2024年高二年级下学期期中调研测试

高二数学参考答案及评分细则

1.【答案】B

【解析】因为$f(x)=-2\sqrt{x}$，所以$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}$，$f'(2)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选B.

2.【答案】C

【解析】$\{b_n\}$的前6项依次为7，12，17，22，27，32，因为$b_6=32=2^5=a_5$，故k的最小值为6. 故选C.

3.【答案】D

【解析】因为$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，所以$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=-e$. 故选D.

4.【答案】B

【解析】柱头直径为$30-\frac{6}{1.2}\times1=25$ cm. 故选B.

5.【答案】A

【解析】由已知得$\overrightarrow{OC}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,1,1)$，设异面直线$OC$与$AB$所成的角为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{AB}|}$$=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. 故选A.

6.【答案】D

【解析】$f(x)=\ln(ax)(a>0)$在$[1,2]$上的平均变化率为$\frac{\ln(2a)-\ln a}{2-1}=\ln 2$，$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(\log_2 e)=\ln 2$. 故选D.

7.【答案】B

【解析】从这4个数字中任取2个数字，结果有6种，所取两个数字差的绝对值小于500的结果有2种，故$P\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$，不小于500的结果有4种，故$P(X=1)=\frac{2}{3}$，所以$EX=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$. 故选B.

8.【答案】A

【解析】由$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{1}{2}$，$a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，得$\{a_n\}$的前8项依次为$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，0，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，0，从第5项起，构成周期为3的数列，$S_4=\frac{4}{3}$，$S_{3n+4}=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}n$，$a_{22}=0$，$a_{23}=\frac{1}{6}$，$S_{21}=S_{22}=\frac{10}{3}$，$S_{23}>\frac{10}{3}$，$a_{48}=\frac{1}{6}$，$a_{49}=0$，$S_{48}=S_{49}=\frac{19}{3}$，$S_{47}<\frac{19}{3}$，所以所有满足$\frac{10}{3}<S_k<\frac{19}{3}$的$k$的和为$23+24+\cdots+47=875$. 故选A.

9.【答案】AD(每选对1个得3分)

【解析】$\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_n^k2^{n-k}x^{n-\frac{3}{2}k}(k=0,1,\cdots,n)$，由于$\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中含有常数项，则$n-\frac{3}{2}k=0$有解，即$2n-3k=0$，当$n=6$，$k=4$时，$2n-3k=0$成立，当$n=9$，$k=6$时，$2n-3k=0$成立，当$n=7$时，不存在$k\in\mathbf{N}$使得$14-3k=0$，当$n=8$时，不存在$k\in\mathbf{N}$使得$16-3k=0$. 故选AD.

10.【答案】ACD(每选对1个得2分)

【解析】$f'(3)$表示$f(x)$的图象在点B处的切线斜率,A正确;$f'(-1)$表示$f(x)$的图象在点A处的切线斜率,$f'(-1)<0$,B错误;由图可知$f(-1)>0$,$f'(-1)<0$,故$f(-1)-f'(-1)>0$,故C正确;直线OB的斜率小于$f(x)$的图象在点B处的切线斜率,即$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}<f'(3)$,$f(3)-3f'(3)<0$,D正确. 故选ACD.

11.【答案】BCD(每选对1个得2分)

【解析】设$\{a_n\}$的公差为d,由$S_{11}=a_5$得$11a_1+55d=a_1+4d$,所以$a_1=-5.1d$,$a_5=a_1+4d=-1.1d>0$,所以$d<0$,$a_6=a_1+5d=-0.1d>0$,$a_3-2a_2=-a_1=5.1d<0$,因为$a_6>0$,$a_7=0.9d<0$,所以$a_2>0$,$a_{99}<0$,$\frac{a_2}{a_{99}}<0$,$\sum_{i=1}^{12}(-1)^{i+1}a_ia_{i+1}=a_2(a_1-a_3)+a_4(a_3-a_5)+\cdots+a_{12}(a_{11}-a_{13})=-2d(a_2+a_4+\cdots+a_{12})=-12da_7<0$. 故选BCD.

12.【答案】$\frac{4}{n}$

【解析】由$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{4}$,得$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4}+(n-1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$,所以$a_n=\frac{4}{n}$.

