

# УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия  
Дисциплина «Моделирование»

Учебно-исследовательская работа УИР 2  
«ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ  
НА МАРКОВСКИХ МОДЕЛЯХ»  
Вариант 4/8

Студенты  
Лавлинский Михаил  
Ханнанов Ленар  
Р34112

Преподаватель  
Алиев Т.И.

г. Санкт-Петербург

2022 г.

## 1. Постановка задачи и исходные данные

Таблица 1

Вариант	СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2		Критерий эффект.
	П	ЕН	П	ЕН	
4	2 ( $E_2$ )	1/0	3	1/0/1	(г)

Таблица 2

Номер варианта	Интенс. потока	Ср. длит. обслуж.	Вероятности занятия прибора ...		
	$\lambda$ , 1/с	$b$ , с	П1	П2	П3
8	0,8	5	0,3	0,5	0,2

## 2. Описание исследуемой системы

### Общие данные

Интенсивность потока для обеих систем  $\lambda$ : 0,8 1/с

Средняя длительность обслуживания для обеих систем  $b$ : 5 с

Интенсивность обслуживания для обеих систем  $\mu = 1/b = 0.2$  1/с

Критерий эффективности: (г) минимальное время пребывания в системе заявок.

### СИСТЕМА\_1

Число приборов: 2.

Классификация по Кендаллу:

1.  $M/E_2/1/1$

2.  $M/M/1/0$

В первом приборе длительность обслуживания распределена по закону Эрланга 2-го порядка.

Перед первым прибором емкость накопителя 1, перед вторым - 0.

Вероятность занять первый прибор 0,3, второй - 0,7.

### СИСТЕМА\_2

Число приборов: 3

Классификация приборов по Кендаллу:

1.  $M/M/1/1$

2.  $M/M/1/0$

3.  $M/M/1/1$

Перед первым прибором емкость накопителя 1, перед вторым - 0 (система с отказами), перед третьим - 1

Вероятность занять первый прибор 0,3, второй - 0,5, третий - 0,2

### 3. Перечень состояний марковского процесса для исследуемой системы

- СИСТЕМА\_1

Таблица 3

Состояние	Описание	Состояние	Описание
0	Заявок нет, система простаивает	$2_1$	И первый, и второй прибор заняты. Заявка первого прибора на первой фазе
1	Второй прибор занят	$2_2$	И первый, и второй прибор заняты. Заявка первого прибора на второй фазе
$1_1$	Первый прибор занят, заявка на первой фазе	$3_1$	Оба прибора заняты и одна заявка в очереди. Заявка первого прибора на первой фазе
$1_2$	Первый прибор занят, заявка на второй фазе	$3_2$	Оба прибора заняты и одна заявка в очереди. Заявка первого прибора на второй фазе

- СИСТЕМА\_2

Таблица 4

Состояние	Описание	Состояние	Описание
0	Заявок нет, система простаивает	$3_{113}$	Три заявки: две в первом (одна в очереди), одна в третьем (на обработке)
$1_1$	Одна заявка на обработке в первом приборе	$3_{123}$	Три заявки: во всех трёх приборах на обработке
$1_2$	Одна заявка на обработке во втором приборе	$3_{133}$	Три заявки: одна в первом (на обработке), две в третьем (одна в очереди, другая в обработке)
$1_3$	Одна заявка на обработке в третьем приборе	$3_{233}$	Три заявки: одна во втором (на обработке), две в третьем (одна в очереди, другая в обработке)
$2_{12}$	Две заявки на обработке: в первом и втором приборе	$4_{1123}$	Четыре заявки: две в первом приборе (одна в очереди), одна во втором, одна в третьем приборе

$2_{13}$	Две заявки на обработке: в первом и третьем приборе	$4_{1133}$	Четыре заявки: две в первом приборе (одна в очереди), две в третьем приборе (одна в очереди)
$2_{23}$	Две заявки на обработке: во втором и третьем приборе	$4_{1233}$	Четыре заявки: одна в первом приборе, одна во втором, две в третьем приборе (одна в очереди)
$3_{112}$	Три заявки: две в первом (одна в очереди), одна во втором (на обработке)	5	Пять заявок: все приборы заняты обработкой, и все очереди к приборам заполнены

