Nombres complexes

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme a + bi tel que a et b sont des Nombres réels et $i^2 = -1$.

— L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
— On note $\mathbb{C}$ * l'ensemble des nombres complexes non nuls.
— Soit $z \in \mathbb{C}$, z = a + bi, $(a, b) \in IR^2$.
— L'écriture z = a + bi est la forme algébrique de z.
— Le nombre réel a est la partie réelle de z et on note a = Re (z)
— Le nombre réel b est la partie imaginaire de z et on note b = Im(z)
— Si b = 0, alors z est un dit nombre réel. Ainsi $IR \subset \mathbb{C}$.
— Si a = 0, alors z est un nombre imaginaire.
— Si a = 0 et b ≠ 0, alors z est un nombre imaginaire pur.
L'ensemble des nombres imaginaires est noté iIR.
— L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté iIR*
— 0 est le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur.
— IR et iIR sont deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$.
Tout nombre complexe z = a + bi, $(a, b) \in IR^2$ admet un opposé noté −z = −a − bi.
Tout nombre complexe non nul z = a + bi, $(a, b) \in IR^2$, (a, b) ≠ (0, 0) admet un inverse noté :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

Soit z un nombre complexe. On appelle module de z le nombre réel positif noté $|z|$ défini par
$|z| = \sqrt{z * \bar{z}}$
Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
On appelle forme trigonométrique de z l'écriture : z = r(cos θ + i sin θ).
Si z = a avec $a \in IR$, alors le module de z est égal à la valeur absolue de a.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Soit $z, z' \in \mathbb{C}^2$ M et M' les points d'affixes respectives z et z'. On a:

$$|z| = OM$$
$$|z - z'| = MM'$$
$$\forall\, \beta \in IR \text{ et } \forall\, \vec{u}\ d'affixe\ z, on\ a\ |\beta z| = |\beta||z|$$

Soit $\theta \in IR$. On note $e^{i\theta}$ (Lire "exponentielle iθ") le nombre complexe cos θ + i sin θ.
On a : $e^{i\theta}$ = cos θ + i sin θ.

Soit Z un nombre complexe non nul et $n \in IN\backslash \{0; 1\}$.
Tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$ est appelé racine n−ième du nombre Z.
Soit $y \in IR+$ et $n \in IN$, n ≥ 2. Le nombre réel positif x tel que $x^n = y$ est appelé racine n−ième de y et on note $x = \sqrt[n]{y}\ ou\ x = y^{\frac{1}{n}}$
On note simplement $\sqrt{y}\ lorsque\ n = 2$.
Tout nombre complexe $Z = re^{i\theta}$, ($r \in IR_+^*$ et $\theta \in IR$), admet exactement n racines n−ième z_k tels que
$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\theta + 2k\pi}{n})}\ avec\ k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$
Soit $a \in IR$ *, $(b, c) \in IR^2$, l'équation dans C : (E) : $az^2 + bz + c = 0$, et Δ le discriminant de (E).
— Si Δ = 0, alors (E) admet une seule solution : $-\frac{b}{2a}$
— Si Δ ≠ 0 et δ une racine carrée de Δ, alors (E) admet deux solutions :$\frac{-b-\delta}{2a}\ \ et\ \ \frac{-b+\delta}{2a}$.
Soit $n \in IN$, n ⩾ 3, P(z) un polynôme de degré n.
Si zo est une racine de P(z), alors il existe un polynôme Q(z) de degré n − 1 tel que
$P(z) = (z - z_o)Q(z)$.

Forme algébrique z=a+ib (a , b)∈IR^2	Forme trigonométrique $z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \ cos\,\theta = \frac{a}{r}\ ,\ \ sin\theta\ = \frac{b}{r}$$

(z = 0) ⇐⇒ (Re (z) = Im(z) = 0)

(z = z′) ⇐⇒ (Re (z) = Re (z)′ et Im(z) = Im(z)′)

Soit z = a + bi et z′ = a′ + b′i deux nombres complexes, (a, a′, b, b′) ∈ IR^4.

z + z′ = (a + a′) + (b + b′)i

z × z′ = (aa′ − bb′) + (ab′ + a′b)i

∀n ∈ IN*, ∀ (u, v) ∈ $(\mathbb{C}^*)^2$ on a: $(u + v)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$

En particulier :

$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

∀(u, v) ∈ $\mathbb{C}^2$, $(u - v)(u + v) = u^2 - v^2$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{-z} = -\overline{z}$

$\overline{zz'} = \overline{z}\ \ \overline{z'}$

Si z≠0, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Si z≠0 et n ε IN ; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Si z=a+ib, (a, b) ε IR^2 alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|\overline{z}| = |-z| = |z|$

Si i ≠ 0, alors $|\overline{z}| = 1$ <=> $\left(\overline{z} = \frac{1}{z}\right)$

$|z| = 0$ <=> z = 0

$$\forall\ (z, z') \in\ \mathbb{C}^* * \mathbb{C}^* \ <=> (|z| = |z'|\ et\ arg(z) = arg(z') + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg(\overline{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$|z * z'| = |z| * |z'|\ \ et\ \ \arg(z * z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}\ \ et\ \ \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}\ \ et\ \ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$$

$$|z^n| = |z|^n\ et\ \arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$$

$$Re(z) \le |z|\ et\ Im(z) \le |z|$$

$$|z + z'| \le |z| + |z'| \quad (inégalité\ triangulaire)$$

$$\forall\ (z, z') \in\ \mathbb{C}^{**} * \mathbb{C}^{**}\ |\ z = re^{i\theta}, z' = r'e^{i\theta'}\ , (r, r') \in IR_+^* * IR_-^*\ , (\theta, \theta') \in IR^2\ , \forall\, n \in \mathbb{Z}, on\ a$$

$$\overline{z} = re^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$-z = re^{i(\pi+\theta)}$$

$$z * z' = r * r'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$e^{-i\theta} * e^{-i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad -e^{-i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$$

$$cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad et \quad sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Formule d'Euler

$$cos(n\alpha) = \frac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{2} \quad et \quad sin(n\alpha) = \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i}$$

Formule de Moivre

$$(cos\ \theta + i\ sin\theta)^n = cos\ n\theta + i\ sin\ n\theta$$

$$mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv arg\left(\frac{z_d - z_c}{z_b - z_a}\right)\ [2\pi]$$

$$ABC\ est\ un\ trangle\ rectangle\ en\ A <=> mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$ABC\ est\ un\ trangle\ rectangle\ en\ A <=> arg\left(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$ABC\ est\ un\ triangle\ rectangle\ en\ A <=> \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \in iIR^*$$

$$ABC\ est\ un\ triangle\ isocèle\ et\ rectangle\ en\ A <=> \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \in \{-i\ ;\ i\}$$

$$ABC\ est\ un\ triangle\ équilatéral <=> \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \in \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}\ ;\ e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$$

$$z \in IR <=> \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ arg(z) \equiv 0[\pi] \end{cases}$$

$$z \in IR_+ <=> \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ arg(z) \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

$$z \in IR_- <=> \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ arg(z) \equiv \pi[2\pi] \end{cases}$$

$$z \in iIR <=> \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

$$z \in iIR_+ <=> \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$z \in iIR_- <=> \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$z = z' <=> \begin{cases} |z| = |z'| \\ Re(z) = Re(z') \\ Im(z) * Im(z) > 0 \end{cases}$$