13.【答案】$2+2\sqrt{2}$

【解析】由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'AC}+S_{\triangle C'AB}$得六边形$AC'BA'CB'$的面积$=2S_{\triangle ABC}$,由题意,圆$x^2+y^2-2x-2y=0$的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$,圆心为$(1,1)$,半径为$\sqrt{2}$,$|AB|=2$,点$C$到直线$AB$距离的最大值为$1+\sqrt{2}$,所以$S_{\triangle ABC}$的最大值为$\frac{1}{2}\times2\times(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$,所以六边形$AC'BA'CB'$的面积的最大值为$2+2\sqrt{2}$.

14.【答案】$\frac{47}{42}$

【解析】当$n=1$时,$a_1=4$;当$n\in\mathbf{N}^*$,$n\geqslant2$时,因为$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=3n+1$,所以$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=3n-2$,两式相减得$na_n=3$,所以$a_n=\frac{3}{n}$,则$a_1=4\neq\frac{3}{1}$,所以$a_n=\begin{cases}4,n=1,\\ \frac{3}{n},n\geqslant2(n\in\mathbf{N}^*),\end{cases}$所以$\frac{a_n}{3n+3}=\begin{cases}\frac{2}{3},n=1,\\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},n\geqslant2(n\in\mathbf{N}^*),\end{cases}$所以数列$\left\{\frac{a_n}{3n+3}\right\}$的前20项之和为$\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}+\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{21}\right)=\frac{47}{42}$.

【评分细则】

1. 第12题答案写成4/n不给分;

2. 第13题答案写成$2(1+\sqrt{2})$也正确;

3. 第14题答案写成47/42不给分.

15. 解:(1)因为$f(x)=-2x^3+6x^2-3x-2$,

所以$f'(x)=-6x^2+12x-3$,(2分)

所以$f(1)=-1$,$f'(1)=3$,

所以 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-(-1)=3(x-1)$,

即 $3x-y-4=0$.(6 分)

(2)直线 $x-ay=0$ 的斜率为 $\frac{1}{a}$,

所以 $f(x)$ 的图象在点 A,B 处的切线斜率为 $-a$,(8 分)

所以方程 $f'(x)=-a$ 有两个不等的实根,

即 $-6x^2+12x-3+a=0$ 有两个不等的实根,(10 分)

所以 $\Delta=12^2-4\times(-6)\times(-3+a)>0$,

解得 $a>-3$ 且 $a\neq0$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-3,0)\cup(0,+\infty)$.(13 分)

【评分细则】

1. 第(1)问方程写成 $y=3x-4$ 也正确;

2. 第(2)问实数 a 的取值范围写成 $a>-3$ 且 $a\neq0$ 不扣分,写成 $a>-3$,扣 1 分;

3. 如用其他解法,若正确,也给满分.

16. 解:(1)因为 C_1 的短轴长为 $2\sqrt{2}$,所以 $b=\sqrt{2}$,(2 分)

因为 C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $a^2=3$,(5 分)

所以 C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.(6 分)

(2)C_1 的右焦点为 $F(1,0)$,

所以 $\frac{p}{2}=1$,$p=2$,(7 分)

所以 C_2 的方程为 $y^2=4x$.(8 分)

C_2 的准线与 C_1 的一个交点为 A,设 $A(-1,y_1)$,

代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 得 $y_1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$,(10 分)

当 $y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时,由题意设 $B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)(y_2>0)$,由 A,B,F 三点共线得 $\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{-1-1}=\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}-1}$,

解得 $y_2=4-2\sqrt{3}$,(13 分)

所以 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|y_1|}{|y_2|}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$,

同理得当 $y_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时,$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

综上,$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.(15 分)

【评分细则】

1. 第(2)问未对 A 点坐标分类讨论,若说明对称性,不扣分;

2. 如用其他解法,若正确,也给满分.

