5. 連続時間システムの最適制御（変分法）

5.1. 基本的な問題設定と停留条件.

制御対象

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad (5.1)$$

$\begin{cases} x(t) \in \mathbb{R}^n & : 状態ベクトル \\ u(t) \in \mathbb{R}^m & : 制御入力のベクトル \end{cases}$

問題設定
given
$\begin{cases} t_0 & : 初期時刻 \\ t_f\ (> t_0) & : 終端時刻 \\ x(t_0) = x_0 & : 初期状態 \end{cases}$ ＋ 状態方程式（等式制約）

評価関数

$$J = \varepsilon(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\, dt \qquad (5.2)$$

$[t_0, t_f]$: 評価区間
$L(x(t), u(t), t)$: ステージコスト
$\varepsilon(x(t_f))$: 終端コスト / 終端ペナルティ

(5.2) を最小化する問題 : ボルザ問題
$\varepsilon = 0$: ラグランジュ問題
$L = 0$: メイヤー問題

関数を与えると
それに対応して
実数値が決まる写像

Remark
ここで考える最適制御問題は、
J : 関数 $x(t)$ と $u(t)$ の汎関数である評価関数
を等式制約である状態方程式のもとで最小化する変分問題.

☑ 停留条件の導出（オイラー・ラグランジュ方程式の導出）

等式制約
$f(x, u, t) - \dot{x} = 0$
に対応する Lagrange 乗数ベクトルを $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ とする.
各 t に対して値が決まる

制約条件のもとで停留条件を求めるための汎関数 $\bar{J}$ を構成.

$$\bar{J} = \varepsilon(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{ \underbrace{L(x, u, t) + \lambda^T(f}_{= H} - \dot{x}) \} dt \qquad (5.3)$$

Remark
最適制御問題で、状態方程式に対応するラグランジュ乗数 λ は
随伴状態 / 共状態 と呼ばれる.

ここでスカラー関数 H を

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T = \frac{\partial}{\partial \lambda}(f^T\lambda) = f$$

$$H(x, u, \lambda, t) := L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

で定義。(5.3) の J は

$$J = \phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \Big(\overbrace{H(x, u, \lambda, t)}^{\text{これらは全て}t\text{の関数}}_{\dot{x}\text{が入らない項}} - \underbrace{\lambda^T \dot{x}}_{\dot{x}\text{が入る項}} \Big) dt$$

H を最適制御問題のハミルトニアン関数という。

以下、J の変分計算を実行する。

J の第1変分

$$\delta J = \frac{\partial \phi(x(t_f))}{\partial x} \delta(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u - \lambda^T \delta\dot{x} \right) dt$$

← 連鎖律から

$$= \frac{\partial \phi(x(t_f))}{\partial x} \underline{\delta(x(t_f))} - \left[\lambda^T \delta x\right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\underline{\delta x} + \frac{\partial H}{\partial u}\underline{\delta u} + \dot{\lambda}^T \underline{\delta x} \right) dt$$

← 部分積分

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t)\, \delta\dot{x}(t)\, dt = \left[\lambda^T(t)\,\delta x(t)\right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T(t)\, \delta x(t)\, dt$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial \phi(x(t_f))}{\partial x} - \lambda^T(x(t_f)) \right]}_{=0} \underline{\delta(x(t_f))} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right)}_{=0} \underline{\delta x} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial u}}_{=0} \underline{\delta u} \right\} dt$$

$x(t_0) = x_0$ が固定より、
$\lambda^T(t_0)\,\delta x(t_0) = 0$

$\delta x(t_0) = 0$ を満たす任意の $\delta x(t)$ と任意の $\delta u(t)$ に対して、
$\delta J = 0$

$\Leftarrow$ それらの係数が 0。

⇝ 停留条件が得られる。

Th 5.1.

評価関数 (5.2) を最小にする最適制御 $u(t)$ $(t_0 \le t \le t_f)$ が存在するとし、対応する最適軌道を $x(t)$ とする。
⇝ n次元ベクトル値関数 $\lambda(t)$ が存在し、以下が成り立つ。

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \qquad (5.4)$$

システムのダイナミクス（最適制御の制約条件）

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)(x, u, \lambda, t), \quad \lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(x(t_f)) \qquad (5.5)$$

λに対する条件（λのODE）

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, \lambda, t) = 0 \qquad (5.6)$$

