«Моделирование»

Преподаватель: **АЛИЕВ Тауфик Измайлович,**
доктор технических наук, профессор

Национальный исследовательский университет ИТМО
(НИУ ИТМО)

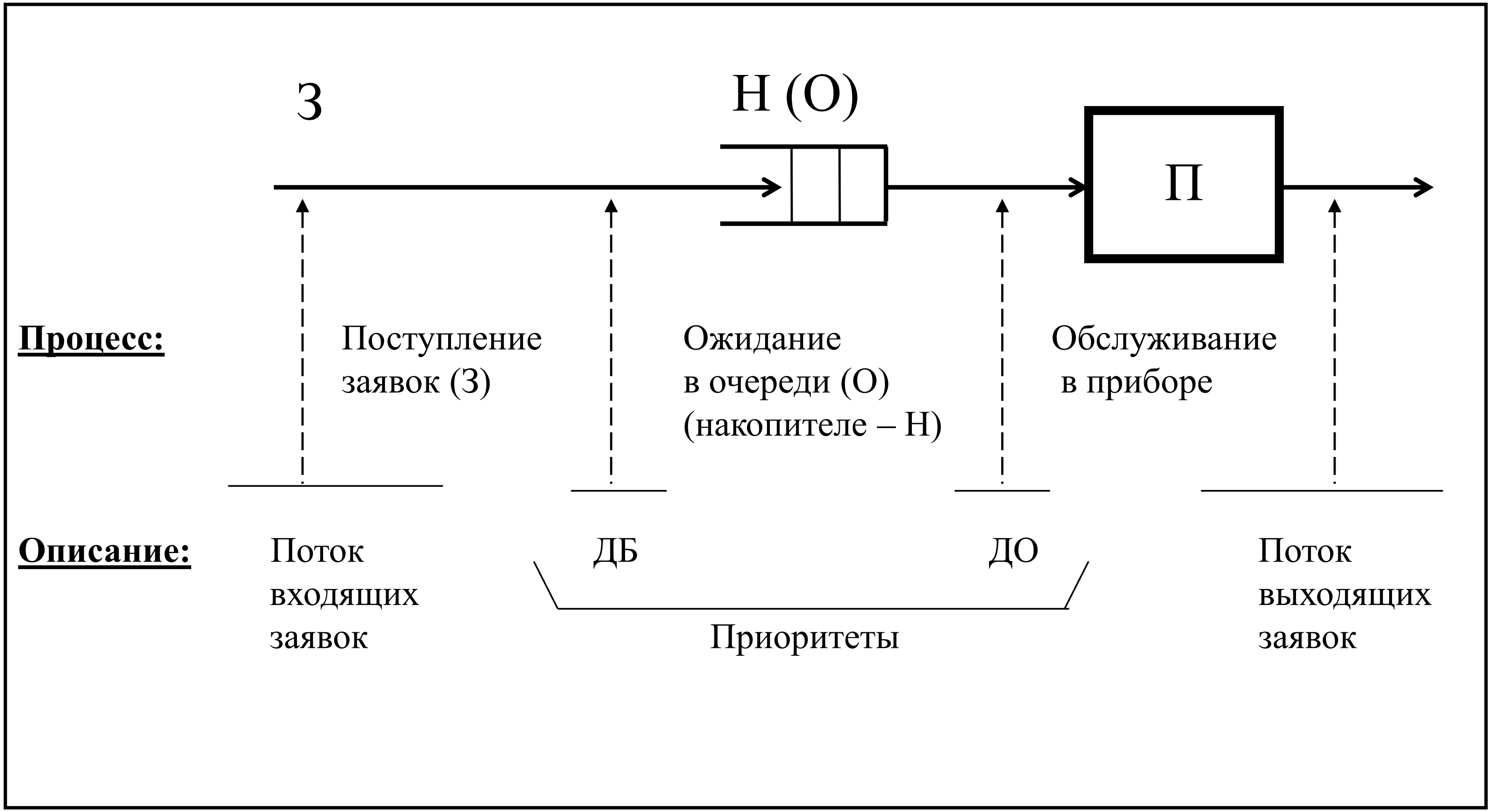
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

2. МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

1. Система массового обслуживания (СМО)
2. Многообразие (классификация) СМО
3. Стратегии управления потоками заявок: дисциплины буферизации
4. Стратегии управления потоками заявок: дисциплины обслуживания
5. Сеть массового обслуживания (СеМО)
6. Параметры и характеристики СМО
7. Поток заявок. Длительность обслуживания
8. Основные характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости
9. Обозначения СМО (символика Кендалла)
10. Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (M/M/1 и M/G/1)
11. Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (M/M/1 и M/G/1)

