Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Моделирование»

Учебно-исследовательская работа УИР 2:

«ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

НА МАРКОВСКИХ МОДЕЛЯХ»

Вариант: 15/19

Выполнили: студенты группы P34112

Провоторов Александр Владимирович,

Ганыс Герман Витальевич

Преподаватель: Алиев Тауфик Измайлович

### Постановка задачи и исходные данные

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **СИСТЕМА\_1** | | **СИСТЕМА\_2** | | **Критерий**  **эффект.** |
| **П** | **ЕН** | **П** | **ЕН** |
| 15 | 3 | 3 | 3 | 2/1/0 | (д) |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **Интенс.**  **потока** | **Ср.длит.**  **обслуж.** | **Вероятность занятия прибора …** | | |
| λ , 1/с | b, с | **П1** | **П2** | **П3** |
| 19 | 0,9 | 2 | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

### Описание исследуемой системы

Интенсивность потока для обеих систем λ: 0,9 1/с

Средняя длительность обслуживания для обеих систем b: 2 с

Интенсивность обслуживания для обеих систем µ = 1/𝑏 = 0,5 1/с

Критерий эффективности: (д) минимальная суммарная длина очередей заявок.

СИСТЕМА\_1

* Число приборов: 3.
* Классификация по Кендаллу:  
  М/М/3/3
* Во всех приборах длительность обслуживания распределена по Марковскому закону.
* Перед всеми приборами накопитель ёмкостью 3.
* Вероятность занять первый прибор 0.5, второй – 0.3, третий – 0.2.

СИСТЕМА\_2

* Число приборов: 3.
* Классификация по Кендаллу:  
  М/М/1/2  
  М/М/1/1  
  М/М/1/0
* Во всех приборах длительность обслуживания распределена по Марковскому закону.
* Перед первым прибором ёмкость накопителя – 2, перед вторым – 1, перед третьим – 0
* Вероятность занять первый прибор 0.5, второй – 0.3, третий – 0.2.

Перечень состояний марковского процесса для исследуемой системы

СИСТЕМА\_1

|  |  |
| --- | --- |
| **Состояние** | **Описание** |
| 0 | Заявок нет, система простаивает |
| 11 | 1 заявка на обработке в 1 приборе |
| 12 | 1 заявка на обработке во 2 приборе |
| 13 | 1 заявка на обработке в 3 приборе |
| 212 | 2 заявки на обработке: в 1 и 2 приборах |
| 213 | 2 заявки на обработке: в 1 и 3 приборах |
| 223 | 2 заявки на обработке: во 2 и 3 приборах |
| 3 | 3 заявки: все приборы заняты обработкой, общая очередь к приборам свободна |
| 41 | Все приборы заняты обработкой, в общей очереди 1 заявка |
| 42 | Все приборы заняты обработкой, в общей очереди 2 заявки |
| 43 | Все приборы заняты обработкой, общая очередь заполнена заявками (3 заявки) |

СИСТЕМА\_2

|  |  |
| --- | --- |
| **Состояние** | **Описание** |
| 0 | Заявок нет, система простаивает |
| 11 | 1 заявка на обработке в 1 приборе |
| 12 | 1 заявка на обработке во 2 приборе |
| 13 | 1 заявка на обработке в 3 приборе |
| 211 | 2 заявки на обработке: одна в 1 приборе и 1 в очереди 1 прибора |
| 212 | 2 заявки на обработке: в 1 и 2 приборах |
| 222 | 2 заявки на обработке: одна во 2 приборе и 1 в очереди 2 прибора |
| 213 | 2 заявки на обработке: в 1 и 3 приборах |
| 223 | 2 заявки на обработке: во 2 и 3 приборах |
| 3111 | 3 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 2 заявки в очереди 1 прибора |
| 3112 | 3 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 1 заявка в очереди 1 прибора, 1 заявка во 2 приборе |
| 3113 | 3 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 1 заявка в очереди 1 прибора, 1 заявка в 3 приборе |
| 3122 | 3 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 1 заявка во 2 приборе, 1 заявка в очереди 2 прибора |
| 3123 | 3 заявки: все приборы заняты обработкой, очереди свободны |
| 3223 | 3 заявки: 1 заявка во 2 приборе, 1 заявка в очереди 2 прибора, 1 заявка в 3 приборе |
| 41112 | 4 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 2 заявки в очереди 1 прибора, 1 заявка во 2 приборе |
| 41113 | 4 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 2 заявки в очереди 1 прибора, 1 заявка в 3 приборе |
| 41122 | 4 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 1 заявки в очереди 1 прибора, 1 заявка во 2 приборе, 1 заявка в очереди 2 прибора |
| 41123 | 4 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 1 заявки в очереди 1 прибора, 1 заявка во 2 приборе, 1 заявка в 3 приборе |
| 41223 | 4 заявки: 1 заявка в 1 приборе, 1 заявка во 2 приборе, 1 заявка в очереди 2 прибора, 1 заявка в 3 приборе |
| 511122 | 5 заявок: 1 заявка в 1 приборе, 2 заявки в очереди 1 прибора, 1 заявка во 2 приборе, 1 заявка в очереди 2 прибора |
| 511123 | 5 заявок: 1 заявка в 1 приборе, 2 заявки в очереди 1 прибора, 1 заявка во 2 приборе, 1 заявка в 3 приборе |
| 511223 | 5 заявок: 1 заявка в 1 приборе, 2 заявки в очереди 1 прибора, 1 заявка во 2 приборе, 1 заявка в очереди 2 прибора, 1 заявка в 3 приборе |
| 6111223 | 6 заявок: все приборы и все очереди заняты |

