高二数学试卷参考答案

1. C　$s'=-2\sin 2t+1$，所以 $t=1$ s时，此木块的瞬时速度为 $(1-2\sin 2)$m/s.

2. B　由题可知 $m(2m+1)=(m+2)^2$，即 $m^2-3m-4=0$，解得 $m=4$ 或 $m=-1$（舍去），所以等比数列的前3项分别为4，6，9，公比为 $\frac{3}{2}$，所以第4项为 $9\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}$.

3. B　由相关系数为 -0.96，知 x，y 负相关，所以 $\hat{b}<0$. 又 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=-8$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=-15$，即点 $(-0.8，-1.5)$ 在线性回归直线上，且在第三象限，所以线性回归直线经过第二、三、四象限.

4. C　由题意得 $f'(x)=(x+1)e^x$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}=2f'(0)=2$.

5. A　联立 $\begin{cases}x+y+2=0,\\ y^2=ax,\end{cases}$ 可得 $y^2+ay+2a=0$，则 $\Delta=a^2-8a=0$，所以 $a=8$，故 C 的方程为 $y^2=8x$，故 C 的准线方程为 $x=-2$.

6. C　$f'(x)=x^2+2x+a$，若 $f(x)$ 有极值，则 $4-4a>0$，解得 $a<1$，所以"$f(x)$ 有极值"是"$a<1$"的充要条件.

7. B　周六分配一名精通日语的志愿者有 $C_2^1\times C_3^1\times C_3^2=18$ 种不同的分配方法，周六分配两名精通日语的志愿者有 $C_2^1\times C_3^2\times C_3^1=18$ 种不同的分配方法，故分配方法的总数为36.

8. A　设 F_1 是双曲线 C 的左焦点，则 $F_1(-2,0)$，$|MF_1|-|MF|=2$，则 $|MN|+|MF|=|MN|+|MF_1|-2\geqslant|MD|-1+|MF_1|-2\geqslant|DF_1|-3=5\sqrt{2}-3$.

9. BC　$(2-x)^{20}$ 的展开式中奇数项的二项式系数之和为 $2^{20-1}=2^{19}$，故A错误；
令 $x=0$，可得 $a_0=2^{20}$，令 $x=1$，$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(2-1)^{20}=1$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=1-2^{20}$，故B正确；$a_{19}=C_{20}^{19}2^1(-1)^{19}=-40$，故C正确；$f(-1)=3^{20}=9^{10}=(10-1)^{10}=10^{10}-C_{10}^{1}10^9+\cdots-C_{10}^{9}10+C_{10}^{10}$，故 $f(-1)$ 除以10的余数为1，故D错误.

10. AD　令 $a_{n+1}=a_n=a$，由 $a_{n+1}a_n=4a_n-4$，可得 $a^2=4a-4$，解得 $a=2$，故A正确；

若数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为公差不为0的等差数列，由 $a_{n+1}a_n=4a_n-4$，可得 $a_{n+1}=4-\frac{4}{a_n}$，则 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4-\frac{4}{a_n}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n^2-4a_n+4}{4a_n(a_n-1)}$ 不是常数，故B错误；

$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{4-\frac{4}{a_n}-2}=\frac{1}{2-\frac{4}{a_n}}=\frac{a_n}{2a_n-4}=\frac{1}{a_n-2}+\frac{1}{2}$，所以数列 $\{\frac{1}{a_n-2}\}$ 是首项为1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，则 $\frac{1}{a_n-2}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$，$\sum\limits_{i=1}^{10}\frac{1}{a_i-2}=\frac{(1+\frac{11}{2})\times 10}{2}=\frac{65}{2}$，故C错误；

若 $a_1=\frac{2}{3}$，则 $\frac{1}{a_n-2}=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{2n-5}{4}$，即 $a_n=\frac{4}{2n-5}+2=\frac{2}{n-\frac{5}{2}}+2$，结合 $y=\frac{2}{x-\frac{5}{2}}+2$ 的图象(图略)，可知数列 $\{a_n\}$ 的最大项为 a_3，故 D 正确.

