REPUBLIQUE DU BENIN
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE D'ABOMEY CALAVI
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Option : Mathématique Informatique et Applications

RAPPORT DE STAGE SCIENTIFIQUE

SUR LA DIAGONALISATION DES MATRICES ET BIOLOGIE

Présenté par :

ZINSOU	Gaël Alain
ZINSOU	Gbènagnon Elie
ZINZINDOHOUE	Babatourndé César Boutoile
ZOMAHOUN HELE	Ayékotchikpa Thomas d'Aquin Joannes
ZOSSOUGBO	Amen Olivier

Sous la direction :

Dr Uriel AGUEMON

Année Universitaire : 2021-2022

Sommaire

I

Introduction

En mathématiques, plus précisément en Algèbre linéaire, la réduction d'endomorphisme a pour but d'exprimer des matrices et des endomorphismes sous formes plus simple pour faciliter leurs études.La diagonalisation fait partie de l'une de ses méthodes de réduction d'endomorphisme.

Pourquoi parler de la diagonalisation et de la biologie ?

Quelle peut bien être la relation entre biologie et mathématique ? Plus précisément biologie et diagonalisation ?

Dans notre développement nous allons clairement établir une relation entre la biologie et la diagonalisation. Pour cela nous allons dans un premier temps parler du concept de diagonalisation, et dans un second temps nous présenterons quelques applications de la diagonalisation en biologie.

II
Diagonalisation

II.1 Concept de diagonalisation

La diagonalisation est un procédé d'Algèbre linéaire. Elle s'applique à des endomorphismes d'un espace vectoriel. Elle consiste en réalité à rechercher une base de l'espace vectoriel constituée de vecteurs propres. Elle entre (la diagonalisation) dans la famille des réduction d'endomorphisme. Les réductions consistent à décomposer pour un endomorphisme donné, l'espace vectoriel entier en somme directe de sous-espaces stable par l'endomorphisme, tels que restrictions de l'endomorphisme au sous-espaces puissent être décrites simplement. Dans le cas d'un endomorphisme diagonalisable, la réduction a une forme particulièrement simple : l'application linéaire se résume à une homothétie sur chacun de ces sous-espaces propres. Cette approche dispose de son équivalent dans le langage matriciel. La matrice d'un tel endomorphisme est dite diagonalisable. Elle est caractérisée par le fait d'être semblable à une matrice diagonale. Concrètement un endomorphisme u d'un espace vectoriel F est dit diagonalisable lorsqu'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- ➢ Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.
- ➢ La somme directe des sous-espaces propres de u est E

Dans le cas où E est de dimension finie, On peut reformuler ainsi la seconde propriété : La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace entier.

Diagonaliser un endomorphisme u, de matrice A dans une base B d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E c'est :

- ➢ Résoudre l'équation $P(\lambda) = 0$ avec $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$;
- ➢ Pour chaque solution λ_i (valeur propre) de $P(\lambda) = 0$, déterminer une base du sous-espace propre associé ;
- ➢ Trouver une base $\mathscr{U}$ de E constituée de vecteurs propres de u ;

- ➢ Ecrire le matrice D de f dans cette nouvelle base $\mathscr{U}$;
- ➢ Expliciter la formule liant A et D et préciser chaque objet de la relation.

La diagonalisation se présente comme un cas particulier de la réduction d'endomorphisme assez intéressant. Cette réduction est composée des espaces engendrés chacun par un élément d'une base de vecteurs propres. Elle propose un cadre d'analyse décrivant totalement l'endomorphisme. Elle ne contient aucune redondance, ce qui signifie qu'il n'existe qu'une seule manière de décomposer un vecteur sur cette réduction. Et elle est aussi simple que possible car les sous-espaces sont de dimension 1 et la restriction de l'endomorphisme est une homothétie. La diagonalisation correspond à la configuration la plus favorable de la réduction. Sous de bonnes conditions, les endomorphismes sont souvent diagonalisables. Pour les réels, aussi bien pour les cas théoriques que pour les applications pratiques, il est fréquent de plonger l'espace vectoriel dans un espace de dimension double et muni d'une structure d'espace vectoriel complexe ; cette technique rend le cas diagonalisable fréquent.