#### 4. Результаты работы:

- Размеченный граф переходов марковского процесса

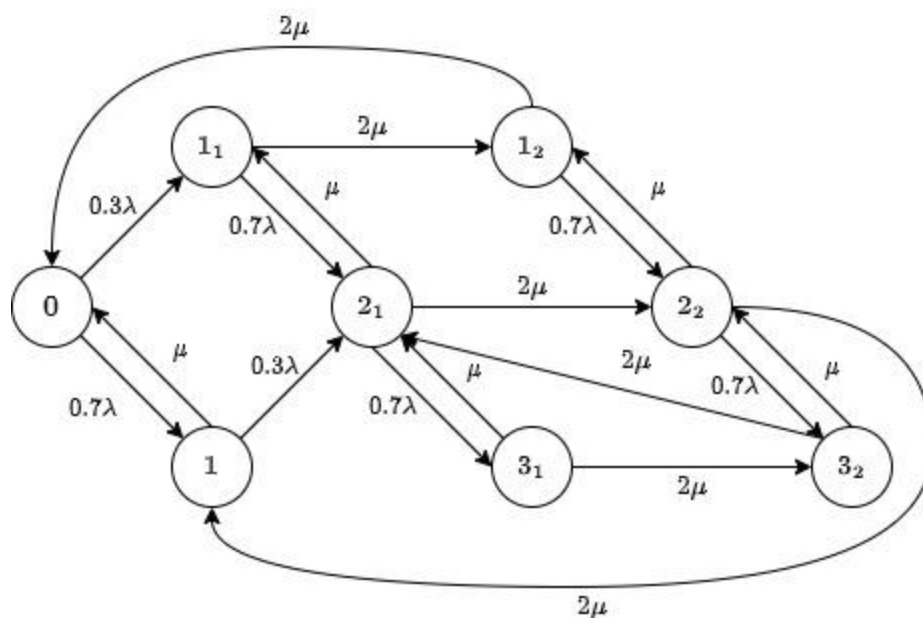


Рисунок 1. Граф переходов СИСТЕМЫ\_1

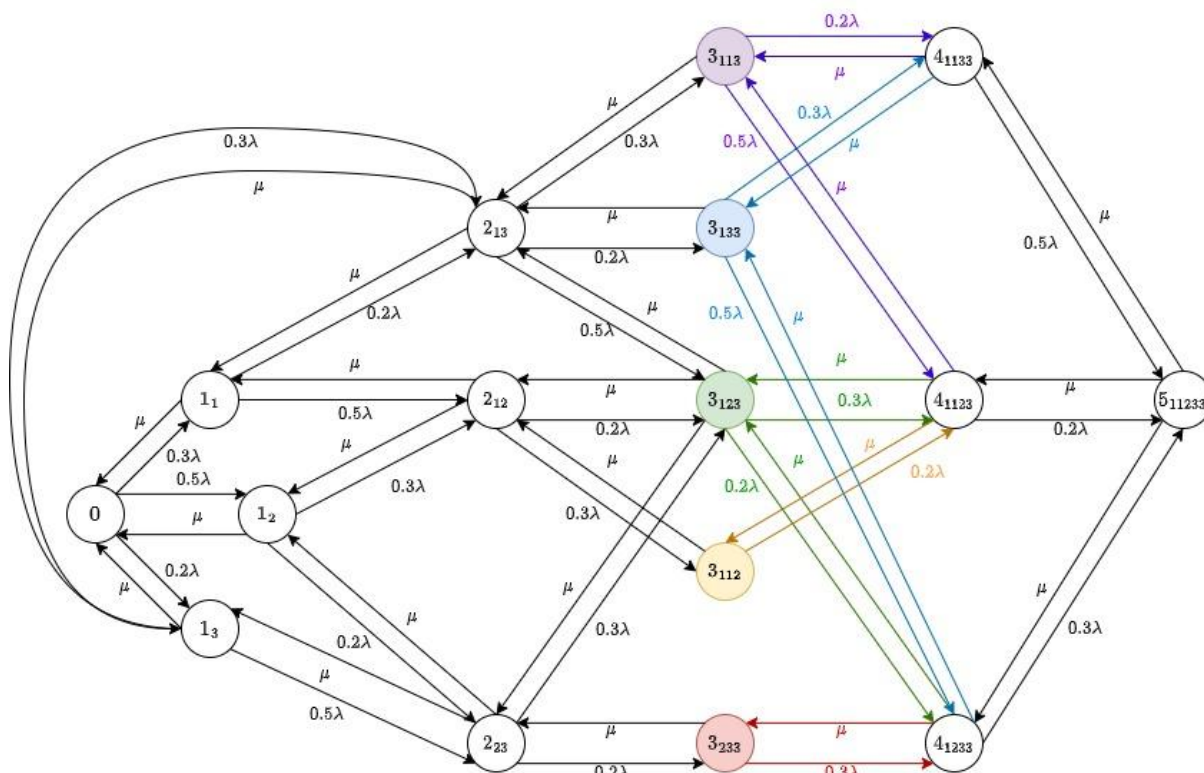


Рисунок 2. Граф переходов СИСТЕМЫ\_2

- Матрица интенсивностей переходов

Таблица 4. Матрица интенсивностей переходов СИСТЕМА\_1

$E_i/E_j$	0	1	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	2 <sub>2</sub>	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>
0	$-\lambda$	$0.7\lambda$	$0.3\lambda$	0	0	0	0	0
1	$\mu$	$-0.3\lambda - \mu$	0	0	$0.3\lambda$	0	0	0
1 <sub>1</sub>	0	0	$-0.7\lambda - 2\mu$	$2\mu$	$0.7\lambda$	0	0	0
1 <sub>2</sub>	$2\mu$	0	0	$-0.7\lambda - 2\mu$	0	$0.7\lambda$	0	0
2 <sub>1</sub>	0	0	$\mu$	0	$-0.7\lambda - 3\mu$	$2\mu$	$0.7\lambda$	0
2 <sub>2</sub>	0	$2\mu$	0	$\mu$	0	$-0.7\lambda - 3\mu$	0	$0.7\lambda$
3 <sub>1</sub>	0	0	0	0	$\mu$	0	$-3\mu$	$2\mu$
3 <sub>2</sub>	0	0	0	0	$2\mu$	$\mu$	0	$-3\mu$

Ввод матрицы интенсивностей переходов									
Данные Справка									
Список элементов матрицы		0	1	2	3	4	5	6	7
Имя	Значение	0	lambda07	lambda03	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
lambda	0.8000	1	mu	0.0000	0.0000	lambda03	0.0000	0.0000	0.0000
mu	0.2000	2	0.0000	0.0000	2	mu2	lambda07	0.0000	0.0000
lambda07	0.5600	3	mu2	0.0000	0.0000	3	0.0000	lambda07	0.0000
lambda03	0.2400	4	0.0000	0.0000	mu	0.0000	4	mu2	lambda07
mu2	0.4000	5	0.0000	mu2	0.0000	mu	0.0000	5	0.0000
Коефициент		6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	6
		7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu2	mu	0.0000