Результаты работы:Размеченный граф переходов марковского процесса

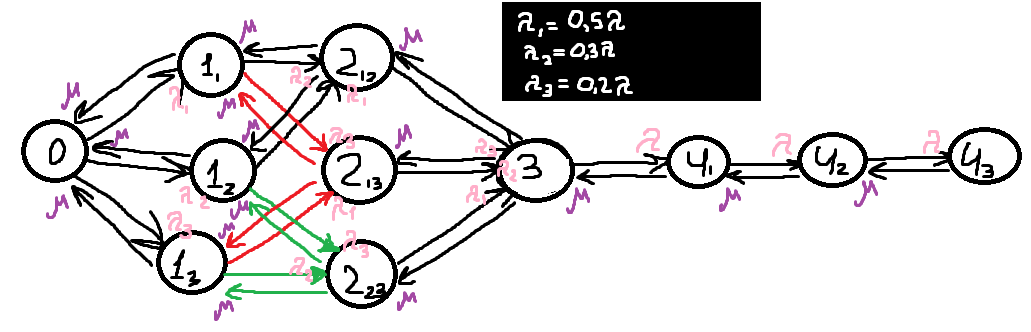


Рисунок 1 Граф переходов СИСТЕМЫ\_1

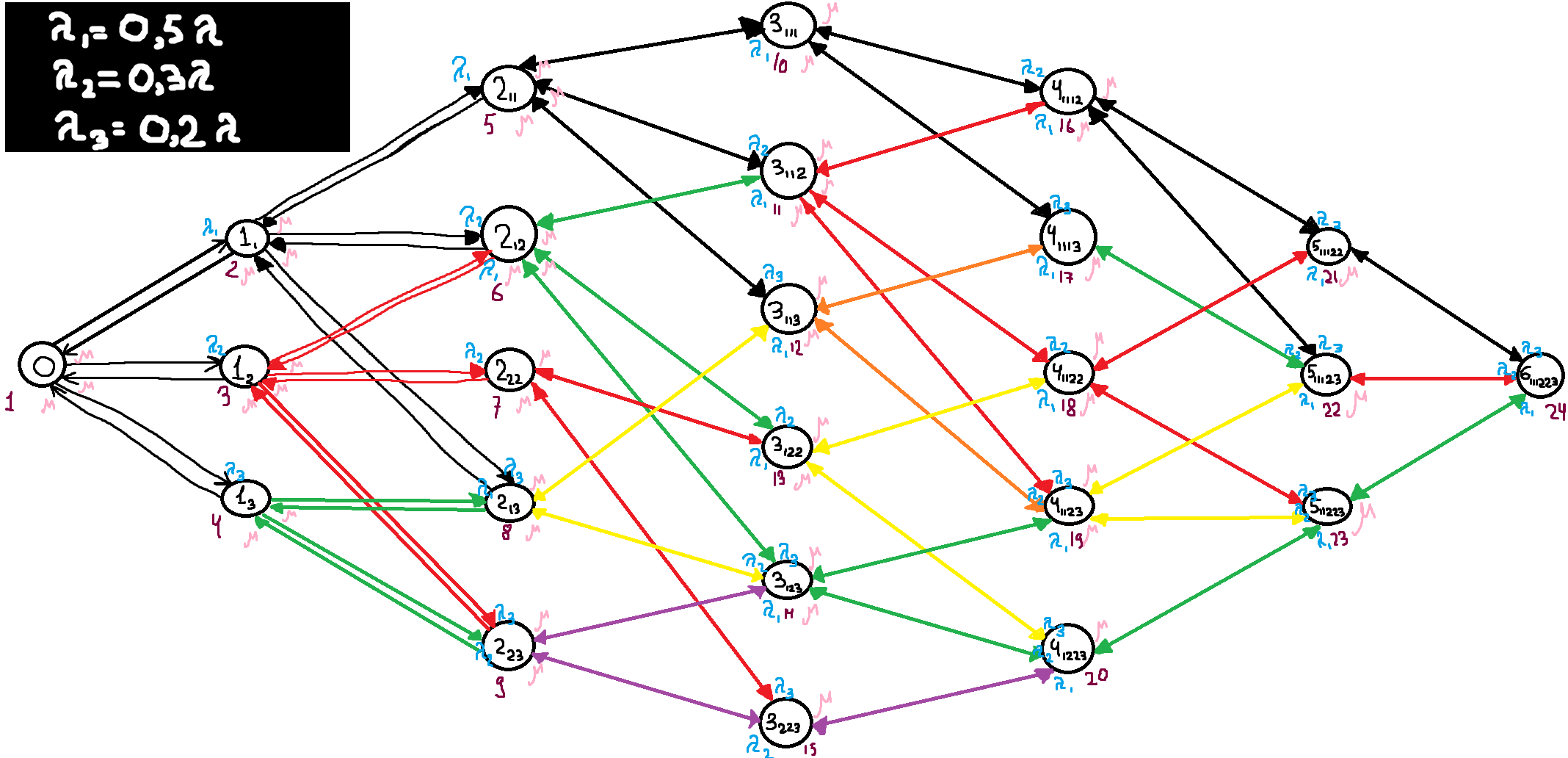


Рисунок 2 Граф переходов СИСТЕМЫ\_2

Матрица интенсивностей переходов

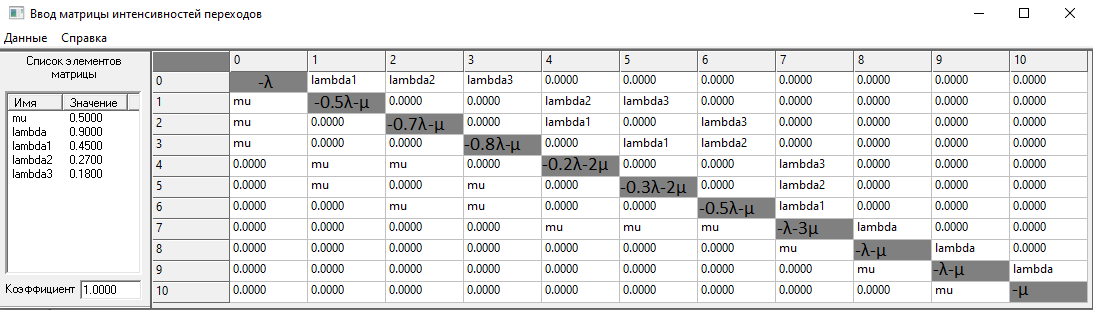


Рисунок 3 Матрица интенсивностей переходов СИСТЕМА\_1

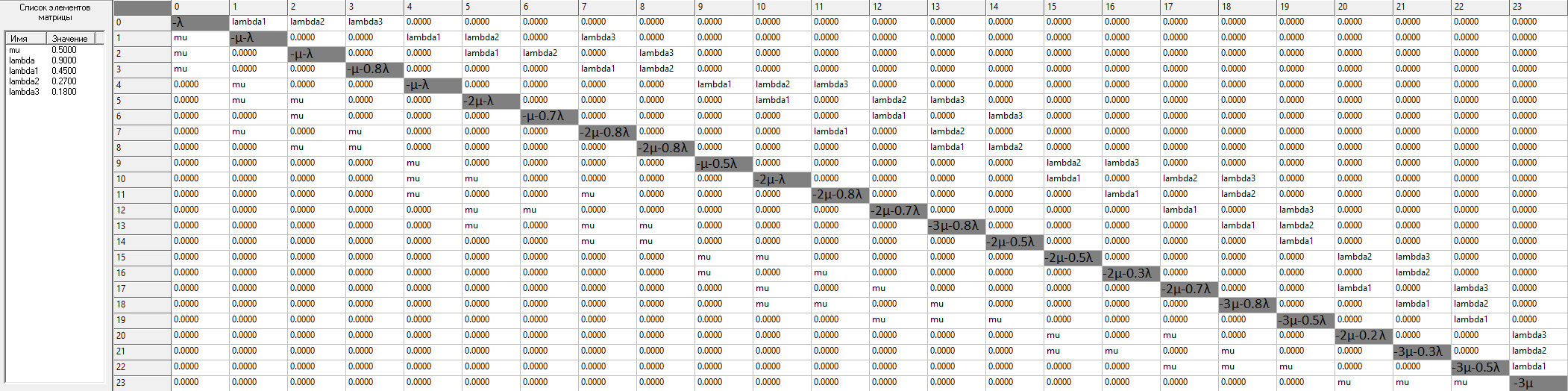


Рисунок 4 Матрица интенсивностей переходов СИСТЕМА\_2

Значения стационарных вероятностей, сведенные в таблицу (форма 1)

**Стационарные вероятности состояний**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Номер состояния** | **СИСТЕМА\_1** | | **СИСТЕМА\_2** | |
| **Обозн.** | **Вер-ть** | **Обозн.** | **Вер-ть** |
| **1** | 0 | 0.1700 | 0 | 0.1174 |
| **2** | 11 | 0.1530 | 11 | 0.1073 |
| **3** | 12 | 0.0918 | 12 | 0.0602 |
| **4** | 13 | 0.0612 | 13 | 0.0439 |