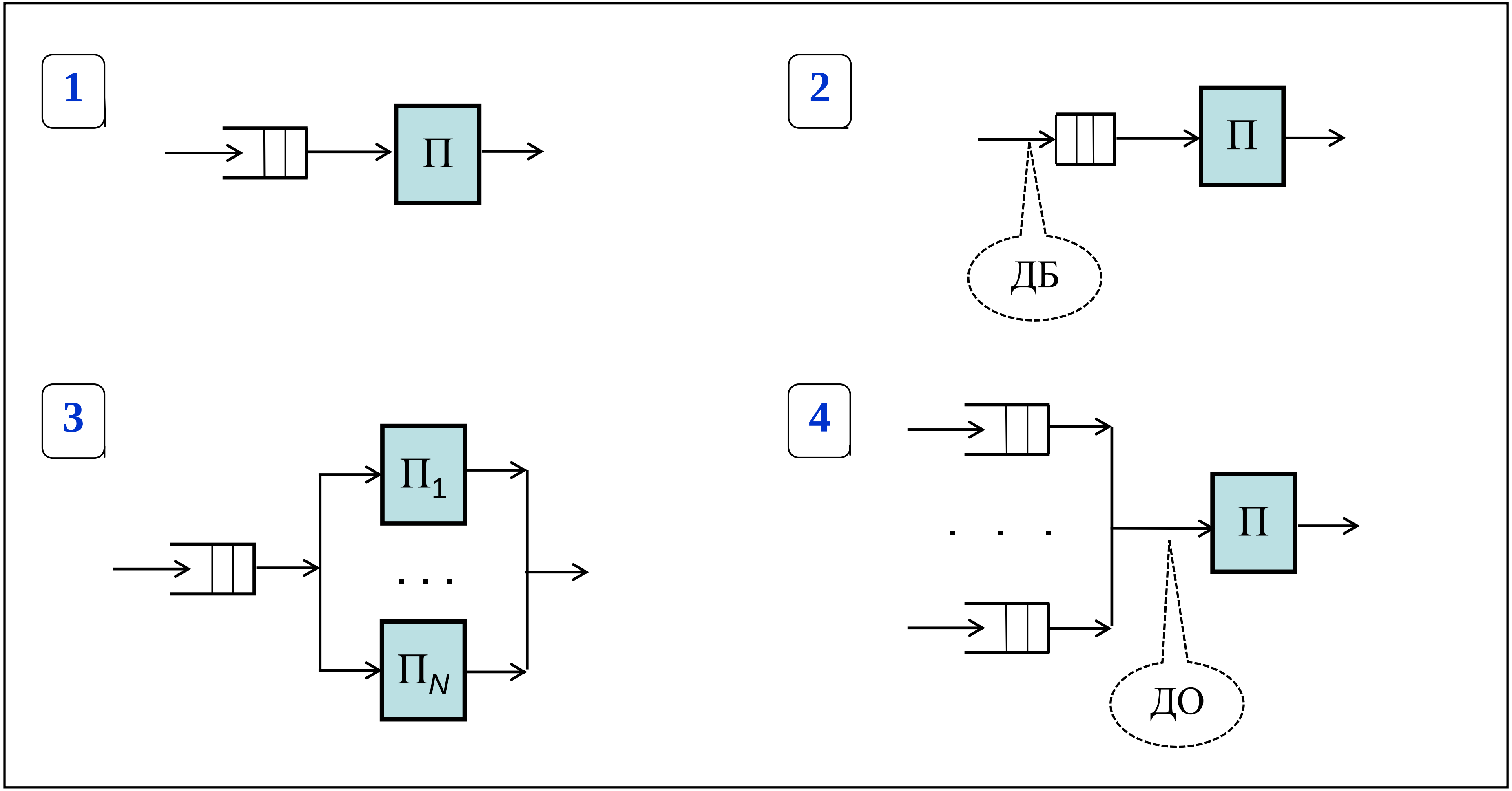
Раздел 2. Модели дискретных систем

Система массового обслуживания (СМО)