11. BCD　$f'(x)=m\cos x+1$，因为 $f'(\frac{\pi}{2})=1>0$，所以不存在 $m\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故 A 错误；$f'(x)=m\cos x+1$，因为 $m\in[-1,1]$，$\cos x\in[-1,1]$，所以 $m\cos x\in[-1,1]$，即 $f'(x)\geqslant 0$，故 B 正确；当 $m\in[-1,0]$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f(x)=m\sin x+x\geqslant x-\sin x$，设 $g(x)=x-\sin x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)$，即 $x-\sin x\geqslant 0$，故 C 正确；

当 $m=-1$ 时，令 $h(x)=\frac{1}{2}x^2-f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\sin x$，则 $h'(x)=x-1+\cos x$，令 $\varphi(x)=x-1+\cos x$，则 $\varphi'(x)=1-\sin x\geqslant 0$，又 $\varphi(0)=0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，即 $h(x)\geqslant h(0)=0$，故 D 正确.

12. $\frac{\pi}{6}$　$\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，所以 $\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\pi}{3}$，故直线 l 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$.

13. $[\frac{6}{7},\frac{7}{8}]$　由题可知 $a_1<0$，公差 $d>0$，$a_8\leqslant 0$，$a_9\geqslant 0$，则 $a_1+7d\leqslant 0$，$a_1+8d\geqslant 0$，解得 $-\frac{1}{7}\leqslant\frac{d}{a_1}\leqslant-\frac{1}{8}$，则 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=1+\frac{d}{a_1}\in[\frac{6}{7},\frac{7}{8}]$.

14. $[\frac{1}{2},+\infty)$　由 $f(2-x)=f(x)+2x-2$，可得 $f(2-x)+(2-x)=f(x)+x$.

令 $g(x)=f(x)+x$，则 $f(x)=g(x)-x$，$g(2-x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>-1$，所以 $g'(x)=f'(x)+1>0$，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

由 $f(a+1)\geqslant f(a)-1$，可得 $g(a+1)-(a+1)\geqslant g(a)-a-1$，即 $g(a+1)\geqslant g(a)$，

所以 $|a+1-1|\geqslant|a-1|$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

15. 解：(1)由题可知 $f(1)=1+a+b=3-1$，即 $a+b=1$. ………………………………… 2 分

又 $f'(x)=3x^2+2ax$，所以 $f'(1)=3+2a=3$，解得 $a=0$，………………………… 4 分

所以 $b=1-a=1$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由 $f(2)=2^3+1=9\neq 1$，得 $P(2,1)$ 不是切点.

设切点为 $R(m,n)$，显然 $m\neq 2$. …………………………………………………… 6 分

由题可知 $f(m)=m^3+1=n, f'(m)=3m^2=\dfrac{n-1}{m-2}$, …………………………… 8 分

联立以上两式可得 $3m^2=\dfrac{m^3}{m-2}$，所以 $m=0$ 或 $\dfrac{m}{m-2}=3$，即 $m=0$ 或 $m=3$. ………… 10 分

当 $m=0$ 时，$f(0)=1, f'(0)=0$，

当 $m=3$ 时，$f(3)=28, f'(3)=27$，

所以曲线 $y=f(x)$ 过点 $P(2,1)$ 的切线方程为 $y-1=0$ 或 $y-28=27(x-3)$，即 $y=1$ 或 $y=27x-53$. …………………………………………………………………………… 13 分

16. (1)解：$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=\dfrac{n^2+n}{2}$，①

当 $n=1$ 时，$\sqrt{a_1}=1$，即 $a_1=1$. …………………………………………………… 2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}}=\dfrac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$. ②………………………… 3 分

①－②得 $\sqrt{a_n}=n$，即 $a_n=n^2$，…………………………………………………… 5 分

$a_1=1$ 符合上式，故 $a_n=n^2$. ………………………………………………………… 6 分

(2)证明：$b_n=\dfrac{2n+1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}>0$，……………………………… 9 分

则 $S_n\geqslant S_1=b_1=\dfrac{3}{4}$. ………………………………………………………… 11 分

又 $S_n=(1-\dfrac{1}{2^2})+(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2})+(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2})+\cdots+[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}]$……………………… 13 分

$=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}<1$，所以 $\dfrac{3}{4}\leqslant S_n<1$. …………………………………………… 15 分

17. 解：(1)由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-2x=\dfrac{a-2x^2}{x}$. ………… 2 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；……………………………… 4 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$，由 $f'(x)<0$，得 $x>\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$，………………… 5 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2},+\infty)$ 上单调递减.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2},+\infty)$ 上单调递减. ………… 7 分

