-y_C=\dfrac{b}{a}(x-x_c)$ et $\mathcal{D}\,:\,y-y_C=-\dfrac{b}{a}(x-x_c)$	
Tangente au point $M_o\,(x_o\,,\,x_o)$ dans $(O\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$	
$\dfrac{(x-x_\Omega)(x_o-x_\Omega)}{a^2}-\dfrac{(y-y_\Omega)(y_o-y_\Omega)}{b^2}=1$	$-\dfrac{(x-\Omega)(x_o-x_\Omega)}{a^2}+\dfrac{(y-y_\Omega)(y_o-y_\Omega)}{b^2}=1$

❸ Hyperbole équilatère

Propriété 11

Une hyperbole $\mathcal{H}$ est **équilatère** si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires. Ce qui signifie que $a=b$ dans l'équation réduite de $\mathcal{H}$.
L'excentricité d'une hyperbole équilatère est égale à $\sqrt{2}$.

❹ Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes

Propriété 12

Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme $XY=k$.

❺ Définition bifocale de l'hyperbole

Propriété 13

① Soit l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>0$, $b>0$, de foyers F et F'.
$\mathcal{H}$ est l'ensemble des point M du plan tels que $|\mathrm{MF}-\mathrm{MF'}|=2a$
② Soient F et F' deux points distincts du plan, a un nombre réel strictement positif tel que $\mathrm{FF'}>2a$.
L'ensemble des points M du plan tels que $|\mathrm{MF}-\mathrm{MF'}|=2a$ est l'hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers F , F' ; de centre O milieu de [FF'] ; d'axe transverse la droite (FF'), d'axe non transverse la perpendiculaire à (FF') en O ; d'asymptotes les droites d'équations $y=\dfrac{b}{a}x$ et $y=-\dfrac{b}{a}x$, avec $b=\sqrt{c^2-a^2}$, et $\mathrm{FF'}=2c\,(\mathrm{OF}=c)$.

C'est la définition bifocale de l'hyperbole.

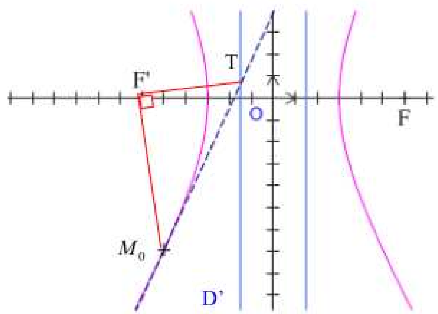
Conséquence

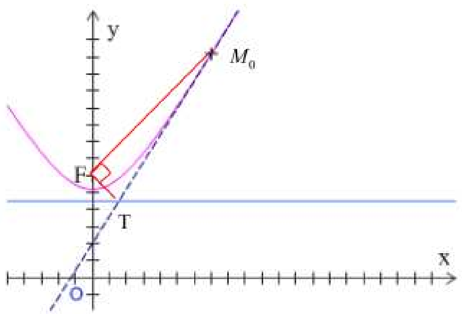
:

- Les points M du plan vérifiant $|\mathrm{MF}-\mathrm{MF'}|>2a$ sont intérieurs à $\mathcal{H}$.
- Les points M du plan vérifiant $|\mathrm{MF}-\mathrm{MF'}|<2a$ sont extérieurs à $\mathcal{H}$.

❻ Propriété géométrique

T étant le point d'intersection de la tangente à l'hyperbole $\mathcal{H}$ en M_0 avec la directrice $\mathcal{D}$, le triangle M_0FT est un triangle rectangle en F.





❽ Construction point par point d'une hyperbole

Même procédé que dans le cas d'une hyperbole.

❼ Construction d'une courbe sans l'étude de ses variations

En générale, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \pm\sqrt{ax^2+bx+c} \end{array}$ est la partie d'une hyperbole constituée des points d'ordonnées positives (respectivement d'ordonnées négatives).

Par exemple ,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x\,,\,y) \in \mathscr{C} &\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{ax^2+bx+c} \\ y > 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 = ax^2+bx+c \\ y \geq 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{y^2}{a} = \dfrac{b^2-4ac}{4a} \\ y \geq 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

On obtient une équation du type $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = \pm 1$ qui est celle d'une hyperbole plus facile à construire.

3.4.5.7 Similitude et coniques

Soit s une similitude de rapport k.

① L'image d'une conique par s est une conique de meme nature.

② s transforme l'axe focal en l'axe focal - foyer en foyer - sommet en sommet.

③ s transforme une ellipse $\mathcal{E}$ en une ellipse $\mathcal{E}'$ telle que $\mathcal{A}\mathrm{ire}(\mathcal{E}') = k^2 \times \mathcal{A}\mathrm{ire}(\mathcal{E})$.

④ s conserve l'excentricité e .

3.4.5.8 Résumé

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$. On considère l'ensemble $\Gamma = \left\{\mathrm{M}(x;y) \in \mathcal{P} \mid ax^2+by^2+cx+dy+e=0\right\}$.

❶ Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors Γ est une parabole ou deux droites parallèles ou une droite ou l'ensemble vide.

❷ Si $a = c$ (coefficient de x^2 = coefficient de y^2), Γ est un cercle, un point ou l'ensemble vide.

❸ Si $a \times b < 0$, alors Γ est une hyperbole ou deux droites sécantes.

❹ Si $a \times b > 0$, alors Γ est une ellipse ou un cercle ou un point ou l'ensemble vide.

Remarque

☞ Si $b = 0$ et $d \neq 0$, Γ est une parabole ; et une équation cartésienne de la tangente à $\Gamma : ax^2+cx+dy+e=0$ au point $\mathrm{M}_0(x_0\,,\,y_0)$ est : $a \times x \times x_0 + \frac{c}{2}(x+x_0) + \frac{d}{2}(y+y_0) + c = 0$

☞ Si $a = 0$ et $c \neq 0$, Γ est une parabole, et une équation cartésienne de la tangente à $\Gamma : by^2+cx+dy+e=0$ au point $\mathrm{M}_0(x_0\,,\,y_0)$ est : $b \times y \times y_0 + \frac{c}{2}(x+x_0) + \frac{d}{2}(y+y_0) + e = 0$

☞ Si $a \times b \neq 0$, et Γ est une hyperbole ou une ellipse,. Une équation cartésienne de la tangente à $\Gamma : ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ au point $\mathrm{M}_0(x_0\,,\,y_0)$ est $a \times x \times x_0 + b \times y \times y_0 + \frac{c}{2}(x+x_0) + \frac{d}{2}(y+y_0) + e = 0$.

$d \mid v$
3.45×10^{-4} 10, 30, 50 and 70