中学数学实验教材
第二册（下）

中学数学实验教材编写组编

1982 年 11 月

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用.

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要.

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观.

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法.比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识. 对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减.

全套教材共分六册. 第一册是代数. 在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系. 灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式. 第二册是几何. 由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容. 第三册是函数. 数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等. 第四册是代数. 把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计

的初步知识．第五册是几何．引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识．第六册是微积分初步．突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分．

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系．教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数(包括概率统计)、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排．

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章．突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用．这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性．

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的．第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物．在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见．

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书．在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好．

中学数学实验教材编写组
一九八一年三月

目　录

第四章　圆

在工农业生产和日常生活中，圆的应用相当广泛．过去我们初步掌握了一些圆的知识，这一章我们将在复习这些知识的基础上，把圆和直线形结合起来，进一步学习有关圆的一些性质.

第一节　圆的基本性质

一、圆的概念

在一个平面上和某一定点的距离等于定长的点的集合叫做**圆周**，简称为**圆**；其中定点叫做圆的**圆心**，连结圆心与圆上任一点的线段叫做**半径**．通常以点 O 为圆心的圆记作 $\odot O$; 以点 O 为圆心，半径长是 r 的圆记作 $\odot(O,r)$.

显然，**同圆的半径都相等**（图 4.1）．而当一个圆的圆心确定了，半径 r 的大小也确定了，这个圆的位置与大小也就完全确定了.

圆上任意两点间的部分叫做**弧**；连结圆上任意两点间的线段叫做这个圆的弦；通过圆心的弦叫做圆的**直径**（图 4.2）．显然，**一个圆的直径等于它的半径的二倍**.

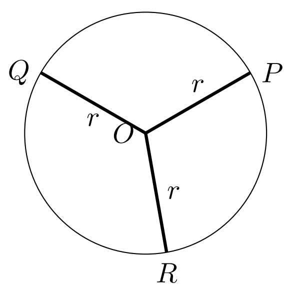


图 4.1

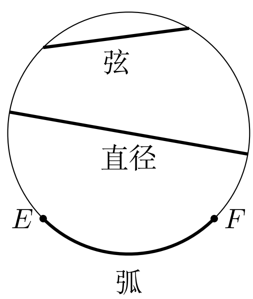


图 4.2

从圆的定义，不难直接推知:

- 两个圆能够重合的充要条件是两个圆的半径相等.
- 半径相等的圆叫做**等圆**，**等圆的半径相等直径相等**.

从圆的定义,我们还可以看出,一个圆把它所在的平面分为三部分(图 4.3):

1. 圆本身，即与圆心的距离等于半径的点所构成的集合. 其中任何一点都叫做圆上的点.
2. 圆的内部，与圆心的距离小于半径的点所构成的集合. 圆的内部又简称**圆内**；其中任何一点都叫做圆内的点.
3. 圆的外部：与圆心的距离大于半径的点所构成的集合；圆的外部又简称**圆外**，其中任何一点都叫做圆外的点.

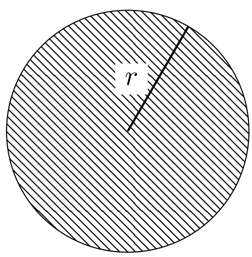


图 4.3

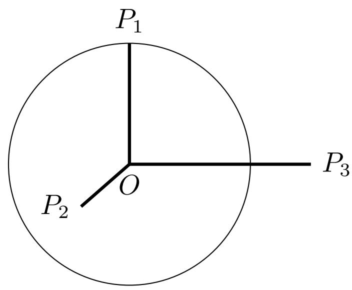


图 4.4

通常我们说的圆面，指的是由圆所围成的平面部分，也就是与圆心的距离小于或等于半径的点所构成的集合. 如图 4.3 中阴影部分.

由上述定义可知，$\odot(O,r)$ 与平面上任一点 P 的位置关系，有下述的性质(图 4.4).

1. 点 P 在 $\odot(O,r)$ 上的充要条件是 $\overline{OP}=r$；
2. 点 P 在 $\odot(O,r)$ 内的充要条件是 $\overline{OP}<r$；
3. 点 P 在 $\odot(O,r)$ 外的充要条件是 $\overline{OP}>r$.

练习

1. 根据下述条件画圆

   (a) 已知定点 O, 以 O 为圆心画一圆使半径等于 2 厘米.

   (b) 已知两个定点 O、P, 画 $\odot(O,\overline{OP})$.

(c) 先画一条 $\overline{AB}$, 再画出以 $\overline{AB}$ 为直径的圆.

2. 把以下命题写成“若—则”形式

   (a) 点 P 在 $\odot(O,r)$ 上的充分条件是 $\overline{OP}=r$;

   (b) 点 P 在 $\odot(O,r)$ 内的必要条件是 $\overline{OP}<r$;

   (c) 点 P 在 $\odot(O,r)$ 外的充分条件是 $\overline{OP}>r$.

3. 以点 O 为圆心，r_1、r_2 为半径画两个圆．说出满足下列条件的点 X 在平面上的位置范围.

   (a) $\overline{OX}>r_2$　　(d) $\overline{OX}=r_1$

   (b) $\overline{OX}\le r_1$

   (c) $r_1<\overline{OX}<r_2$　　(e) $\overline{OX}<r_1$

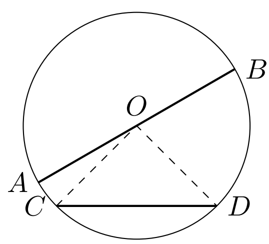
4. 已知一个 $\odot O$ 的直径长是 4cm. 说出满足下列条件的 P 点的可能位置:

   (a) $\overline{OP}>2\text{cm}$　　(c) $\overline{OP}<2\text{cm}$

   (b) $\overline{OP}\ge 2\text{cm}$　　(d) $\overline{OP}=0$

5. 求证一个圆的直径是这个圆中最长的弦.

   (提示：按图中所示证 $\overline{AB}>\overline{CD}$).



二、不共线的三点确定一圆

我们已知，如果知道了圆心的位置和半径长，那么圆的位置和大小也就确定了．现在我们来研究经过一个点；经过两个点；经过三个点可分别作出几个圆?

已知一个点 A, 很明显，以 A 点以外的任何点为圆心，以这点到 A 点的距离为半径所作的圆都经过 A 点（图 4.5）. 因此，**经过一点可以作无数个圆**.

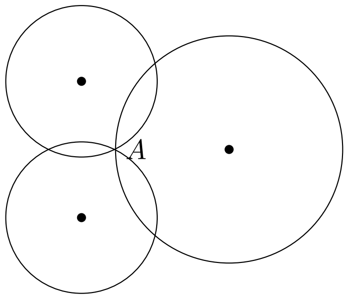


图 4.5

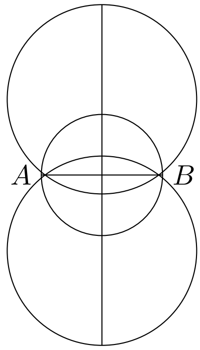


图 4.6

经过两个已知点 A、B，可以作多少个圆呢（图 4.6）? 由于经过 A、B 两点的圆的圆心到 A 点与 B 点的距离应相等，而和 A、B 两点距离相等的点仅在 AB 的垂直平分线上，所以，以 AB 的垂直平分线上任一点为圆心，以这点到 A 点（或 B 点）的距离为半径所作的圆都经过 A、B 两点. 因此，**经过两点也可以作无数个圆，且圆心都在连结这两点的线段的垂直平分线上**.

现在我们来研究，经过 A、B、C 三点可以作多少个圆的问题?

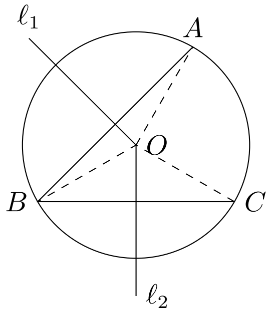


图 4.7

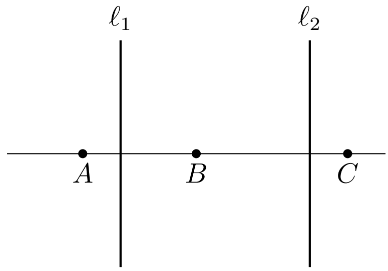


图 4.8

我们知道，经过 A、B 两点的圆的圆心必定在 $\overline{AB}$ 的垂直平分线上（图 4.7 中的 ℓ_1），经过 B、C 两点的圆的圆心又必定在 $\overline{BC}$ 的垂直平分线上（图 4.7 中的 ℓ_2），因而经过 A、B、C 三点的圆的圆心必定是直线 ℓ_1 和 ℓ_2 的交点 O, 由于 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$, 所以以 O 为圆心 $\overline{OA}$ 为半径的圆经过 A、B、C 三点.

这样一来，能不能说经过三个点就可作一个圆呢? 我们再来看图 4.8 中所示的三点 A、B、C, 它们是在同一条直线上的，这时 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的垂直平分线

ℓ_1 和 ℓ_2 都垂直于同一条直线，于是 $\ell_1 \mathbin{/\!/} \ell_2$，$\ell_1$ 和 ℓ_2 便没有交点，这就说明了经过 A、B、C 三点的圆的圆心根本不存在，所以也就没有圆都经过 A、B、C 三点．因此，我们不能笼统地说经过三个点可作一个圆．如果 A、B、C 三点在同一条直线上（叫做共线的点），便没有圆经过这三点；如果 A、B、C 三点不在同一条直线上（叫做不共线的点），那么 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的垂直平分线必相交（为什么？），这时，就可作一个圆经过这三点，又由于 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的垂直平分线都只有一条，所以它们的交点也是唯一的，从而 $\overline{OA}$ 的长也是唯一的，所以经过 A、B、C 三点也只能作一个圆．

于是，我们便得到确切的结论：

定理

过不共线的三个点，可以作一个圆且只可以作一个圆．

由上述讨论，我们还可看到一个圆的圆心到圆的任一条弦的两个端点的距离相等，因而可得：

推论 1

圆的任一条弦的垂直平分线都通过圆心．

由于任一个 $\triangle ABC$ 的三个顶点不共线，因此经过 A、B、C 三个顶点可以作一个圆，且只可以作一个圆 $\odot O$（图 4.9），这个圆叫做 $\triangle ABC$ 的**外接圆**，它的圆心 O 叫做 $\triangle ABC$ 的**外心**，而 $\triangle ABC$ 叫做 O 的**内接三角形**．由于 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$，$O$ 点一定在三边的垂直平分线上，于是又可得：

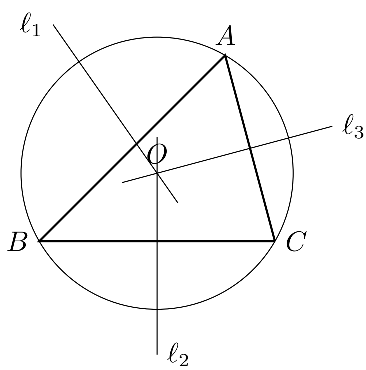


图 4.9

推论 2

三角形的三边的垂直平分线相交于一点，这个点就是三角形的外心.

由推论 2 我们又可得到：

推论 3

三角形的三条高线相交于一点.

已知：AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高线（图 4.10）. 求证：AD、BE、CF 相交于一点.

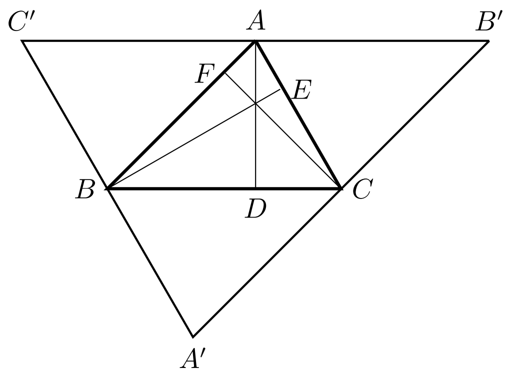


图 4.10

证明： 经过 $\triangle ABC$ 的各顶点 A、B、C 分别作对边的平行线，设它们分别相交于 B'、C'、A' 各点，于是 $AD\perp B'C'$, $BE\perp C'A'$, $CF\perp A'B'$（为什么?），又因为四边形 $BCAC'$ 和 $BCB'A$ 都是平行四边形（为什么?）.

$\therefore \quad \overline{CA}=\overline{BC}=\overline{AB'}$, 于是 A 是 $\overline{B'C'}$ 的中点.

同理，B 是 $\overline{A'C'}$ 的中点，C 是 $\overline{A'B'}$ 的中点，因此，AD、BE、CF 分别是 $\triangle A'B'C'$ 的三边上的垂直平分线，由推论 2 可知 AD、BE 和 CF 相交于一点.

图 4.10 中，画出的是锐角三角形，如 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，上述证明过程同样适用，同学可自己验证.

三角形的三条高线的交点叫做**三角形的垂心**.

例 4.1 求作一条已知弧的圆心.

已知 $\overset{\frown}{EF}$（图 4.11）.

求作：$\overset{\frown}{EF}$ 所在圆的圆心.

作法

1. 在 $\widehat{EF}$ 上任取三点 A、B、C, 并且作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$.

2. 分别作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的垂直平分线 ℓ_1 和 ℓ_2, 设它们的交点为 O, O 点就是所求作的圆心.

证明： $\because$ A、B、C 三点在 $\widehat{EF}$ 上（作法）

$\therefore$ $\widehat{EF}$ 是经过 A、B、C 的圆的一部分.

又 $\because$ O 是经过 A、B、C 的圆的圆心,

$\therefore$ O 是 $\widehat{EF}$ 所在圆的圆心.

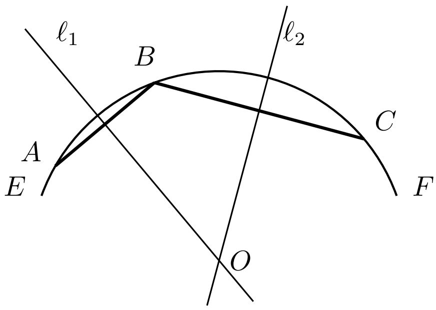


图 4.11

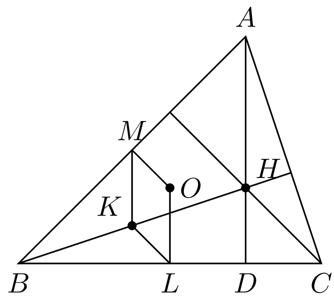


图 4.12

例 4.2 已知 O 和 H 各是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，$OL \perp \overline{BC}$ 于 L(图 4.12). 求证：$\overline{OL} = \dfrac{1}{2}\overline{AH}$

证明： 已知 $OL \perp \overline{BC}$ 于 L 点，作 $OM \perp \overline{AB}$ 于 M 点，由于 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，所以 L、M 分别是 $\overline{BC}$、$\overline{AB}$ 的中点. 取 $\overline{BH}$ 的中点 K, 作 $\overline{MK}$, $\overline{LK}$,

$\because$ $MK \parallel AH$, $OL \parallel AH$,

$\therefore$ $MK \parallel OL$,

同理可证，$LK \parallel OM$,

$\therefore$ $OMKL$ 是平行四边形,

$\therefore$ $\overline{OL} = \overline{MK} = \dfrac{1}{2}\overline{AH}$

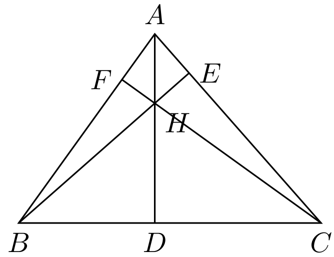
练习

1. 分别作一个锐角三角形、一个直角三角形和一个钝角三角形的外接圆，并说出它们的外心的位置各有什么特点.

2. 经过任意四点，可不可以作一个圆？试举例说明.

3. 分别作出一个锐角三角形、一个直角三角形和一个钝角角形的套心，并说出它们的位置各有什么特点.

4. 已知 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，D、E、F 是三高的垂足. 试分别说出 $\triangle HBC$、$\triangle HAC$、$\triangle HAB$ 的垂心各是图中哪一点.



第 4 题

三、圆的对称性

已知 $\odot O$(图 4.13), 在 O 上任取一点 A, 引直径 $\overline{AA'}$, 则 $\overline{AA'}$ 被圆心 O 平分. 这就是说 A' 是以点 O 为对称中心的点 A 的对称点，如果在 $\odot O$ 上再取 $B, C, D, \ldots$, 并引直径 $\overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}, \ldots$, 那么点 $B', C', D', \ldots$ 也都分别是以 O 为对称中心的点 $B, C, D, \ldots$ 的对称点. 这就说明了 $\odot O$ 上以 O 为对称中心的任何点的对称点都在 $\odot O$ 上. 由此可知：**圆是中心对称形；圆心是它的对称中心**.

已知 $\overline{AA'}$ 是 $\odot O$ 的任一条直径（图 4.14)，作直径 $\overline{BB'} \perp \overline{AA'}$, 把 $\odot O$ 左边部分沿着直线 AA' 翻折过来，由于 $\overline{BB'} \perp \overline{AA'}$, $\overline{OB'} = \overline{OB}$, 那么 B 点就与 B' 点重合，因为经过 A、B'、A' 三点只可以作一个圆，所以以 A、A' 为端点，经过 B' 点的弧只有一条，因此 $\widehat{ABA'}$ 与 $\widehat{AB'A'}$ 重合. 由此可知，圆是轴对称图形，任一条通过圆心的直线都是它的对称轴.

由上述圆的对称性，我们可推出许多圆的重要性质.

推论 1

圆被它的任何一条直径截出的两段弧相等. 这两段弧都叫做半圆.

小于半圆的弧叫做**劣弧**，大于半圆的弧叫做**优弧**. 以后说到弧，如不特别指明，一般都指的是劣弧.

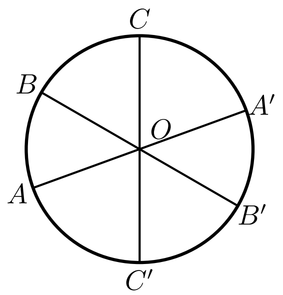


图 4.13

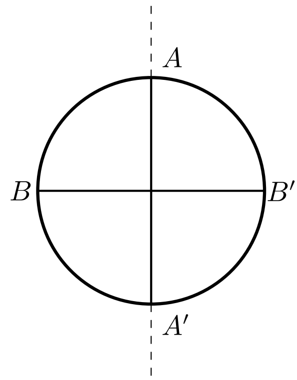


图 4.14

推论 2

一圆的直径垂直于一条非直径的弦的充分必要条件是这直径平分这条弦或平分这条弦所对的弧.