| **5** | 212 | 0.0826 | 211 | 0.0964 |
| **6** | 213 | 0.0551 | 212 | 0.0558 |
| **7** | 223 | 0.0331 | 222 | 0.0268 |
| **8** | 3 | 0.0297 | 213 | 0.0424 |
| **9** | 41 | 0.0535 | 223 | 0.0225 |
| **10** | 42 | 0.0964 | 3111 | 0.0866 |
| **11** | 43 | 0.1735 | 3112 | 0.0510 |
| **12** | **-** | **-** | 3113 | 0.0358 |
| **13** | **-** | **-** | 3122 | 0.0281 |
| **14** | **-** | **-** | 3123 | 0.0208 |
| **15** | **-** | **-** | 3223 | 0.0112 |
| **16** | **-** | **-** | 41112 | 0.0462 |
| **17** | **-** | **-** | 41113 | 0.0316 |
| **18** | **-** | **-** | 41122 | 0.0267 |
| **19** | **-** | **-** | 41123 | 0.0187 |
| **20** | **-** | **-** | 41223 | 0.0106 |
| **21** | **-** | **-** | 511122 | 0.0245 |
| **22** | **-** | **-** | 511123 | 0.0168 |
| **23** | **-** | **-** | 511223 | 0.0098 |
| **24** | **-** | **-** | 6111223 | 0.0089 |