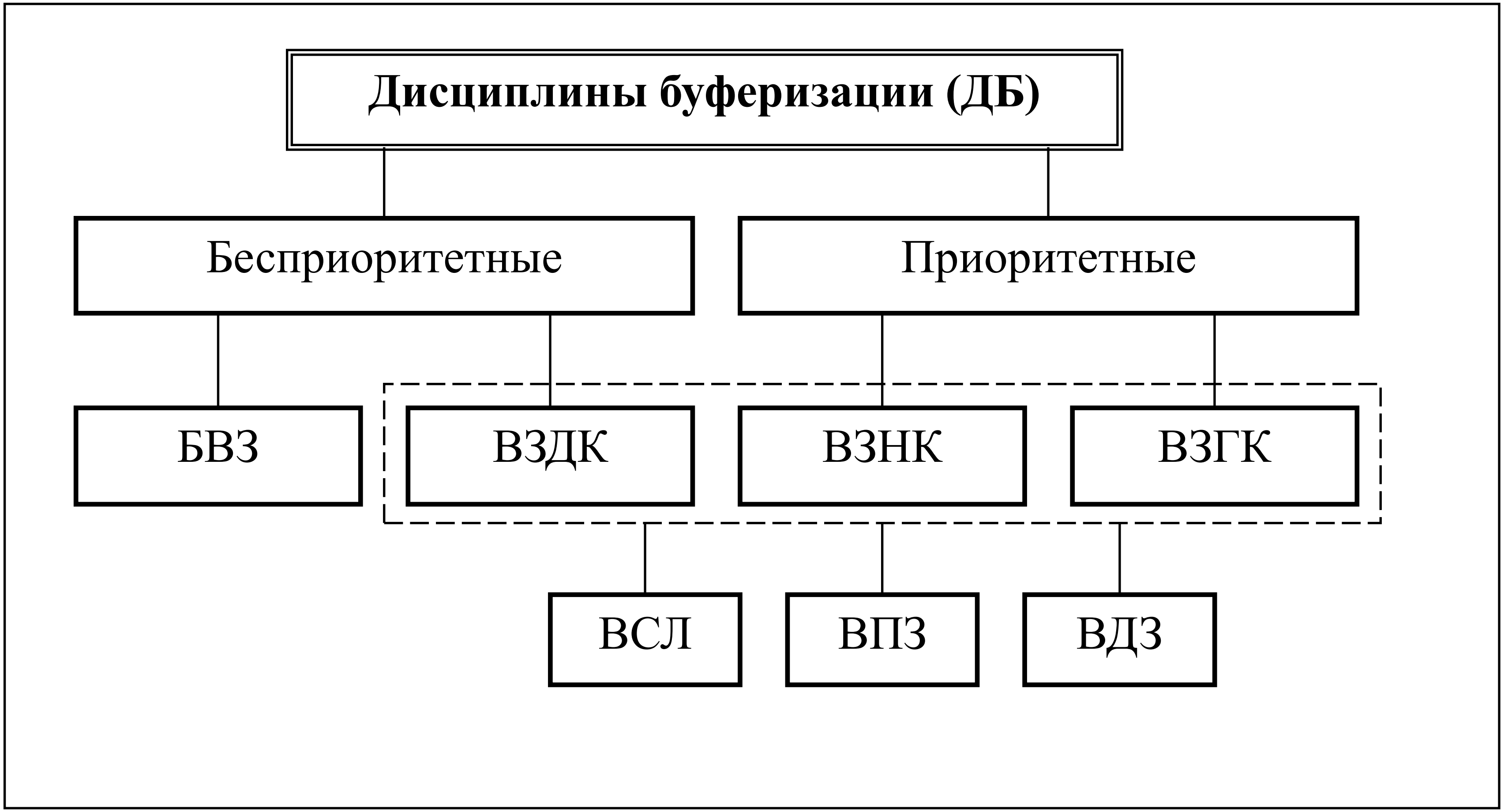


Раздел 2. Модели дискретных систем

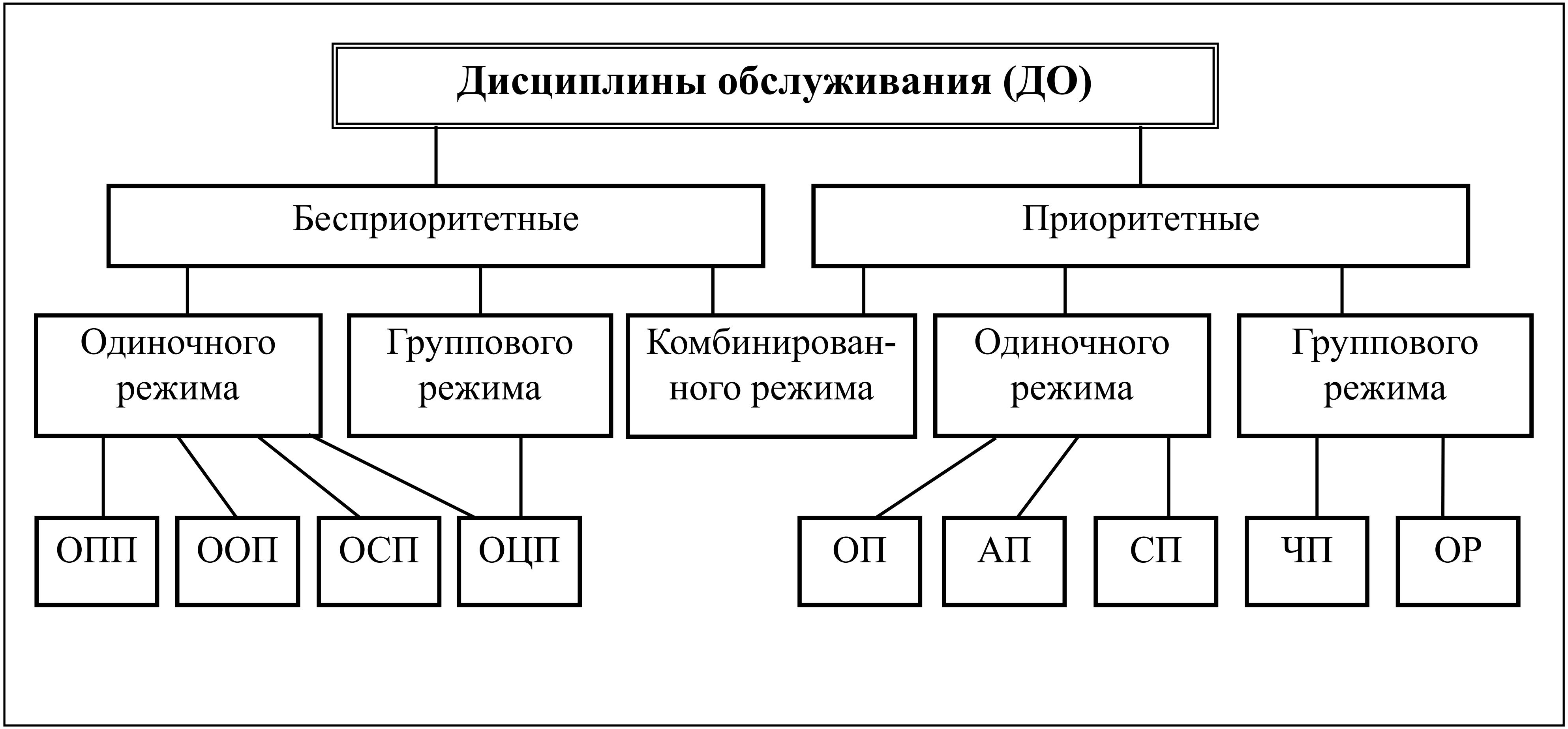
Многообразие (классификация) СМО



Стратегии управления потоками заявок: дисциплины буферизации

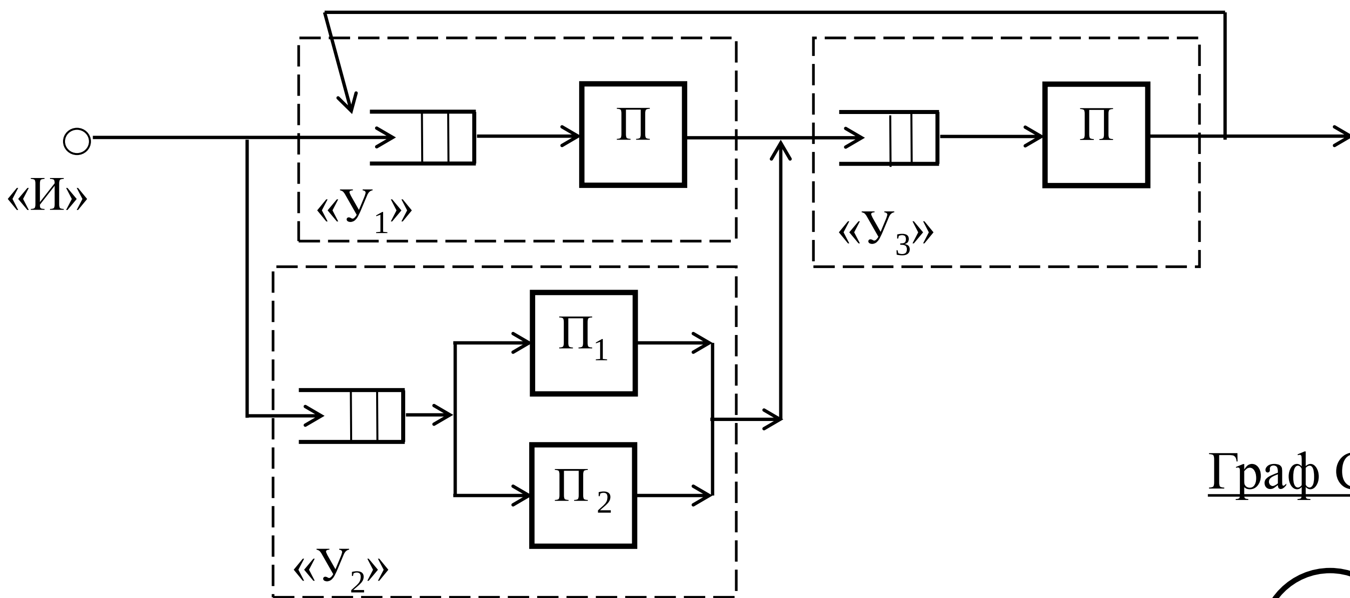


