ゲーム理論

Kosuke Toda

目次

第 1 章

非協力ゲーム理論の基礎

1.1　ゲーム理論とは

ゲームは次の 3 つの要素を持つ.

- 複数の行動主体 (プレイヤー，エージェント).
- 各主体のとりうる行動 (戦略)[*1]の集合.
- 各主体の結果に対する評価 (利得，効用)[*2].

これらを用いて社会や経済の持つ基本的な特性を表すことができる．複数の主体がどのような行動をとるかによって，全体が決まる．ゲーム理論では，複数の意思決定主体からなる社会の有り様や，主体の行動を研究する[*3].

ゲーム理論の中に非協力ゲーム理論がある．これは，各主体の利益が必ずしも一致せず，競合状態にあるものを考えている．つまり，各主体は自分の利益のみを考え，利己的に行動する．ただし，他の主体と完全に対立するときもあれば，他の主体の利益と自分の利益が一致するときもある[*4].

非協力ゲームにおける古典的な仮定として，「完全情報」と「完全合理性」がある．完全情報とは，エージェントがゲームの情報 (3 要素) を完全に分かっているというものである．完全合理性とは，自身の保有する情報全てを用いて，自身の利益の最大化を実現することである．分散制御では，情報が完全に得られないこともある．近年では，この仮定を緩めることも多い.

1.2　純粋戦略

1.2.1　戦略型ゲーム

戦略型ゲームは次のように定義される.

[*1] 行動はある 1 つの行動を表し，戦略は，どのようなルールで行動をするかを表す．ゲームにおいては同じ意味で用いられることもある.
[*2] 利得は純粋なスコア，効用な具体的な対象が見えるもののイメージ.
[*3] 状況 (given) をゲームとして記述することで分析を行う．これを逆に用いると制御系設計ができる.
[*4] このことから，協力ゲームは非協力ゲームで記述できるとされている.

定義 1.1 (戦略型ゲーム)**.** 戦略型ゲーム $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, U)$ は次の *3* 要素で定義される.

- $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - エージェントの集合.
- $\mathcal{A} = \times_{i \in N} \mathcal{A}_i$
  - エージェントの行動プロファイルの集合.
- $U : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$
  - 全エージェントの利得関数.
  - 行動プロファイル $a \in \mathcal{A}$ に対して，利得ベクトル $U(a) = (U_1(a), U_2(a), \ldots, U_n(a))$ を割り当てる.

ただし，

- $\mathcal{A}_i = \{1, 2, \ldots, m_i\}$
  - エージェント $i \in N$ の選択可能な行動 (純粋戦略) の集合 (行動インデックス集合).
- $U_i : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$
  - エージェント $i \in N$ の (純粋戦略) 利得関数[*5].
  - 各エージェントは利得を最大化するように戦略を選択する.

である.

特に，2 人ゲームのときは利得行列 A, B によってゲームを表現することができる．$e^k_{m_i} \in \mathbb{R}^{m_i}$ を第 k 要素が 1 の m_i 次元単位ベクトルとすると，$k \in \mathcal{A}_1, h \in \mathcal{A}_2$ に対して，

$$U_1(k, h) = (e^k_{m_1})^{\mathrm{T}} A e^h_{m_2},\ \ U_2(k, h) = (e^k_{m_1})^{\mathrm{T}} B e^h_{m_2}$$

である．$U_1(k, h)$ は，1 人目が k，2 人目が h を取ったときの 1 人目の利得であり，$U_2(k, h)$ は 1 人目が k，2 人目が h を取ったときの 2 人目の利得である.

ここで,「囚人のジレンマ」を例に 2 人ゲームの利得行列について説明する.

- エージェント
  - $N = \{1, 2\}$ (2 人の囚人)
- 行動集合
  - $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{$ 協力, 裏切り $\}$
- 利得[*6]

[*5] 定義域が $\mathcal{A}$ (エージェントのの行動プロファイル集合) であることからも，エージェント $i \in N$ が得る利得は他のエージェントの行動にも依存することがわかる.

[*6] 一般に 2 人ゲームの利得を表す表においては，行が 1 人目のエージェント，列が 2 人目のエージェントを表す．1 人目のエージェントを行プレイヤー，列が 2 人目のエージェントを列プレイヤーともいう．表において，$\cdot, \cdot$ は，左側が 1 人目のエージェントの得る利得，右側が 2 人目のエージェントの得る利得を表す.

	協力	裏切り
協力	$-1, -1$	$-5, 0$
裏切り	$0, -5$	$-2, -2$

- 利得行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

1.2.2　最適反応とナッシュ均衡

次に，最適反応について定義する．最適反応とは，他のエージェントの行動を固定したとき，エージェント i が取りうる全ての行動の中で最も利得が高くなる (つまり，最適な) 行動である．最適反応は次のように定義される．

定義 1.2 (最適反応)**.** $a_i^* \in \mathcal{A}_i$ が $a_{-i} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ に対する *(*純粋*)* 最適反応である*:*

$$\forall a_i \in \mathcal{A}_i,\ U_i(a_i^*, a_{-i}) \geq U_i(a_i, a_{-i})$$

この定義は，

$$U_i(a_i^*, a_{-i}) = \max_{a_i \in \mathcal{A}_i} U_i(a_i, a_{-i})$$

と等価である．最適反応は 1 つとは限らないが，必ず存在する．

ゲーム理論における重要な概念にナッシュ均衡がある．これは，1 人だけが行動を変更しても得することがない状況を表す[*7]．ナッシュ均衡は次のように定義される．

定義 1.3 ((純粋戦略) ナッシュ均衡)**.** $a^* \in \mathcal{A}$ が *(*純粋戦略*)* ナッシュ均衡である*:*

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall a_i \in \mathcal{A}_i,\ \ U_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq U_i(a_i, a_{-i}^*)$$

この定義は，

$$\forall i \in \mathcal{N},\ \ U_i(a_i^*, a_{-i}^*) = \max_{a_i \in \mathcal{A}_i} U_i(a_i, a_{-i}^*)$$

と等価である．ナッシュ均衡は全てのエージェントが純粋戦略最適反応をとることを表す．つまり，全てのエージェントにとって「合理的」な解であり，ナッシュ均衡が実現されれば，全てのエージェントはそこから動かない．ナッシュ均衡は 1 つとは限らず，存在しない場合もある．

ナッシュ均衡について，次の 3 つの 2 人ゲームの例で説明する．

■囚人のジレンマ　エージェントの集合を $\mathcal{N} = \{1, 2\}$，行動集合を $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{$ 協力, 裏切り $\}$，利得を