II.2 Application à la biologie

Les applications de la diagonalisations sont multiple et divers. Elle est utilisée essentiellement en mathématiques mais aussi dans plusieurs domaines tels que la physique, la statistique, la biologie, l'ingénierie.

Dans notre étude, nous nous intéressons uniquement au domaine de la biologie. Pour ce faire, nous allons apporter des éléments de réponse aux problèmes de biologie ci-dessous :

Problème 1 (Reproduction d'animaux dans un parc)**.**
La population de lapins dans un parc se partage en deux classes d'âge : les jeunes et les vieux. On note un le nombre de lapins jeunes au cours de l'année de rang n *et* v_n *le nombre de lapins vieux au cours de l'année de rang* n*. On suppose que d'une année à l'autre :*

- *Premièrement, 50% des lapins jeunes passent dans la classe des vieux.*
- *Deuxièmement, le taux de mortalité est de 25% dans la classe des jeunes et de 75% dans la classe des vieux.*
- *Troisièmement, le taux de natalité est de 200% pour la classe des vieux, les jeunes n'étant pas encore en mesure de se reproduire.*

Enfin, on introduit chaque année dans le parc 20 jeunes lapins supplémentaires.

Au début de l'étude, c'est à dire l'année de rang 0, il y a 400 jeunes lapins et 100 vieux lapins.

1. *Au bout d'une année,*
   (a) *Combien de lapins deviennent vieux ?*
   (b) *Combien de jeunes lapins meurent ?*
   (c) *Combien de vieux lapins meurent ?*
2. *En déduire u_1 et v_1 .*
3. *Exprime u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.*
4. *On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$*
   Déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne B telle que $U_{n+1} = AU_n + B$.
5. *Soit I_2 la matrice carrée de taille 2 Montrer que la matrice $E = I_2 - A$ est inversible et déterminer son inverse.*
6. *Déterminer la matrice unicolonne C telle que $C = AC + B$.*
7. *Soit la matrice V_n telle que pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - C$.*
   Montrer que $V_{n+1} = AV_n$.
8. *On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 2 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$*
   Diagonaliser A puis montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$.
9. *Montrer par récurrence que $V_n = A^nV_0$ puis calcule V_n en fonction de n.*
10. *Calculer U_n en fonction de n.*
11. *En déduire u_n et v_n en fonction de n.*
12. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$. Interpréter ce résultat.*

Solution 1.

1. *Au bout d'une année*
   (a) *D'une année à l'autre, 50% des lapins jeunes passent dans la classe des vieux. Or au début de l'étude, c'est-à-dire l'année de rang 0, il y a 400 jeunes lapins. Donc nous avons 200 lapins qui deviennent vieux.*
   (b) *Le taux de mortalité est 25% dans la classe des « jeunes » donc 400×0.25=100 jeunes lapins morts.*
   (c) *Le taux de mortalité est de 75% dans la classe des « vieux » donc 100×0.75=75 vieux lapins morts.*
2. *En déduire u_1 et v_1*
   Le taux de natalité est de 200% pour la classe des « vieux » donc les 100 lapins initiaux donnent 2×100=200 jeunes lapins.

On introduit dans le parc 20 jeunes lapins supplémentaires.
Donc on a :
$u_1 = 400 \times 0.25 + 2 \times 100 + 20$
$u_1 = 320$
$v_1 = 400 \times 0.50 + 0.25 \times 100 = 225$

3. *Exprimons u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n*
D'une façon générale : en partant d'une population de u_n jeunes lapins et v_n vieux lapins, on a au bout d'un an 50% des lapins jeunes passent dans la classe des vieux donc $0.5u_n$ lapins deviennent vieux.
Le taux de mortalité est de 25% dans la classe des jeunes, donc $0.25u_n$ jeunes lapins meurent. Il reste donc, $0.25u_n$ jeunes lapins.
Le taux de mortalité est 75% dans la classe des vieux, donc $0.75v_n$ vieux lapins meurent.Il reste donc $0.25v_n$ vieux lapins. Le taux de natalité est de 200% pour la classe des vieux, donc les v_n lapins initiaux donnent $2 \times v_n$ lapins. On introduit chaque année dans le parc 20 jeunes lapins supplémentaires

	jeunes	*vieux*	*décédés*
jeunes u_n	$0.25u_n + 25$	$0.5u_n$	$0.25u_n$
vieux	$2v_n$	$0.25v_n$	$0.75v_n$