我们来证必要性，充分性留给同学们自证.

已知：$\odot O$ 中，直径 $\overline{CD}\perp$ 弦 $\overline{AB}$ 于 E 点（图 4.15）.

求证：$\overline{AE}=\overline{BE}$, $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

证明： $\because$ 　$\overline{CD}$ 是 $\odot O$ 的直径

$\therefore$ 　直线 CD 是 $\odot O$ 的对称轴.

又 $\because$ 　$CD\perp AB$ 于 E 点

$\therefore$ 　CD 也是等腰 $\triangle OAB$ 的对称轴. 以 CD 为轴把图形翻折叠合时，半圆 $\overset{\frown}{CAD}$ 与半圆 $\overset{\frown}{CBD}$ 重合，$\overline{AE}$ 与 $\overline{BE}$ 重合. A 点与 B 点重合，$\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 都重合

$\therefore$ 　$\overline{AE}=\overline{BE}$,　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$,　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

例 4.3 平分一条已知弧.

已知：$\overset{\frown}{AB}$(图 4.16).

求作：平分 $\overset{\frown}{AB}$ 的点.

作法

1. 作 $\overline{AB}$

2. 作 $\overline{AB}$ 的垂直平分线 CD 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 E 点. 则 E 点就是所求作的点.

证明： $\because$ 　CD 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线（作法）.

$\therefore$ 　CD 必通过圆心，

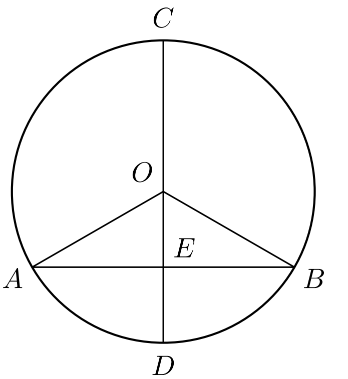


图 4.15

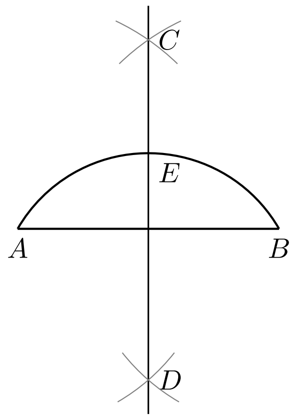


图 4.16

$\therefore$ $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE}$ (推论 2).

$\therefore$ E 点平分 $\overset{\frown}{AB}$.

例 4.4 已知大小两圆有公共圆心 O, 大圆的弦交小圆于 C、D (图 4.17).

求证: $\overline{AC} = \overline{BD}$.

证明: 作 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 于 M 点, 则 $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{CM} = \overline{DM}$.

$\therefore$ $\overline{AM} - \overline{CM} = \overline{BM} - \overline{DM}$.

$\therefore$ $\overline{AC} = \overline{BD}$

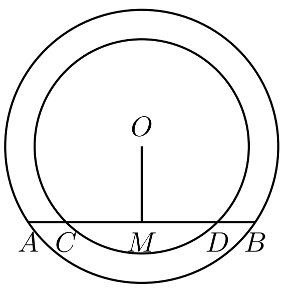


图 4.17

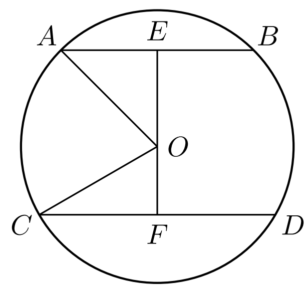


图 4.18

例 4.5 已知 $\odot O$ 的两条平行弦 $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\overline{CD} = 8\text{cm}$ 且 AB 和 CD 间的距离是 7cm, 求 $\odot O$ 的半径长（图 4.18）.

解: 作 $OE \perp \overline{AB}$ 于 E 点, 延长 $\overline{EO}$ 交 $\overline{CD}$ 于 F 点.

$\because$ $AB \parallel CD$,

$\therefore$ $OF \perp CD$,

∴ $\overline{EF}$ 为 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的公垂线段，且 $\overline{EF}=7\text{cm}$，$\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3\text{cm}$，$\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{CD}=4\text{cm}$.

设 $\overline{OA}=\overline{OC}=x$, $\overline{OE}=y$, 则由勾股定理可得方程组:

$$\begin{cases} x^2=3^2+y^2 \\ x^2=(7-y)^2+4^2 \end{cases}$$

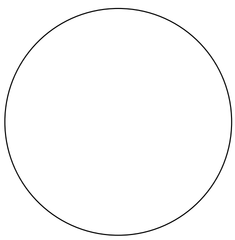
解这个方程组，舍去不合理的根得:

$$\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$$

答：$\odot O$ 的半径是 5cm.

练习

1. 把本节推论 2 用“若—则”形式写出互逆的定理.
2. 作出图中圆的圆心.
3. 已知 $\odot(0,5\text{cm})$, 它的一条弦 $\overline{AB}=8\text{cm}$, 点 M 是 $\overline{AB}$ 的中点，求 $\overline{OM}$ 的长.
4. 已知一圆的半径是 25cm, 一弧所对的弦长是 48cm, 求这弧的一半所对的弦长.
5. 求证圆中的非直径的两弦必不能互相平分（提示：用反证法）.



第 2 题

四、弧、弦和弦心距之间的关系

圆的圆心到一条弦的距离，叫做这条弦的弦心距，例如在图 4.19 中，$\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的一条弦，$\overline{OE}\perp\overline{AB}$ 于 E 点，$\overline{OE}$ 的长就是弦 $\overline{AB}$ 的弦心距. 下面我

们来学习弧、弦和弦心距之间的关系.

定理

在同圆或等圆中，两条弧相等的充要条件是它们所对的弦相等，或它们所对的弦的弦心距相等.

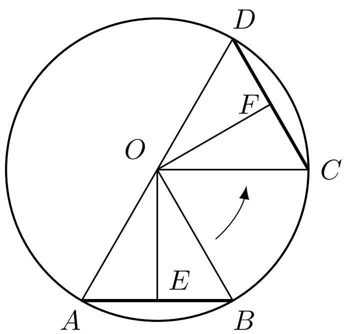


图 4.19

我们来证条件的必要性，充分性由同学们自证:

已知: 在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, $OE\perp AB$ 于 E 点，$OF\perp CD$ 于 F 点（图 4.19).

求证: $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{OE}=\overline{OF}$.

证明: 作半径 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$. 把 $\overset{\frown}{AB}$ 连同经过两端的半径绕着 O 点，依箭头所指的方向旋转，使半径 $\overline{OA}$ 和半径 $\overline{OC}$ 重合.

$\because$　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore$　$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 重合，弦 $\overline{AB}$ 与弦 $\overline{CD}$ 重合.

又 $\because$　从一点到一条直线只可以作一条垂线，

$\therefore$　$\overline{OE}$ 与 $\overline{OF}$ 也重合

$\therefore$　$\overline{AB}=\overline{CD}$,　$\overline{OE}=\overline{OF}$.

对于等圆情况的证明，只要使两圆重合就可以了.

这个定理告诉我们，在同圆或等圆中，“弧相等”、“弦相等”、“弦心距相等”它们当中只要有一个是对的，其它两个也一定是对的. 这就是说:

“弧相等” $\Longleftrightarrow$ “弦相等” $\Longleftrightarrow$ “弦心距相等”

例 4.6 已知（图 4.20），$\overline{OE}$ 是 $\odot O$ 中的半径，F 是 $\overline{OE}$ 上任一点，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 为过 F 点的弦且 $\angle AFO=\angle DFO$.

求证：$\overline{AB} = \overline{CD}$

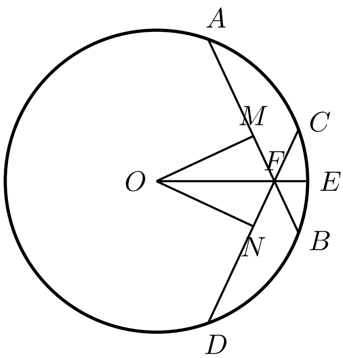


图 4.20

证明： 作 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 于 M 点，$\overline{ON} \perp \overline{CD}$ 于 N 点，在直角 $\triangle OMF$ 与直角 $\triangle ONF$ 中，

$\because$　$\angle MFO = \angle NFO$,　$\overline{OF} = \overline{OF}$.

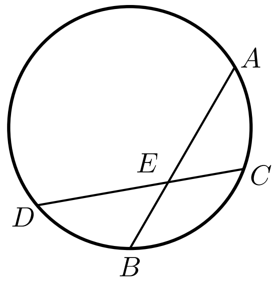
$\therefore$　$\triangle OMF \cong \triangle ONF$

$\therefore$　$\overline{OM} = \overline{ON}$.

$\therefore$　$\overline{AB} = \overline{CD}$.

练习

1. 把本节定理用“若—则”形式写出互逆的定理.
2. 以 $\angle A$ 的平分线上任一点 O 为圆心，大于 O 点到边的距离之长为半径作一个圆，那么这圆在 A 的两边上截出的两条弦相等.
3. 在 $\odot O$ 中，已知 $\overline{AB}$ 是一条直径，$\overline{AC}$ 和 $\overline{AD}$ 是分属于 $\overline{AB}$ 两侧的两条相等的弦，求证：AB 平分 $\angle CAD$
4. 如图，$\odot O$ 内相等的两弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 相交于 E 点，求证
   (a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$
   (b) $\overline{AE} = \overline{DE}$
   (c) $\overline{BE} = \overline{CE}$



第 4 题

五、两圆的位置关系

不重合的两圆，它们的位置关系，有以下五种情况：

1. 一圆在另一圆的外部，这种位置关系叫做**两圆相离**，如图 4.21(1). 这时，两圆没有公共点.

2. 两圆只有一个公共点且其中一圆上的其它各点都在另一圆的外部，这种位置关系叫做**两圆外切**，如图 4.21(2). 这个公共点叫做两圆的**切点**.

3. 两圆有两个公共点，这种位置关系叫做两圆**相交**. 两个公共点叫做两圆的**交点**，如图 4.21(3). 连结两个交点的线段叫做两圆的**公共弦**.

4. 两圆只有一个公共点且其中一圆上的其它各点都在另一圆的内部，这种位置关系叫做两圆**内切**，这个公共点叫做两圆的**切点**，如图 4.21(4).

5. 一圆在另一圆的内部，这种位置关系叫做两圆内含，如图 4.21(5). 这时两圆没有公共点. 如果这两圆的圆心重合，这两个圆叫做**同心圆**，如图 4.21(6).

经过两个圆的圆心的直线，叫做**两圆的连心线**，两个圆心之间的距离叫做圆心距. 如图 4.21, $\overline{O_1O_2}$ 所在的直线就是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的连心线，$\overline{O_1O_2}$ 的长就是两圆的圆心距.

由圆的轴对称性可知，两圆的连心线是两圆的对称轴，并且**两圆相切**（外切或内切）时，它们的**切点在连心线上**（要不然，两圆就将有两个公共点）.

如果用 r_1 和 r_2（$r_1 > r_2$）表示两圆的半径长，用 d 表示圆心距，从图 4.21 可以看出：

1. 若两圆相离时，则 $d > r_1 + r_2$;

2. 若两圆外切时，则 $d = r_1 + r_2$;

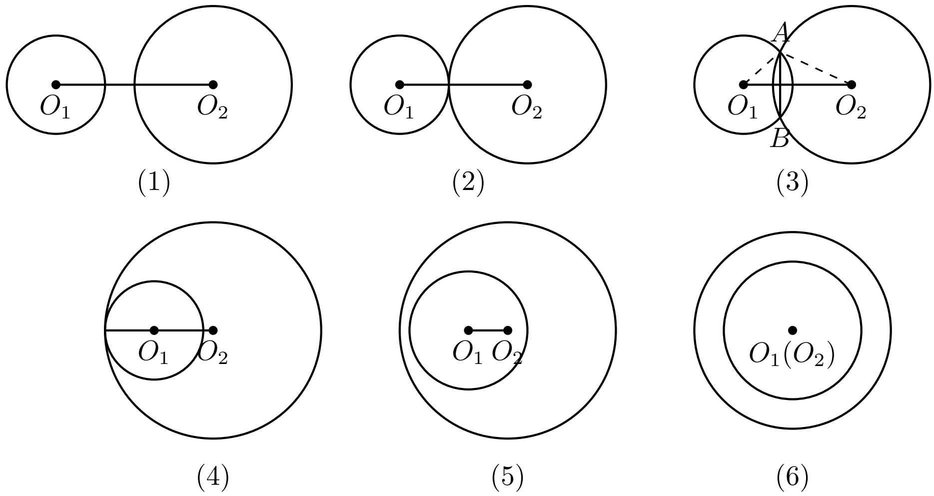


图 4.21

3. 若两圆相交时，则 $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$;

4. 若两圆内切时，则 $d = r_1 - r_2$;

5. 若两圆内含时，则 $d < r_1 - r_2$; 特殊情况，若两圆是同心圆时，则 $d\ 0$.

同学们不难用反证法证明上述各命题的逆命题也是正确的，即：

1. 若 $d > r_1 + r_2$，则两圆相离;

2. 若 $d = r_1 + r_2$，则两圆外切;

3. 若 $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$，则两圆相交;

4. 若 $d\ r_1 - r_2$，则两圆内切;

5. 若 $d < r_1 - r_2$，则两圆内含；特殊情况，若 $d = 0$，则两圆是同心圆.

例 4.7 已知 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，它们的圆心距分别是 5cm、6cm、7cm，求这三个圆的半径.

解： 设 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 的半径分别为 x、y、z，因为 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，于是有方程组

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

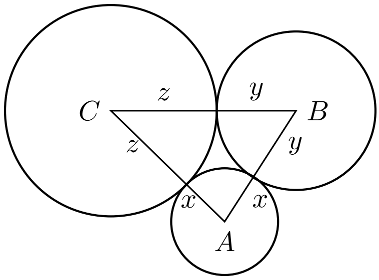


图 4.22

解之得:

$$x = 2, \qquad y = 3, \qquad z = 4$$

答: $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 的半径分别是 2cm、3cm、4cm.

例 4.8 如果两圆相交，则连心线垂直平分两圆的公共弦.

已知: $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 A、B 两点（图 4.23).

求证: 直线 O_1O_2 垂直平分 $\overline{AB}$.

证明: $\because$ O_1、O_2 各与 A、B 两点的距离相等,

$\therefore$ $\overline{O_1O_2}$ 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线. 即 O_1O_2 垂直平分 $\overline{AB}$.

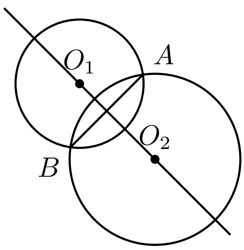


图 4.23

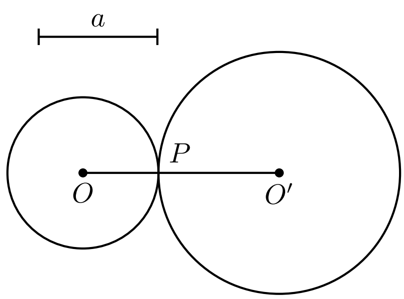


图 4.24

例 4.9 已知: $\odot(O, r)$ 上一点 P，和线段 a（图 4.24).

求作: 一圆使它的半径等于 a，且与 $\odot(O, r)$ 在 P 点外切.

作法

1. 作半径 $\overline{OP}$,

2. 在射线 OP 上截 $\overline{PO'} = a$,

3. 以 O' 为圆心. 为半径长，画 $\odot O'$，则 $\odot O'$ 为所求作的圆.

证明： 根据作法可知：

$$\overline{OO'}=\overline{OP}+\overline{PO'}=r+a$$

$\therefore$ $\odot O$ 与 $\odot O'$ 在 P 点外切.

练习

1. 把本节互逆的两个正确的命题，用“充要”逻辑语句合写成一个定理.
2. 试说出下列各题中两圆的位置关系：r、r' 分别为两圆的半径，d 表示圆心距.
   (a) $d=$6cm，$r=$4cm，$r'=$2cm;
   (b) $d=$2cm，$r=$ 5cm，$r'=$3cm;
   (c) $d=$7cm，$r=$ 3cm，$r'=$2cm;
   (d) $d=$1cm，$r=$ 6cm，$r'=$3cm.
3. 已知两圆外切时，圆心距为 12cm，内切时圆心距是 4cm，求两圆的半径的长.
4. 两圆的半径的比是 5:3，当两圆外切时，圆心距为 24cm，求这两圆内切时的圆心距.
5. 两个等圆外切，并且它们都内切于另一个大圆，已知这三个圆的圆心所构成的三角形周长为 20cm，求大圆的半径.
6. 求作一圆，使圆的半径是 4cm，并且与已知 $\odot(0,2\text{cm})$ 外切于已知点 A.
7. 求作一圆使圆的半径是 2cm，并且与已知 $\odot(0,1\text{cm})$ 内切于已知点 P.
8. 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 7cm，8cm，9cm，试分别以三顶点为圈心作三个圆两两外切（提示：先计算出三个圆的半径）.

六、圆与圆的位似

已知 $\odot(O,r)$ 和一点 S（图 4.25），我们来研究怎样求作 $\odot O$ 的以 S 为位似中心，位似比为常数 k 的位似形.

设 $k>0$，由位似变换的定义，我们先作出以 S 点为顺位似中心，k 为位似比的点 O 的对应点 O'（图 4.25，取 $k=\dfrac{5}{2}$），则

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}=k$$

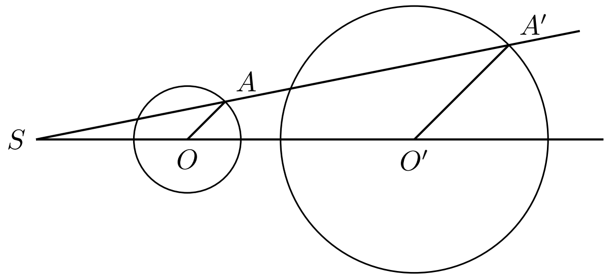


图 4.25

设 A 是 $\odot(O,r)$ 上任一点，同样可作出 A 的对应点 A', 使 $\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=k$, 于是

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}=\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}},\qquad O'A' \,/\!/\, OA$$

$\therefore\quad \triangle SO'A' \backsim \triangle SOA.$

$$\frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}=k,\qquad \overline{O'A'}=k\overline{OA}=k\cdot r$$

$\therefore\quad A'$ 在 $\odot(O',kr)$ 上.