[*7] ある意味最適解であると考えることもできる．

	協力	裏切り
協力	$-1,-1$	$-5,0$
裏切り	$0,-5$	$-2,-2$

とする．

エージェント 1(行プレイヤー) について，エージェント 2(列プレイヤー) の行動を「協力」に固定したときの最適反応[*8]は「裏切り」，「裏切り」に固定したときの最適反応[*9]は「裏切り」である．エージェント 2 についても同様に考えると，エージェント 1 の行動を「協力」に固定したときの最適反応は「裏切り」，「裏切り」に固定したときの最適反応は「裏切り」である．よって，ナッシュ均衡は (裏切り，裏切り) である．

■男女の争い　エージェントの集合を $\mathcal{N}=\{1,2\}$，行動集合を $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\{$ ボクシング, バレエ $\}$，利得を

	ボクシング	バレエ
ボクシング	$2,1$	$-1,-1$
バレエ	$-1,-1$	$1,2$

とする．

最適反応は，「ボクシング」に対して「ボクシング」，「バレエ」に対して「バレエ」である．よって，ナッシュ均衡は (ボクシング，ボクシング)，(バレエ，バレエ) である．

■じゃんけん　エージェントの集合を $\mathcal{N}=\{1,2\}$，行動集合を $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\{$ グー, チョキ, パー $\}$，利得を

	グー	チョキ	パー
グー	$0,0$	$1,-1$	$-1,1$
チョキ	$-1,1$	$0,0$	$1,-1$
パー	$1,-1$	$-1,1$	$0,0$

とする．

最適反応は，「グー」に対して「パー」，「チョキ」に対して「グー」，「パー」に対して「チョキ」である．よって，ナッシュ均衡は存在しない．

1.3　混合戦略

ここまでのゲームの定義は，エージェントがある行動を確率 1 で取る (純粋戦略) というものだった．ここでは，エージェントが行動集合からある確率で行動を選択するもの (混合戦略) における最適反応およびナッシュ均衡を定義する．

[*8] 表の 1 列目に注目し，1 行目と 2 行目のエージェント 1 の利得でより高い値のもの．

[*9] 表の 2 列目に注目し，1 行目と 2 行目のエージェント 1 の利得でより高い値のもの．

1.3.1　混合戦略

エージェント i の行動集合を $\mathcal{A}_i = \{1, \ldots, m_i\}$ とし，エージェント i が行動 $j \in \mathcal{A}_i$ をとる確率を並べたベクトルを $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^{m_i})^{\mathrm{T}}$ とする．この x_i を混合戦略という．混合戦略 x_i の集合

$$X_i = \left\{ x_i \;\middle|\; \forall j \in \mathcal{A}_i \, x_i^j \geq 0,\ \sum_{k \in \mathcal{A}_i} x_i^k = 1 \right\}$$

は行動集合 $\mathcal{A}_i$ 上の確率分布である．この X_i は単位ベクトル $e_{m_i}^j$ を頂点とする $m_i - 1$ 次元単位単体となる．

エージェント i の行動集合 $\mathcal{A}_i$ が $\mathcal{A}_i = \{1, 2\}$ の例を考える $(m_i = 2)$．混合戦略を $x_i = (x_i^1, x_i^2)^{\mathrm{T}}$ とすると，混合戦略 x_i は，線分 $x_i^1 + x_i^2 = 1,\ 0 \leq x_i^1, x_i^2 \leq 1$ 上の点である (図 1.1)．つまり，エージェント i の混合戦略の集合は，

$$X_i = \{(x_i^1, 1 - x_i^1)^{\mathrm{T}} \mid 0 \leq x_i^1 \leq 1\}$$

と表される．

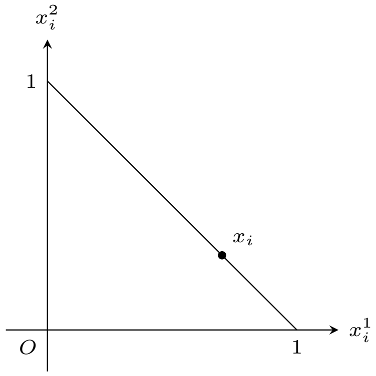

図 1.1　1 次元単位単体 (線分)

各エージェント i の混合戦略の集合 X_i の直和

$$X = \times_{i \in N} X_i$$

を混合戦略空間という．また，

- $x \in X$
  - 混合戦略プロファイル．
- $C(x_i) = \{j \in \mathcal{A}_i \mid x_i^j > 0\}$
  - $x_i \in X_i$ のキャリア．
  - 実際に使われる可能性のある行動の集合．

である．

混合戦略の集合 X_i について，

$$\mathrm{int}(X_i) = \{x_i \in X_i, \mid \forall j \in \mathcal{A}_i \ x_i^j > 0\}$$

を X_i の内部といい[*10],

$$\mathrm{bd}(X_i) = \{x_i \in X_i \,|\, x_i \notin \mathrm{int}(X_i)\}$$

を X_i の境界という．$x_i \in \mathrm{int}(X_i)$ を完全混合戦略 (内部戦略) といい，$x \in \mathrm{int}(X) = \times_{i\in N}\mathrm{int}(X_i)$ を完全混合プロファイル (内部プロファイル) という．

図 1.1 において，点 $(x_i^1, x_i^2)^{\mathrm{T}} = (1,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,1)^{\mathrm{T}}$ は境界であり，それ以外の点は内部である．

1.3.2 期待効用理論

非協力ゲームにおいて，エージェントは期待利得を最大化しょうとする．戦略プロファイル $x \in X$ で，行動プロファイル $a \in \mathcal{A}$ が実際に起こる確率 $x(a)$ は，

$$x(a) = \prod_{i\in\mathcal{N}} x_i^{a_i} \tag{1.1}$$

である．(1.1) は，エージェント $i \in \mathcal{N}$ が行動 $a_i \in A_i$ を取る確率が $x_i^{a_i}$ であり，行動プロファイル $a = (a_1, \ldots, a_n)$ が起こる確率はこの積で表されることを示している．

エージェント i の利得の期待値を期待利得という．エージェント i の期待利得関数 $u_i : X \to \mathbb{R}$ は以下で定義される．

$$u_i(x) \coloneqq x(a)U_i(a) \tag{1.2}$$
$$= \sum_{j\in A_i} x_i^j u_i(e_{m_i}^j, x_{-i}) \tag{1.3}$$

(1.2) は，エージェント i の期待利得が，エージェント i の利得の期待値であるという期待利得の定義である．(1.3) は，各エージェントの混合戦略に関して，各エージェントの期待利得は線形性を持つことを示している．

1.3.3 戦略型ゲームの混合拡大

混合拡大した戦略型ゲームは，以下のように定義される．

定義 1.4 (戦略型ゲーム)**.** 戦略型ゲーム $G = (\mathcal{N}, X, u)$ は次の *3* 要素で定義される．

- $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - エージェントの集合.
- $X = \times_{i\in N} X_i$
  - 混合戦略空間

$$X_i = \left\{ x_i \,\middle|\, \forall j \in \mathcal{A}_i\, x_i^j \geq 0, \sum_{k\in\mathcal{A}_i} x_i^k = 1 \right\}$$