Стратегии управления потоками заявок: дисциплины обслуживания

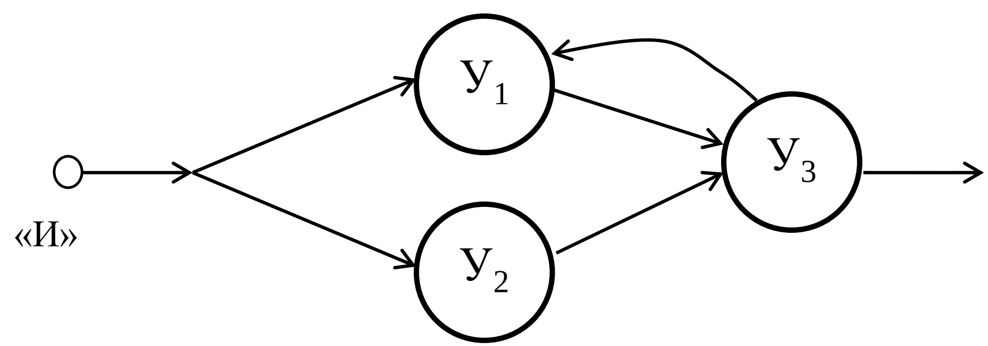


Раздел 2. Модели дискретных систем

Сеть массового обслуживания (СеМО)

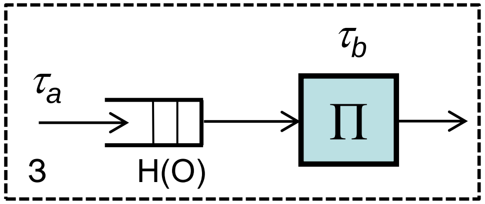


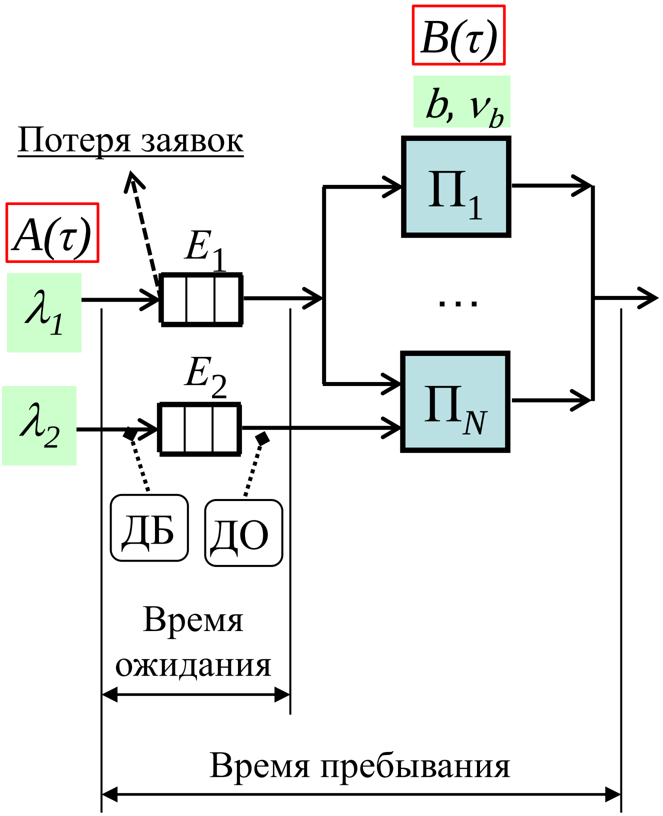
Граф СеМО



2. Модели дискретных систем

Параметры и характеристики СМО





Параметры

1) *структурные*:

- •количество устройств – ***N***;
- •количество и ёмкости накопителей ***E***;
- •способ взаимосвязи накопителей с устройствами.