这样，$\odot O$ 上的每一点，以 S 为顺位似中心，k 为位似比的位似点都在 $\odot(O',kr)$ 上.

反过来, 如果 A' 点是 $\odot(O',kr)$ 上任一点, 我们可求作一点 A 使 $\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=k$. 这时 $\triangle SO'A' \backsim \triangle SOA$,

$\therefore\quad \dfrac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}}=k$

又 $\because\quad \overline{O'A'}=kr$

$\therefore\quad \overline{OA}=r$

A 点必在 $\odot(0,r)$ 上.

这样，$\odot(O',kr)$ 上的所有点，又都是以 S 为顺位似中心，k 为位似比 $\odot(O,r)$ 上的点的位似点.

由上述正反两方面的说明，$\odot(O,r)$ 的以 S 为位似中心，k 为位似比的位似形是 $\odot(O',kr)$.

如给出的常数 $k<0$, 与 $k>0$ 的情况类似，我们可作出已知 $\odot(O,r)$ 的逆位似形（图 4.26)，这时变换的方向是相反的，即 O 点的逆位似点 O' 在射线 SO 的反向延长线上，A 点的逆位似点在射线 SA 的反向延长线上，$\odot(O',|k|r)$ 就是 $\odot(O,r)$ 的逆位似形.

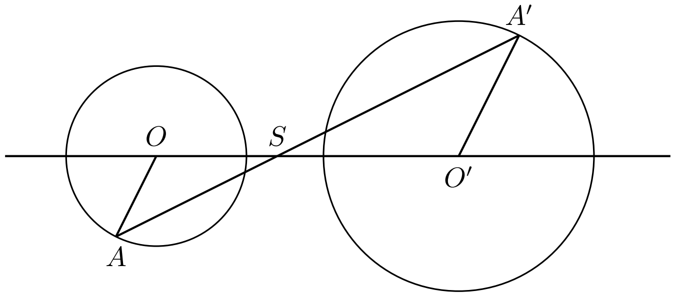


图 4.26

综合以上讨论，我们得到：

> 圆的位似形仍是圆.

进一步我们还可证明：

> 任何两个不等的圆，都是位似形，它们即可看作顺位似形，又可看作逆位似形，它们有两个位似中心.

已知 $\odot(O,r)$ 和 $\odot(O',r')$ 且 $r<r'$(图 4.25)，我们作两圆的半径 $\overline{OA}$ 和 $\overline{O'A'}$, 且使射线 OA 与 $O'A'$ 的方向相同，设直线 AA' 与连心线 OO' 交于一点 S, 这时 S 点在 $\overline{O'O}$ 的延长线上，于是，

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}=\frac{r'}{r}$$

由于圆的位似形仍是圆，我们以 S 为位似中心，$\dfrac{r'}{r}$ 为位似比作 $\odot(O,r)$ 的位似圆 $\odot(O',r'')$，则

$$\frac{r''}{r}=\frac{r'}{r}\quad\Rightarrow\quad r''=r'$$

$\odot(O',r'')$ 就是 $\odot(O',r')$.

这就证明了 $\odot(O',r')$ 与 $\odot(O,r)$ 为顺位似形，且位似比等于它们的半径的比，并且位似中心在它们的连心线上．如果作两圆的半径 $\overline{O'A'}$ 和 $\overline{OA}$, 且使射

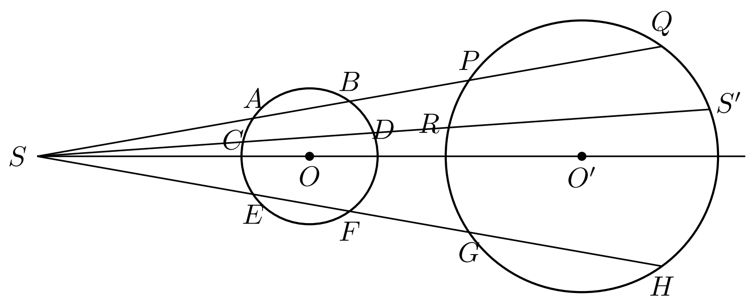
线 $O'A'$ 与 OA 的方向相反（图 4.26）. 设 $\overline{AA'}$ 与 $\overline{OO'}$ 相交于 S, 用同样的方法也可以证明 $\odot(O,r)$ 与 $\odot(O',r')$ 是以 S 点为逆位似中心的逆位似图形.

从上述证明过程，我们还可看出，如果两圆相等且不同心，它们只能看作逆位似图形.

由于凡位似形都是相似形，这样我们也就证明了**任何两个圆都是相似形**.

练习

1. 在图中 S 为 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 的顺位似中心，试在 O' 上找出以 S 为中心的 A、B、C、D、E、F 各点的顺位似点.
2. 求作相离、相交的两个不等的圆的顺位似中心.
3. 求作相交两圆的逆位似中心.
4. 求证：如果两圆外切，切点是两圆的逆位似中心；如果两圆内切，切点是两圆的顺位似中心.
5. 两个同心圆的顺位似中心是那一点，逆位似中心呢?



第 1 题

习题 4.1

1. 以 $\odot O$ 的半径 $\overline{OA}$ 为一边作正方形 $OABC$, 求证 B 点在圆外，C 点在圆上，两条对角线的交点 D 在 $\odot O$ 内.

2. 已知 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点，求证 A、B、C、D 四个顶点在以 O 为圆心，以 OA 为半径的圆上.

3. 已知 AB、CD 是 $\odot O$ 中互相垂直的弦，并且 $\overline{AB}$ 把 $\overline{CD}$ 分成 3cm 和 7cm 的两部分，求弦 $\overline{AB}$ 的长和它的弦心距.

4. 经过圆内一个已知点作一条弦，使这条弦被这点所平分.

5. 已知 $\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的直径，$\overline{CD}$ 是 $\odot O$ 的弦，$AE\perp$ 直线 CD 于 E 点，$BF\perp$ 直线 CD 于 F 点，求证：$\overline{EC}=\overline{DF}$.

6. 已知 $\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的直径，$\widehat{AC}$ 与 $\widehat{AD}$ 位于 $\widehat{AB}$ 的两侧且 $\widehat{AC}=\widehat{AD}$. 求证：$AB$ 平分 $\angle CAD$.

7. 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 是相离的两个等圆，一条与连心线 O_1O_2 平行的直线顺次与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 A、B、C、D 各点. 求证：$\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$.

8. 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 是相离的两个等圆，过 $\overline{O_1O_2}$ 的中点，作直线顺次与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 C、D、E、F 各点，求证：$\widehat{CD}=\widehat{EF}$.

9. 在第 7 题、第 8 题中，如果条件是相交的两个等圆，结论是否都还成立.

10. 已知两圆相交，经过它们的一个交点有一条和公共弦垂直的直线，和两圆相交于另外两点，求证这两点间的长等于圆心距的 2 倍.

第二节 圆与直线的位置关系

一、圆与直线的位置关系

在图 4.27 中，如果直线 AB 和 $\odot O$ 的圆心 O 的距离 $\overline{OD}$ 大于半径 $\overline{OC}$, 那么 D 点在圆外；在直线 AB 上再任取一点 M, 那么 $\overline{OM}>\overline{OD}>\overline{OC}$, 那么 M 点也一定在圆外，所以直线 AB 上任何一点都在圆外，于是 $\odot O$ 和直线 AB 便没有公共点.

如果一条直线和一个圆没有公共点，我们就说这条直线和这个圆**相离**.

在图 4.28 中，过 $\odot(O,r)$ 的任一条半径 $\overline{OA}$ 的端点 A 作直线 $AB\perp\overline{OA}$ 于 A 点，P 为直线 AB 上除 A 点外的任一点，则 $\overline{OP}>\overline{OA}$, 于是 P 就在圆外，这就是说，在直线 AB 上，除 A 点外其它的点都在圆外. 这时直线 AB 和 $\odot O$ 只有一个公共点 A.

如果一条直线和一个圆只有一个公共点，我们就说这条直线和这个圆**相切**，这条直线叫做圆的**切线**，这个公共点叫做它们的切点.

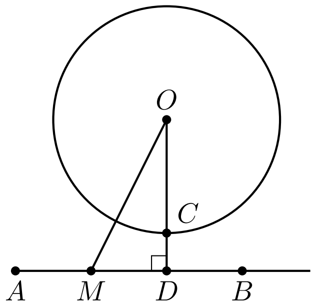


图 4.27

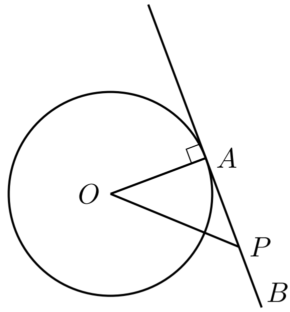


图 4.28

切线判定定理

经过圆的半径外端，并且垂直这条半径的直线是这圆的切线.

这就是说，“一条直线经过半径外端且垂直于半径”为这条直线是圆的切线的充分条件，反过来可证条件也是必要的.

切线性质定理

圆的切线垂直于经过切点的半径.

已知：直线 AB 与 $\odot O$ 相切于 C 点（图 4.29）.

求证：$AB\perp\overline{OC}$.

证明： 假设 AB 和 $\overline{OC}$ 不垂直，自圆心 O 引 $\overline{OD}\perp AB$ 于 D 点，在 AB 上取 $\overline{DC'}=\overline{DC}$, 且使 D 点在 C 与 C' 之间，于是 OD 垂直平分 $\overline{CC'}$, $\overline{OC'}=\overline{OC}$.

$\because$ C 点是切点，$\overline{OC}$ 是 O 的半径.

$\therefore$ $\overline{OC'}$ 是 O 的半径，C' 点也在 $\odot O$ 上.

这就是说，直线 AB 和 $\odot O$ 有了两个公共点 C 和 C'，但这与 AB 是圆的切线，即 AB 和 $\odot O$ 只有一个公共点相矛盾，

$\therefore$ $AB\perp\overline{OC}$.

在图 4.30 中，经过半径 $\overline{OA}$ 的端点 A, 作与 $\overline{OA}$ 不垂直的任一条直线 AB, 由上面的证明可知：这条直线和圆不能只有一个公共点，还必须有另一个交点 A'. 这就是说，直线 AB 和 $\odot O$ 有了两个公共点.

如果一条直线和一个圆有两个公共点，我们就说，这条直线和这个圆相交，这条直线叫做这个圆的**割线**，这两个公共点叫做它们的**交点**.

一条直线和一个圆如果有公共点，那么，它们的公共点是不能多于两个的，因此，**直线和圆的位置关系只能有相离、相切和相交三种关系**.

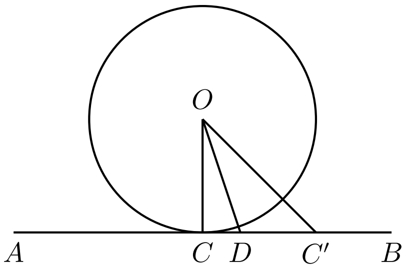


图 4.29

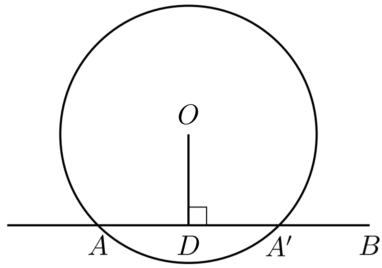


图 4.30

例 4.10 求证连结圆的两条平切线的切点间的弦必是圆的直径.

已知：直线 ℓ_1 和直线 ℓ_2 分别与 $\odot O$ 切于 A、B 两点，且 $\ell_1 \,//\, \ell_2$.

求证：$\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的直径.

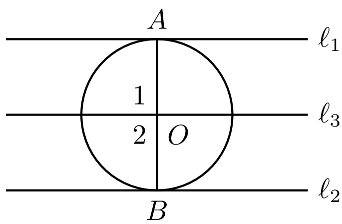


图 4.31

证明: 作 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$, 过 O 点作直线 $\ell_3 \,//\, \ell_2$

$\because$ $\ell_1 \,//\, \ell_2$

$\therefore$ $\ell_3 \,//\, \ell_1$

$\because$ ℓ_1 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore$ $\overline{OA} \perp \ell_1$, $\overline{OA} \perp \ell_3$, $\angle 1 = 90°$ 同理可证：$\angle 2 = 90°$.

$\therefore$ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

$\therefore$ A、O、B 三点共线. 即 $\overline{AB}$ 通过圆心 O, $\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的直径.

利用例 4.10 所证原理，早在公元九年，我国就已发明出一种可以测量圆形工件直径的卡尺. 这种卡尺是青铜制的，由两支丁字形具有刻度的尺子所组成（图 4.32)，这是世界上最早的卡尺. 由于当时是王莽称帝时代（公元 9—23 年，王莽称帝，国号新）后人多把这种卡尺叫做《王莽卡尺》.

例 4.11 已知：P 点在已知 $\odot O$ 外（图 4.33）.

求作：经过 P 点的 $\odot O$ 的切线.

作法

1. 作 $\overline{OP}$

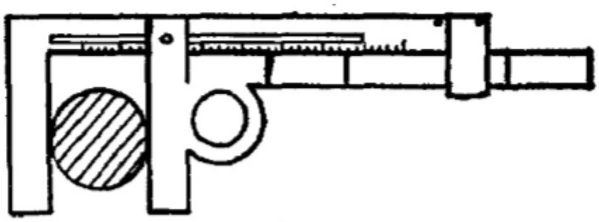


图 4.32

2. 以 $\overline{OP}$ 的中点 C 为圆心，以 $\overline{CO}$ 为半径作 $\odot C$ 交 $\odot O$ 于 A、B 两点；

3. 作直线 PA、PB, 则 PA、PB 就是所求作的切线.

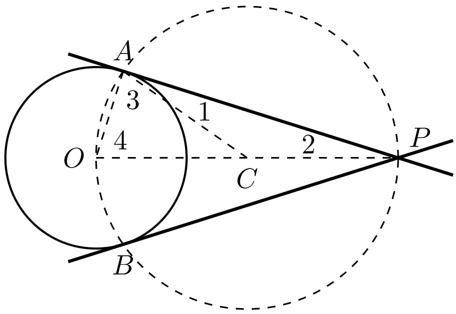


图 4.33

证明： 作 $\overline{OA}$、$\overline{CA}$.

$\because \quad \overline{CA}=\overline{CO}=\overline{CP}$,

$\therefore \quad \angle 1=\angle 2, \quad \angle 3=\angle 4, \quad \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$.

$\because \quad \angle 1+\angle 3+\angle 2+\angle 4=180^\circ$,

$\therefore \quad \angle 1+\angle 3=90^\circ$, 即 $OA \perp PA$，PA 是 $\odot O$ 的切线（切线判定定理).

同理可证 PB 也是所求作的切线.

另外，在直角 $\triangle POA$ 和直角 $\triangle POB$ 中，

$\because \quad \overline{OA}=\overline{OB}, \quad \overline{PO}=\overline{PO}$.

$\therefore \quad \triangle POA \cong \triangle POB, \quad \overline{PA}=\overline{PB}$.

如果 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 的长叫做 P 点到圆的切线长，那么我们就可得到下面的定理:

切线长定理

从圆外一个已知点到圆的两条切线的长相等.

以 $\triangle POA \cong \triangle POB$, 还可推出 $\angle APO = \angle BPO$, 因此又可得出:

定理

连结圆外一个已知点和圆心的直线，平分从这点向圆所作的两条切线所夹的角.

练习

1. 回答如下问题.
   (a) 设 $\odot(O,r)$ 的圆心 O 点和直线 ℓ 的距离为 d, 试分别说出 $d>r$, $d=r$, $d<r$ 时，直线 ℓ 和 $\odot(O,r)$ 的位置关系.
   (b) 凡是和圆的一条半径垂直的直线，都是圆的切线吗? 凡是经过半径外端的直线都是圆的切线吗?
2. 过圆上一点作圆的切线.
3. 作一圆与已知直线相切于直线上已知点，这样的圆可作多少? 这些圆的圆心组成什么图形?
4. PA、PB 都是 $\odot O$ 的切线, A、B 是切点, 求证: $\angle AOB + \angle APB = 180°$.
5. 求证经过圆的直径两端的两条切线互相平行.
6. 在已知圆内画两条互相垂直的直径，经过各直径的端点画圆的切线；问这四条切线相交成什么四边形？为什么？
7. 从圆外一点向圆作两条切线. 求证；连结这点和圆心的直线垂直平分连结两切点的线段.

二、三角形的内切圆

如果一个多边形的各边都和一个圆相切（图 4.34），这个多边形叫做**圆的外切多边形**，这个圆叫做多边形的**内切圆**，内切圆的圆心又叫做外切多边形的**内心**. 如图 4.34 所示，$ABCD$ 是 $\odot O$ 的外切四边形，$ABCDE$ 是 $\odot P$ 的外切五边形等，O、P 分别是四边形 $ABCD$ 与五边形 $ABCDE$ 的内心.

已知 $\odot I$, 过这圆上 D、E、F 三点作它的三条切线交成 $\triangle ABC$(图 4.35), 于是 $\odot I$ 便是 $\triangle ABC$ 的内切圆. 由于切线垂直于过切点的半径，则内心 I 到

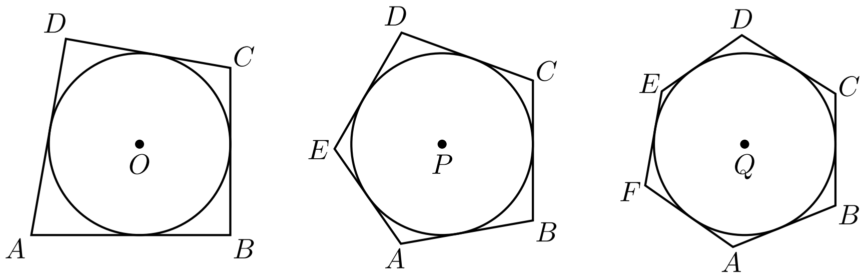


图 4.34

三边的距离相等，I 在 $\triangle ABC$ 的三个内角的平分线上.