- $u : X \to \mathbb{R}^n$
  - 混合戦略プロファイル $x \in S$ に対して，利得ベクトル $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ を割り当てる．

[*10] つまり，内部はキャリアと行動集合が一致するような混合戦略の集合である．

特に，2 人ゲームのときは利得行列 (A, B) によってゲームが表現される．

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \sum_{j\in\mathcal{A}_1} x_1^j u_1(e_{m_1}^j, x_2) = \sum_{j\in\mathcal{A}_1}\sum_{k\in\mathcal{A}_2} x_1^j x_2^k a_{jk} = x_1^{\mathrm{T}} A x_2 \\
u_2(x) &= \sum_{j\in\mathcal{A}_1}\sum_{k\in\mathcal{A}_2} x_1^j x_2^k b_{jk} = x_1^{\mathrm{T}} B x_2
\end{aligned}
$$

ここからも分かるように，純粋戦略は，ある戦略を確率 1 でとるものであると解釈できる．

1.4 最適反応とナッシュ均衡

1.4.1 最適反応

定義 1.5 (最適反応)**.** $a_i^* \in \beta(x)$ を x_{-i} に対する純粋戦略最適反応，$x_i^* \in \tilde{\beta}(x)$ を x_{-i} に対する混合戦略最適反応という．ただし，純粋戦略最適反応対応 $\beta_i : X \to 2^{\mathcal{A}_i}$ は

$$
\beta_i(x) = \{j \in \mathcal{A}_i \,|\, \forall k \in \mathcal{A}_i \; u_i(e_{m_i}^j, x_{-i}) \geq u_i(e_{m_i}^k, x_{-i})\} \tag{1.4}
$$

で定義され，混合戦略最適反応対応 $\tilde{\beta}_i : X \to 2^{X_i}$ は

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}_i(x) &= \{x_i^* \in X_i \,|\, \forall x_i' \in X_i \; u_i(x_i^*, x_{-i}) \geq u_i(x_i', x_{-i})\} && (1.5)\\
&= \{x_i^* \in X_i \,|\, \forall j \in \beta_i(x) \; {x_i^j}^* = 0\} && (1.6)\\
&= \{x_i^* \in X_i \,|\, C(x_i^*) \subseteq \beta_i(x)\} && (1.7)
\end{aligned}
$$

で定義される．

純粋戦略最適反応対応は，X の要素に対して $\mathcal{A}_i$ の部分集合を返すようなものであり，混合戦略最適反応対応は，X の要素に対して X_i の部分集合を返すようなものである．(1.4) より，純粋戦略最適反応は，他のエージェントの混合戦略を固定した下で，期待利得が最大になるような純粋戦略である．また，(1.6) より，混合戦略最適反応は純粋戦略最適反応ではない行動をとる確率を 0 とした確率の組である．その対偶をとったものが (1.7) である．

$\beta_i, \tilde{\beta}_i$ の結合をそれぞれ,

$$
\begin{aligned}
\beta(x) &= \times_{i\in\mathcal{N}} \beta_i(x) \subseteq \mathcal{A} \\
\tilde{\beta}(x) &= \times_{i\in\mathcal{N}} \tilde{\beta}_i(x) \subseteq X
\end{aligned}
$$

と表す.

1.4.2 ナッシュ均衡

ナッシュ均衡は，経済理論の基礎となっている．以下のように定義される．

定義 1.6 (ナッシュ均衡)**.** *1.* $x^* \in \tilde{\beta}(x^*)$ が成り立つとき，x^* をナッシュ均衡という．

2. 特に，$\tilde{\beta}(x^*) = \{x^*\}$ が成り立つとき，x^* を強ナッシュ均衡という．

この定義から，戦略プロファイル $x^* \in X$ がナッシュ均衡であるとは，戦略プロファイル $x^* \in X$ が自分自身に対する最適反応になっている，つまり，$x^* \in X$ が混合戦略最適反応 $\tilde{\beta}$ の不動点であるということである．

ナッシュ均衡は，すべてのエージェントにとって，その状況が実現されたら戦略を変える動機がないという点で合理的な解である．有限ゲームでは必ず存在する．

強ナッシュ均衡は，最適反応の条件が $\forall x_i' \neq x_i^*$ に対して不等号で成立するものである．この均衡として得られる戦略プロファイルは純粋戦略プロファイルであり，存在しない可能性もある．強ナッシュ均衡は，混合戦略空間の 1 点集合である．

特に 2 人 2 戦略の戦略型ゲームについて，具体的にナッシュ均衡を導出する．

	ボクシング	バレエ
ボクシング	$2, 1$	$-1, -1$
バレエ	$-1, -1$	$1, 2$

エージェント 2 の混合戦略を $x_2 = (x_2^1, 1 - x_2^1)^{\mathrm{T}}$ に固定したとき，エージェント 1 の純粋戦略の期待利得を考える．

$$
\begin{aligned}
u_1(e_2^1, x_2) &= 2x_2^1 - (1 - x_2^1) \\
u_1(e_2^2, x_2) &= -x_2^1 + (1 - x_2^1)
\end{aligned}
$$

次に，エージェント 1 の混合戦略を $x_1 = (x_1^1, 1 - x_1^1)^{\mathrm{T}}$ に固定したときのエージェント 2 の純粋戦略の期待利得を考える．

$$
\begin{aligned}
u_2(x_1, e_2^1) &= x_1^1 - (1 - x_1^1) \\
u_2(x_1, e_2^2) &= -x_1^1 + 2(1 - x_1^1)
\end{aligned}
$$

それぞれ差を取ると，

$$
\begin{aligned}
u_1(e_2^2, x_2) - u_1(e_2^1, x_2) &= -5x_2^1 + 2 \\
u_2(x_1, e_2^2) - u_2(x_1, e_2^2) &= -5x_1^1 + 3
\end{aligned}
$$

である．よって，エージェント 1, 2 の混合戦略最適反応対応は，

$$
\tilde{\beta}_1(x) = \begin{cases} \{e_2^1\} & \text{if } x_2^1 > \frac{2}{5} \\ X_1 & \text{if } x_2^1 = \frac{2}{5} \\ \{e_2^2\} & \text{if } x_2^1 < \frac{2}{5} \end{cases}
$$

$$
\tilde{\beta}_2(x) = \begin{cases} \{e_2^1\} & \text{if } x_1^1 > \frac{3}{5} \\ X_2 & \text{if } x_1^1 = \frac{3}{5} \\ \{e_2^2\} & \text{if } x_1^1 < \frac{3}{5} \end{cases}
$$