2) *функциональные:* ДБ; ДО

3) *нагрузочные*:

- •поток заявок: $A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$

$\boldsymbol{\lambda}$ [с$^{-1}$] – интенсивность $(a = 1/\lambda)$;

$$P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

- •обслуживание: $B(\tau) = 1 - e^{-\mu\tau}$

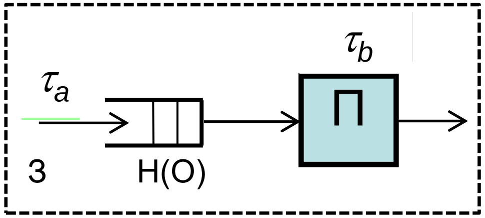
$b\ \ (\mu = 1/b)$

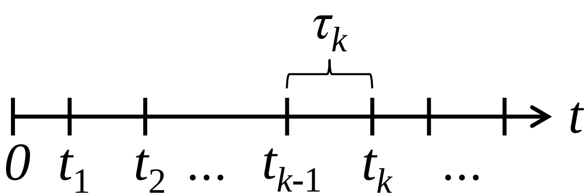
$$v_b = \frac{\sigma_b}{b}$$

Характеристики

1. Нагрузка
2. Загрузка (и коэффициент простоя) системы
3. Вероятность потери заявки из-за ограниченной емкости накопителя
4. Время ожидания заявок в очереди
5. Время пребывания заявок в системе (*в очереди и на обслуживании в приборе*)
6. Длина очереди заявок
7. Число заявок находящихся одновременно в системе (*в очереди и на обслуживании*)

Поток заявок





$\tau_k = t_k - t_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots)$

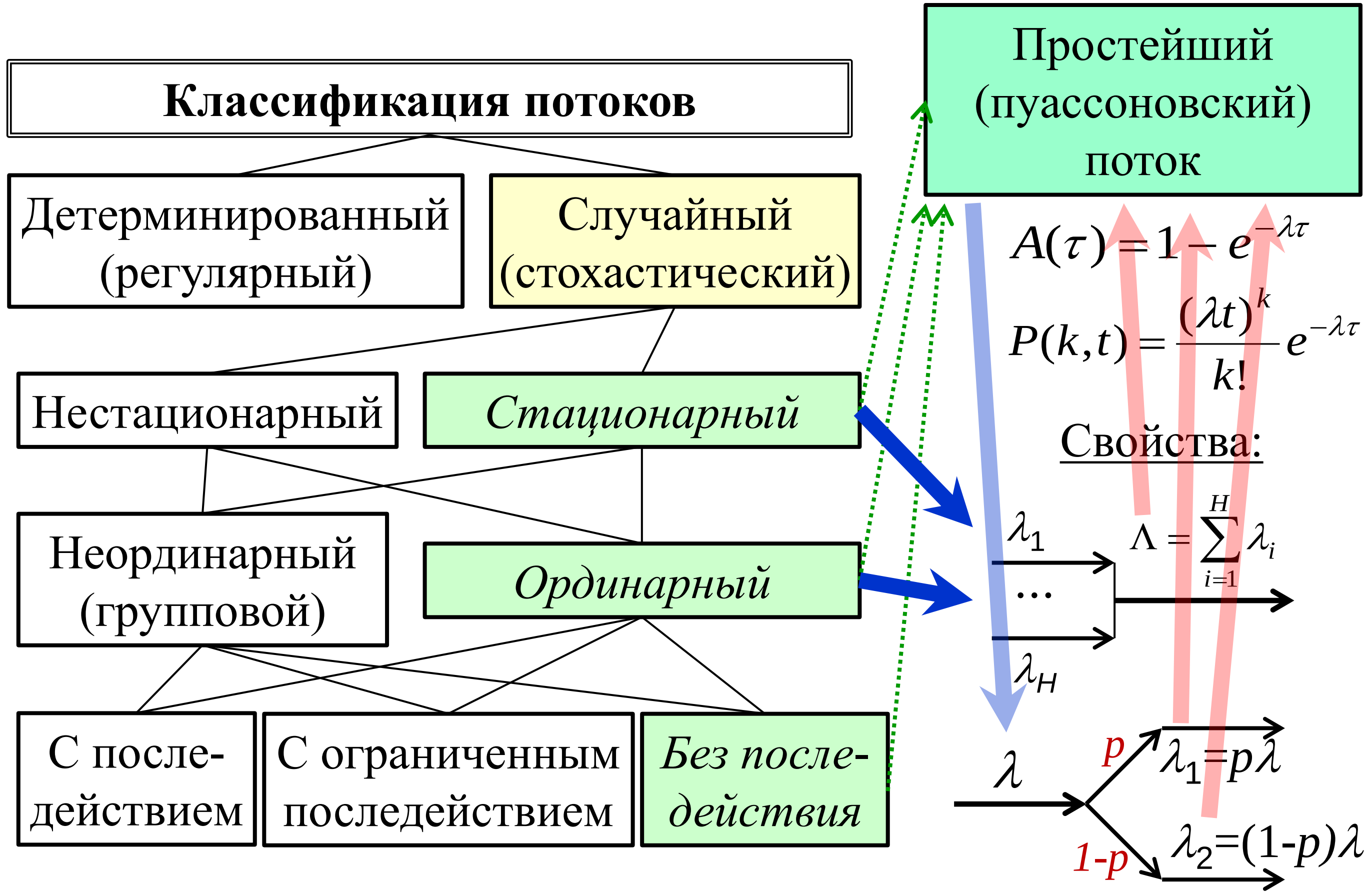
Случайный поток:

$A_k(\tau)$; $a_k(\tau) = A_k'(\tau)$

Рекуррентный поток:

$A_k(\tau) = A(\tau)$ $(k=1, 2, \ldots)$

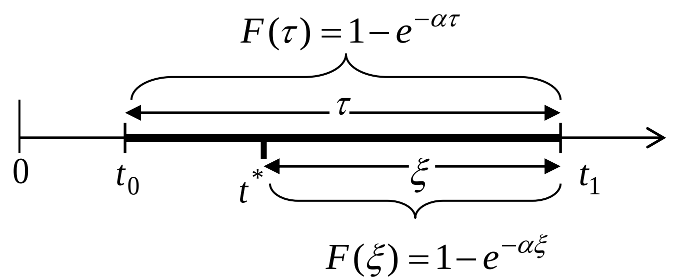
$\lambda = 1/a$ - интенсивность потока



Длительность обслуживания

$B(\tau)$; $b(\tau) = B'(\tau)$ $\Longrightarrow$ $b,\ \nu_b$

μ - интенсивность обслуживания: $\mu = 1/b$ [1/с=с$^{-1}$]



Основные характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости

1) нагрузка $\boxed{y = \lambda / \mu = \lambda b}$ **($y > 0$)**

2) загрузка $\rho = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{T_p}{T}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\rho = \min(y/N; 1)}$ **($0 \le \rho \le 1$)**

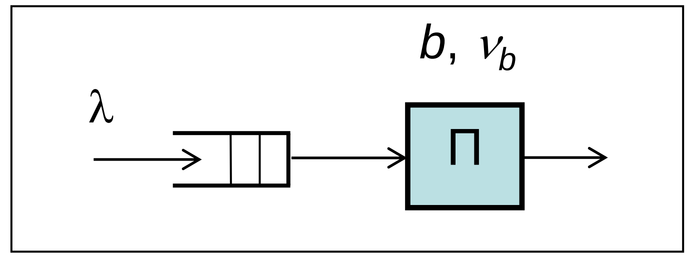
3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$

4) среднее время ожидания w = **?**

5) среднее время пребывания $\boxed{u = w + b}$

6) средняя длина очереди $\boxed{l = \lambda w}$

7) среднее число заявок в системе $\boxed{m = \lambda u}$



Условие отсутствия перегрузок:

$$\rho < 1$$

Обозначения СМО (символика Кендалла)

A/B/N/E

A и **B** – законы распределений:

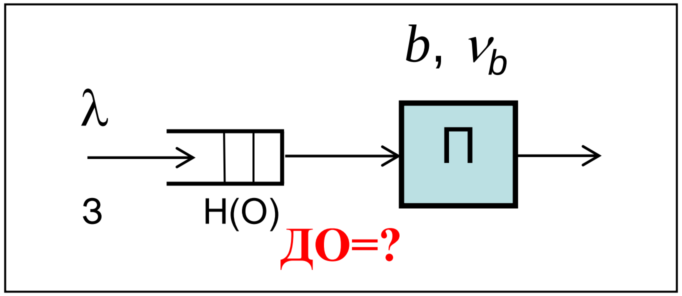
- **G** (General) – *произвольное распределение общего вида*;
- **M** (Markovian) – *экспоненциальное (показательное) распределение*;
- **D** (Deterministik) – *детерминированное распределение*;
- **U** (Uniform) – *равномерное распределение*;
- $\mathbf{E_k}$ (Erlangian) – *распределение Эрланга k-го порядка* (с k последовательными *одинаковыми* экспоненциальными фазами);
- $\mathbf{h_k}$ (hypoexponential) – гипоэкспоненциальное распределение k-го порядка (с k последовательными *разными* экспоненциальными фазами);
- $\mathbf{H_r}$ (Hyperexponential) – *гиперэкпоненциальное распределение порядка r* (с r параллельными экспоненциальными фазами);
- **g** (gamma) – гамма-распределение;
- **P** (Pareto) – распределение Парето и т.д.