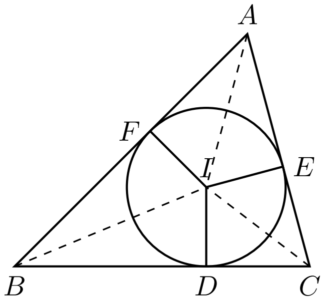


图 4.35

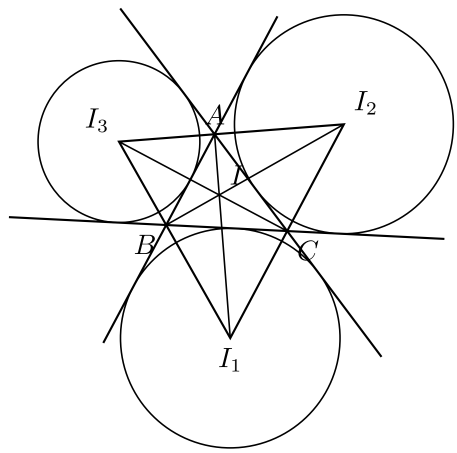


图 4.36

仿此，我们还可证明：三角形一内角平分线和其余两内角的外角平分线交于一点，这一点叫做三角形的**旁心**（图 4.36），以旁心为圆心可作一圆和一边及其它两边的延长线相切、所作的圆叫做三角形的**旁切圆**，一个三角形有三个旁心，三个旁切圆，如图 4.36 所示，$\odot I_1$、$\odot I_2$、$\odot I_3$ 是 $\triangle ABC$ 的三个旁切圆.

例 4.12 已知 $\triangle ABC$，$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，求三个顶点到内切圆的切线长（图 4.37）.

解： 设 $\triangle ABC$ 的三边、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 分别与内切圆 I 相切于 D、E、F 三点，由于从圆外一点引圆的两条切线长相等，

$$\therefore \quad \overline{AE}=\overline{AF}, \quad \overline{BF}=\overline{BD}, \quad \overline{CD}=\overline{CE}.$$

设 $\overline{AE} = x$、$\overline{BF} = y$，$\overline{CD} = z$，则可得到，

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases}$$

解之得：

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \quad y = \frac{a+c-b}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2}$$

答：三个顶点 A、B、C 到内切圆的切线长分别为

$$\frac{b+c-a}{2}, \qquad \frac{a+c-b}{2}, \qquad \frac{a+b-c}{2}$$

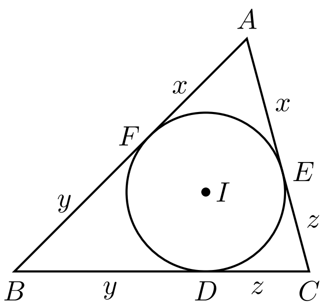


图 4.37

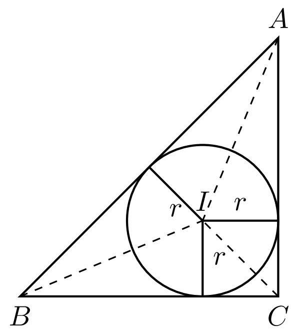


图 4.38

例 4.13 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$, $\overline{AB} = 3\text{cm}$, $\overline{AC} = 2\text{cm}$.

求：直角三角形内切圆半径长（图 4.38）.

解： 设 $\odot I$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，半径为 r.

$\because$ $\triangle AIB$ 的面积 $+\triangle BIC$ 的面积 $+\triangle AIC$ 的面积 $= \triangle ABC$ 的面积

$\therefore$ $r \times \overline{AB} + r \times \overline{BC} + r \times \overline{AC} = \overline{AC} \times \overline{BC}$

又知：$\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

$\therefore$ $r \times 3 + r \times \sqrt{5} + r \times 2 = 2 \times \sqrt{5}$

$$r = \frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}-10}{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

答：内切圆半径等于 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$cm.

练习

1. 求作一个三角形的内切圆.
2. 求作一个三角形的三个旁切圆.
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC}=28\text{cm}$, $\overline{AC}=18\text{cm}$, $\overline{AB}=26\text{cm}$, 它的内切圆分别和 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 相切于 D、E、F, 求 $\overline{AF}$、$\overline{BD}$ 和 $\overline{CE}$ 的长.
4. 已知 $\triangle ABC$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$, 面积是 s, 求它的内切圆半径.
5. 已知直角三角形的两直角边分别是 a、b, 求这个直角三角形的内切圆半径 r.

三、圆的外切四边形

我们已经知道, 每一个三角形都有一个内切圆, 现在要问, 是不是每个四边形也都有一个内切圆呢? 如果四边形有一个内切圆, 那么, 这个四边形的四个角的平分线应相交于一点, 显然, 这个性质并不是每个四边形都能具备的. 下面先让我们来寻求四边形有内切圆的必要条件.

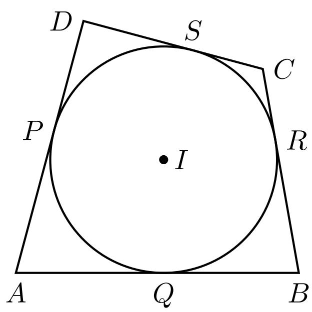


图 4.39

已知 $\odot I$, 过圆上四点 P、Q、R、S 分别作 $\odot I$ 的切线交成四边形 $ABCD$(图 4.39). 于是有,

$$\overline{AP}=\overline{AQ},\quad \overline{BR}=\overline{BQ},\quad \overline{CR}=\overline{CS},\quad \overline{DP}=\overline{DS} \qquad \text{(切线长定理)}$$

将四个等式左右各相加得:

$$\overline{AP}+\overline{BR}+\overline{CR}+\overline{DP}=\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CS}+\overline{DS}$$

即：$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$.

这就说“对边的和相等”是圆外切四边形的一个必要条件．于是我们得到：

定理

圆的外切四边形的每双对边的和相等.

现在要问，“对边的和相等”是不是一个四边形有内切圆的充分条件呢？答案也是肯定的.

定理

如果四边形的每双对边的和此相等，则它必有内切圆.

已知：在四边形 $ABCD$ 中（图 4.40），$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$.

求证：四边形 $ABCD$ 有内切圆.

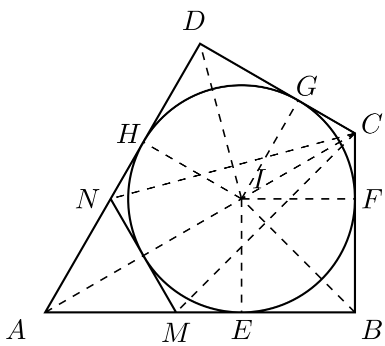


图 4.40

证明: 假定 $\overline{AB}>\overline{BC}$, 则根据已知条件 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$, 可知 $\overline{AD}>\overline{CD}$. 故在 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AD}$ 上，可以截取线段 $\overline{BM}=\overline{BC}$, $\overline{DN}=\overline{DC}$, 从而，

$$\overline{AM}=\overline{AB}-\overline{BC},\quad \overline{AN}=\overline{AD}-\overline{CD}$$

但根据已知条件 $\overline{AB}-\overline{BC}=\overline{AD}-\overline{CD}$,

$\therefore\quad \overline{AM}=\overline{AN}$.

连结 $\overline{MN}$、$\overline{CM}$、$\overline{CN}$, 于是 $\triangle AMN$、$\triangle BCM$、$\triangle DCN$ 都是等腰三角形，因此它们的顶角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线，必然是底边 $\overline{MN}$、$\overline{CM}$、$\overline{CN}$ 的垂直平分线，这样一来，这三条角平分线也是 $\triangle CMN$ 的边 $\overline{MN}$、$\overline{CM}$、$\overline{CN}$ 的垂直平分线．所以这三条角平分线一定相交于一点 I．自 I 点分别作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、

$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的垂线，垂足分别是 E、F、G、H. 于是得

$$\overline{IE} = \overline{IF} = \overline{IG} = \overline{IH}$$

因此，以 I 为圆心，$\overline{IE}$ 为半径的圆与四边形 $ABCD$ 的各边分别相切于 E、F、G、H 四点、即四边形有内切圆 $\odot I$.

注意： 在证明本定理时，假定了 $\overline{AB} > \overline{BC}$, 如果 $\overline{AB} < \overline{BC}$, 证明方法完全一样，如果 $\overline{AB} = \overline{BC}$, 那么，证法就更简单了，请同学们想一想为什么？

练习

1. 一个菱形有内切圆吗？一个正方形呢？如果有，就分别作出一个菱形和一个正方形的内切圆.
2. 作一等边三角形的内切圆和外接圆，内心和外心重合吗？
3. 果一个四边形的每双对边和不相等，你能否判定这个四边形有没有内切圆？为什么？
4. 如果四边形的各边的比顺次地如下列各数的比

   (a) $2:2:3:3$　　(b) $2:5:3:4$　　(c) $3:5:3:1$

   这些四边形是否有内切圆？

四、两圆的公切线

如图 4.41 所示，一条直线与两圆都相切，这条直线就叫做两圆的公切线. 如果两圆的圆心都在公切线的同侧，这条公切线就叫做两圆的**外公切线**；如果两圆的圆心分别在公切线的两侧，这条公切线就叫做两圆的**内公切线**. 显然，如果两圆相交，两圆只有外公切线而无内公切线（图 4.41(2)）.

一条公切线上两切点间线段的长，叫做两圆的公切线的长.

在实践中，要画两圆的公切线时，可将直尺渐渐移动使靠近两圆直至和两圆各只有一个接触点时，然后沿着直尺的边缘，就可画出两圆的公切线.

下面我们来研究只用圆规和直尺两圆外公切线的方法.

(一) 作两个圆的外公切线

已知：$\odot(O\ r)$ 和 $\odot(O', r')$ 且 $r > r'$.

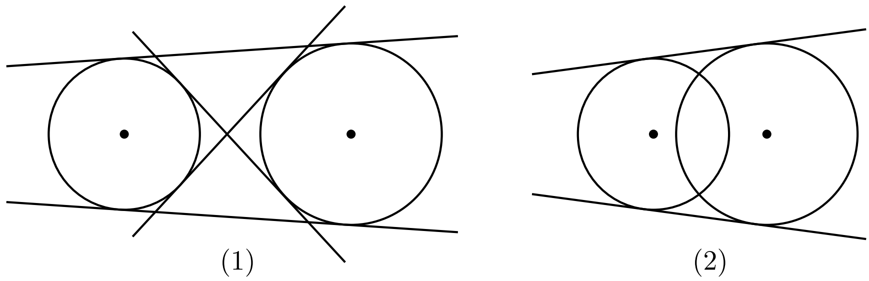


图 4.41

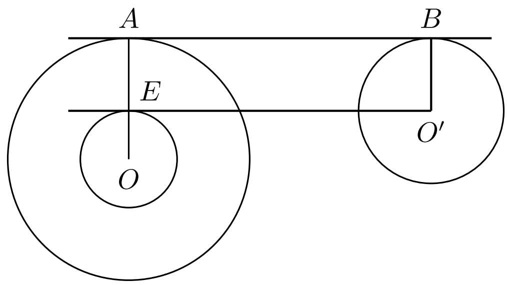


图 4.42

求作：$\odot O$ 和 $\odot O'$ 的外公切线.

分析： 假设 AB 是所求作的 $\odot O$ 和 $\odot O$ 的外公切线（图 4.42），A 和 B 是切点，分别作半径 $\overline{OA}$，$\overline{O'B}$，由于 $\overline{OA}$，$\overline{O'B}$ 都垂直于 AB，所以 $OA \mathbin{//} O'B$，作 $O'E \mathbin{//} AB$ 交 $\overline{OA}$ 于 E 点，则 $O'E \perp OA$，且 $\overline{OE} = r - r'$，这时 $O'E$ 与 $\odot(O, r - r')$ 相切于 E 点. $\odot(O, r - r')$ 可作，过 O' 也可作 $\odot(O, r - r')$ 的切线. 故切点 E 可定，于是 AB 可作.

作法（图 4.43）.

1. 作 $\odot(O, r - r')$；

2. 从 O' 点作 $\odot(O, r - r')$ 的切线 $O'E$，E 为切点；

3. 作 $\overline{OE}$，并延长交 $\odot O$ 于 A 点；

4. 过 O' 点作 $O'B \mathbin{//} OA$ 交 $\odot O'$ 于 B 点；

5. 过 A、B 作直线 AB，则直线 AB 为所求的公切线.

证明：（略）

讨论：

1. 如果两圆相离、外切、或相交，那么 $\overline{OO'} > r - r'$，从 O' 向 $\odot(O, r-r')$ 作切线可作两条切线，这时所求作的外公切线有两条，如图 4.43 中的 AB 和 CD.

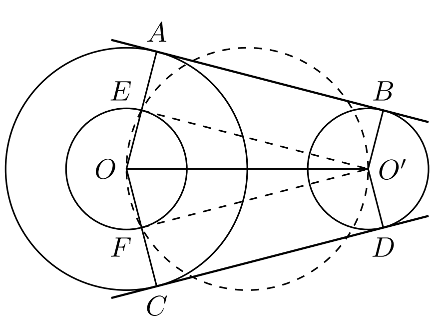


图 4.43

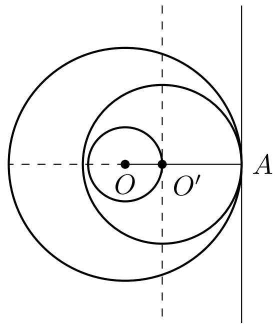


图 4.44

2. 如果两圆内切于 A 点（图 4.44），那么 O' 正好在 $\odot(O, r-r')$ 上，过 O' 点作 $\odot(O, r-r')$ 的切线只能作一条，这时两圆的公切线只能作出一条，它就是过两圆的切点 A，并垂直于连心线的直线.

3. 如果两圆内含时，那么 O' 点在 $\odot(O, r-r')$ 内，这时，过 O' 点作不出 $\odot(O, r-r')$ 的切线则作图题无解.

（二）作两圆的内公切线

已知：$\odot(O, r)$，$\odot(O', r')$.

求作：$\odot(O, r)$ 和 $\odot(O', r')$ 的内公切线.

分析：如图 4.45，设 AB 为所求的内公切线，A 和 B 为切点，作 $\overline{OA}$，$\overline{O'B}$，因为这两条半径都垂直于公切线 AB，所以互相平行，再从 O' 点引 $O'C \parallel BA$ 交 $\overline{OA}$ 的延长线于 C，所以 $O'C$ 和以 O 为圆心，$\overline{OC}$ 为半径的圆相切，但这圆的半径 $\overline{OC}$ 等于 $\overline{OA} + \overline{AC}$，也等于 $\overline{OA} + \overline{O'B}$，就是等于 $r + r'$，而它的圆心就是已知圆的圆心 O，所以这个圆可作.

作法（图 4.45）.

1. 以 O 为圆心，$r + r'$ 为半径画圆；

2. 从 O' 作该圆的切线 $O'C$，切点为 C；

3. 作 $\overline{OC}$ 交 $\odot O$ 于 A 点；

4. 过 A 作 $AB \parallel CO'$，切 $\odot O$ 于 B 点，AB 即为所求作的内公切线.

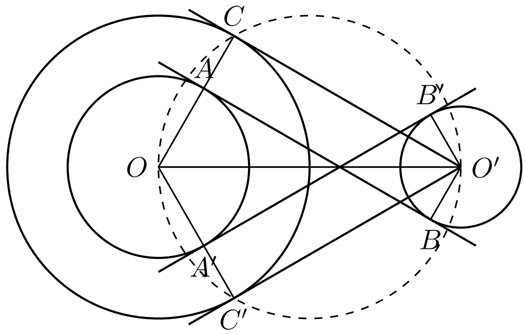


图 4.45

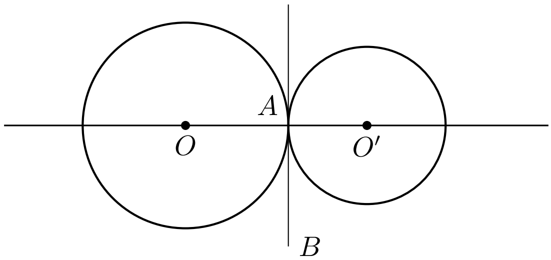


图 4.46

证明： 略.

讨论：

1. 如果两圆相离，可作出两条内公切线.
2. 如果两圆外切，只能作一条内公切线，这条内公切线就是过切点并且垂直于连心线的直线（图 4.46）.
3. 如果两圆相交或内含作图题无解.

练习

1. 已知 $\odot(A, 4\text{cm})$, $\odot(B, 3\text{cm})$, 圆心距分别如下，求作公切线（要求只作出图形）.

   (a) 7cm;　　(b) 1cm.

2. 已知两圆的半径分别是 7cm 和 1cm, 连心线的长是 10cm, 求这两圆的外公切线和内公切线长.

3. $\odot O$ 和 $\odot O'$ 相外切，直线 BC 是它们的一条外公切线，切点是 B 和 C, 已知切线 BC 和连心线的交角是 $30°$, 连心线长是 2cm, 求这两圆的半径和外公切线的长.

4. 如果两圆外切, 那么内公切线平分两圆的外公切线 (两切点间的线段).

习题 4.2

1. 已知 $\odot(O, r)$，圆心 O 到直线 ℓ 的距离是 d, 说出下列情况 ℓ 和 $\odot O$ 的位置关系.

   (a) $r < d$, (b) $r = d$, (c) $r > d$.

2. 已知直线 ℓ 和 $\odot O$ 相切于 P 点，$\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的一条直径，并且 A、B 两点到 ℓ 的距离各为 2.3cm 和 1.5cm, 求 $\odot O$ 的直径长.

3. 从 $\odot O$ 外一点 P 作圆的两条切线，和 $\odot O$ 分别相切于 A、B. 作半径 $\overline{OB}$, 延长到 C, 使 $\overline{BC} = \overline{OB}$, 求证：$\angle APC = 3\angle BPC$.

4. 在第 3 题中，能否通过作出 $\triangle POC$ 的方法，过 P 点作出 $\odot O$ 的切线.