17. 解:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,

由 $a_p=q,a_q=p$ 得 $a_p-a_q=(p-q)d=q-p$,

因为 $p<q$,所以 $p-q\neq 0$,

所以 $d=-1$,(2 分)

$a_{p+q}=a_p+qd=q-q=0$,(4 分)

所以 $p+q-3=0,p+q=3$,(5 分)

因为 $p<q$,所以$\begin{cases}p=1,\\q=2,\end{cases}$(6 分)

由 $a_p=q$ 得 $a_1=2$,(7 分)

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2-(n-1)=-n+3$.(8 分)

(2)由(1)得 $a_n=-n+3$,所以 $a_4=-1,a_5=-2$,(9 分)

故 $a_4,a_5,a_{b_1},a_{b_2},\cdots,a_{b_n}$是首项为 -1、公比为 2 的等比数列,(10 分)

所以 $a_{b_n}=-1\times 2^{n+1}=-2^{n+1}$,(11 分)

由 $a_n=-n+3$ 得 $a_{b_n}=-b_n+3$,(13 分)

所以 $-b_n+3=-2^{n+1}$,(14 分)

所以 $b_n=2^{n+1}+3$.(15 分)

【评分细则】

如用其他解法,若正确,也给满分.

18. 解:(1)由题意得 4 户中至少有 3 户养宠物的概率为 $C_4^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\frac{4}{5}+C_4^4\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{17}{625}$.(4 分)

(2)因为$\chi^2=\frac{200\times(38\times 40-62\times 60)^2}{100\times 100\times 102\times 98}\approx 9.684>6.635$,(7 分)

所以有 99% 的把握认为是否养宠物与性别有关联.(8 分)

(3)由 x 的取值依次为 1,2,3,4,5,6,得 $\bar{x}=3.5,\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=17.5$,(9 分)

因为回归方程为 $\hat{y}=0.86x+0.63$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{17.5}=0.86$,

所以$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=15.05$,(13 分)

所以 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}}\approx\frac{15.05}{4.18\times 3.61}\approx 0.997$.(16 分)

因为 $|r|>0.75$,所以 y 与 x 有较强的相关性,该回归方程有价值.(17 分)

【评分细则】

如用其他解法,若正确,也给满分.

19.(1)解:设$\{a_n\}$的公差为d,

①由$a_3=0,S_4=-2$,得$\begin{cases}a_1+2d=0,\\4a_1+6d=-2,\end{cases}$(1分)

解得$a_1=-2,d=1$,(3分)

所以$a_n=-2+n-1=n-3$,(4分)

$\{b_m\}$的前5项依次为$-3,-2,-1,0,1$.(5分)

②因为$a_n<a_{n+1}$,则$d>0$,

当$i\neq j$时,$a_i+a_j=a_1+(i-1)d+a_1+(j-1)d=2a_1+(i+j-2)d$,

$i+j-2$可以是任意正整数,

所以数列$\{b_m\}$的第m项为$b_m=2a_1+md$,(7分)

由$\begin{cases}S_{10}=100,\\b_{99}=200,\end{cases}$得$\begin{cases}10a_1+45d=100,\\2a_1+99d=200,\end{cases}$

解得$a_1=1,d=2$,所以$b_m=2m+2$,(9分)

数列$\{b_m\}$是首项为4、公差为2的等差数列,

所以$\{b_m\}$的前50项和为$\frac{4+102}{2}\times50=2\ 650$.(10分)

(2)证明:假设存在$i\neq k$或$j\neq l$使得$a_i+a_j=a_k+a_l(1\leqslant i<j\leqslant100,1\leqslant k<l\leqslant100)$,

当$i=k$且$j\neq l$时,因为$2^i+2^j=2^k+2^l$,所以$2^j=2^l$,得$j=l$,这与$j\neq l$矛盾,

同理$i\neq k$且$j=l$时也不成立,

当$i\neq k$且$j\neq l$时,设$i<k$,因为$2^i+2^j=2^k+2^l$,

所以$1+2^{j-i}=2^{k-i}+2^{l-i}$,

左边为奇数,右边为偶数,所以$1+2^{j-i}\neq2^{k-i}+2^{l-i}$,

综上得,对任意$i\neq k$或$j\neq l$,$a_i+a_j\neq a_k+a_l(1\leqslant i<j\leqslant100,1\leqslant k<l\leqslant100)$,(15分)

所以数列$\{b_m\}$的所有项的和为$99\times(2+2^2+\cdots+2^{100})=\frac{198\times(1-2^{100})}{1-2}=99\times2^{101}-198$.(17分)

【评分细则】

如用其他解法,若正确,也给满分.