									7

Рисунок 3. Матрица интенсивностей СИСТЕМЫ\_1 в MARK

Таблица 5. Матрица интенсивностей переходов СИСТЕМА\_2

Ei/Ej	0	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	2 <sub>12</sub>	2 <sub>13</sub>	2 <sub>23</sub>	3 <sub>112</sub>	3 <sub>113</sub>	3 <sub>123</sub>	3 <sub>133</sub>	3 <sub>233</sub>	4 <sub>1123</sub>	4 <sub>1133</sub>	4 <sub>1233</sub>	5
0	-λ	0.3λ	0.5λ	0.2λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 <sub>1</sub>	μ	-0.7λ -μ	0	0	0.5λ	0.2λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 <sub>2</sub>	μ	0	-0.5λ -μ	0	0.3λ	0	0.2λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 <sub>3</sub>	μ	0	0	-0.8λ λ-μ	0	0.3λ	0.5λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 <sub>12</sub>	0	μ	μ	0	-0.5λ -2μ	0	0	0.3λ	0	0.2λ	0	0	0	0	0	0
2 <sub>13</sub>	0	μ	0	μ	0	-λ-2μ	0	0	0.3λ	0.5λ	0.2λ	0	0	0	0	0
2 <sub>23</sub>	0	0	μ	μ	0	0	-0.5λ λ-2μ	0	0	0.3λ	0	0.2λ	0	0	0	0
3 <sub>112</sub>	0	0	0	0	μ	0	0	-0.2λ-μ	0	0	0	0	0.2λ	0	0	0
3 <sub>113</sub>	0	0	0	0	0	μ	0	0	-0.7λ-μ	0	0	0	0.5λ	0.2λ	0	0
3 <sub>123</sub>	0	0	0	0	μ	μ	μ	0	0	-0.5λ-3μ	0	0	0.3λ	0	0.2λ	0
3 <sub>133</sub>	0	0	0	0	0	μ	0	0	0	0	-0.8λ-μ	0	0	0.3λ	0.5λ	0
3 <sub>233</sub>	0	0	0	0	0	0	μ	0	0	0	0	-0.3λ-μ	0	0	0.3λ	0
4 <sub>1123</sub>	0	0	0	0	0	0	0	μ	μ	μ	0	0	-0.2λ-3μ	0	0	0.2λ
4 <sub>1133</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	μ	0	μ	0	0	-0.5λ-2μ	0	0.5λ
4 <sub>1233</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ	μ	μ	0	0	-0.3λ-3μ	0.3λ
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ	μ	μ	-3μ