5. 以直角三角形 ABC 的直角边 $\overline{AC}$ 为直径作圆，交斜边 $\overline{AB}$ 于 D 点，由 D 点作这圆的切线，求证这条切线平分另一条直角边 $\overline{BC}$.

6. 已知 AB 和 CD 是 $\odot O$ 的两条平行的切线，A、C 是切点，$\odot O$ 的另一切线与 AB、CD 分别相交于 B、D 两点. 求证：$BO \perp OD$.

7. 两圆外切于 A, 它们的一条外公切线切一个圆于 B 点，切另一个圆于 C 点，它们的内公切线交 $\overline{BC}$ 于 D, 求证:

   (a) $\overline{BD} = \overline{DC}$ (b) $\angle BAC$ 是直角

8. 求证：直角三角形的内切的直径的长等于两条直角边的长的和减去斜边的长.

9. 求证: 两圆的两条外公切线的交点是两圆的顺位似中心，两圆的两条内公切线的交点是两圆的逆位似中心，

10. 已知 $\odot(O,r)$ 与 $\odot(O',r')$ 外切，从 O 点引 $\odot O'$ 的切线 OA, A 是切点，再从 A 引 $\odot O$ 的切线 AB, 切点是 B, 求 $\overline{AB}$ 长.

第三节　与圆有关的角

一、圆心角、圆周角

顶点在圆心的角叫做圆心角. 如图 4.7 中的 $\angle AOB$, 就是一个圆心角，它的两边与 $\odot O$ 的交点为 A、B. $\overset{\frown}{AB}$ 叫做 $\angle AOB$ 所对的弧，$\angle AOB$ 叫做 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角.

圆心角与它所对的弧之间有如下关系.

定理

在同圆或等圆中，弧相等的充要条件是它们所对的圆心角相等.

我们来证充分性，必要性由同学们自证.

已知：$\angle AOB$ 和 $\angle A'OB'$ 都是 $\odot O$ 的圆心角（图 4.47)，它们所对的弧分别是 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{A'B'}$, 且 $\angle AOB = \angle A'OB'$.

求证：$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$.

证明： 把圆心角 $\angle AOB$, 连同它所对的弧依图中箭头所示的方向旋转，使 $\overline{OA}$ 与 $\overline{OA'}$ 重合，因 $\angle AOB = \angle A'OB'$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$, 所以 $\overline{OB}$ 可与 $\overline{OB'}$ 重合，B 与 B' 重合，因此 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合，所以 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$.

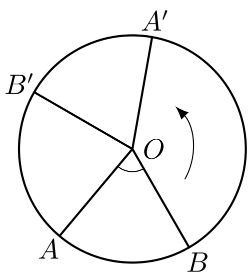


图 4.47

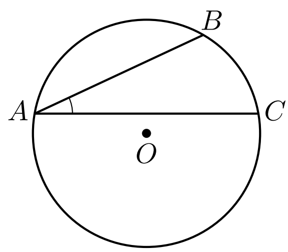


图 4.48

如果把顶点在圆心的周角分成 360 等份，这时，整个圆周也被分成 360 等份. 我们把每一份叫做 1° 弧. 由此可知 1° 的圆心角所对的弧是 1° 弧，1° 的弧所对的圆心角是 1° 的角，于是 n° 的圆心角所对的弧也是 n°. 因此有：

> 圆心角的度数等于它所对的弧的度数.

顶点在圆周上，并且两边都与圆相交的角，叫做**圆周角**.

如图 4.48, $\angle BAC$ 就是 $\odot O$ 的一个圆周角，它的顶点 A 在 $\odot O$ 上，它的两边分别交 $\odot O$ 于 B、C, 这时，$\overset{\frown}{BC}$ 叫做 $\angle BAC$ 所对的弧，$\angle BAC$ 叫做 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角，圆周角与它所对弧之间有如下关系：

圆周角定理

> 圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半.

已知：$\angle BAC$ 是 $\odot O$ 的圆周角，$\overset{\frown}{BC}$ 是它所对的弧（图 4.49）.

求证：$\angle BAC$ 的度数 $=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 的度数.

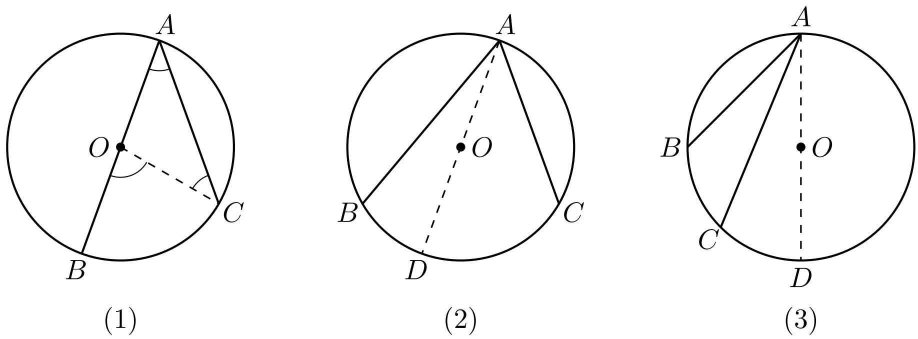


图 4.49

证明： 分三种情况来证明

1. 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一边上，如图 4.49(1), O 在 AB 边上，作半径 $\overline{OC}$, 在 $\triangle AOC$ 中，

$\because\quad \overline{OA}=\overline{OC}$,

$\therefore\quad \angle C=\angle BAC$.

又 $\because\quad \angle BOC$ 是 $\triangle OAC$ 的外角，

$\therefore\quad \angle BOC=\angle BAC+\angle C=2\angle BAC,\quad \angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

又 $\because\quad \angle BOC$ 的度数 $=\overset{\frown}{BC}$ 的度数.

$\therefore\quad \angle BAC$ 的度数 $=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 的度数.

2. 圆心 O 在 $\angle BAC$ 内，如图 4.49(2), 作直径 AD, 从 1 可以知道：

$$\angle BAC\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\text{的度数},\quad \angle DAC\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}\text{的度数}$$

$\because\quad \angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$

$\therefore\quad \angle BAC\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\text{的度数} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\text{的度数}$

3. 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部，如图 4.49(3), 作直径 AD, 从 1 可以知道，

$$\angle BAD\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\text{的度数},\quad \angle CAD\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}\text{的度数}$$

$\because\quad \angle BAC = \angle BAD - \angle CAD,$

$\therefore\quad \angle BAC\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\text{的度数} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}\text{的度数} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\text{的度数}$

根据圆周角定理，请同学们自证下列的推论.

推论 1

同弧（或等弧）所对的圆周角相等（图 4.50).

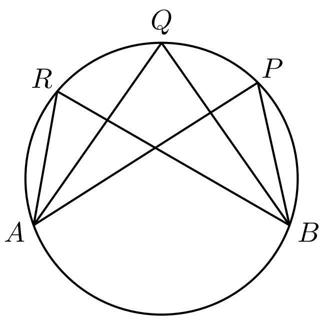


图 4.50

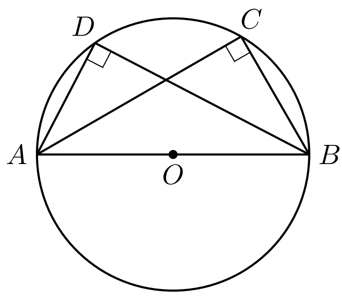


图 4.51

推论 2

半圆上的圆周角都是直角（图 4.51).

推论 3

等于直角的圆周角所对的弦是圆的直径（图 4.51).

例 4.14 已知：$\odot O$ 的两弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 相交于圆内一点 P.

求证：$\angle APC$ 的度数 $= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}\right)$ 的度数（图 4.52）.

证明: 作弦 $\overline{AD}$, 则 $\angle APC = \angle A + \angle D$

$\therefore\quad \angle APC$ 的度数 $=(\angle A + \angle D)$ 的度数 $= \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC}\right)$ 的度数（圆周角定理).

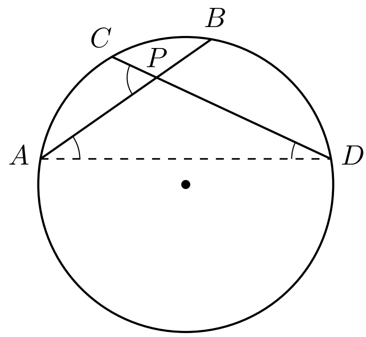


图 4.52

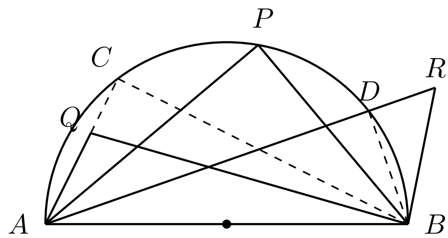


图 4.53

例 4.15 已知: 如图 4.53, $\overset{\frown}{AB}$, P、Q、R 三点都在弦 $\overline{AB}$ 的同侧, 且 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上, Q 在 $\overset{\frown}{AB}$ 所在的圆内, R 在 $\overset{\frown}{AB}$ 所在的圆外.

求证: $\angle AQB > \angle APB > \angle ARB$.

证明: 延长 $\overline{AQ}$ 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 C 点, 设 $\overline{AR}$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 交于 D 点, 作 $\overline{BC}$、$\overline{BD}$ 则有:

$$\angle AQB > \angle ACB, \qquad \angle ADB > \angle ARB$$

$\because\quad \angle ACB = \angle APB = \angle ADB$ (推论 1).

$\therefore\quad \angle AQB > \angle APB > \angle ARB$.

例 4.16 已知: $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$(图 4.54), $\overline{CE}$ 是 O 的直径, $\overline{CD}$ 是 $\overline{AB}$ 边上的高, $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{CE}$、$\overline{CD}$ 分别用 a、b、d、h 表示.

求证: $ab = hd$

证明: 在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ECB$ 中,

$\because\quad CD \perp AB$,

$\therefore\quad \angle ADC$ 是直角.

$\because\quad \overline{CE}$ 是 O 的直径,

$\therefore\quad \angle EBC$ 也是直角（推论 2）.

又 $\because\quad \angle A = \angle E$(推论 1),

$\therefore\quad \triangle ACD \backsim \triangle ECB$.

$\therefore\quad \dfrac{b}{d} = \dfrac{h}{a},\quad ab = hd.$

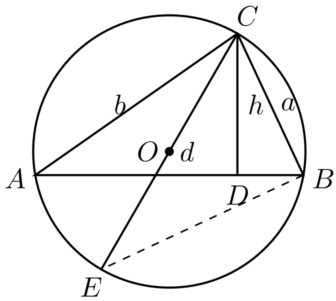
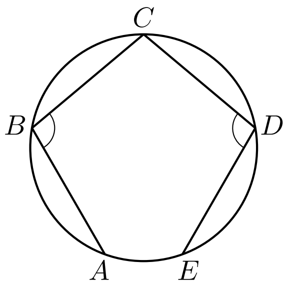
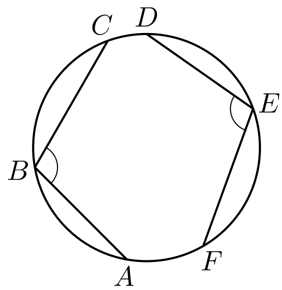


图 4.54



第 2 题



第 3 题

练习

1. 已知 $\odot O$ 的圆周角 $\angle ABC = 40°$, 求 $\angle AOC$ 的度数.

2. 已知图中 $\overset{\frown}{AE}$ 的度数 $= 40°$, 求 $\angle B + \angle D$.

3. 已知图中, $\overset{\frown}{CD}$ 的度数 $= 20°$, $\overset{\frown}{AF}$ 的度数 $= 40°$, 求 $\angle B + \angle E$.

4. 已知图中, $\overset{\frown}{SP}$ 的度数 $= 50°$, 求 $\angle R + \angle Q$.

5. 求证两条平行的弦所夹的弧相等.

6. 已知圆内接四边形的四个顶点分圆成四条弧的度数的比是 $3:4:5:6$, 求四边形四个内角的度数.

7. 已知四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 且 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$. 求证 $ABCD$ 是正方形.

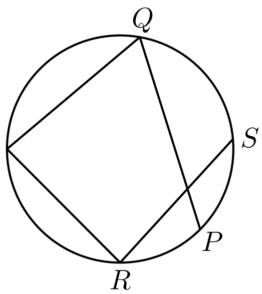
8. 由 $\odot O$ 外一点引 $\odot O$ 的两条割线, 一条与 $\odot O$ 相交于 A、B 两点, 另一条与 $\odot O$ 相交于 C、D 两点, 求证: $\angle P$ 的度数 $= \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}\right)$ 的度数.

9. 假设 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 过 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点 M 作弦 $\overline{MN} \parallel AB$ 交 $\overline{BC}$ 于 D 点，求证：$\overset{\frown}{MCN} = \overset{\frown}{BNC}$, $\overline{DM} = \overline{DB}$.

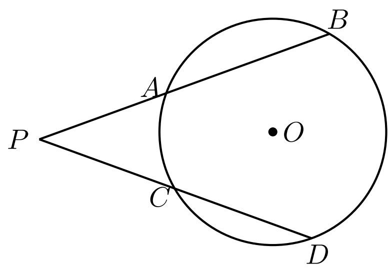
10. 两等圆 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，过 A 点作直线且与 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别相交于 C、D 两点，求证 $\triangle BCD$ 是等腰三角形.

11. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 E 点，求证：$\overline{BE}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{DE}$.

12. 设 $\triangle ABC$ 的内心是 I, $\overline{AI}$ 的延长线与这个三角形的外接圆的交点是 D, 求证：$\overline{DI} = \overline{DB} = \overline{DC}$.



第 4 题



第 8 题

二、弦切角

顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫做 **弦切角**.

如图 4.55, $\angle ABC$ 就是弦切角，顶点 B 在圆上，一边 BC 与圆相切于 B 点，另一边还与圆相交于 A 点，$\overset{\frown}{AmB}$ 叫做弦切角 $\angle ABC$ 所夹的弧.

弦切角定理

弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半.

已知：$\angle ABC$ 是 $\odot O$ 的弦切角（图 4.55）. 边 $\overline{BC}$ 与 $\odot O$ 相切，边 $\overline{BA}$ 与 $\odot O$ 相交于 A 点.

求证：$\angle ABC$ 的度数 $= \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ 的度数.

证明： 过 B 点作 $\odot O$ 的直径 $\overline{BD}$，作弦 $\overline{AD}$. 由于直径上的圆周角是直角，

$$\therefore \quad \angle BAD = 90^\circ, \quad \angle ADB = 90^\circ - \angle ABD$$

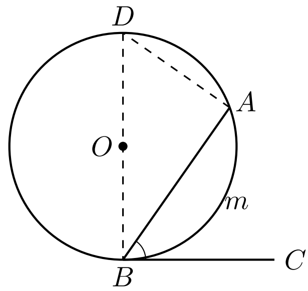


图 4.55

$\because$　BC 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore$　$\overline{OB} \perp BC$,　$\angle ABC = 90° - \angle ABD$,　$\angle ABC = \angle ADB$

$\because$　$\angle ADB$ 的度数 $= \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ 的度数（圆周角定理）

$\therefore$　$\angle ABC$ 的度数 $= \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ 的度数.

由弦切角定理与圆周角定理又可得到：

推论

弦切角等于它所夹弧上的圆周角.

例 4.17　已知：如图 4.56，$\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的一条弦，AC 是一条射线，且 $\angle BAC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 的度数.

求证：AC 切 $\odot O$ 于 A.

证明： 作直径 $\overline{AD}$. 由于：

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\text{的度数} \qquad \text{(已知)}$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\text{的度数} \qquad \text{(圆周角定理)}$$

$\therefore$　$\angle BAC = \angle ADB$.

$\because$　$\angle ABD = 90°$（圆周角定理推论 2）

$\therefore$　$\angle ADB + \angle BAD = 90°$,　$\angle BAC + \angle BAD = 90°$

于是，$AC \perp AD$ 于 A 点，

$\therefore$　AC 切 $\odot O$ 于 A 点（切线判定定理）.

例 4.17 所证结论说明了：弦切角定理的逆定理是成立的. 这就是说，一个角的顶点在圆周上且等于它所夹弧的度数的一半，不仅是这个角为弦切角的必要条件，同时也是这个角为弦切角的充分条件.

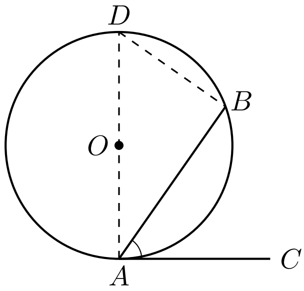


图 4.56

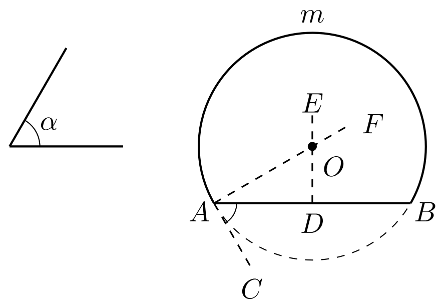


图 4.57

例 4.18 在已知线段上，作含有已知圆周角的弧：

已知：$\overline{AB}$ 和 $\angle\alpha$（图 4.57）.

求作：以 A、B 两点为端点的弧，使它所含的圆周角等于 $\angle\alpha$.

分析： 假定 $\overset{\frown}{AmB}$ 是所求作的弧（图 4.57），作切线 AC，就有 $\angle BAC=\angle\alpha$，因为圆心 O 在 $\overline{AB}$ 的垂直平分线 DE 上，又在 AC 的垂线 AF 上，所以圆心 O 是 DE 和 AF 的交点. 于是得作法如下：

1. 作 $\angle BAC=\angle\alpha$，
2. 作 $\overline{AB}$ 的垂直平分线 DE，
3. 作 $AF\perp AC$ 交 DE 于 O，
4. 以 O 为圆心，OA 为半径画 $\overset{\frown}{AmB}$，使 $\overset{\frown}{AmB}$ 和 AC 在 $\overline{AB}$ 的两旁，$\overset{\frown}{AmB}$ 就是所求作的弧.

证明： $\because$ $AC\perp OA$ 于 A 点，

$\therefore$ AC 是 $\odot O$ 的切线，$\angle BAC$ 是弦切角.