4. *On note* $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
Déterminons la matrice carrée A et la matrice colonne B telle que $U_{n+1} = AU_n + B$
On a $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
Donc on a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$. *Or d'après 3°) on a :* $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25u_n + 2v_n + 20 \\ 0.5u_n + 0.25v_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25u_n + 2v_n + 20 \\ 0.5u_n + 0.25v_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 2 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $U_{n+1} = AU_n + B$ *où* $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 2 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. *Soit I_2 la matrice carrée de taille 2.*
Montrons que la matrice $E = I_2 - A$ est inversible et déterminons son inverse.
$E = I_2 - A$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 2 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$
$E = \begin{pmatrix} 0.75 & -2 \\ -0.5 & 0.75 \end{pmatrix}$

$\det E = \begin{vmatrix} 0.75 & -2 \\ -0.5 & 0.75 \end{vmatrix} = -0.4375$

$\det E = -0.4375 \neq 0$, *donc E est inversible.*

$*$ *Déterminons son inverse*

Soit $E^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *la matrice inverse de la matrice E.Donc on a,* $EE^{-1} = I_2$

$$EE^{-1} = I_2 \iff \begin{pmatrix} 0.75 & -2 \\ -0.5 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0.75a - 2c & 0.75b - 2d \\ -0.5a + 0.75c & -0.5b + 0.75d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{3}{4}a - 2c = 1 \\ \frac{3}{4}b - 2d = 0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}c = 0 \\ -\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{4}a - 2c = 1 \\ d = \frac{3}{8}b \\ a = \frac{3}{2}c \\ -\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}d = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}c - 2c = 1 \\ d = \frac{3}{8}b \\ a = \frac{3}{2}c \\ -\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{7}{8}c = 1 \\ d = \frac{3}{8}b \\ a = \frac{3}{2}c \\ -\frac{7}{32}b = 1 \end{cases}$$

$$EE^{-1} = I_2 \iff \begin{cases} c = -\frac{8}{7} \\ d = -\frac{32}{7} \times \frac{3}{8} \\ a = -\frac{7}{8} \times \frac{3}{2}c \\ b = -\frac{32}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{12}{7} \\ b = -\frac{32}{7} \\ c = -\frac{8}{7} \\ d = -\frac{12}{7} \end{cases}$$

Donc $E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} & -\frac{32}{7} \\ -\frac{8}{7} & -\frac{12}{7} \end{pmatrix}$

6. *Déterminons la matrice unicolonne C telle que $C = AC + B$*

$$\begin{aligned}
C = AC + B &\iff C - AC = B\\
&\iff (I_2 - A)C = B\\
&\iff EC = B \ \ car \ \ E = I_2 - A\\
&\iff E^{-1}EC = E^{-1}B\\
&\iff C = E^{-1}B \ \ car \ \ E^{-1}E = I_2\\
&\iff C = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} & -\frac{32}{7} \\ -\frac{8}{7} & -\frac{12}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}\\
&\iff C = \begin{pmatrix} -\frac{240}{7} \\ -\frac{160}{7} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7. *Soit la matrice V_n telle que pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - C$.*
   Montrons que $V_{n+1} = AV_n$

$$\begin{aligned}
V_n = U_n - C &\iff V_{n+1} = U_{n+1} - C\\
&\iff V_{n+1} = AU_n + B - C \ \ car \ \ U_{n+1} = AU_n + B\\
&\iff V_{n+1} = AU_n + B - (AC + B)\\
&\iff V_{n+1} = AU_n + B - AC - B\\
&\iff V_{n+1} = AU_n - AC\\
&\iff V_{n+1} = A(U_n - C)
\end{aligned}$$

   Donc $V_{n+1} = AV_n$

8. *On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 2 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$ Diagonalisons A*