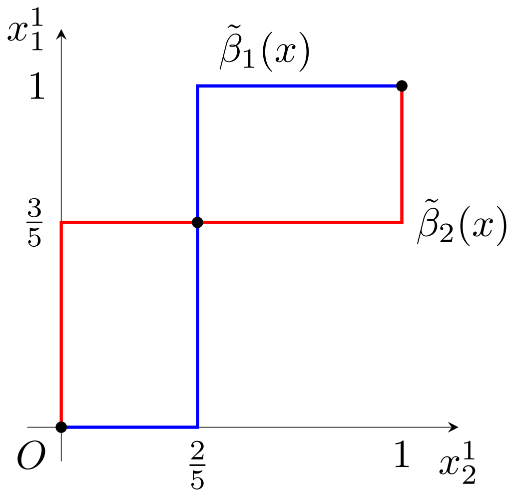

図 1.2　最適反応の組

である．ナッシュ均衡の定義より，ナッシュ均衡 x^* は,

$$x^* \in \left\{ (e_2^1, e_2^1), (e_2^2, e_2^2), \left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right)^{\mathrm{T}}, \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right)^{\mathrm{T}} \right) \right\}$$

と求められる (図 1.2).

1.4.3　ナッシュ均衡の存在性

ナッシュ均衡の存在性を最初に証明したのは Nash である．まず，角谷の不動点定理を以下に示す.

定理 1.1 (角谷の不動点定理)**.** コンパクトで凸な集合 $D \subseteq \mathbb{R}^r$ に対し，対応 $g : D \to 2^D$ が以下の条件を満たすならば，$\exists x^* \in g(x^*)$ である．

1. 任意の $x \in D$ に対し，$g(x)$ が非空で凸.

2. g が上半連続*:*

$$\forall x \in D, \forall \text{ 開集合 } V \supseteq g(x), \exists \text{ 開集合 } U, \forall x' \in U, g(x') \subseteq V$$

角谷の不動点定理を用いると，ナッシュ均衡の存在性を証明できる．

定理 1.2. 任意の有限ゲームにおいて，$\exists x^* \in \tilde{\beta}(x^*)$

証明. X_i がコンパクトで凸より，X もコンパクトで凸．$\forall x \in X$ に対して，$\tilde{\beta}_i(x)$ は非空で凸より，$\tilde{\beta}(x)$ も非空で凸．また，u_i の連続性より，$\tilde{\beta}(x)$ は上半連続．よって，角谷の不動点定理より，$\exists x \in \tilde{\beta}(x^*)$. □

ナッシュ均衡の集合 X^{NE} は，以下の不等式を満たす混合戦略プロファイルとして表現できる．

$$X^{NE} = \{x \in X \,|\, u_i(x) - u_i(e_i^h, x_{-i}) \geq 0 \ \ \forall i \in \mathcal{N},\, h \in \mathcal{A}_i\} \tag{1.8}$$

(1.8) 式の右辺の集合は，各多項式が非負になるようなベクトル変数 x の集合の有限個の共通集合である．代数幾何学の古典的結果から，このような集合は有限個の互いに素な，閉で連結な集合からなるということが導かれる．これらの集合は，ゲームのナッシュ均衡の成分と呼ばれる．

定理 1.3. 集合 X^{NE} は互いに素な，閉で連結な集合の有限和である．

1.4.4 ナッシュ均衡の集合の不変性

ナッシュ均衡の集合 X^{NE} は，利得の変化に関して，ある種の不変な性質を持っている．

定理 1.4. ナッシュ均衡は，以下の操作に関して不変：

1. 利得関数への正のアフィン変換.
2. 利得関数の局所シフト.

定数 $\mu_i \in \mathbb{R}$ と正の定数 $\lambda_i \in \mathbb{R}_{++}$ に対して，

- 利得関数への正のアフィン変換

$$\forall x \in X \ \ \tilde{u}_i(x) = \lambda_i u_i(x) + \mu_i$$

- 利得の局所シフト

$$\forall x \in X \ \ \tilde{u}_i(x) = \begin{cases} u_i(x) & \text{if } \ x_{-i} \neq \bar{x}_{-i} \\ u_i(x) + \mu_i & \text{if } \ x_{-i} = \bar{x}_i \end{cases}$$

いずれの場合も

$$\tilde{u}_i(x_i^*, x_{-i}) \geq \tilde{u}_i(x_i, x_{-i}) \Leftrightarrow u_i(x_i^*, x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i})$$

である．

この不変な性質により計算が著しく容易になる場合もある．また，外見上異なるゲームも同じ最適反応対応を持つ．

1.4.5 戦略の支配関係

定義 1.7.

- $x_i^* \in X_i$ が $x_i \in X_i$ を強支配するとは，

$$\forall z_{-i} \ \ u_i(x_i^*, z_{-i}) > u_i(x_i, z_{-i})$$

が成り立つときをいう．

- $x_i^* \in X_i$ が $x_i \in X_i$ を弱支配するとは，

$$\forall z_{-i} \ \ u_i(x_i^*, z_{-i}) \geq u_i(x_i, z_{-i}) \text{ かつ } \exists z_{-i} \ \ u_i(x_i^*, z_{-i}) > u_i(x_i, z_{-i})$$

が成り立つときをいう．

この定義から，以下のことが分かる．

- 強支配される戦略は，いついかなるときも最適にはならない．
  - 合理性: 強支配される戦略は使われない．強支配される純粋戦略の消去.
- 弱支配される戦略は，最適になることもある．
  - いかなる戦略に対しても唯一の最適反応とはならない．
  - 合理性: 弱支配される戦略の使用は必ずしも否定されない．

弱支配されている戦略の組がナッシュ均衡になる例を示す．

	L	R
T	$1, 1$	$2, 0$
B	$0, 2$	$2, 2$

上の表について．支配関係を考える．

- B は T に弱支配され，R は L に弱支配されている．
- 弱支配されている戦略の組，(B, R) もナッシュ均衡である．

最適反応は,

- L に対して T，R に対して T と B.
- T に対して L，B に対して L と R.

である．よって，ナッシュ均衡 x^* は,

$$x^* \in \{(e_2^1, e_2^1), (e_2^2, e_2^2)\}$$

である．

戦略の反復消去について述べる．

エージェントが合理的に振る舞うということは，各エージェントは自身の利得が最大になるような戦略を取ろうとするということである．ここで，エージェントの共有知識として，以下のようなものを考える．

1. 他のエージェントも合理的だと知っている．
2. 他のエージェントの戦略や利得関数を知っている．
3. 他のエージェントが 1 と 2 を知っている．
4. 他のエージェントが 3 を知っている．
5. etc...

これを利用して，強支配される戦略の反復消去を行う．

1. 自身の強支配される戦略を消去.
2. 1 後のゲームで，他のエージェントの強支配される戦略を消去.

3. 2 後のゲームで，自身の強支配される戦略を消去.
4. 3 後のゲームで，他のエージェントの強支配される戦略を消去.
5. etc...