Формулы, используемые для расчета характеристик системы и значения

характеристик системы, сведенные в таблицы (форма 2)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Характеристика** | **Прибор** | **Расчетная формула** | **СИСТ. 1** |
| **Нагрузка** | **П1** | 𝑦 = ρ/(1 − π) | 0,7789 |
| **П2** | 𝑦 = ρ/(1 − π) | 0,6783 |
| **П3** | 𝑦 = ρ/(1 − π) | 0,6080 |
| **Сумм.** | 𝑦 = 3ρ/(1 − π) | 3,0127 |
| **Загрузка** | **П1** | ρ = p2 + p5 + p6 + p8 + p9 + p10 + p11 | 0,6438 |
| **П2** | ρ = p3 + p5 + p7 + p8 + p9 + p10 + p11 | 0,5606 |
| **П3** | ρ = p4 + p6 + p7 + p8 + p9 + p10 + p11 | 0,5025 |
| **Сумм.** | ρ = 1 – p0 | 0,8300 |
| **Вероятность потери** | **П1** | π = p11 | 0,1735 |
| **П2** | π = p11 | 0,1735 |
| **П3** | π = p11 | 0,1735 |
| **Сумм.** | π = p11 | 0,1735 |
| **Длина очереди** | **П1** | l = p9 + 2∙p10 + 3∙p11 | 0,7668 |
| **П2** | l = p9 + 2∙p10 + 3∙p11 | 0,7668 |
| **П3** | l = p9 + 2∙p10 + 3∙p11 | 0,7668 |
| **Сумм.** | l = p9 + 2∙p10 + 3∙p11 | 0,7668 |
| **Число заявок находящихся в системе** | **П1** | m = p2 + p5 + p6 + p8 + 2∙p9 + 3∙p10 + 4∙p11 | 1,4106 |
| **П2** | m = p3 + p5 + p7 + p8 + 2∙p9 + 3∙p10 + 4∙p11 | 1,3274 |
| **П3** | m = p4 + p6 + p7 + p8 + 2∙p9 + 3∙p10 + 4∙p11 | 1,2693 |
| **Сумм.** | m = p2 + p3 + p4 + 2∙(p5 + p6 + p7) + 3∙p8 + 4∙p9 + 5∙p10 + 6∙p11 | 2,4737 |
| **Производительность** | **П1** | λ' = (1 − π)λ1 | 0,3719 |
| **П2** | λ' = (1 − π)λ2 | 0,2232 |
| **П3** | λ' = (1 − π)λ3 | 0,1488 |
| **Сумм.** | λ' = (1 − π)λ | 0,7439 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Характеристика** | **Прибор** | **Расчетная формула** | **СИСТ. 2** |
| **Нагрузка** | **П1** | 𝑦 = ρ/(1 − π) | 0,9142 |
| **П2** | 𝑦 = ρ/(1 − π) | 0,5139 |
| **П3** | 𝑦 = ρ/(1 − π) | 0,3642 |
| **Сумм.** | 𝑦 = 3ρ/(1 − π) | 2,6716 |
| **Загрузка** | **П1** | ρ = p2 + p5 + p6 + p8 + p10 + p11 + p12 + p13 + p14 + p16 + p17 + p18 + p19 + p20 + p21 + p22 + p23 + p24 | 0,7180 |
| **П2** | ρ = p3 + p6 + p7 + p9 + p11 + p13 + p14 + p15 + p16 + p18 + p19 + p20 + p21 + p22 + p23 + p24 | 0,4386 |
| **П3** | ρ = p4 + p8 + p9 + p12 + p14 + p15 + p17 + p19 + p20 + p22 + p23 + p24 | 0,2730 |
| **Сумм.** | ρ = 1 – p0 | 0,8826 |
| **Вероятность потери** | **П1** | π = p10 + p16 + p17 + p21 + p22 + p24 | 0,2146 |
| **П2** | π = p7 + p13 + p15 + p18 + p20 + p21 + p23 + p24 | 0,1466 |
| **П3** | π = p4 + p8 + p12 + p14 + p15 + p17 + p19 + p20 + p22 + p23 + p24 | 0,2505 |
| **Сумм.** | π = p24 | 0,0089 |
| **Длина очереди** | **П1** | l = p5 + p11 + p12 + p18 + p19 + p23 + 2∙(p10 + p16 + p17 + p21 + p22 + p24) | 0,6676 |
| **П2** | l = p7 + p13 + p15 + p18 + p20 + p21 + p23 + p24 | 0,1466 |
| **П3** | l = 0 | 0,0000 |
| **Сумм.** | l = p5 + p7 + p11 + p12 + p13 + p15 + p19 + p10 + 2∙(p10 + p16 + p17 + p18 + p22 + p23) + 3∙(p21 + p24) | 0,8142 |
| **Число заявок находящихся в системе** | **П1** | m = p2 + p6 + p8 + p13 + p14 + p20 + 2∙(p5 + p11 + p12 + p18 + p19 + p23) + 3∙(p10 + p16 + p17 + p21 + p22 + p24) | 1,3856 |
| **П2** | m = p3 + p6 + p9 + p11 + p14 + p16 + p19 + p22 + 2∙(p7 + p13 + p15 + p18 + p20 + p21 + p23 + p24) | 0,5852 |
| **П3** | m = p4 + p8 + p9 + p12 + p14 + p15 + p17 + p19 + p20 + p22 + p23 + p24 | 0,2730 |
| **Сумм.** | m = p2 + p3 + p4 + 2∙(p5 + p6 + p7 + p8 + p9) + 3∙(p10 + p11 + p12 + p13 + p14 + p15) + 4∙(p16 + p17 + p18 + p19 + p20) + 5∙(p21 + p22 + p23) + 6∙p24 | 2,2438 |
| **Производительность** | **П1** | λ' = (1 − π)λ1 | 0,3534 |
| **П2** | λ' = (1 − π)λ2 | 0,2304 |
| **П3** | λ' = (1 − π)λ3 | 0,1349 |
| **Сумм.** | λ' = (1 − π)λ | 0,8920 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Хар-ка** | **Прибор** | **Расчетная формула** | **СИСТ. 1** | **СИСТ. 2** |
| **Коэффициент простоя** | **П1** | η = 1 − ρ | 0,3562 | 0,2820 |
| **П2** | η = 1 − ρ | 0,4394 | 0,5614 |
| **П3** | η = 1 − ρ | 0,4975 | 0,7270 |
| **Сумм.** | η = 1 − ρ | 0,1700 | 0,1174 |
| **Время ожидания** | **П1** | 𝑤 = 𝑙/λ' | 2,0617 | 1,8889 |
| **П2** | 𝑤 = 𝑙/λ' | 3,4362 | 0,6362 |
| **П3** | 𝑤 = 𝑙/λ' | 5,1543 | 0,0000 |
| **Сумм.** | 𝑤 = 𝑙/λ' | 1,0309 | 0,9128 |
| **Время пребывания** | **П1** | 𝑢 = 𝑚/λ' | 3,7927 | 3,9204 |
| **П2** | 𝑢 = 𝑚/λ' | 5,9483 | 2,5397 |
| **П3** | 𝑢 = 𝑚/λ' | 8,5320 | 2,0236 |
| **Сумм.** | 𝑢 = 𝑚/λ' | 3,3255 | 2,5155 |