   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2)\\
&= \begin{vmatrix} 0.25 - \lambda & 2 \\ 0.5 & 0.25 - \lambda \end{vmatrix}\\
&= (0.25 - \lambda)^2 - 2 \times 0.5\\
&= (0.25 - \lambda)^2 - 1\\
P(\lambda) &= (0.25 - \lambda - 1)(0.25 - \lambda + 1)\\
P(\lambda) &= (-0.75 - \lambda)(1.25 - \lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\lambda) = 0 &\iff (-0.75 - \lambda)(1.25 - \lambda) = 0\\
&\iff -0.75 - \lambda = 0 \ \ ou \ \ 1.25 - \lambda = 0\\
&\iff \lambda = -0.75 \ \ ou \ \ \lambda = 1.25
\end{aligned}$$

   A admet deux valeurs propres réelles distinctes donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
   Diagonalisons alors A.
   Déterminons les sous espace propres associés aux valeurs propres.

$$E_{-0.75} = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} | Au = -0.75u \right\}$$

$$Au = -0.75u \iff \begin{pmatrix} 0.25 & 2 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75x \\ -0.75y \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 0.25x + 2y = -0.75x \\ 0.5x + 0.25y = -0.75y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0.5x + y = 0 \end{cases}$$
$$\iff x = -2y$$

Donc $u = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$

Ainsi $E_{-0.75} = vect \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$E_{1.25} = \left\{ v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} |Av = 1.25v \right\}$

$$Av = 1.25v \iff \begin{pmatrix} 0.25 & 2 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25a \\ 1.25b \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 0.25a + 2b = 1.25a \\ 0.5a + 0.25b = 1.25b \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -a + 2b = 0 \\ 0.5a - b = 0 \end{cases}$$
$$\iff a = 2b$$

Donc $v = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$

Ainsi $E_{1.25} = vect \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ *avec* $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voyons si $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

$\det \mathscr{B} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\det \mathscr{B} = -2 - 2 = -4 \neq 0$

Donc la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ *est une famille libre en dimension 2. Ainsi* $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$. *Par conséquent la matrice diagonale dans la base* $\mathscr{B}$ *est* $D = \begin{pmatrix} -0.75 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{pmatrix}$

En somme $D = P^{-1}AP$ *avec* $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* P^{-1} *est l'inverse de la matrice* P.

$*$ *Montrons par récurrence que* $A^n = PD^nP^{-1}$

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &\iff PD = PP^{-1}AP \\ &\iff PD = AP \ \ car PP^{-1} = I_2 \\ &\iff PDP^{-1} = APP^{-1} \\ &\iff A = PDP^{-1} \ \ car \ \ PP^{-1} = I_2 \end{aligned}$$

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$.
Supposons que la proposition est vraie à l'ordre n *et montrons que la proposition est vraie à l'ordre* $n + 1$.
On a :
$A^{n+1} = A^n A$ *or par hypothèse de récurrence* $A^n = PD^nP^{-1}$ *et d'autre part* $A = PDP^{-1}$ *donc en remplaçant on a :*

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \ \ car \ \ P^{-1}P = I_2 \end{aligned}$$

$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$
Ainsi la proposition est vraie à l'ordre $n + 1$
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$

9. *Montrons par récurrence que* $V_n = A^nV_0$
On a : d'après 7°) $V_{n+1} = AV_n$

$$V_{n+1} = AV_n \implies \begin{aligned} V_1 &= AV_0 \\ V_2 &= A^2V_0 \\ V_3 &= A^3V_0 \\ &\vdots \\ V_n &= A^nV_0 \end{aligned}$$

Supposons que la proposition est vraie à l'ordre n *et montrons que la proposition est vraie à l'ordre* $n + 1$.
On a : $V_{n+1} = AV_n$.
Or par hypothèse de récurrence $V_n = A^nV_0$

Ainsi $\begin{aligned} V_{n+1} &= AA^nV_0 \\ V_{n+1} &= A^{n+1}V_0 \end{aligned}$