これについても具体例で説明する．以下の利得行列を持つ 2 人ゲームを考える．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- エージェント 1 の戦略 1 が戦略 2 を強支配しているので，戦略 2 を消去.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- エージェント 2 の戦略 1 が戦略 2 と戦略 3 を強支配しているので，戦略 2 と戦略 3 を消去.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- エージェント 1 の戦略 1 が戦略 3 を強支配しているので，戦略 3 を消去.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

反復消去により，戦略プロファイルが 1 つだけ残る．このプロファイルは強ナッシュ均衡である[*11].

定義 1.8.
- x_i^* が全ての $x_i \in X_i$ を弱支配するとき，x_i^* を支配戦略という.
- 全ての $i \in \mathcal{N}$ に対し，$x_i^* \in X_i$ が支配戦略ならば，$x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \in X$ を支配戦略均衡とう.

支配戦略は，他のエージェントの戦略に関わらず合理的である．ただし，存在するとは限らない．支配戦略均衡は，各エージェントが自身の情報のみで到達できるが，存在するとは限らない．支配戦略均衡は明らかにナッシュ均衡の条件を満たす.

1.4.6 ナッシュ均衡の特徴

ナッシュ均衡の長所と短所は以下に挙げられる.

- 長所
  - エージェントの合理性を元にした自然な解である.
  - 一旦実現されると，戦略を変更するメリットがない.
  - 必ず存在する.
- 短所
  - どのようにナッシュ均衡にたどり着くか考えない.
  - 複数 (時には多数) 存在する場合がある.

[*11] 反復支配戦略均衡と呼ばれることもある.

このように考えると，エージェントが選びやすそうなナッシュ均衡であったり，摂動や外乱に対して頑健なナッシュ均衡であるのが好ましい．1.5 節ではナッシュ均衡の精緻化について述べる．

1.5　ナッシュ均衡の精緻化

精緻化とは，特定の信憑性のないナッシュ均衡や壊れやすいナッシュ均衡を排除することを動機としている．以下で，いくつかの標準形精緻化を定義する．

1.5.1　完全性

最もよく知られた非協力精緻化は，「震える手」の完全性という精緻化である．この精緻化は，エージェントの戦略の摂動に対し，頑健でないナッシュ均衡を排除するものである．

ゲームを $G = (\mathcal{N}, X, u)$ とし，μ を誤差ベクトルとする．この誤差ベクトルは，各エージェント i と純粋戦略 $j \in \mathcal{A}_i$ に対して 1 つの数 $\mu_i^j \in (0,1)$ を割り当てる．この数は戦略が「誤って」プレーされる確率であり，$\sum_{j\in\mathcal{A}_i} \mu_i^j < 1$ である．この誤差ベクトル μ に対し，戦略空間の部分空間 $X(\mu) = \{x \in X \mid \forall i \in \mathcal{N}\ \forall j \in \mathcal{A}_i\ x_i^j \geq \mu_i^j\} \subseteq \mathrm{int}(X)$ が定義できる．混合戦略を $X(\mu)$ に制限したゲーム $G(\mu) = (\mathcal{N}, X(\mu), u)$ を G の摂動ゲームと呼ぶ．以下に定義として再掲する．

定義 1.9. ある誤差ベクトル $\mu \in \{\mu \in \mathbb{R}^m_{++} \mid \forall i \in \mathcal{N}\ \sum_{j\in\mathcal{A}_i} \mu_i^j < 1\}$ に対し，X の部分空間

$$X(\mu) = \{x \in X \mid \forall i \in \mathcal{N}\ \forall j \in \mathcal{A}_i\ x_i^j \geq \mu_i^j\}$$

を定義する．混合戦略を $X(\mu)$ に制限したゲーム $G(\mu) = (\mathcal{N}, X(\mu), u)$ を G の摂動ゲームと呼ぶ．ただし，$m = \sum_{i\in\mathcal{N}} m_i$ *(すべてのエージェントの戦略の総数)* である．

任意の摂動ゲーム $G(\mu)$ は非空のナッシュ均衡の集合 $X^{NE}(\mu)$ を持つ．全ての誤差確率が小さければ小さいほど $X(\mu)$ は大きくなり，また，誤差確率がゼロに近づけば対応する摂動ゲームはもとのゲームに近づく．以下で「震える手」の完全性について定義する．

定義 1.10 (完全性)**.** ナッシュ均衡 $x^* \in X^{NE}$ が完全であるとは，以下の条件を満たす摂動ゲームの列 $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t\to 0}$ が存在することをいう．

1. x^t が $G(\mu^t)$ のナッシュ均衡.
2. $x^t \to x^*$.

この定義は，エージェントがある微小な確率で誤った戦略を選択しても，元のゲームのナッシュ均衡に近い結果が実現されることを主張している．特に，任意の内部ナッシュ均衡は完全である．$x \in \mathrm{int}(X)$ に対し，$x \in X(\mu)$ を満たす μ が存在する．

考察しているナッシュ均衡が完全であるためには，それがある低い確率の摂動に関して頑健であれば十分であるから，内部ナッシュ均衡が存在しない場合でも，完全ナッシュ均衡は存在する．完全ナッシュ均衡の集合

を X^{PE} と書くと，以下の定理が成り立つ．

定理 1.5. 任意の有限ゲームに対し，$X^{PE} \neq \emptyset$ *(*完全ナッシュ均衡は存在する*)*.

証明. 任意の列 $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t \to 0}$ に対し，各 t について $x^t \in X^{NE}(\mu^t)$ とする．$\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ はコンパクト集合 X の列なので収束する部分列 $\{y^s\}_{s=1}^{\infty}$ をもち，その極限 x^* は $x^* \in X$ を満たす．各 s に対し，$G(\mu^s)$ は対応する摂動ゲームである．連続性より，$x^* \in X^{NE}$ である．さらに，$y^s \to x^*$ かつ，すべての s に対して $y^s \in X^{NE}(\mu^s)$ であるので，x^* は完全である． □

ナッシュ均衡が完全であるための必要十分条件が Selten により示されている．それは，x のあらゆる均衡について，そのなかに x がそれに対する最適反応となる，ある内部戦略プロファイル y が存在することである．言い換えると，エージェントは，互いに他のエージェントの戦略について，いくぶん確信が持てない状況でも，そして，そのために小さな正の確率をそのゲームの全ての純粋戦略に割り当てるとしても，きっと彼らはその均衡戦略 x_i を進んで取ることはしないだろうということである．さらに，完全ナッシュ均衡が支配されることは決してなく，もしそのゲームにエージェントが 2 人しかいなければ，その逆も成り立つ．

これを命題として書くと，以下のようになる．

命題 1.1. 任意の完全ナッシュ均衡 $x^* \in X^{PE}$ は *(*弱*)* 支配されない．特に *2* 人ゲームでは逆も成り立つ．つまり，*2* 人ゲームの場合は，$x^* \in X^{NE}$ が支配されないならば，$x^* \in X^{PE}$.