Результаты (графики и выводы) сравнительного анализа характеристик

функционирования исследуемых систем

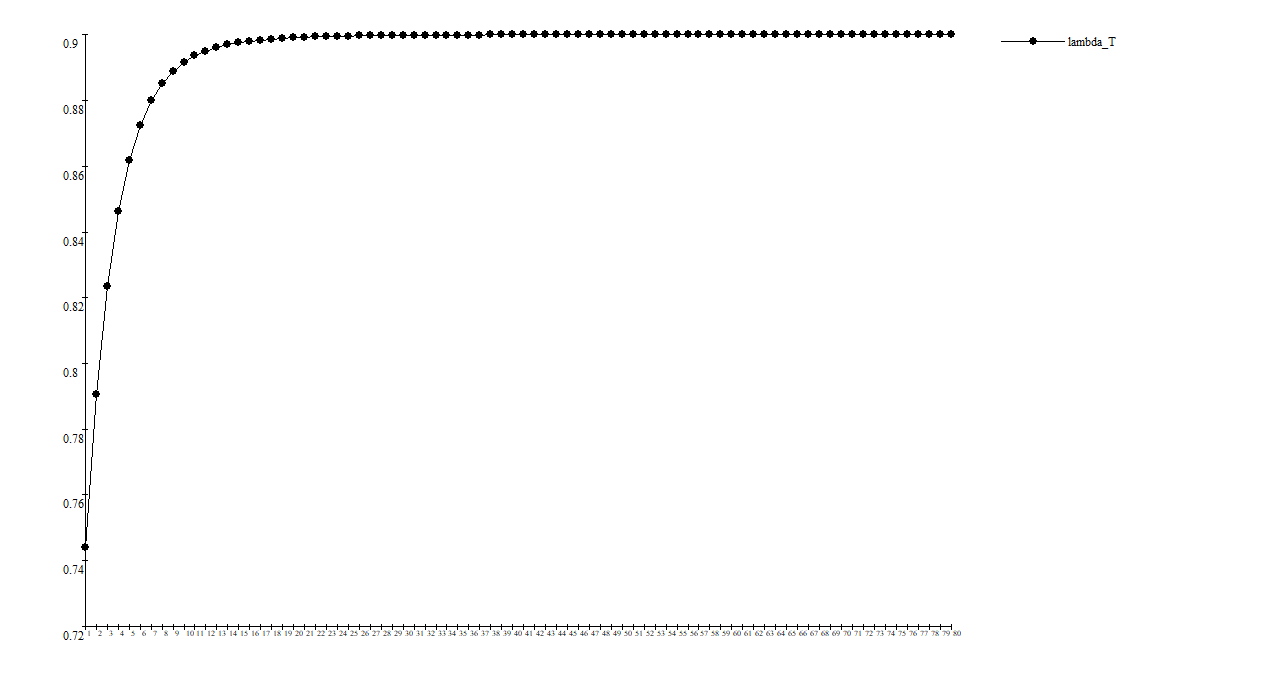


Рисунок 5. График зависимости производительности от интенсивности поступления заявок СИСТ. 1