$\overset{\frown}{AmB}$ 所含的圆周角 $=\angle BAC=\angle\alpha$（弦切角定理的推论）.

因此，$\overset{\frown}{AmB}$ 就是所求作的弧.

讨论：图 4.57 中所作的 $\overset{\frown}{AmB}$ 在 $\overline{AB}$ 的上方，我们还可以在 $\overline{AB}$ 的下方作出另一条 $\overset{\frown}{Am'B}$（图 4.58），使 $\overset{\frown}{Am'B}$ 所含的圆周角也等于 $\angle\alpha$. 因此，所求作的弧有两条.

例 4.19 已知：两圆外切于 A 点，过 A 作二条直线，一条与两圆相交于 C、D 两点，另一条与两圆相交于 E、F 两点（图 4.59）.

求证：$CE\parallel FD$.

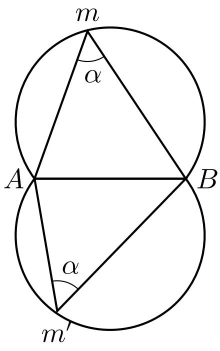


图 4.58

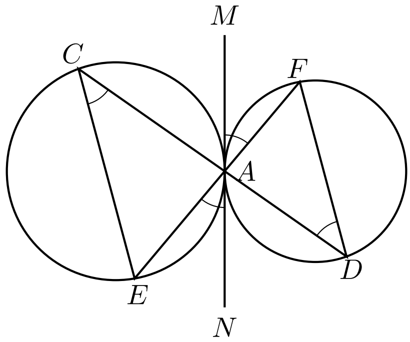


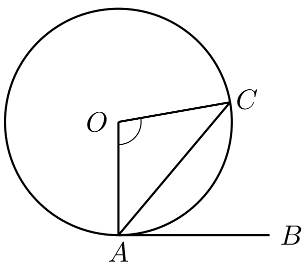
图 4.59

证明： 过 A 引两圆的公切线 MN，

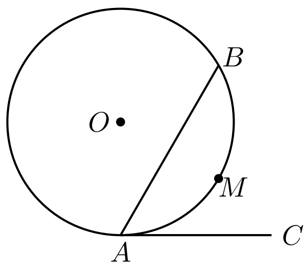
$\because\quad \angle ACE=\angle EAN,\quad \angle FDA=\angle FAM$（弦切角定理的推论），

又 $\because\quad \angle EAN=\angle FAM$，

$\therefore\quad \angle ACE=\angle FDA,\quad CE \mathbin{/\!/} FD$



第 1 题



第 2 题

练习

1. 如图，$\angle BAC$ 是 $\odot O$ 的弦切角，已知 $\angle BAC=37^\circ30'$，求 $\angle AOC$ 的度数.

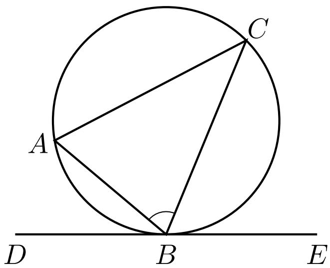
2. 已知 $\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的弦，AC 是 $\odot O$ 的切线，A 是切点，M 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，求证 M 到 AB 和 AC 的距离相等.

3. 如图，直线 DE 切 $\odot O$ 于 B 点，$\angle CBE=67^\circ$，$\angle C=50^\circ$，求 $\angle ABC$ 的度数.

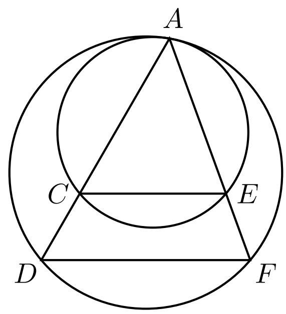
4. 以 3cm 长的线段为弦求作一条弧，使它所含的圆周角是 52°（只要求画出图形）.

5. 两圆内切于 A，从 A 作二条直线，一条与两圆分别交于 C、D，另一条与两圆分别交于 E、F，求证：$CE /\!/ DF$.

6. 两圆外切于 A 点，过 A 点作一条直线分别交两圆于 C、D，过 C、D 分别作两圆的切线 CP 和 DQ，求证 $CP /\!/ DQ$.



第 3 题



第 5 题

三、圆幂定理

切割线定理

过圆外一点作圆的切线和割线，这点到割线两交点间的距离的乘积等于这点到切点的距离的平方.

已知：P 为 $\odot O$ 外一点，直线 PT 与 $\odot O$ 相切于 T 点，割线 PAB 与 $\odot O$ 相交于 A、B 两点（图 4.60）.

求证：$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$.

证明： 作弦 $\overline{AT}$、$\overline{BT}$，在 $\triangle PAT$ 和 $\triangle PTB$ 中，

$\because$ $\angle P$ 是公共角，$\angle ATP = \angle TBP$（弦切角定理的推论），

$\therefore$ $\triangle PAT \backsim \triangle PTB$，$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \dfrac{\overline{PT}}{\overline{PB}}$

$\therefore$ $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$.

相交弦定理

圆内两条相交弦中，每条弦被交点分成的两条线段的乘积相等.

如图 4.61，$\odot O$ 的两条弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 相交于 P，则 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$（请同学自己完成证明）.

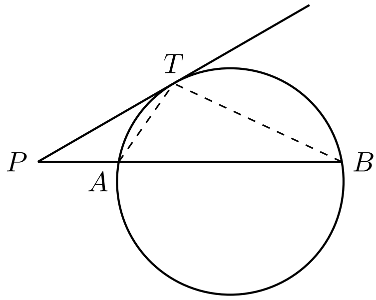


图 4.60

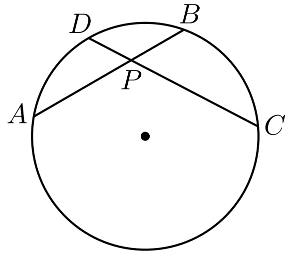


图 4.61

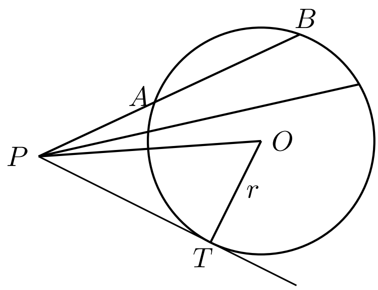


图 4.62

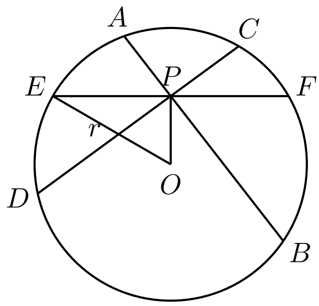


图 4.63

让我们观察图 4.62 与图 4.63，由切割线定理和相交弦定理，不难看出不论 P 点在圆内或圆外，通过它的任一条圆的割线交圆于 A、B 两点，只要 P 点的位置定了，则乘积 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ 都是定值.

设定值为 k，当 P 点在圆外时（图 4.62），由切割线定理知.

$$k=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PT}^2=\overline{PO}^2-r^2 \quad (r\text{ 是 }\odot O\text{ 的半径})$$

当 P 点在圆内时（图 4.63），过 P 点作弦 $\overline{EF}\perp OP$，则：

$$k=\overline{PE}\cdot\overline{PF}=\overline{PE}^2=r^2-\overline{OP}^2$$

k 叫做点 P 对于圆的**幂**，P 点若在圆上，显然 $k=0$，总结以上讨论，我们可以得到：

圆幂定理

已知 $\odot(O,r)$，通过一定点 P，作任一条圆的割线交圆于 A、B 两点，则

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=k$$

其中：k 为定值.

1. 当 P 点在圆外时，$k = \overline{PO}^2 - r^2$，

2. 当 P 点在圆内时，$k = r^2 - \overline{PO}^2$，

3. 当 P 点在圆上时，$k = 0$.

例 4.20 求证：相交两圆的公共弦的延长线上一点，到两圆的切线长相等.

已知：如图 4.64，$\odot O$ 与 $\odot O'$ 相交于 A、B，P 是 $\overline{BA}$ 延长线上任一点，PC，PC' 分别和 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 相切于 C、C'.

求证：$\overline{PC} = \overline{PC'}$

证明： $\because$ PC 和 $\odot O$ 相切于 C 点，PAB 是 $\odot O$ 的割线

$\therefore$ $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$（切割线定理).

同理，$\overline{PC'}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

$\therefore$ $\overline{PC}^2 = \overline{PC'}^2$，$\overline{PC} = \overline{PC'}$.

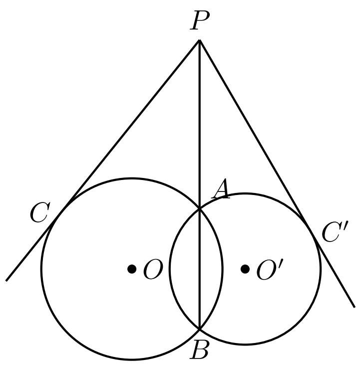


图 4.64

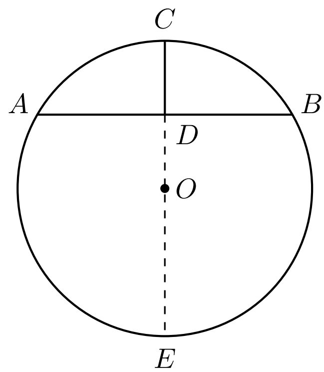


图 4.65

例 4.21 如图 4.65. $\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的弦，D 是 $\overline{AB}$ 的中点，$CD \perp \overline{AB}$ 和 $\odot O$ 相交于 C，已知 $\overline{AB} = 12\text{cm}$，$\overline{CD} = 3\text{cm}$，求 $\odot O$ 的半径 r.

解： 延长 CD 交 $\odot O$ 于 E，则 $\overline{CE}$ 为 $\odot O$ 的直径，由相交弦定理有：

$$\overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DC} \cdot \overline{DE}$$

$\because$ $\overline{DC} = 3\text{cm}$，$\overline{DE} = (2r - 3)\text{cm}$，$\overline{DA} = \overline{DB} = 6\text{cm}$，

$\therefore$ $6 \times 6 = 3(2r - 3)$.

解方程，得 $r = 4\frac{1}{2}$.

答：$\odot O$ 的半径等于 4.5cm.

例 4.22 已知两条线段 a、b, 求作一条线段 x, 使 x 为 a、b 的比例中项，即 $x^2 = a \cdot b$.

作法（图 4.66）

1. 作 $\overline{AP} = a$,
2. 延长 $\overline{AP}$ 到 B, 使 $\overline{PB} = b$.
3. 以 $\overline{AB}$ 为直径作半圆.
4. 过 P 点作 $\overline{AB}$ 的垂线 PC 交半圆于 C 点，则 $\overline{PC}$ 就是所求作的线段 x.

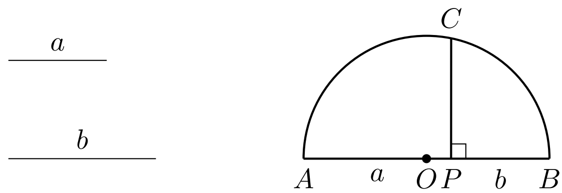


图 4.66

证明： 由圆幂定理有：

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{OC}^2 - \overline{OP}^2 = \overline{PC}^2$$

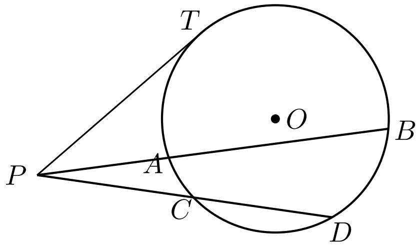
$\because$ $\overline{PA} = a$, $\overline{PB} = b$（作图）

$\therefore$ $\overline{PC}^2 = a \cdot b$, $\overline{PC}$ 就是所求作的线段 x.

练习

1. 如图，PAB, PCD 都是 $\odot O$ 的割线，已知，$\overline{PC} = 6\text{cm}$, $\overline{PD} = 12\text{cm}$, $\overline{PA} = 4\text{cm}$, 求 $\odot O$ 的切线 $\overline{PT}$ 的长，和弦 $\overline{AB}$ 的长.
2. 已知，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于一点 A, P 点是两圆内公切线上任一点，过 P 点分别引两圆的割线与 $\odot O_1$ 相交于 A、B 两点，与 $\odot O_2$ 相交于 C、D 两点，求证：$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.
3. 如果两圆相交，则公弦的延长线等分外公切线两切点间的线段.
4. 求作线段 $x = \sqrt{15}$ 单位长（提示 $15 = 3 \times 5$).
5. 已知 $\odot(O, 3\text{cm})$, $\overline{OP_1} = 2\text{cm}$, $\overline{OP_2} = 3\text{cm}$, $\overline{OP_3} = 4\text{cm}$, 分别求 P_1、P_2、P_3 三点对 $\odot O$ 的幂.

6. PT、PU 是 P 点分别到两个同心圆的切线. U 点是大圆的切点, T 是小圆上的切点, 如果 $\overline{PT}$ 的延长线交大圆于 Q 点, 求证 $\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{TQ}^2$.



第 1 题

四、圆的内接四边形

我们知道, 每一个三角形都有一个外接圆, 现在我们要问是否每一个四边形都有一个外接圆呢? 答案是很明显的, 并不是每个四边形都有一个外接圆, 这个事实, 同学们可自已举例说明. 下面我们来学习四边形内接于圆的条件, 几个点在同一圆上, 我们常说这几点共圆.

定理

四边形的四个顶点共圆的充分必要条件是四边形的内对角互补.

(一) 必要性

已知: 四边形 $ABCD$ 的四个顶点共圆.

求证: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$

证明: 由圆周角定理,

$$\begin{aligned}(\angle A+\angle C)\text{的度数} &= \angle A\text{的度数}+\angle C\text{的度数}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BCD}\text{的度数}+\overset{\frown}{BAD}\text{的度数}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\text{周角的度数})\\ &= \frac{1}{2}\times 360° = 180°\end{aligned}$$

同理可证: $\angle B + \angle D = 180°$.

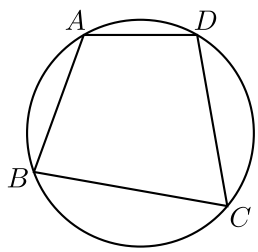


图 4.67

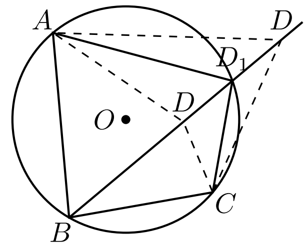


图 4.68

（二）充分性

已知：四边形 $ABCD$，且 $\angle B+\angle D=180°$.

求证：A、B、C、D 共圆

证明： 由于 $\angle B+\angle D=180°$，

$\therefore\quad \angle B<180°$

A、B、C 三点不在同一条直线上，于是有 $\odot O$ 通过 A、B、C 三点（图 4.68），如果 D 点不在 $\odot O$ 上，那么只有下面两种可能：

1. D 点在 $\odot O$ 内，延长对角线 $\overline{BD}$ 与 $\odot O$ 相交于 D_1 点，于是，$\angle ADC>\angle AD_1C$. 但 $\angle AD_1C+\angle B=180°$

   $\therefore\quad \angle ADC+\angle B>180°$.

   这与已知 $\angle B+\angle D=180°$ 相矛盾，所以 D 点不能在 $\odot O$ 内.

2. D 点在 $\odot O$ 外，这时 D_1 点在对角线 $\overline{BD}$ 上，于是，$\angle ADC<\angle AD_1C$. 但 $\angle AD_1C+\angle B=180°$

   $\therefore\quad \angle ADC+\angle B<180°$.

   这又与 $\angle B+\angle D=180°$ 矛盾，所以 D 点不能在 $\odot O$ 外.

由 1、2 可知假设“D 不在 $\odot O$ 上”是错误的，因而 D 必在 $\odot O$ 上，充分性得证.

推论 1

四边形的四个顶点共圆的充分必要条件是一个外角等于其内对角.

已知四边形 $ABCD$，$\angle EAD$ 是它的一个外角（图 4.69），推论 1 要求证明：

$$A,B,C,D\text{四点共圆}\Longleftrightarrow\angle EAD=\angle C$$

请同学自证这个推论.

推论 2

如果两个点在另外两个点所在直线的同旁，并且和另外两点的连线所夹的角相等，那么这四点共圆.

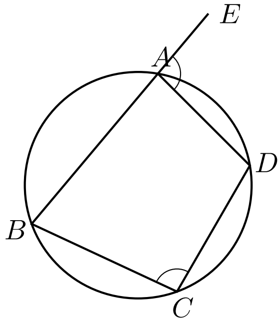


图 4.69

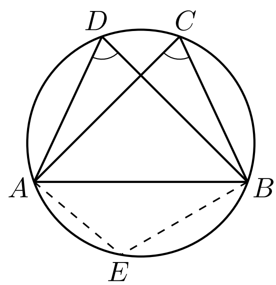


图 4.70

已知：C、D 两点在 A、B 两点所在直线的同旁，且 $\angle ACB = \angle ADB$(图 4.70).

求证：A、B、C、D 四点共圆.

证明： 因为 A、B、C 三点不在同一条直线上，经过 A、B、C 三点作一圆，在此圆上取一点 E, 且使 E 点居于 AB 的另一旁，作 $\overline{AE}$、$\overline{BE}$, 则 $AEBC$ 是圆内接四边形.

$\therefore \quad \angle ACB + < E = 180^\circ$（圆内接四边形内对角互补）

但 $\angle ADB + \angle E = 180^\circ$

$\therefore \quad D$ 点在 A、E、B、C 四点所在的圆上. A、B、C、D 四点共圆.

例 4.23 已知 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 三边上的任意一点，通过 A、E、F 与通过 C、D、E 的圆如果还相交于另一点 G （图 4.71(1)）.

求证：B、D、G、F 四点共圆.

证明： 由于 A、E、G、F 与 C、D、G、E 都共圆，

$\therefore \quad \angle AFG = \angle GEC, \quad \angle GEC = \angle GDB$ (推论 1)

$\therefore \quad \angle AFG = \angle GDB$, B、D、G、F 四点共圆（推论 1）.

在图 4.71(2) 中，通过 A、E、F 与通过 C、D、E 的圆的另一个交点在 $\triangle ABC$ 外，结论仍然成立，请同学自证.