1.5.2 プロパー性

完全性の基準は，ある摂動に関してのみ頑健性を要求するが，この摂動が何らかの意味で合理的なものであるという条件は課していない．これに対し，ある意味で合理的な誤り方の基準を定義する．

定義 1.11 (ε-プロパー性)**.** $x^* \in X$ が ε-プロパーであるとは，

$$\forall i \in \mathcal{N},\ \forall j, \forall k \in \mathcal{A}_i\ \ u_i(e_i^j, x_{-i}^*) < u_i(e_i^k, x_{-i}^*) \Rightarrow x_i^{j^*} \leq \varepsilon x_i^{k^*}$$

が成り立つことをいう．

この定義は，コストのかからない誤りほど起こりやすいことを表している．これはエージェントがより損害の大きな誤りを警戒するように振る舞う，合理的な誤り方である．任意の内部ナッシュ均衡は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して ε-プロパーである．

ここで，参考としてナッシュ均衡の定義について記す．$x^* \in X$ がナッシュ均衡であるとは，

$$\forall i \in \mathcal{N},\ \forall j, \forall k \in \mathcal{A}_i\ \ u_i(e_i^j x_{-i}^*) < u_i(e_i^k, x_{-i}^*) \Rightarrow x_i^{j^*} = 0$$

が成り立つことをいう．

次に，プロパー性について定義する．

定義 1.12. ナッシュ均衡 $x^* \in X^{NE}$ がプロパーであるとは，ある列 $\varepsilon^t \to 0$ に対して，以下の条件を満たす列 $\{x(\varepsilon^t)\}_{\varepsilon^t \to 0}$ が存在することをいう．

1. $x(\varepsilon^t)$ が ε^t-プロパー．
2. $x(\varepsilon^t) \to x^*$.

この定義は，損害に依存した微小な確率で誤った戦略を選択しても，元のゲームのナッシュ均衡に近い結果が実現されることを主張している．明らかに，すべての内部ナッシュ均衡 x はプロパーである．実際，全ての t に対して $y(\varepsilon^t) = x$ とすればよい．

プロパーナッシュ均衡と完全ナッシュ均衡について，以下の命題が成り立つ．

命題 1.2. 任意の有限ゲームにおいて，プロパーナッシュ均衡は存在する．また，ナッシュ均衡がプロパーならば完全である．

1.5.3 強完全性

どの摂動が合理的かは必ずしも明確ではない．そこで，すべての低確率の摂動に対して頑健性を求めることを考える．

定義 1.13. ナッシュ均衡 $x^* \in X^{NE}$ が強完全であるとは，任意の摂動ゲームの列 $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t \to 0}$ に対して以下が成り立つことをいう．

1. x^t が $G(\mu^t)$ のナッシュ均衡.
2. $x^t \to x^*$.

この定義は, エージェントがどのような微小な確率で誤った戦略を選択しても, 元のゲームのナッシュ均衡に近い結果が実現されることを主張している．任意の内部ナッシュ均衡は強完全である．実際，$x^* \in X^{NE}(\mu^t)$ なる十分大きな t に対し，$x^t = x$ とすればよい．強完全ナッシュ均衡は存在しない場合もある．強完全ナッシュ均衡とプロパーナッシュ均衡について，以下の命題が成り立つ．

命題 1.3. 強ナッシュ均衡は強完全であり，一意のナッシュ均衡も強完全である．また，ナッシュ均衡が強完全ならばプロパーである．

1.5.4 エッセンシャリティ

エッセンシャルナッシュ均衡の概念は，エージェントの利得の摂動に関して頑健でないナッシュ均衡を捨て去るというものである．より正確にいうと，エージェントの集合と純粋戦略集合は同じだが，純粋戦略利得が異なるゲーム間の「距離」を定義し，全ての近くにあるゲームは，近いところにナッシュ均衡を持つことを要求する．

調べようとするゲームを $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, U)$ とし，あるゲーム $G' = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, U')$ を考える．G と G' の利得距離を，これらの最大利得差で定義する．つまり，

$$d(G, G') = \max_{i \in \mathcal{N}, a \in \mathcal{A}} |U_i(a) - U_i'(a)|$$

とする[*12]．

定義 1.14. $x^* \in X^{NE}$ がエッセンシャルであるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，G との利得距離が δ 以内である任意のゲーム G' が，x から ε 以内の距離にナッシュ均衡をもつときをいう．

他の精緻化と異なり，全ての内部ナッシュ均衡がこれに適合するわけではない．例えば，すべての利得が等しいゲームにおいて，全ての戦略プロファイルはナッシュ均衡だが，任意のプロファイル $x \in X$ に対し，利得をわずかに変化させて，その近くにはそれ自身が最適反応であるようなプロファイルがまったくないようにできるので，どのナッシュ均衡もエッセンシャルでない．

エッセンシャルナッシュ均衡と強完全ナッシュ均衡に対して，以下の命題が成り立つ．

命題 1.4. 任意のエッセンシャルナッシュ均衡は強完全である．

命題 1.1–1.4 から，ナッシュ均衡について以下の包含関係が成り立つことが容易に分かる．

エッセンシャルナッシュ均衡 $\Rightarrow$ 強完全ナッシュ均衡 $\Rightarrow$ プロパーナッシュ均衡 $\Rightarrow$ 完全ナッシュ均衡

1.5.5 集合の意味での精緻化

強完全均衡をもたない，したがって，エッセンシャル均衡をもたないゲームが存在する一方，戦略に対するすべての小さな摂動と利得に対するすべての小さな摂動それぞれに対して，集合として，頑健であるようなナッシュ均衡の集合は常に存在する．

定義 1.15. Y が戦略的に安定であるとは，Y が次の性質を持つ極小集合であるときをいう．すなわち，Y が非空かつ閉集合で，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，誤差 $\mu_i^j < \delta$ をもつ任意の戦略摂動ゲーム $G(\mu) = (\mathcal{N}, X(\mu), u)$ が集合 Y から ε の距離にナッシュ均衡を持つという性質である．

ここでの極小集合の意味は，その集合が頑健性の特性を持つ新部分集合を含まないということである．この極小性の条件が，小さな摂動のいかなる列に対しても頑健でないナッシュ均衡は排除されなければならないことを要求していることを示すことができる．つまり，戦略的安定集合は完全ナッシュ均衡からなる．

同様にして，エッセンシャリティを集合の意味で定義することができる．

定義 1.16. 非空閉集合 $Y \subset X^{NE}$ がエッセンシャルであるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，G との利得距離が δ 以内である任意のゲーム G' が，Y から ε 以内の距離にナッシュ均衡をもつときをいう．