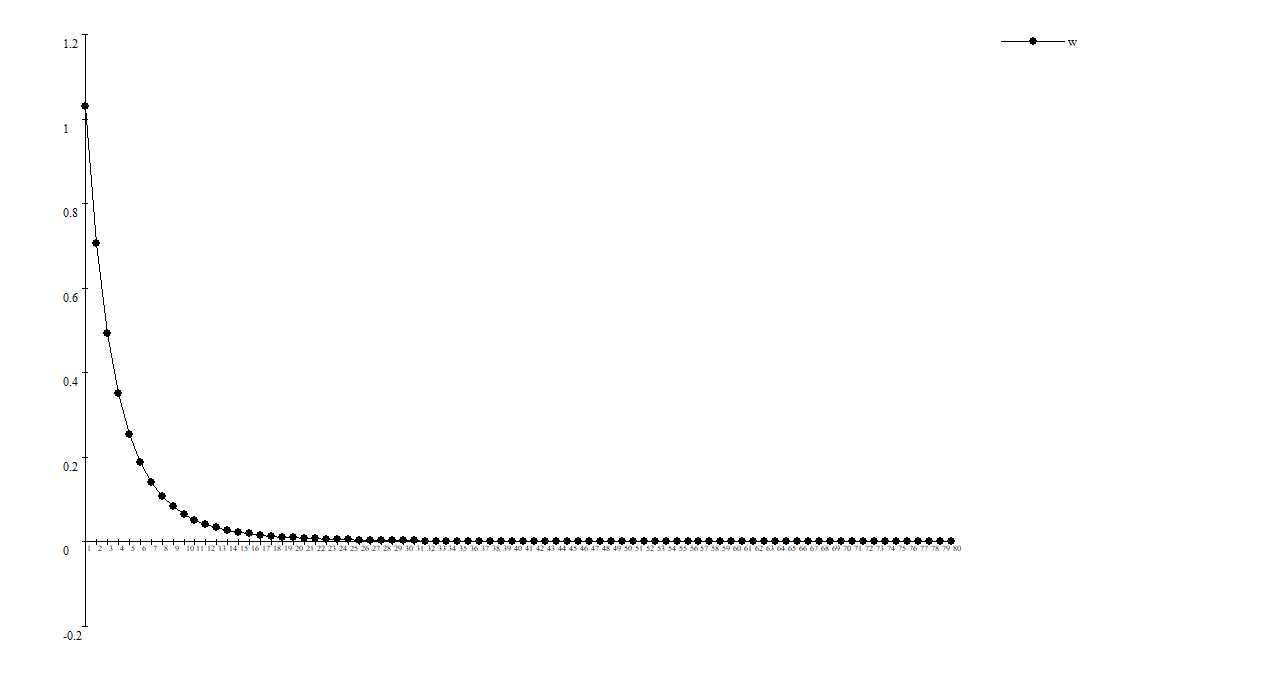


Рисунок 6. График зависимости времени ожидания от интенсивности поступления заявок СИСТ. 1

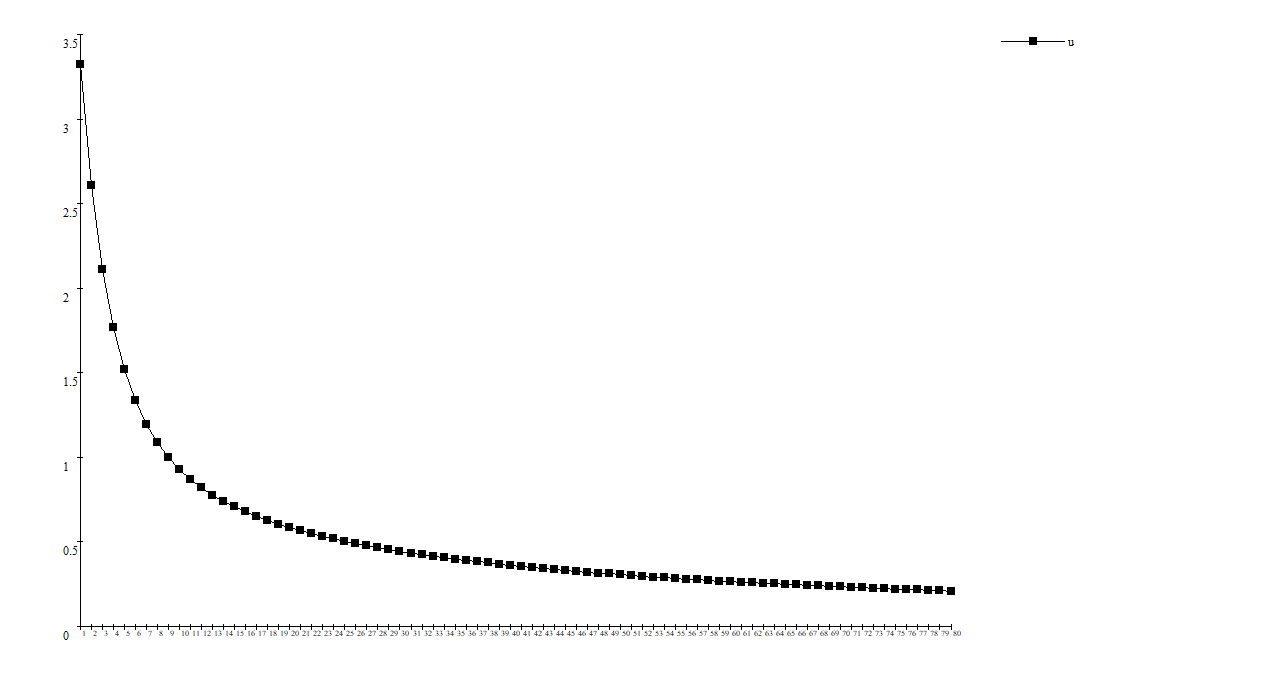


Рисунок 7. График зависимости времени пребывания от интенсивности поступления заявок СИСТ. 1