Par suite la proposition est vraie à l'ordre $n + 1$
Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = A^nV_0$
$*$ *Calculons* V_n *en fonction de* n
$V_n = A^nV_0$
$A^n = PD^nP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons P^{-1}
$P^{-1} = \frac{1}{\det P} com(P)^T$

$\det P = -4$, $com(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $com(P)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -0.75 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{pmatrix}$ *Donc* $D^n = \begin{pmatrix} (-0.75)^n & 0 \\ 0 & (1.25)^n \end{pmatrix}$

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-0.75)^n & 0 \\ 0 & (1.25)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2(-0.75)^n & 2(1.25)^n \\ (-0.75)^n & (1.25)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2[(-0.75)^n + (1.25)^n] & 4[-(-0.75)^n + (1.25)^n] \\ -(-0.75)^n + (1.25)^n & 2[(-0.75)^n + (1.25)^n] \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(-0.75)^n + (1.25)^n] & -(-0.75)^n + (1.25)^n \\ \frac{1}{4}(-(-0.75)^n + (1.25)^n) & \frac{1}{2}((-0.75)^n + (1.25)^n) \end{pmatrix}$$

On a :

$V_0 = U_0 - C$

$$= \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{240}{7} \\ -\frac{160}{7} \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} \frac{3040}{7} \\ \frac{1560}{7} \end{pmatrix}$$

Donc

$$V_n = \begin{pmatrix} 0.5(-0.75)^n + 0.5(1.25)^n & -(-0.75)^n + (1.25)^n \\ 0.25(-(-0.75)^n) + 0.25(1.25)^n & -0.5 \times (-0.75)^n + 0.5(1.25)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3040}{7} \\ \frac{1560}{7} \end{pmatrix}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{3080}{7}(1.25)^n - \frac{40}{7}(-0.75)^n \\ \frac{1540}{7}(1.25)^n + \frac{20}{7}(-0.75)^n \end{pmatrix}$$

10. *Calculons* U_n *en fonction de* n

    On a : $V_n = U_n - C$

    Donc $U_n = V_n + C$

    Ainsi $U_n = \begin{pmatrix} \frac{3080}{7}(1.25)^n - \frac{40}{7}(-0.75)^n - \frac{240}{7} \\ \frac{1540}{7}(1.25)^n + \frac{20}{7}(-0.75)^n - \frac{160}{7} \end{pmatrix}$

11. *Déduisons* u_n *et* v_n *en fonction de* n

    On a $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

    Donc $u_n = \frac{3080}{7}(1.25)^n - \frac{40}{7}(-0.75)^n - \frac{240}{7}$

    et $v_n = \frac{1540}{7}(1.25)^n + \frac{20}{7}(-0.75)^n - \frac{160}{7}$

12. *Calculons* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{3080}{7}(1.25)^n - \frac{40}{7}(-0.75)^n - \frac{240}{7}}{\frac{1540}{7}(1.25)^n + \frac{20}{7}(-0.75)^n - \frac{160}{7}}$$
$$= \frac{3080 \times (1.25)^n - 40(-0.75)^n - 240}{1540 \times (1.25)^n + 20 \times (-0.75)^n - 160}$$
$$= \frac{(1.25)^n \left(3080 - 40\left(-\frac{0.75}{1.25}\right)^n - \frac{240}{(1.25)^n}\right)}{(1.25)^n \left(1540 + 20\left(-\frac{0.75}{1.25}\right)^n - \frac{160}{(1.25)^n}\right)}$$
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{3080 - 40\left(-\frac{0.75}{1.25}\right)^n - \frac{240}{(1.25)^n}}{1540 + 20\left(-\frac{0.75}{1.25}\right)^n - \frac{160}{(1.25)^n}}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{3080}{1540} = 2$ *car* $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} (-0.75)^n & = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} (1.25)^n & = 0 \end{cases}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 2$

Interprétation

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 2$ *alors à long terme il y aura deux fois plus de jeunes que de vieux.*

Problème 2.