Hに関する条件

Remark
- (5.4) − (5.6) をオイラー・ラグランジュ方程式という。
- (5.5) を随伴方程式という。　正準方程式と呼ばれる
- ハミルトン関数の定義より、状態方程式は
$$\dot{x} = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T (x, u, \lambda, t)$$
と表せる。
∴ 解析力学におけるハミルトンの正準方程式と同じ形。

③ オイラー・ラグランジュ方程式による未知量の決定

(5.6) は、各時刻において入力 u と同じ次元の方程式

⇝ $u(t)$ について解くことができれば、$x(t)$, $\lambda(t)$ から $u(t)$ が決まる。

⇝ (5.4)：状態方程式、(5.5)：随伴方程式
から入力 $u(t)$ を消去して、$x(t)$ と $\lambda(t)$ の連立方程式とみなす。

- 未知関数 $x(t)$, $\lambda(t)$ の次元と同じだけの境界条件
  - $x(t)$：初期値 $x(t_0)$
  - $\lambda(t)$：終端値 $\lambda(t_f)$

⇝ 2点境界値問題

Remark
- 多くの場合、非線形の微分方程式の解析解は得られない。
⇝ 初期条件を未知パラメータとして終端条件が成り立つための条件を書き下すことはできない。
- 非線形微分方程式の初期値問題を解くための数値解法は多くあるが、2点境界値問題では初期条件の一部が未知のため、そのまま使用できない。

⇝ 最適制御問題の数値解法は困難

例：LQ制御

制御対象：線形
評価関数：2次形式　　LQ制御問題
〜> 2点境界値問題が解ける。

制御対象

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

評価関数

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)\,dt$$

S_f, $Q(t)$, $R(t)$：重み行列。（一般性を失うことなく対称と仮定できる）

このとき、ハミルトニ関数は、

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) + \lambda^T(A(t)x + B(t)u)$$

である。

$$\frac{\partial H}{\partial x} = x^T Q + \lambda^T A \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial u} = u^T R + \lambda^T B$$

より、オイラー・ラグランジュ方程式が以下のように得られる。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(t_0) = x_0 \qquad (5.7)$$

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^T\lambda \quad , \quad \lambda(t_f) = S_f x(t_f) \qquad (5.8)$$

$$u^T R + \lambda^T B = 0 \qquad (5.9)$$

この方程式は以下の手順で解くことができる。

Rが正則ならば、(5.9)をuについて解いて、

$$u = -R^{-1}B^T\lambda \qquad (5.10)$$

のように、uがλで表される。これを(5.7)に代入。

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T\lambda \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

よって、(5.8)と連立させて、

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \qquad (5.11)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad \lambda(t_f) = S_f x(t_f) \qquad (5.12)$$

を得る。これは、$x(t)$と$\lambda(t)$のみの連立線形常微分方程式で、2点境界値問題。

〜> 発見的方法だが、(5.12)の終端条件を参考にして、$x(t)$と$\lambda(t)$の間に線形な関係

$$\lambda(t) = S(t)x(t)$$

を仮定する。

$S(t_f) = S_f$ とすれば終端条件は満たされる。
→ $x(t)$ と $\lambda(t) = S(t)x(t)$ が (5.11) を満たすように行列 $S(t)$ を決めればよい。

(5.11) に代入。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{S}x + S\dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ Sx \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A - BR^{-1}B^T S)x \\ (-Q - A^T S)x \end{bmatrix}$$

$$\therefore \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T S)x$$

$$\therefore \dot{S}x = (-Q - A^T S)x - S\dot{x}$$

$$= (-Q - A^T S)x - S(A - BR^{-1}B^T S)x$$

$$= (-A^T S - SA + SBR^{-1}B^T S - Q)x$$

よって、
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{S}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BR^{-1}B^T S)x \\ (-A^T S - SA + SBR^{-1}B^T S - Q)x \end{bmatrix}$$

この式の下半分は、

$$\dot{S} + A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0 \quad , S(t_f) = S_f$$

をみたす $S(t)$ によって常に成り立つ。この微分方程式は、リッカチ微分方程式。
$S(t_f) = S_f$ から出発して、逆時間で数値的に解く。

上半分は $x(t)$ の常微分方程式、$x(t_0) = x_0$ を初期条件とする初期値問題として $x(t)$ を定める。

このようにして定まる $x(t)$ と $\lambda(t) = S(t)x(t)$ が2点境界値問題の解。
対応する制御入力は (5.10) で与えられる。
特に、λ を Sx でおきかえると、

$$u = -R^{-1}BSx$$

のように状態フィードバック制御として表される。