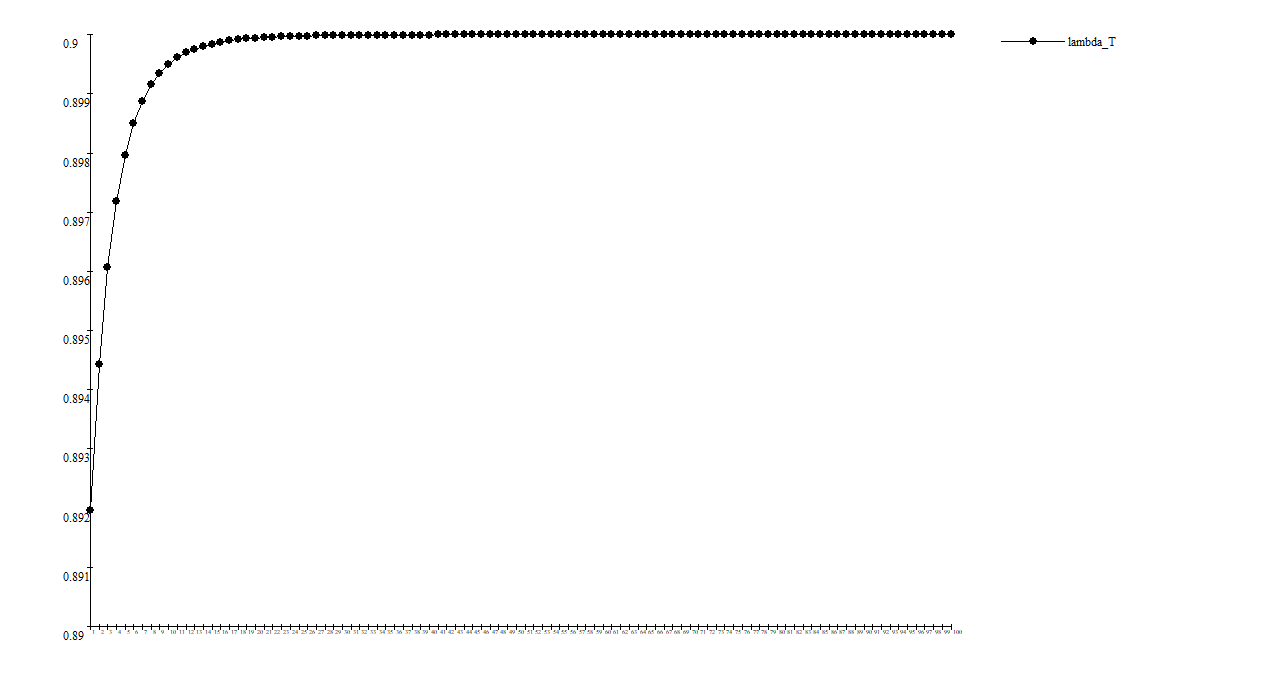


Рисунок 8. График зависимости производительности от интенсивности поступления заявок СИСТ. 2

Как мы видим, сравнивая рисунки 5 и 8, производительность обоих систем, хоть и прирастает по одному закону и стремится примерно к значению λ, однако начальное значение у СИСТ. 2 выше на примерно 0.14, что значит, что она производительнее в целом.