Ввод матрицы интенсивностей переходов																	
Данные		Справка															
Список элементов матрицы		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Имя	Значение	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
lambda	0.8000	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
mu	0.2000	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
lambda02	0.1600	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
lambda03	0.2400	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
lambda05	0.4000	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Коэффициент		1.0000															

Рисунок 4. Матрица интенсивностей СИСТЕМЫ\_2 в MARK

- Значения стационарных вероятностей, сведенные в таблицу (форма 1)

Форма 1

### Стационарные вероятности состояний

Номер состояния	СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2	
	Обозн.	Вер-ть	Обозн.	Вер-ть
1	0	0.0712	0	0.0407
2	1	0.1943	1 <sub>1</sub>	0.0489
3	1 <sub>1</sub>	0.0518	1 <sub>2</sub>	0.0814
4	1 <sub>2</sub>	0.0453	1 <sub>3</sub>	0.0326
5	2 <sub>1</sub>	0.1632	2 <sub>12</sub>	0.0977
6	2 <sub>2</sub>	0.1140	2 <sub>13</sub>	0.0391
7	3 <sub>1</sub>	0.1523	2 <sub>23</sub>	0.0651
8	3 <sub>2</sub>	0.2079	3 <sub>112</sub>	0.1172
9	-	-	3 <sub>113</sub>	0.0469
10	-	-	3 <sub>123</sub>	0.0782
11	-	-	3 <sub>133</sub>	0.0313
12	-	-	3 <sub>233</sub>	0.0521
13	-	-	4 <sub>1123</sub>	0.0938
14	-	-	4 <sub>1133</sub>	0.0375

15	-	-	$4_{1233}$	0.0625
16	-	-	5	0.0750

- Формулы, используемые для расчета характеристик системы и значения характеристик системы, сведенные в таблицы (форма 2)

Форма 2.1

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	СИСТ.1
Нагрузка	П1	$y = \rho / (1 - \pi)$	0.1518
	П2	$y = \rho / (1 - \pi)$	1.1540
	Сумм.	$y = 2\rho / (1 - \pi)$	2.9032
Загрузка	П1	$\rho = p_3 + p_4$	0.0971
	П2	$\rho = p_2$	0.1943
	Сумм.	$\rho = 1 - p_0$	0.9288
Вероятность потери	П1	$\pi = p_7 + p_8$	0.3602
	П2	$\pi = p_2 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8$	0.8316
	Сумм.	$\pi = p_7 + p_8$	0.3602
Длина очереди	П1	$l = p_7 + p_8$	0.3602
	П2	-	0.0000
	Сумм.	$l = p_7 + p_8$	<b>0.3602</b>
Число заявок находящихся в системе	П1	$m = p_3 + p_4 + 2 \cdot (p_7 + p_8)$	0.8175
	П2	$m = p_2 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8$	0.8316
	Сумм.	$m = (p_2 + p_3 + p_4) + 2 \cdot (p_5 + p_6) + 3 \cdot (p_7 + p_8)$	1.9263
Производительность	П1	$\lambda' = (1 - \pi)\lambda \cdot 0.3$	0.1536
	П2	$\lambda' = (1 - \pi)\lambda \cdot 0.7$	0.0943
	Сумм.	$\lambda' = (1 - \pi)\lambda$	0.5119