例 4.24 已知锐角 $\triangle ABC$ 的高 AD、BE、CF 交于 H 点，作 $\triangle DEF$. 求证

1. $\overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}$.

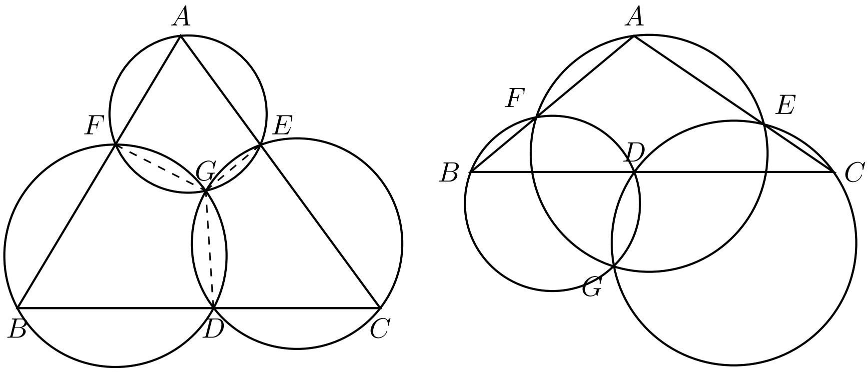


图 4.71

2. AD、BE、CF 分别是 $\triangle DEF$ 的三内角平分线.

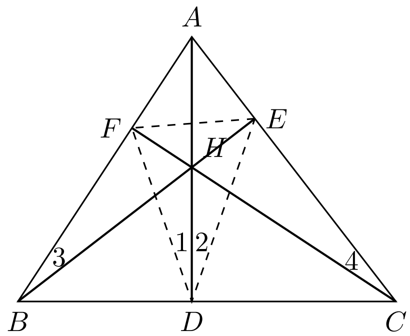


图 4.72

证明:

1. $\because \quad \angle AFC = 90^\circ, \quad \angle ADC = 90^\circ$

   $\therefore \quad \angle AFC = \angle ADC$，$A$、$F$、$D$、$C$ 四点共圆（推论 2）.

   同理可证：B、C、E、F 四点也共圆.

   $\therefore \quad \overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}, \quad \overline{HC} \cdot \overline{HF} = \overline{HB} \cdot \overline{HE}$（圆幂定理）

   $\therefore \quad \overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}$

2. 在四边形 $BDHF$ 中，$\angle BDH + \angle BFH = 180^\circ$,

   $\therefore \quad B$、D、H、F 四点共圆.

   同理：C、E、H、D 四点也共圆.

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3, \quad \angle 2 = \angle 4$（圆周角定理推论）.

又 $\because \quad B$、C、E、F 四点共圆，

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 4, \quad \angle 1 = \angle 2$, 即 AD 平分 $\angle FDE$.

同理可证：CF 平分 $\angle DFE$; BE 平分 $\angle FED$.

请同学们想想，如果 $\triangle ABC$ 是钝角三角形或直角三角形，这结论是否还成立？

由例 4.24 我们可看到，当我们要论证线段与线段之间，角与角之间的某些关系时，利用四点共圆的充要条件会带来方便.

练习

1. 如图，O 是 $\triangle ABC$ 的外心，M、N、P 是三边上的中点，试找出 A、B、C、M、N、P、O 中，哪四点是共圆的.

2. 如图，$\triangle ABC$ 各边上的高 AD、BE、CF 相交于 H, 试找出 A、B、C、D、E、F、H 中，哪四点是共圆的？

3. 下列四边形中，哪一类四边形的四个顶点一定共圆？哪一类的四边形四个顶点一定不共圆？

   (a) 矩形　　(d) 等腰梯形

   (b) 平行四边形

   (c) 菱形　　(e) 有一个角是直角的梯形

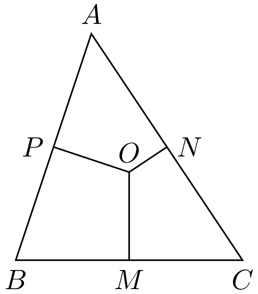
4. 已知 $\triangle ABC$, $BE \perp AC$ 于 E 点, $CF \perp AB$ 于 F 点, 求证: $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

5. 已知直线 $B'C'$ 平行于一圆内接四边形 $ABCD$ 的一边 $\overline{BC}$, 且分别与 $\overline{AB}, \overline{DC}$ 或它们的延长线相交于 B'、C' 两点，求证：A、D、B'、C' 四点共圆.

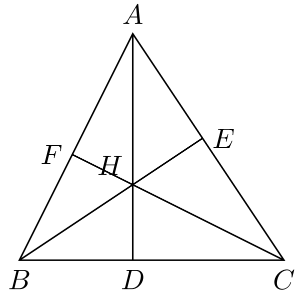
习题 4.3

1. 一条弦与圆的半径相等，求它所对的圆心角和圆周角的度数.

2. 求证：以等腰三角形的一腰为直径所作的圆平分底边.



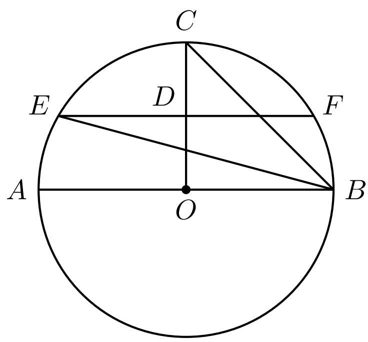
第 1 题



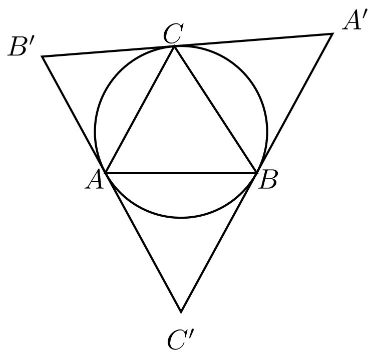
第 2 题

3. 圆内接四边形 $ABCD$, 设 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$ 的中点分别是 M、N、P、Q, 求证：$MP \perp NQ$.

4. 两圆相交于 A、B 两点，过 A 点任画一条割线分别与两圆相交于 C、D. 求证：$\angle CBD$ 的大小与割线的位置无关.



第 5 题



第 6 题

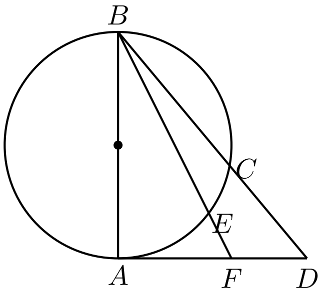
5. 已知 $\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的直径, 半径 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, 过 $\overline{OC}$ 的中点 D 作弦 $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, 求证：$\angle CBE = 2\angle ABE$.

6. 如图，$\triangle ABC$ 内接于一圆，$\angle A = 57°$, $\angle B = 66°$, 过 A、B、C 作圆外切三角形 $A'B'C'$, 求 $\triangle A'B'C'$ 的三内角的大小.

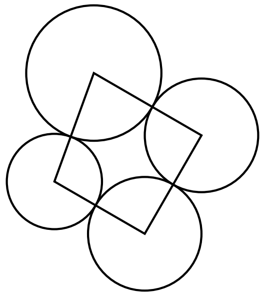
7. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$, 以 $\overline{BC}$ 为直径作 $\odot O$ 交斜边于 D 点，再取 AC 的中点 E, 求证 $\odot O$ 与 DE 相切.

8. 如图，$\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的直径，AD 是 $\odot O$ 的切线，FB 与 DB 是 $\odot O$ 的割线，求证 $\overline{BE} \cdot \overline{BF} = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$ （提示：先证 D、C、E、F 共圆）.

9. 已知等腰梯形 $ABCD$ 外切于 $\odot O$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\angle B = 30°$. 中线 $\overline{EF} = 1$cm, 求 $\odot O$ 的半径 (提示: 外切梯形的高等于 $\odot O$ 的直径).



第 8 题



第 10 题

10. 如图: 四圆轮中, 每相邻两个外切, 求证

 (a) 顺次连结四圆心所成的四边形必有内切圆.

 (b) 四个切点共圆.

11. 两圆相交于 P、Q 两点, 一条外公切线分别切它们于 A、B 两点, 求证: $\angle APB + \angle AQB = 180°$.

12. 如果 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, H 是它的垂心, 求证: H 点分别以 BC、AC、AB 为轴的对称点是相应边上高的延长线与 $\odot O$ 的交点.

13. 已知 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, $\overline{BC}$ 边上高的延长线与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 H_1 点, 求证: BC 平分 $\angle HBH_1$ 和 $\angle HCH_1$.

14. 如果 $\triangle ABC$, $\angle A$ 的平分线与 $\overline{BC}$ 相交于 D 点, 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 E 点, 那么 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE}$

15. 已知: 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形, E 是它的对角线 $\overline{BD}$ 上一点, 并且 $\angle BAE = \angle CAD$, 求证

 (a) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BE}$,

 (b) $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{ED}$,

 (c) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

 把 (c) 中结论用普通语言叙述为一条定理.

16. 已知圆内接四边形 $ABCD$, P、Q 分别是 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$ 的中点, 求证: $\overline{PQ}$ 与 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交成等角.

第四节　圆与正多边形

一、圆的内接正多边形与外切正多边形

各条边相等，各个角也相等的凸多边形，叫做正多边形．正多边形按它的边数（或角数）分为正三角形（即等边三角形），正四边形（即正方形），正五边形、正六边形……

定理

如果把圆分成 n 等分，那么，顺次连结各分点所得的多边形是圆的内接正 n 边形；经过各分点作圆的切线，所组成的多边形是圆的外切正 n 边形．

已知：$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 为 n 等分某圆周的分点，过 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$，作圆的切线交成 n 边形 $A_1'A_2'A_3'\cdots A_n'$ (图 4.73).

求证：n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 和 $A_1'A_2'A_3'\cdots A_n'$ 都是正多边形.

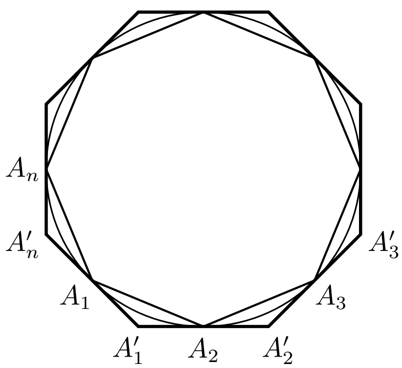


图 4.73

证明： 由于 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 是圆的 n 个等分点，

$\therefore\quad \overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \cdots = \overset{\frown}{A_nA_1},\quad \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots = \overline{A_nA_1}$

又 $\because\quad \angle A_1, \angle A_2, \angle A_3, \ldots, \angle A_n$ 的度数都等于 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 的度数的 $(n-2)$ 倍的一半.

$\therefore\quad \angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \cdots = \angle A_n$，$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 是正 n 边形.

由于在 $\triangle A_1'A_1A_2, \triangle A_2'A_2A_3, \ldots, \triangle A_n'A_nA_1$ 中，$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots =$

$\overline{A_nA_1}$，且

$$\begin{aligned}\angle A_1'A_1A_2 &= \angle A_1'A_2A_1\\ &= \angle A_2'A_2A_3 = \angle A_2'A_3A_2 \quad (\text{弦切角定理及其推论})\\ &= \cdots = \angle A_n'A_nA_1 = \angle A_n'A_1A_n\end{aligned}$$

$\therefore \quad \triangle A_1'A_1A_2 \cong \triangle A_2'A_2A_3 \cong \cdots \cong \triangle A_n'A_nA_1$

因此：

$$\angle A_1' = \angle A_2' = \angle A_3' = \cdots = \angle A_n'$$
$$\overline{A_1'A_2'} = \overline{A_2'A_3'} = \cdots = \overline{A_n'A_1'}$$

$\therefore \quad A_1'A_2'A_3'\cdots A_n'$ 是正多边形.

根据上述定理，我们只要把圆 n 等分就可作出圆的内接正 n 边形了，但能否只用直尺圆规将一个圆 n 等分呢？这个问题并不简单，事实上有的是不可能的. 下面我们举例给出圆内接正六边形、正三角形、正方形的作法.

例 4.25 求作圆内接正六边形.

已知：$\odot O$(图 4.74).

求作：$\odot O$ 的内接正六边形.

作法

1. 作直径 $\overline{AD}$.
2. 分别以 A、D 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径画弧，分别交 $\odot O$ 于 B、F、C、E 四点
3. 作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$、$\overline{FA}$, 则 $ABCDEF$ 就是 $\odot O$ 的内接正六边形.

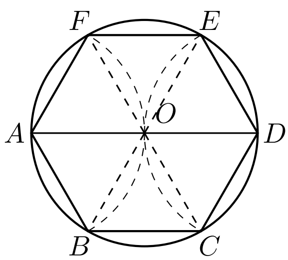


图 4.74

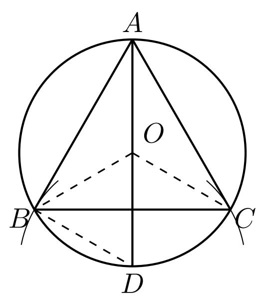


图 4.75

证明： 由作法可知，$\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB}$,

$\therefore\quad \triangle OAB$ 是等边三角形. $\angle AOB = 60°$.

同理: $\angle COD = 60°$,

$\therefore\quad \angle BOC = 180° - \angle AOB - \angle COD = 60°$.

同理: $\angle EOF = \angle DOE = \angle AOF = 60°$,

$\therefore\quad \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{EA}$, $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形（本节定理).

例 4.26 求作圆内接正三角形.

已知: $\odot O$ (图 4.75).

求作: $\odot O$ 的内接正三角形.

作法

1. 作直径 $\overline{AD}$.
2. 以 D 为圆心, 以 $\odot O$ 的半径为半径作弧交 $\odot O$ 于 B、C 两点.
3. 作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$, 则 $\triangle ABC$ 就是 $\odot O$ 的正三角形.

证明: 由作法可知, $\overline{BD} = \overline{OB} = \overline{OD}$,

$\therefore\quad \triangle OBD$ 是等边三角形. $\angle BOD = 60°$.

同理: $\angle COD = 60°$.

$\therefore\quad \angle AOB = \angle AOC = 180° - 60° = 120°$.

$\therefore\quad \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC,\quad \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC}$

$\therefore\quad \triangle ABC$ 为 $\odot O$ 的内接正三角形（本节定理).

例 4.27 求作 $\odot O$ 的内接正方形.

已知: $\odot O$(图 4.76).

求作: $\odot O$ 的内接正方形.

作法

1. 作直径 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$, 使 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
2. 作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$, 则 $ABCD$ 就是 $\odot O$ 的内接正方形.

证明: $\because\quad AC$ 和 BD 垂直于 O 点,

$\therefore\quad \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA,\quad \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$

$\therefore\quad ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接正方形（本节定理).

作出了圆的内接正方形 $ACEG$ 以后（图 4.77), 再分别作直径垂直于每一边, 就可以作出圆内接正八边形, 一般只要我们作出了圆内接正 n 边形, 再分别作直径垂直各边, 就很容易作出圆内接正 $2n$ 边形.

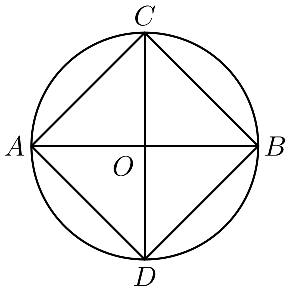


图 4.76

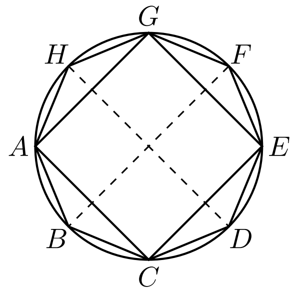


图 4.77

如果一个正 n 边形不容易或者不可能用圆规和直尺作出. 我们可用量角器近似地作出一个圆心角等于 $\dfrac{360^\circ}{n}$，这个圆心角所对的弧就约是整个圆周的 $\dfrac{1}{n}$，所对的弦就约是圆内接正 n 边形的一边，以这条弦为半径，从圆上一点起在圆上依次截取，就可以近似地把圆分成 n 个等分，依次连结各分点就可以得到所求的圆内接正 n 边形. 实际上，用这种方法作图也就可以了.

练习

以下作图只要求作出图形.

1. 作半径是 1.5cm 的圆内接正六边形.
2. 作半径是 2cm 的圆内接正三边形.
3. 作半径是 2.5cm 的圆内接正方形.
4. 作半径是 3cm 的圆内接正十二边形.
5. 用量角器近似地作半径是 2cm 的圆内接正五边形.

二、正多边形的外接圆和内切圆

我们已经知道，一个多边形并不一定有外接圆和内切圆. 现在要问，是否每一个正多边形都有外接圆和内切圆呢?

定理

任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆.

已知：$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 是正多边形（图 4.78）.

求证：它有外接圆和内切圆，且二圆同心.

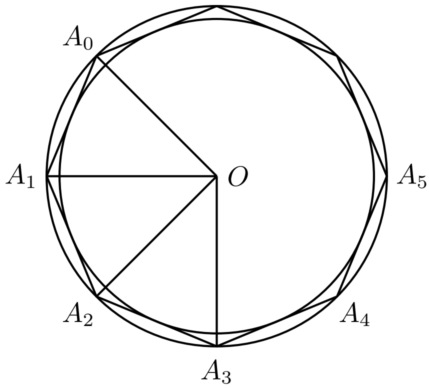


图 4.78

证明: 首先, 过 A_n, A_1, A_2 三点作一圆 $\odot O$, 再分别作 $\overline{OA_n}, \overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}, \ldots$. 显然，$\triangle DA_nA_1$ 和 $\triangle OA_1A_2$ 都是全等的等腰三角形（SSS）.

$\therefore \quad A_1O$ 是 $\angle A_nA_1A_2$ 的平分线.

又 $\because \quad \angle A_nA_1A_2 = \angle A_1A_2A_3$,

$\therefore \quad \angle OA_2A_1 = \angle OA_1A_2 = \frac{1}{2}\angle A_nA_1A_2 = \frac{1}{2}\angle A_1A_2A_3$,

因此：A_2O 是 $\angle A_1A_2A_3$ 的平分角线，$\angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3$,

又 $\because \quad \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}, \quad \overline{OA_2} = \overline{OA_2}$,

$\therefore \quad \triangle OA_1A_2 \cong \triangle OA_2A_3$ (SAS), $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$

这就是说 A_3 在所作的 $\odot O$ 上.循此下去,同样可证明正多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的其它各顶点也在 $\odot O$ 上.