On s'intéresse à une population de souris femelles sachant que

- *chacune de ces souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année ;*
- *la probabilité pour qu'une souris survive une deuxième année est de 0.25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà d'un an.On distingue donc deux catégories de souris : les juvéniles âgées de moins d'un an et les adultes dont l'âge est compris entre un an et deux ans. Notons, pour tout instant n (le temps étant compté en années, de sorte que n est entier) j_n le nombre de souris juvéniles, a_n le nombre de souris adultes et $c_n = j_n + a_n$ le nombre total de souris dans la population étudiée.*

On pose : $V_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$

1. *Exprimer j_{n+1} en fonction de a_n et de j_n puis a_{n+1} en fonction de an et de j_n .*
2. *Justifier que $V_{n+1} = AV_n$ où A est une matrice à déterminer.*
3. *On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A puis montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$.*
4. *Montrer par récurrence que $V_n = A^nV_0$*
5. *Calculer V_n en fonction de n.*

6. *En déduire* a_n , j_n *puis* c_n *en fonction de* n.
7. *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{c_n+1}{c_n}$. *Interpréter ce résultat.*

Solution 2.

1. *Exprimons* j_{n+1} *en fonction de* a_n *et de* j_n *puis* a_{n+1} *en fonction de* a_n *et de* j_n
   ☞ *Pour* j_{n+1}
   Chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année. Or les juvéniles sont âgés de moins d'un an et l'âge des adultes est compris entre un et deux ans donc on a :
   $$j_{n+1} = j_n + 8a_n$$
   ☞ *Pour* a_{n+1}
   La probabilité pour qu'une souris survive une deuxième année est de 0.25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà d'un an alors, on a :
   $$a_{n+1} = 0.25j_n + 0a_n$$
   D'où
   $$a_{n+1} = 0.25j_n$$
2. *Justifions que* $V_{n+1} = AV_n$ *où* A *est une matrice à déterminer.*
   $V_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$ *alors* $V_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$
   $V_{n+1} = \begin{pmatrix} j_n + 8a_n \\ 0.25j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$
   D'où $V_{n+1} = AV_n$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}$
3. *On suppose que* $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}$
   ➢*Diagonalisons* A
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
   $$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0.25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \ \ ou \ \ \lambda = 2 \end{aligned}$$
   La matrice A *admet deux valeurs propres réelles distinctes alors elle est diagonalisable dans* $\mathbb{R}$
   Déterminons les sous-espaces propres associés aux valeurs propres -1 et 2
   ☞$E_{-1} = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} |Au = -u \right\}$

$$Au = -u \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0.25 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x + 8y = -x \\ 0.25x = -y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -0.25x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -0.25x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = vect(u) \text{ avec } u = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.25 \end{pmatrix}$$

☞ $E_2 = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} | Av = 2v \right\}$

$$Av = 2v \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0.25 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x + 8y = 2x \\ 0.25x = 2y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 8y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Alors $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 8y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = vect(v)$ *avec* $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $A = PDP^{-1}$ *avec* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

➢ *Montrons par récurrence que* $A^n = PD^nP^{-1}$
Soit $\mathscr{P}(n)$ *la proposition :* $A^n = PD^nP^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$
Pour $n = 0$, *on a :*
$A^0 = I_2$ *or* $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ *donc* $A^0 = PD^0P^{-1}$
Alors $\mathscr{P}(0)$ *est vraie*
Soit $n \geq 0$ *un entier fixé.*
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ *est vraie ; c'est-à-dire* $A^n = PD^nP^{-1}$ *puis montrons que* $\mathscr{P}(n+1)$
D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &\implies AA^n = A(PD^nP^{-1}) \\ &\implies A^{n+1} = A(PD^nP^{-1}) \\ &\implies A^{n+1} = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \text{ car } A = PDP^{-1} \\ &\implies A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Alors $\mathscr{P}(n+1)$ *est vraie.*
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

4. *Montrons par récurrence que* $V_n = A^nV_0$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $V_n = A^n V_0$, $n \in \mathbb{N}$
Pour $n = 0$, on a :
$A^0 V_0 = I_2 V_0$
Puisque $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $V_0 = A^0 V_0$
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie au rang $n \geq 0$ fixé puis montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
$V_n = A^n V_0$
$V_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$ *alors* $V_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_n + 8a_n \\ 0.25 j_n \end{pmatrix}$
$V_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = AV_n$
Puisque $V_n = A^n V_0$
Alors $V_{n+1} = AA^n V_0 = A^{n+1} V_0$
Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
D'où $\forall \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$