Форма 2.2



Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	СИСТ.2
Нагрузка	П1	$y = \rho / (1 - \pi)$	1.1565
	П2	$y = \rho / (1 - \pi)$	2.6116
	П3	$y = \rho / (1 - \pi)$	0.7269
	Сумм.	$y = 3\rho / (1 - \pi)$	3.1113
Загрузка	П1	$\rho = p_2 + p_5 + p_6 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16}$	0.7281
	П2	$\rho = p_3 + p_5 + p_7 + p_8 + p_{10} + p_{12} + p_{13} + p_{15} + p_{16}$	0.7231
	П3	$\rho = p_4 + p_6 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15}$	0.5390
	Сумм.	$\rho = 1 - p_0$	0.9593
Вероятность потери	П1	$\pi = p_8 + p_9 + p_{13} + p_{14} + p_{16}$	0.3705
	П2	$\pi = p_3 + p_5 + p_7 + p_8 + p_{10} + p_{12} + p_{13} + p_{15} + p_{16}$	0.7231
	П3	$\pi = p_{11} + p_{12} + p_{14} + p_{15} + p_{16}$	0.2585
	Сумм.	$\pi = p_{16}$	<b>0.0750</b>
Длина очереди	П1	$l = p_8 + p_9 + p_{13} + p_{14} + 2 \cdot p_{16}$	0.4455
	П2	-	0.0000
	П3	$l = p_{11} + p_{12} + p_{14} + p_{15} + 2 \cdot p_{16}$	0.3335
	Сумм.	$l = p_8 + p_9 + p_{11} + p_{12} + p_{13} + 2 \cdot p_{14} + p_{15} + 2 \cdot p_{16}$	0.6289
Число заявок находящихся в системе	П1	$m = p_2 + p_5 + p_6 + 2 \cdot (p_8 + p_9 + p_{13} + p_{14} + p_{16})$	0.9266
	П2	$m = p_3 + p_5 + p_7 + p_8 + p_{10} + p_{12} + p_{13} + p_{15} + p_{16}$	0.7231
	П3	$m = p_4 + p_6 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{13} + 2 \cdot (p_{11} + p_{12} + p_{14} + p_{15})$	0.8725

		$+ p_{16})$	
	Сумм.	$m = p_2 + p_3 + p_4 + 2 \cdot (p_5 + p_6 + p_7) + 3 \cdot (p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12}) + 4 \cdot (p_{13} + p_{14} + p_{15}) + 5 \cdot p_{16}$	2.6942
Производительность	П1	$\lambda' = (1 - \pi)\lambda \cdot 0.3$	0.1511
	П2	$\lambda' = (1 - \pi)\lambda \cdot 0.5$	0.1108
	П3	$\lambda' = (1 - \pi)\lambda \cdot 0.2$	0.1186
	Сумм.	$\lambda' = (1 - \pi)\lambda$	<b>0.7400</b>

Форма 2.3

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	СИСТ.1	СИСТ.2
Коэффициент простоя	П1	$\eta = 1 - \rho$	0.9029	0.2719
	П2	$\eta = 1 - \rho$	0.8057	0.2769
	П3	$\eta = 1 - \rho$	-	0.4610
	Сумм.	$\eta = 1 - \rho$	0.0712	<b>0.0407</b>
Время ожидания	П1	$w = l/\lambda'$	2.3456	2.9488
	П2	$w = l/\lambda'$	0.0000	0.0000
	П3	$w = l/\lambda'$	-	2.8107
	Сумм.	$w = l/\lambda'$	<b>0.7037</b>	0.8499
Время пребывания	П1	$u = m/\lambda'$	5.3238	6.1330
	П2	$u = m/\lambda'$	8.8201	6.5291
	П3	$u = m/\lambda'$	-	7.3540
	Сумм.	$u = m/\lambda'$	<b>3.7634</b>	<b>3.6409</b>

- Результаты (графики и выводы) сравнительного анализа характеристик функционирования исследуемых систем