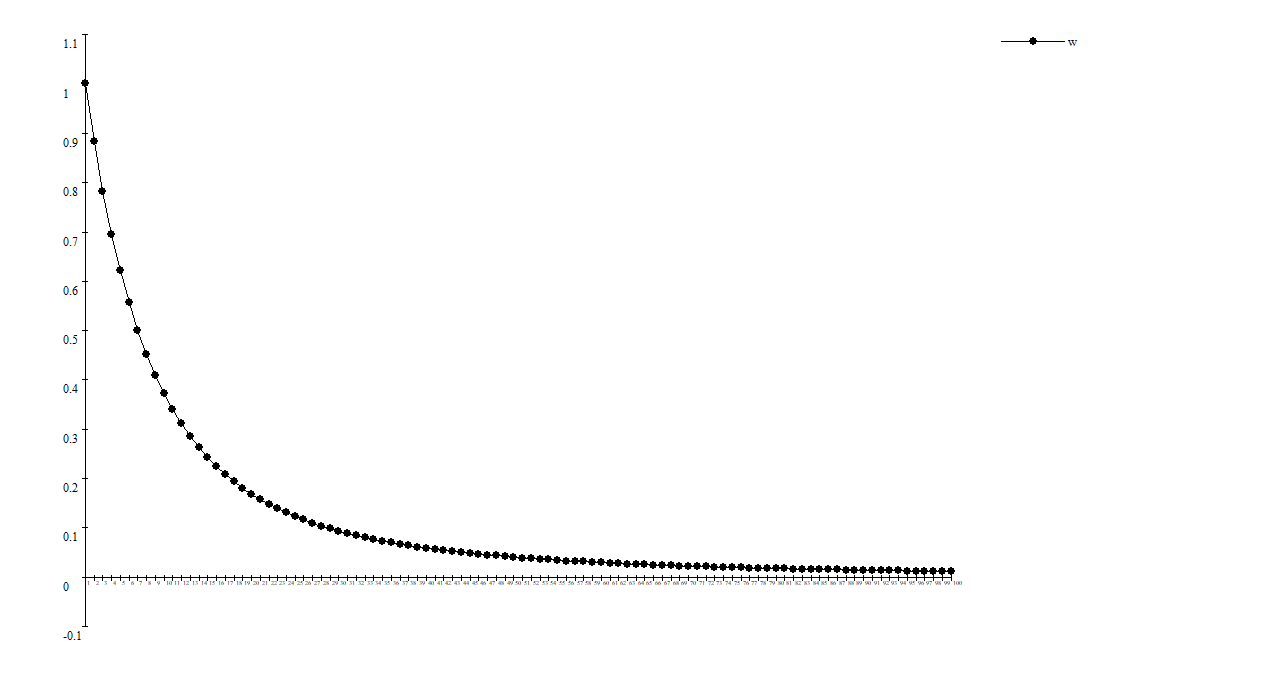


Рисунок 9. График зависимости времени ожидания от интенсивности поступления заявок СИСТ. 2

В отличии от предыдущего сравнения, где СИСТ. 2 показала себя лучше, в данном же случае время ожидания становится примерно равным 0.1 на 26 итерации, а на рисунке 6 уже примерно на 9 итерации (с учетом того, что прирост интенсивности от итерации равен 0.05), и в данном показателе лучше уже СИСТ. 1.

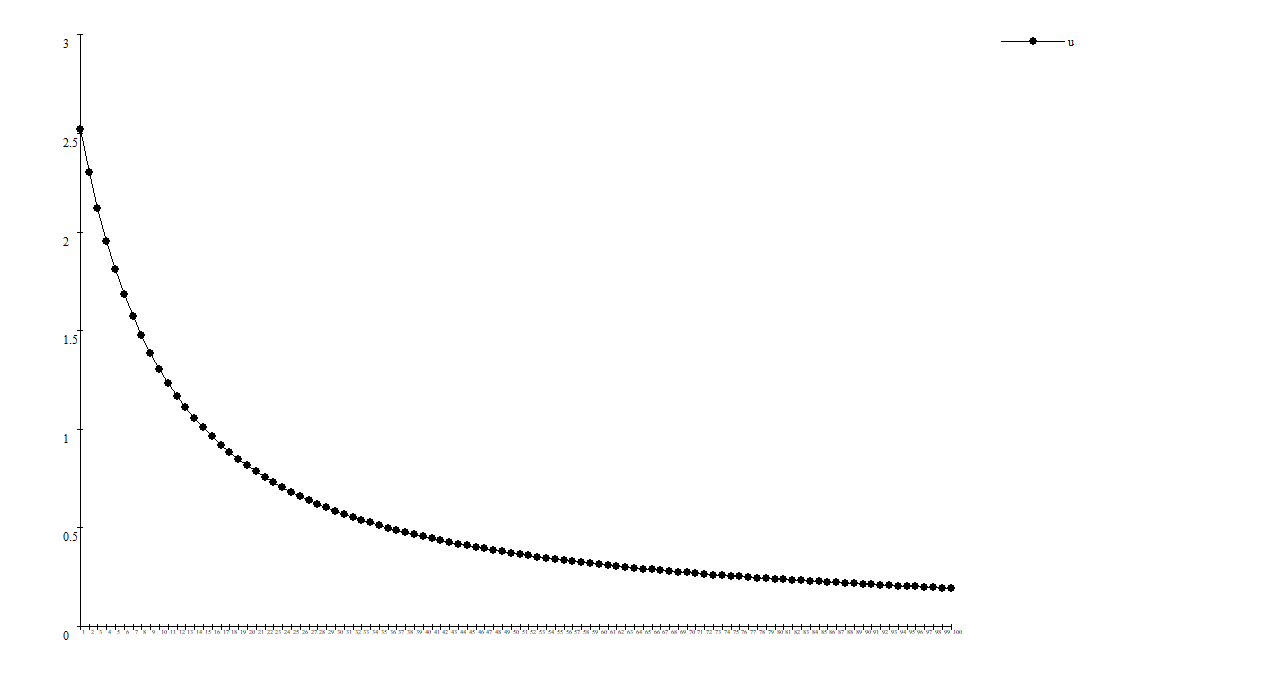


Рисунок 10. График зависимости время пребывания от интенсивности поступления заявок СИСТ. 2

График времени пребывания показывает нам, что, все же, благодаря выигрышу в производительности мы получаем меньшее время пребывания в зависимости от интенсивности в целом несмотря на то, что, общая очередь давал выигрыш во времени ожидания для СИСТ. 1, поэтому по данному показателю СИСТ. 2 будет лучше

### Выводы:

Лучшей системой по критерию (д) является система 1, поскольку вариативность разных состояний в системе 2 нас приводит к тому, что сумма длины очередей выходит большей, а значит единая организация очередей, не смотря на то, что количество мест одинаковое, является более эффективной (однако, возможно, если было бы ЕН = 1/1/1, то результат был бы и другим и ближе к тому, что имеем в системе 1 из-за одинаковой длины всех очередей перед приборами).