(2)由题可知 $a>0$，…………………………………………………………………… 8 分

故 $f(x)_{\max}=f(\dfrac{\sqrt{2a}}{2})=a\ln\dfrac{\sqrt{2a}}{2}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}\leqslant 8\ln 2-4$. ……………………… 11 分

令 $t=\frac{a}{2}$,则 $g(t)=t\ln t-t, g'(t)=\ln t$,所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $t\in(0,e)$ 时,$g(t)<0$,且 $g(4)=4\ln 4-4=8\ln 2-4>0$, ………………………………………… 13 分

所以 $t\ln t-t\leqslant 8\ln 2-4$ 的解集为 $(0,4]$,所以 $0<\frac{a}{2}\leqslant 4$,即 $0<a\leqslant 8$,故 a 的取值范围为 $(0,8]$. ……………………………………………………………………………………… 15 分

18. 解:(1) X_2 的可能取值为 2,3,4.

$P(X_2=2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$, ………………………………………………………… 1 分

$P(X_2=3)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$, ……………………………………………… 2 分

$P(X_2=4)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$, ………………………………………………………… 3 分

则 X_2 的分布列为

X_2	2	3	4
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{25}$

……………………………………………………………………………………………… 4 分

故 $E(X_2)=2\times\frac{4}{25}+3\times\frac{3}{5}+4\times\frac{6}{25}=\frac{77}{25}$. ………………………………………… 6 分

(2)①若第 $n+1$ 次取出来的是红球,由于每次红球和白球的总个数是 5,则这种情况发生的概率是 $\frac{E(X_n)}{5}$,此时红球的个数为 $E(X_n)$; ……………………………………………… 8 分

②若第 $n+1$ 次取出来的是白球,则这种情况发生的概率是 $1-\frac{E(X_n)}{5}$,此时红球的个数为 $E(X_n)+1$. ………………………………………………………………………………… 10 分

故 $E(X_{n+1})=\frac{E(X_n)}{5}\cdot E(X_n)+(1-\frac{E(X_n)}{5})(E(X_n)+1)=\frac{4}{5}E(X_n)+1$,

$E(X_{n+1})=\frac{4}{5}E(X_n)+1$, ………………………………………………………………… 12 分

则 $E(X_{n+1})-5=\frac{4}{5}[E(X_n)-5]$,所以 $\{E(X_n)-5\}$ 为等比数列. …………………… 14 分

故 $E(X_n)-5=[E(X_2)-5]\times(\frac{4}{5})^{n-2}=-\frac{48}{25}\times(\frac{4}{5})^{n-2}=-3\times(\frac{4}{5})^n$,即 $E(X_n)=-3\times(\frac{4}{5})^n+5$. ……………………………………………………………………………… 17 分

19. 解:(1)记 a 是函数 $y=f(x)$ 的零点,b 是函数 $y=g(x)$ 的零点.

因为 $f(x)=2^x+x-2$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f(\frac{1}{2})=\sqrt{2}+\frac{1}{2}-2<0,f(1)=2+1-2>0$，所以 $a\in(\frac{1}{2},1)$. ………………………………………………………………………… 2 分

因为 $g(x)=x\ln(2x)-x-\frac{1}{10}=x[\ln(2x)-1]-\frac{1}{10}$，所以当 $0<x<\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$g(x)<0$.

又 $g'(x)=\ln(2x)$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增.

因为 $g(1)=\ln 2-1-\frac{1}{10}<0,g(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\ln 3-\frac{3}{2}-\frac{1}{10}>0$，所以 $b\in(1,\frac{3}{2})$， ………… 5 分

所以 $|a-b|\leqslant 1$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为亲密函数. ………………………………………… 7 分

(2) $h'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-1$，则 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$，故 $h(x)$ 有唯一的零点 1. ………………………………………… 10 分

因为 $h(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x$ 与 $k(x)=x^3+mx^2+(2m+1)x+m+2$ 互为亲密函数，

所以 $k(x)=0$ 在 $[0,2]$ 上有解. ……………………………………………………………… 11 分

由 $k(x)=0$，可得 $-m=\frac{x^3+x+2}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)^2}=\frac{x^2-x+2}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-3$. ……………………………………………………………………………………… 15 分

因为 $x\in[0,2]$，所以 $x+1\in[1,3]$，则 $x+1+\frac{4}{x+1}-3\in[1,2]$，故 m 的取值范围为 $[-2,-1]$. ……………………………………………………………………………… 17 分