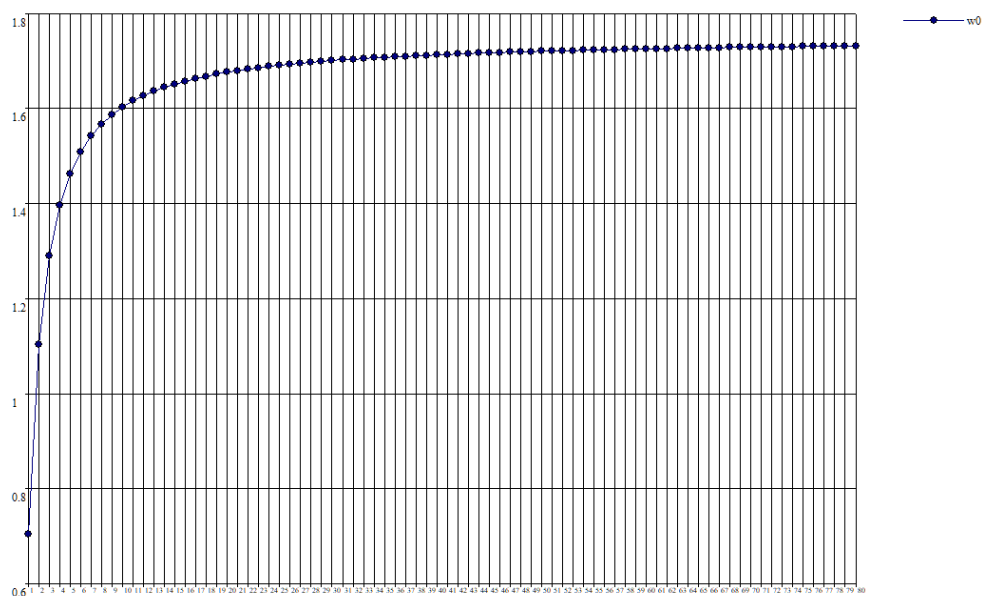


Рисунок 5. График зависимости времени ожидания от интенсивности поступления заявок СИСТ. 1

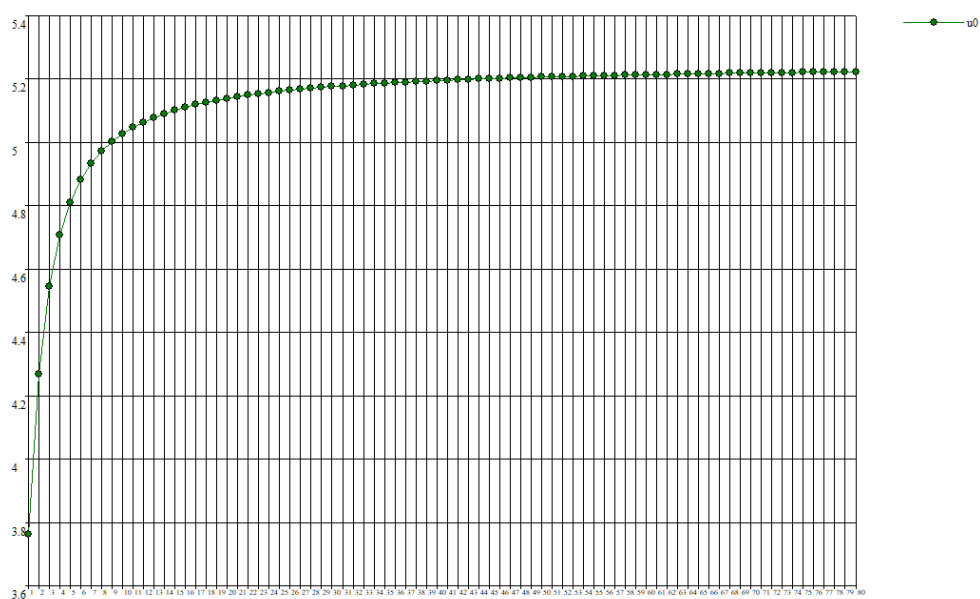


Рисунок 6. График зависимости времени пребывания от интенсивности поступления заявок СИСТ. 1