5. *Calculons V_n en fonction de n*
   $V_n = A^n V_0$. *Or* $A^n = PD^nP^{-1}$ *donc* $V_n = PD^nP^{-1}V_0$
   Par ailleurs, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ *alors* $V_n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} V_0$
   $P = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$
   $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^{n+3} \\ -\frac{(-1)^n}{4} & 2^n \end{pmatrix}$
   $PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^{n+3} \\ -\frac{(-1)^n}{4} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$
   $PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & 2^{n+3} - 8(-1)^n \\ \frac{2^n - (-1)^n}{4} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$
   D'où $V_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & 2^{n+3} - 8(-1)^n \\ \frac{2^n - (-1)^n}{4} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} V_0$

6. *Déduisons a_n, j_n puis c_n en fonction de n*
   On sait que $V_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$ *alors de tout ce qui précède, on a :*

$$j_n = \frac{1}{3}[j_0(2^{n+1} + (-1)^n) + a_0(2^{n+3} - 8(-1)^n)]$$

$$a_n = \frac{1}{3}\left[j_0\left(\frac{2^n - (-1)^n}{4}\right) + a_0(2^n + 2(-1)^n)\right]$$

$c_n = j_n + a_n$ *Alors*

$$c_n = \frac{1}{3}\left[j_0\left(2^{n+1} + (-1)^n + \frac{2^n - (-1)^n}{4}\right) + a_0(9 \times 2^n - 6(-1)^n)\right]$$

7. *Calculons* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$

$$\begin{aligned}
\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{j_0\left(2^{n+2} + (-1)^{n+1} + \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{4}\right) + a_0(9 \times 2^{n+1} - 6(-1)^{n+1})}{j_0\left(2^{n+1} + (-1)^n + \frac{2^n-(-1)^n}{4}\right) + a_0(9 \times 2^n - 6(-1)^n)} \\
&= \frac{2^{n+2}\left[j_0\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} + \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{4\times 2^{n+2}}\right) + a_0\left(\frac{9\times 2^{n+1}}{2^{n+2}} - \frac{6(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\right)\right]}{2^{n+2}\left[j_0\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} + \frac{2^n-(-1)^n}{4\times 2^{n+2}}\right) + a_0\left(\frac{9\times 2^n}{2^{n+2}} - \frac{6(-1)^n}{2^{n+2}}\right)\right]}
\end{aligned}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{j_0\left(\frac{9}{8} + \frac{3(-1)^{n+1}}{2^{n+4}}\right) + a_0\left(\frac{9}{2} - \frac{6(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\right)}{j_0\left(\frac{9}{16} + \frac{3(-1)^n}{2^{n+4}}\right) + a_0\left(\frac{9}{4} - \frac{6(-1)^n}{2^{n+2}}\right)}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{\frac{9}{8}j_0 + \frac{9}{2}a_0}{\frac{9}{16}j_0 + \frac{9}{4}a_0} \quad \textit{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0 \\
&= \frac{2j_0 + 8a_0}{j_0 + 4a_0} \\
&= 2\frac{j_0 + 4a_0}{j_0 + 4a_0} \\
\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= 2
\end{aligned}$$

<u>Interprétation</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 2$ *alors à long terme il y aura deux fois plus d'adultes que de juvéniles.*

III
Conclusion

La diagonalisation d'un endomorphisme, lorsqu'elle est possible nous conduit à l'obtention d'une forme beaucoup plus réduite de l'application linéaire.

Beaucoup sont ceux qui ne s'attendent pas à une liaison entre diagonalisation et biologie. Comme application de la diagonalisation à la biologie, on constate que la diagonalisation nous a permis d'étudier certains phénomènes et processus biologiques et concrètement dans notre sujet d'estimer la population à longue terme. C'est le domaine de la biomathématique. Il est important aussi de souligner que les mathématiques s'appliquent à bien d'autres domaines dans la vie active, ce qui contredit la pensée populaire selon laquelle elles ne sont que des sciences fictives et abstraites.