[*12] ここでは純粋戦略の数が有限なので，どのような距離を用いるかは問題にならない．

エッセンシャルの集合について，以下の命題が成り立つ．

命題 1.5. 任意の有限ゲームにおいて，ナッシュ均衡の集合 X^{NE} の成分の少なくともひとつはエッセンシャルである．さらにそのような成分は必ず戦略的に安定な部分集合を含む．

1.6 対称 2 人ゲーム

多くの進化ゲーム理論において，基本的な設定は対称 2 人ゲームのあるサブクラスに属している．実際，極めて重要な洞察の多くがすでにこの特殊な場合として得られる．

1.6.1 定義と記号

対称 2 人ゲーム $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, U)$ は以下の仮定がある．正確に 2 つのプレイヤーポジションがあり，各ポジションは同数の純粋戦略を持ち，任意の戦略に対する利得は，どちらのプレイヤーポジションにそれが割り当てられるかに依存しない．つまり，以下のように定義される．

定義 1.17. ゲーム $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, U)$ が対称 *2* 人であるとは，$\mathcal{N} = \{1, 2\}$，$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$，かつ，任意の $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$ に対し，$U_1(a_1, a_2) = U_2(a_2, a_1)$ となるときをいう．

純粋戦略利得関数に関する対称性の条件は，列プレイヤーの利得行列が行プレイヤーの利得行列の転置行列，つまり，$B = A^{\mathrm{T}}$ であることと同値である．つまり，エージェント 1 が純粋戦略 i を用い，エージェント 2 が純粋戦略 j を用いるときのエージェント 2 の利得 b_{ij} は，エージェント 1 が純粋戦略 j を用い，エージェント 2 が純粋戦略 i を用いるときのエージェント 1 の利得 a_{ji} に等しい．

純粋戦略の共通集合を，$K = \{1, 2, \ldots, k\}$ と書く．ただし，k は 2 つのプレイヤーポジションの各々で取ることのできる純粋戦略の数である．

行プレイヤーの混合戦略を $x \in \Delta$ と表し，列プレイヤーの混合戦略を $y \in \Delta$ と表す．ただし，Δ は共通の混合戦略集合，

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^k_+ \,\middle|\, \sum_{i \in K} x_i = 1 \right\}$$

を表す[*13]．ある混合戦略 $y \in \Delta$ に対して，純粋戦略 $i \in K$ を取るときの利得は，$u(e^i_k, y) = \langle e^i_k, Ay \rangle$ で表される．任意の相手の戦略 $y \in \Delta$ に対する最適反応の集合を $\beta^*(y)$ と表すと，

$$\beta^*(y) = \{ x \in \Delta \,|\, \forall x' \in \Delta \ \ u(x, y) \geq u(x', y) \} \tag{1.9}$$

となる．

よって，戦略プロファイルを戦略プロファイルに写す通常の最適反応対応 $\tilde{\beta}$ とは異なり，β^* は，戦略を戦略の集合に写す[*14]．これは，任意の対称 2 人ゲームの任意のプロファイル $(x, y) \in X$ についてもそうである．

[*13] したがって，$X = \Delta^2$ である．

[*14] つまり，$\beta^* : \Delta \to 2^{\Delta}$ である．一方，$\tilde{\beta} : X \to 2^X$ である．

すなわち，$\tilde{\beta}_1(x,y)=\beta^*(y)$ かつ $\tilde{\beta}_2(x,y)=\beta^*(x)$ である．

より特殊な場合として，両方のエージェントが良くも悪くも常に等しく公平に扱われる対称 2 人ゲームを考察する．このようなゲームはパートナーシップゲームと呼ばれる．このゲームは利得行列 A が対称である．そのため，この対称 2 人ゲームの部分クラスは両対称であるといわれる．すなわち，

定義 1.18. 対称 *2* 人ゲームが両対称であるとは，$A^{\mathrm{T}}=A$ となるときをいう．

対称ゲームであるためには，B^{T} となることが必要なので，対称 2 人ゲームが両対称であるためには，$B=A$ であることが必要十分である．これは，任意の $x,y\in\Delta$ に対して $u(x,y)=u(y,x)$ となることと同値である．

1.6.2　対称ナッシュ均衡

ここでの対称ゲームの枠組みにおいて，戦略のペア $(x,y)\in X=\Delta^2$ がナッシュ均衡 $(x,y)\in X^{NE}$ となるためには，$x\in\beta^*(y)$ かつ $y\in\beta^*(x)$ となることが必要かつ十分である．ナッシュ均衡 (x,y) は $x=y$，つまり，両方のエージェントが同じ (混合ないし純粋) 戦略を用いれば対称であるといわれる．以下では，自分自身とのペアがナッシュ均衡となっている戦略の部分集合 $x\in\Delta$ を，

$$\Delta^{NE}=\{x\in\Delta\,|\,(x,x)\in X^{NE}\} \tag{1.10}$$

と表す．幾何学的にこれは集合 X^{NE} と X の対角線

$$D=\{(x,y)\in X\,|\,x=y\}$$

との共通部分である．明らかに $\Delta^{NE}\subset\Delta$ は最適反応対応 $\beta^*:\Delta\to 2^{\Delta}$ の不動点の集合である．

対称ゲームのナッシュ均衡が対称であるとは限らないが，任意の対称ゲームは少なくともひとつの対称ナッシュ均衡を持つ．

命題 1.6. 任意の有限かつ対称 *2* 人ゲームに対し，$\Delta^{NE}\neq\emptyset$.

証明. 集合 Δ は非空，凸かつコンパクトであるまた，任意の $y\in\Delta$ に対し，部分集合 $\beta^*(y)\subset\Delta$ も非空，凸かつコンパクトである．よって，β^* は上半連続であることを示せる．したがって，角谷の不動点定理から，$y\in\beta^*(y)$ が存在する． □

1.6.3　対称 2 人ゲームの分類

ここでは，各エージェントが 2 つの純粋戦略しかもたない対称 2 人ゲームを考察する．この非常に単純な設定でも，合理的なアプローチと進化的アプローチの間にある，ある種の類似性との差異が明確に現れる．以下では支配関係と最適反応に関して，このようなゲームには，生成的なカテゴリは 3 つしかないことを示す．ここで，「生成的」という言葉は，すべての利得が同一ではないゲームを指している．

これを理解するために，利得行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

をもつ任意の対称 2×2 ゲームを考える．1 列目から a_{21} を引き，2 列目から a_{12} を惹くと，同値な行列

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

を得る．この新しい行列は対称である．よって，利得行列

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

をもつ両対称ゲームを得たことになる．ただし，$a_1 = a_{11} - a_{21}$, $a_2 = a_{22} - a_{12}$ である．

このことから，任意の対称 2×2 ゲームはこのような正規化により，平面上の点 $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ と同一視できる．ここでは，平面の第二象限に正規化された利得ベクトル $a \in \mathbb{R}^2$ を持つ対称 2×2 ゲームをカテゴリー I，第一象限のそれをカテゴリー II，第三象限のそれをカテゴリー III，第四象限のそれをカテゴリー IV ということにする (図 1.3).