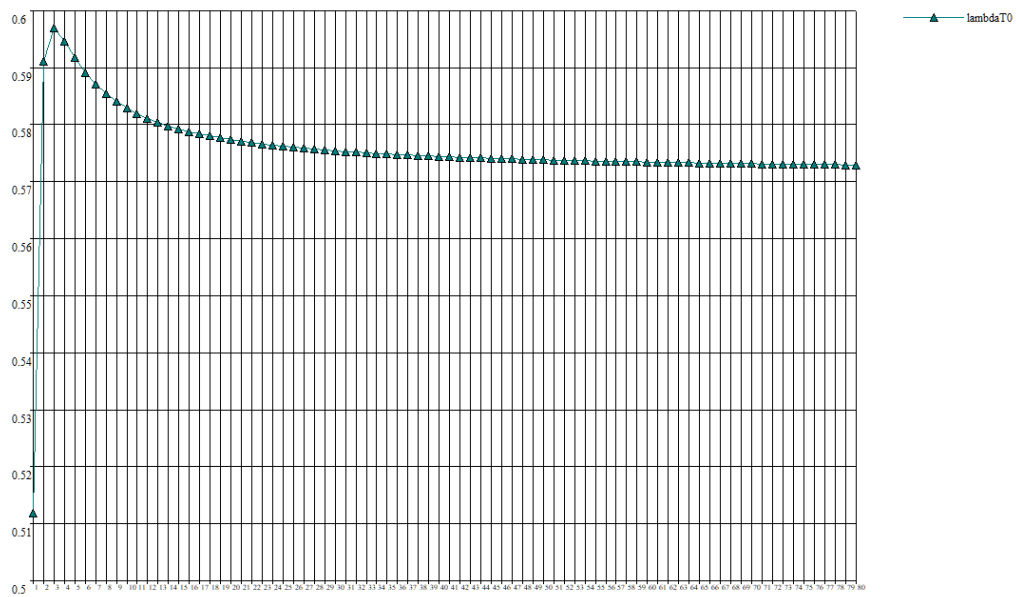


Рисунок 7. График зависимости производительности от интенсивности поступления заявок СИСТ. 1

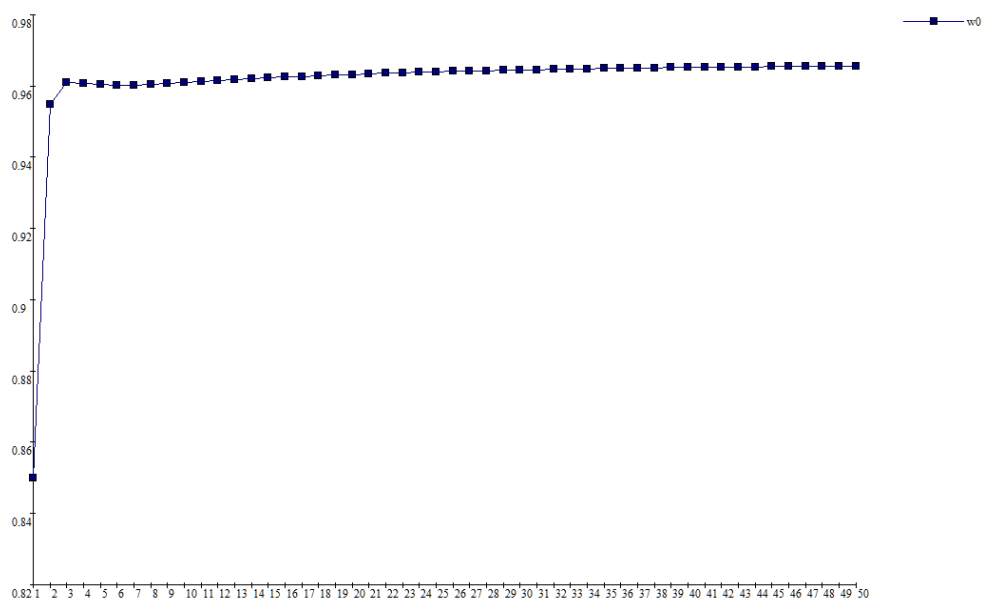


Рисунок 8. График зависимости времени ожидания от интенсивности поступления заявок СИСТ. 2