N = **1, 2, 3, …,** ∞ – количество приборов

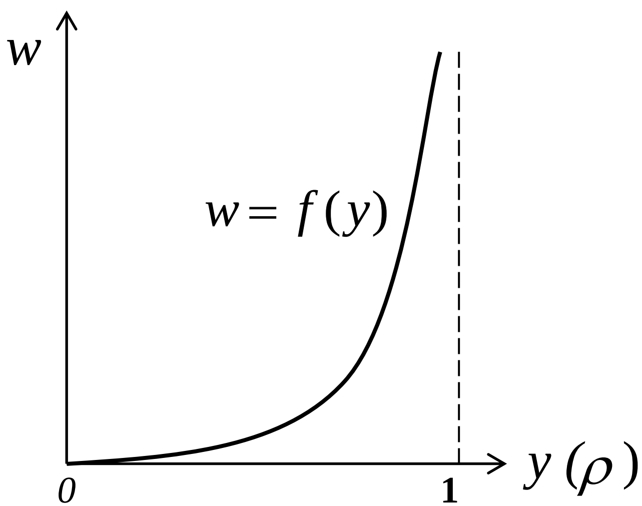
E = **0, 1, 2, …** – емкость накопителя (*по умолчанию:* ∞)

Примеры: M/M/1 M/G/4 E_3/U/2/10 G/H_2/1/20 M/D/∞

Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (M/M/1 и M/G/1)



Анализ свойств системы



1) нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b < \mathbf{1}$ $(N=1)$

2) загрузка $\rho = \min(y / N; 1) < \mathbf{1}$

3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$

4) среднее время ожидания

$$w = \frac{\rho b}{1-\rho} \quad \textbf{(M/M/1);} \qquad w = \frac{\lambda b^2 (1 + v_b^{\,2})}{2(1-\rho)} \quad \textbf{(M/G/1)}$$

5) среднее время пребывания $\boxed{u = w + b = \dfrac{b}{1-\rho}}$

6) средняя длина очереди $l = \lambda w = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$

7) среднее число заявок в системе $m = \lambda u = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем ограниченной емкости (M/M/1/E)

1) нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b$

2) *вероятность потери* (***обслуживания***) *заявок* $\pi_n = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{N_n(T)}{N(T)}$ $\left(\pi_0 = (1-\pi_n) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{N_0(T)}{N(T)}\right)$

3) *производительность системы* $\boxed{\lambda' = \pi_0 \lambda = (1-\pi_n)\lambda}$

4) *интенсивность потока потерянных заявок* $\lambda'' = \pi_n \lambda = (1-\pi_0)\lambda$

5) загрузка $\rho = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{T_p}{T}$ $\Longrightarrow$ $\rho = \frac{(1-\pi_n)y}{K}$

6) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$

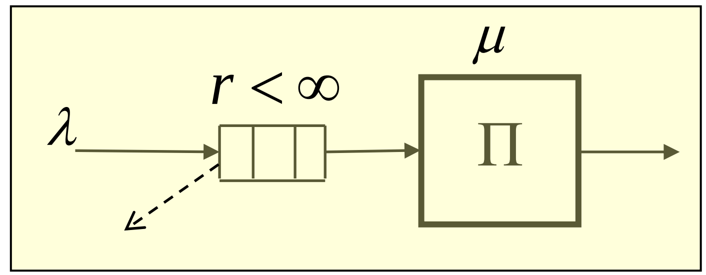
7) среднее время ожидания w = ?

8) среднее время пребывания $u = w + b$

9) средняя длина очереди $l = \lambda w$

10) среднее число заявок в системе $m = \lambda u$

M/M/1/r



$$p_k = \begin{cases} \frac{y^k(1-y)}{1-y^{r+2}}, & y \neq 1 \\ \frac{y^k}{r+2}, & y = 1 \end{cases}$$

$(k=0,1, \ldots, r+1)$

Условие отсутствия перегрузок ?