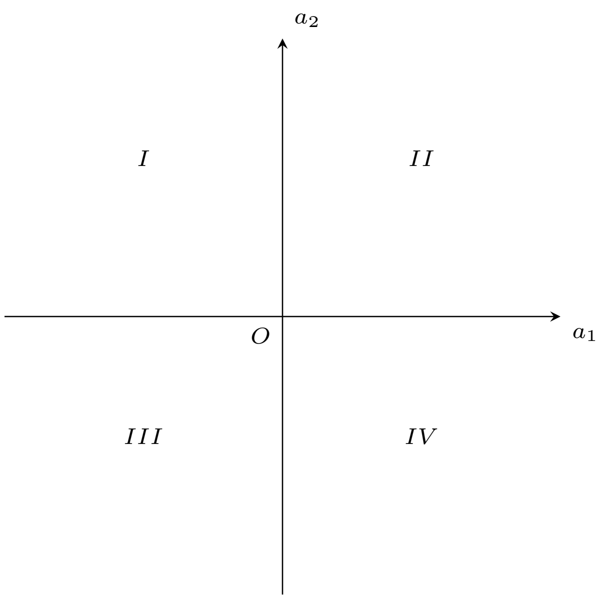

図 1.3　対称 2×2 ゲームの 4 つのカテゴリー

各カテゴリーについて，同じカテゴリーに属する全てのゲームが，最適反応の性質に関して定性的に同じであること，また，カテゴリー IV のゲームがカテゴリー I の鏡像であることを示す．したがって，最適反応という観点からは，全ての 4 つの利得 a_{ij} が異なる生成的な対称 2×2 ゲームは，3 つしかないことになる．そのようなゲームでは，a_1 と a_2 はともにゼロではない．

カテゴリー I　このカテゴリー ($a_1 < 0$ かつ $a_2 > 0$) のの任意のゲームにおいて，戦略 2 は戦略 1 を強支配する．したがって，すべてのこのようなゲームは強支配可解，つまり，$\mathcal{A}^D = \{(2,2)\} \subset \mathcal{A}$ である．これより，$X^{NE} = \{(e_2^2, e_2^2)\}$ かつ $\Delta^{NE} = \{e_2^2\}$．囚人のジレンマのゲームは対称 2 人ゲームであり，エージェント 1 の利得行列 A は,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

であり，正規化すると，$a_1 = -1, a_2 = 3$ が得られる．

カテゴリー II　このカテゴリー ($a_1 > 0$ かつ $a_2 > 0$) のすべてのゲームは明らかに 2 つの対称強ナッシュ均衡をもつ．また，混合戦略

$$\hat{x} = \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2}, \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right) \in \Delta$$

は, 自身とのペアがナッシュ均衡である．よって, $\mathcal{A}^D = \mathcal{A} = \{1, 2\}, X^{NE} = \{(e_2^1, e_2^1), (e_2^2, e_2^2), (\hat{x}, \hat{x})\}$, かつ，$\Delta^{NE} = \{e_2^1, e_2^2, \hat{x}\}$ を得る．男女の争いのゲームはこのカテゴリーのゲームである．

カテゴリー III　このカテゴリー ($a_1 < 0$ かつ $a_2 < 0$) のすべてのゲームでも，支配される戦略はなく，$\mathcal{A}^D = \mathcal{A}$ である．しかしここでは，ある純粋戦略に対する最適反応はもう 1 つの純粋戦略である．したがって，これらのゲームは 2 つの非対称な強ナッシュ均衡と 1 つの対称な混合戦略ナッシュ均衡をもつ．つまり，$X^{NE} = \{(e_2^1, e_2^2), (e_2^2, e_2^1), (\hat{x}, \hat{x})\}$ かつ，$\Delta^{NE} = \{\hat{x}\}$ である．ここで，$\hat{x}$ はカテゴリー II と同じものである．

カテゴリー IV　このカテゴリー ($a_1 > 0$ かつ $a_2 < 0$) のすべてのゲームは支配可解であり，$\mathcal{A}^D = \{(1, 1)\}$, $X^{NE} = \{(e_2^1, e_2^1)\}$，かつ，$\Delta^{NE} = \{e_2^1\}$ である．よって，このカテゴリーは純粋戦略の番号を付け替えればカテゴリー I と同一であり，捨象しても一般性を失うことはない．

カテゴリー II のゲームに対して，例えば，以下の利得行列 A, B を持つ調整ゲームに対して，合理的なエージェントであれば，パレート支配的な強ナッシュ均衡を取ると予想されるであろう，と論じられてきた．

$$A = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

ところが，非協力ゲームにおける通常の道具立てでは，他の 2 つの均衡を排除できない．なぜなら，(e_2^2, e_2^2) と $(\hat{x}, \hat{x})$ は両方とも完全ナッシュ均衡であり，(e_2^2, e_2^2) は強ナッシュ均衡でさえあるからである．

しかし，ある厳密に非協力的な観点からは，効率性と戦略的リスクとの間にトレードオフがあるかもしれない．例えば，次のような利得行列を持つ対称 2×2 ゲームを考える．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

ここで，強ナッシュ均衡 (e_2^2, e_2^2) は強ナッシュ均衡 (e_2^1, e_2^1) をパレート支配している．エージェントが「合理的」ならば (e_2^2, e_2^2) を取る，と予想されるだろうか．この戦略プロファイル (e_2^2, e_2^2) では，相手が離反した場合に 4 単位の利得を失うのに対し，(e_2^1, e_2^1) では 1 単位の利得を得るという意味で，(e_2^2, e_2^2) は (e_2^1, e_2^1) よりもリスクがある．つまり，均衡 (e_2^1, e_2^1) は (e_2^2, e_2^2) をリスク支配するということになる．

正規化した利得 $a_1, a_2 > 0$ をもつ任意の対称 2×2 ゲームを考える．

定義 1.19. $(e_2^1, e_2^1) \in X^{NE}$ が $(e_2^2, e_2^2) \in X^{NE}$ をリスク支配するとは，$a_1 > a_2$ となるときをいう．

つまり，1 つの強ナッシュ均衡が他の強ナッシュ均衡をリスク支配するというのは，利得を正規化した後に，前者が後者を厳密にパレート支配することである．例えば，(1.15) の利得を正規化すると，$a_1 = 2$ および $a_2 = 1$ となる．これは調整ゲーム (1.14) の利得行列であり，(e_2^1, e_2^1) は (e_2^2, e_2^2) よりパレートランクが上であ

る．そこで，多くの人は，合理的なエージェントならばきっと (e_2^2, e_2^2) ではなく，(e_2^1, e_2^1) をとるだろうと主張するのである．