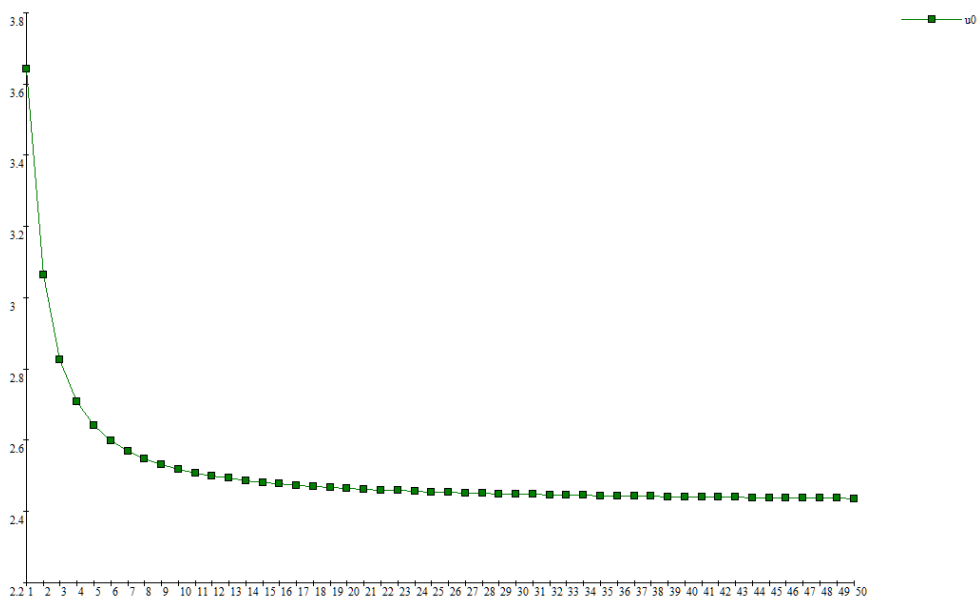


Рисунок 9. График зависимости времени пребывания от интенсивности поступления заявок  
СИСТ. 2

Сравнив рисунки 9 и 6 можем заметить, что они имеют кардинально разный характер. В то время как распределение времени пребывания на рисунке 9 имеет эрланговский характер, рисунок 6 больше похож на график логарифма. Также видно, что в системе два в среднем время пребывания меньше, чем в первой системе.

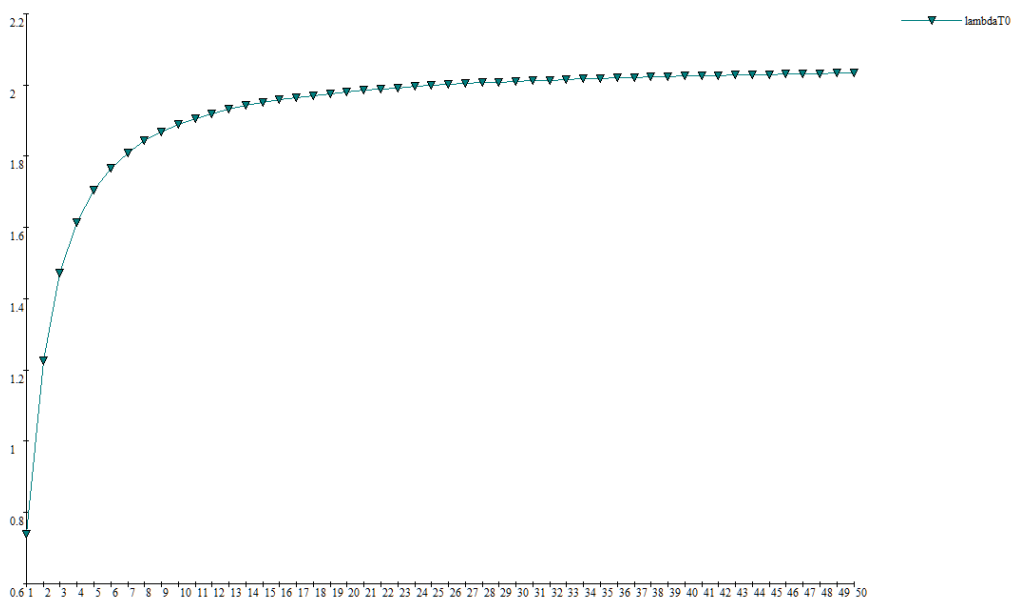


Рисунок 10. График зависимости производительности от интенсивности поступления заявок  
СИСТ. 2

Сравнив рисунки 7 и 10 можем заметить, что несмотря на то, что производительности обеих систем в итоге слабо меняются с увеличением интенсивности, однако производительность второй системы выше чем первой.

- Обоснование выбора наилучшего варианта организации системы в соответствии с заданным критерием эффективности

Если судить только лишь по времени пребывания заявок в системе, то СИСТЕМА\_2 лучше, причем даже с повышением интенсивности поступления заявок в СИСТЕМЕ\_2 время пребывания оказывается меньше.