其次，有了外接圆 $\odot O$，圆心 O 到各边的距离便彼此相等，这就是说，以 O 为圆心，O 到一边的距离为半径必可作一圆和各边都相切，此圆即是正多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的内切圆（图 4.78）.

正多边形的外接圆和内切圆的公共圆心，叫做**正多边形的中心**；外接圆的半径，叫做**正多边形的半径**；内切圆的半径，叫做正多边形的**边心距**；正多边形每一边所对的外接圆的圆心角，叫做**正多边形的中心角**.

如图 4.79, $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 是正 n 边形，$\odot(O,r)$ 是它的外接圆，$\odot(O,d_n)$ 是它的内切圆，O 为它的中心，r 是它的半径，d_n 是它的边心距. 设正 n 边形的边长为 a_n, 半径长为 r, 边心距为 d_n, 这三者有下面的勾股关系.

$$r^2 = d_n^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$

由于边数相同的正多边形的对应角都相等；正多边形的各边相等，所以边数相同的正多边形的对应边成比例. 因此，我们可得下面的定理.

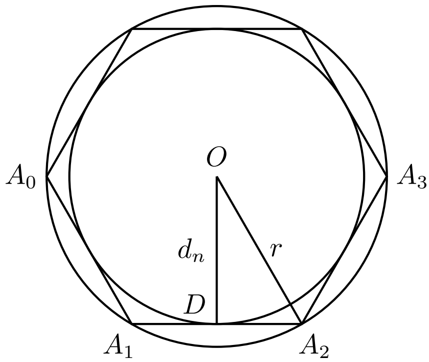


图 4.79

定理

边数相同的正多边形都是相似形.

例 4.28 正多边形的面积，等于它的周长和边心距乘积的一半.

已知：正多边形的面积 S, 周长是 p, 边心距是 d.

求证：$S=\dfrac{1}{2}pd$

证明： 如图 4.80, 设 $\overline{AB}$ 是正 n 边形的一边，O 是这个正多边形外接圆圆心，那么

$$\triangle OAB\text{的面积}=\frac{1}{2}d\times\overline{AB}$$

$\therefore\quad S=\triangle OAB\text{的面积}\times n=\dfrac{1}{2}d\times\overline{AB}\times n$

$\because\quad \overline{AB}\times n=p$

$\therefore\quad S=\dfrac{1}{2}pd.$

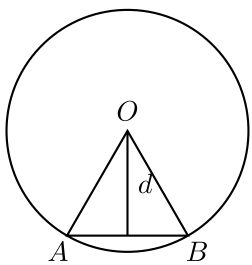


图 4.80

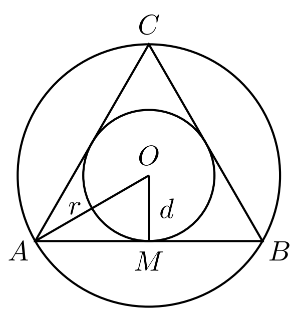


图 4.81

例 4.29 已知正三角形的边长为 a. 求它的外接圆半径 r 和它的内切圆半径 d.

证明： 如图 4.81，设 O 是正 $\triangle ABC$ 的中心，$OM \perp \overline{AB}$ 于 M，则 $\overline{OA} = r$，$\overline{OM} = d$，$\angle OAM = \dfrac{1}{2}\angle CAB = 30^\circ$

在直角三角形 OAM 中，$r = 2d$，$\overline{AM} = \dfrac{a}{2}$

$\therefore \quad (2d)^2 = d^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

解之得：$d = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a.$

于是，$r = 2d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

答：内切圆半径是 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$，外接圆半径是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a.$

练习

1. 求下列正多边形的中心角的度数：

   (a) 正三角形；　(c) 正五边形．　(e) 正十边形；

   (b) 正方形；　(d) 正六边形；　(f) 正 n 边形．

2. 已知 $\odot(O, r)$，求它的内接正六边形，内接正方形，内接正三角形的边长．

3. 求证正五边形的所有对角线都相等．

三、圆的周长和面积

由于圆被 n 等分后，顺次连结各分点，便得到一个 n 边形，如果再把这 n 段弧的中点取出来，圆上便出现了 $2n$ 个分点，而顺次连结这个 $2n$ 分点所得到的正 $2n$ 边形，便包围着原来的正 n 边形（图 4.82），那么，这个正 $2n$ 边形的周长和面积都比原来的正 n 边形的周长和面积大，如此下去，我们还可继续得出圆内接正 $4n$ 边形、正 $8n$ 边形……我们可以看到这样的圆的内接正 n、$2n$、$4n$、$8n$、……边形的边数越增长，它们的周长和面积就越逼近圆的周长和面积．这样一来，当已知圆的半径时，我们便可计算它的内接正 n、$2n$、$4n$、$8n$、……边形的周长和面积，作为精确度不同的圆周长和圆面积的近似值．

现在我们来举例说明，半径是一个单位长的圆内接正 4、8、16、32、64 边形的周长的计算方法．

如图 4.82，设 $\overline{A_1A_2}$ 是半径为 1 个单位长的圆内接正 n 边形的一边，其长度记为 a_n，又设 B 是 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 的中点，那么，$\overline{A_1B}$ 就是圆内接正 $2n$ 边形的一

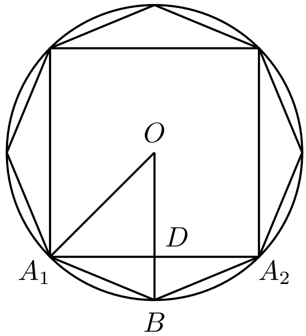


图 4.82

边，其边长记为 a_{2n}, 于是，

$$\begin{aligned}
a_{2n} = \overline{A_1B} &= \sqrt{\overline{A_1D}^2 + \overline{DB}^2} \\
&= \sqrt{\overline{A_1D}^2 + (\overline{OB} - \overline{OD})^2} \\
&= \sqrt{\overline{A_1D}^2 + \left(\overline{OB} - \sqrt{\overline{OA_1}^2 - \overline{A_1D}^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\overline{A_1D}^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \overline{A_1D}^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \overline{A_1D}^2}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}
\end{aligned}$$

$a_4 = \sqrt{2}$, 代入上面公式可得：

$$a_8 = 0.7653668, \quad a_{16} = 0.3901804, \quad a_{32} = 0.1960339, \quad a_{64} = 0.098135$$

设 ℓ_n 是半径为 1 个单位长的圆内接正 n 边形的周长，则可算出：

$$\ell_4 = 5.6568542, \quad \ell_8 = 6.1229344, \quad \ell_{16} = 6.2428864,$$

$$\ell_{32} = 6.2730848, \qquad \ell_{64} = -6.2806426.$$

现在我们再来计算 ℓ_n 与直径长的比值.

$$\frac{\ell_4}{2} = 2.8284271, \qquad \frac{\ell_8}{2} = 3.0614672,$$

$$\frac{\ell_{16}}{2} = 3.121443, \qquad \frac{\ell_{32}}{2} = 3.1365424,$$

$$\frac{\ell_{64}}{2} = 3.1403213.$$

我们看到这些比值，随着 n 的增加，就会愈来愈逼近圆周长与直径的比值. 对任何圆来说，圆周长与直径长的比是一个常数，这个常数就是圆周率 π. 我们用上述方法就能任意精确地算出 π 的近似值. 圆周率 π 的精确值是一个永远写不完的无限不循环小数.

$$\pi = 3.14159265358979323846\cdots$$

应用时常根据实际需要取 π 的近似值.

我国古代的数学家对于圆周率的研究有很大的贡献. 三国魏时刘徽就用我们上面的计算方法，从圆内接正六边形开始一直算到圆内接正 192 边形，得出 $\pi = 3.14$. 刘徽是世界上计算 π 的值精确到 0.01 的第一人. 继他以后，南北朝时的祖冲之算出 π 值，在 3.1415926 和 3.1415927 之间并且用分数 22/7 和 355/113 来表示 π 的近似值. 这两个分数分别叫做约率和密率. 祖冲之的密率直到一千多年后，才为欧洲人鄂图和安托尼兹所知.

如果圆周长用 C 表示，半径用 r 表示，那么，从 $\dfrac{C}{2r} = \pi$，就可推出下面的**圆周长公式**

$$C = 2\pi r$$

在半径为 r 的圆上（图 4.83），

$$1^\circ\text{弧的长} = \frac{\text{周长}}{360} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$$

由此，我们可得到计算 n° 弧的弧长公式

$$\ell = \frac{n\pi r}{180}$$

这里 ℓ 表示弧长，n 是弧所含的度数.

我们已经知道**圆的面积公式**

$$S = \pi r^2$$

这里 S 表示圆的面积，r 仍表示圆的半径.

这个公式的来源，我们可作如下说明.

如图 4.83, $\overline{A_1A_2}$ 是圆内接正 n 边形的一边，如果它的周长是 ℓ_n, 边心距是 d_n, 那么，这个正多边形的面积

$$S_n = \frac{1}{2}\ell_n d_n$$

当这个圆的内接正多边形的边数 n 无限增加时，它的面积 S_n 逼近于圆的面积 S; 它的周长 ℓ_n 逼近于圆周长 C, 它的边心距 d_n 逼近于圆的半径 r. 因此，有

$$S=\frac{1}{2}Cr=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times r=\pi r^2$$

一条弧和经过这条弧的端点的两条半径组成的图形, 叫做**扇形** (图 4.84 的阴影部分).

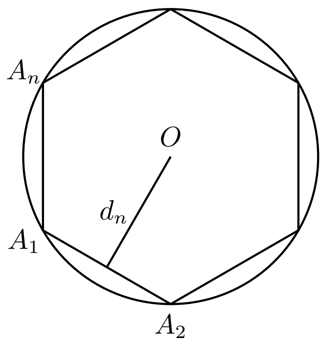


图 4.83

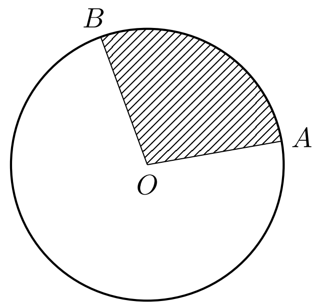


图 4.84

由圆的面积公式，我们可得到扇形面积公式，因为，

$$\text{含有 } 1^\circ \text{ 弧的扇形面积}=\frac{\text{圆面积}}{360}$$

所以圆心角是 n° 的扇形面积计算公式是:

$$S=\frac{n\pi r^2}{360}$$

这里 S 是扇形面积，n 是扇形的圆心角的度数，r 是圆的半径.

由于

$$\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi r}{360}\right)\cdot r$$

而 $\dfrac{n\pi r}{180}$ 是扇形的弧长 ℓ, 所以, 当知道扇形弧长 ℓ 时, 扇形面积公式又可写成:

$$S=\frac{1}{2}\ell r$$

这就是说，**扇形的面积等于它的弧长和半径乘积的一半**.

例 4.30 第一次测定地球半径的是公元前三世纪的希腊天文学家爱拉托斯芬. 他在夏至这一天，当太阳在塞伊城的天顶 (S) 时 (图 4.85)，而在亚历山大城 (A)，测得太阳与天顶的方向差是 7.2°. 他由塞伊城和亚历山大城的实际距离 $\overset{\frown}{AS}$ 算出了地球的半径，问爱拉托斯芬怎样算出地球半径 r 的?

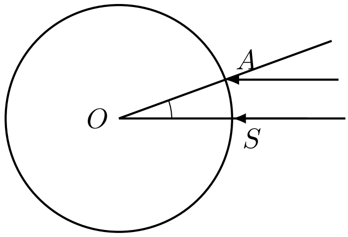


图 4.85

解： 塞伊城和亚历山大城是在同一条子午线 $\overset{\frown}{AS}$ 上，若地球的截面是圆形地心是 O, 太阳的光线是平行的，则 $\angle AOS = 7.2°$.

$\because\quad \overset{\frown}{AS}$的弧长 $= \dfrac{7.2 \times \pi \times r}{180}$

$\therefore\quad r = \dfrac{180}{7.2 \times \pi} \times \overset{\frown}{AS}$

把 $\overset{\frown}{AS}$ 的长度代入上式，就可算出地球的半径.

例 4.31 已知扇形的半径 $r \approx 4.8$cm, 所含的圆心角是 $42°$, 求它的周长和面积（$\pi \approx 3.14$）.

解： 设扇形的弧长为 ℓ, 则：

$$\ell = \frac{42 \times 3.14 \times 4.8}{180} \approx 3.5(\text{cm})$$

$\therefore$　扇形的周长 $= 2r + \ell = 2 \times 4.8 + 3.5 = 13.1(\text{cm})$.

扇形的面积 $= \dfrac{1}{2}\ell r = \dfrac{1}{2} \times 3.5 \times 4.8 \approx 8.4(\text{cm}^2)$

答：扇形周长约是 13.1cm, 面积约为 8.4cm^2.

练习

1. 已知圆的周长 $C \approx 48.5$cm, 求圆的半径 r.
2. 一列火车，火车头上的主动轮的直径约是 1.2 米，如果主动轮每秒钟转 250 次，那么，火车的速度是每小时约多少公里?
3. 圆的半径约是 8.2cm, 圆心角是 $32°30'$, 求圆心角所对的弧长.
4. 已知扇形的半径是 4.2cm, 所含的弧是 $35°$, 求它的周长和面积.

习题 4.4

1. 求作已知圆的外切正六边形.

2. 已知一边，求作正八边形.

3. 我国民间相传有正五边形的近似画法：“九五顶五九，八、五两边分”它的意义如图所示

   (a) 按照图中注明的尺寸，计算这五边形各边的长.

   (b) 用这种方法作边长是 30mm 的正五边形.

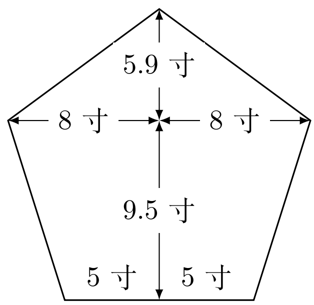


图 4.86

4. 用全等的正多边形的砖铺地面，要砖与砖之间不留空隙，有哪几种正多边形的砖合用?

5. 已知圆的半径为 r. 求外切正三角形、外切正方形、外切正六边形的周长和面积.

6. 求证：正三角形的边心距、半径和高的比是 $1:2:3$.

7. 已知圆的半径是 r, 求证圆的内接正八多边形的周长是 $8\sqrt{2-\sqrt{2}}r$, 面积是 $2\sqrt{2}r^2$.

8. 已知正三角形外接圆面积是 100 平方厘米，求它的内切圆面积.

9. 有一圆管的外直径是 150mm, 内直径是 100mm, 求这圆管的横断面的面积和它的厚度.

10. 已知一圆的半径是 200mm, AB 所对的圆心角是 $45°$, 求 $\overset{\frown}{AB}$ 长和扇形 OAB 的面积.

11. 如图：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$, $\overset{\frown}{ACB}$ 是以 $\overline{AB}$ 为直径的半圆，$\overset{\frown}{ADC}$ 是以 $\overline{AC}$ 为直径的半圆，$\overset{\frown}{CEB}$ 是以 $\overline{CB}$ 为直径的半圆.

    求证：I 的面积 +II 的面积 =III 的面积.

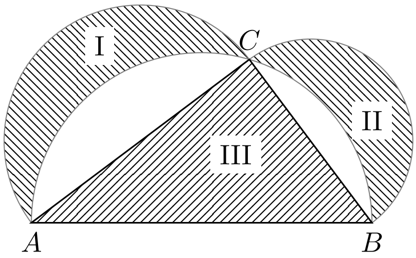


图 4.87

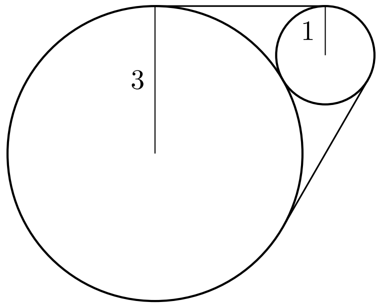


图 4.88

12. 为了把半径是 3cm 和 1cm 的两根圆柱紧紧地捆扎在一起，绕一圈需要多少铅丝?

复习题四

1. 已知两定点 A、B, 分别以 A、B 为圆心，以同一的半径 r $\left(r \geq \frac{1}{2}\overline{AB}\right)$ 作圆，求证这些等圆的交点都在 $\overline{AB}$ 的垂直平分线上.

2. 两圆的半径都是 4cm, 并且一圆过另一圆的圆心，求这两圆的公共弦长.

3. 已知 $\overline{AB}$ 是 O 的直径，以 $\overline{OB}$ 为直径作 O', 过 B 点作直线与 O 相交于 M 点，与 CO' 相交于 N 点. 求证: $\overline{BN} = \overline{MN}$.

4. 已知 $\overline{CD}$ 是 $\odot O$ 的直径，A 为 $\odot O$ 外一点，AT 切圆于 T 点，如果切点 T 与 C 的连线平行于 AO, 求证 AD 与 $\odot O$ 相切.

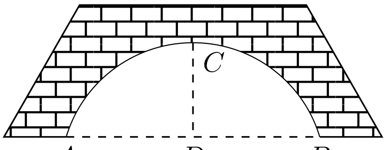
5. 以 O 为圆心作两个同心圆，已知 $\overline{AB}$ 为小圆的直径，过 A、B 两点分别作小圆的切线交大圆于 C、D 两点:（使 C、D 分别在 $\overline{AB}$ 的两侧），证明 C、O、D 三点共线.

6. 若一圆的两条切线交成 60° 角，圆的半径为 r, 求交点到圆心的距离. 若交角为 120°, 交点到圆心的距离又是多少?

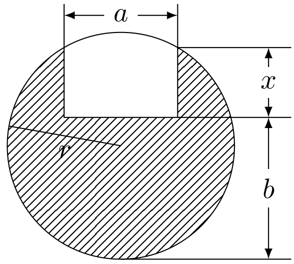
7. 有一桥拱是圆弧 $\overset{\frown}{ACB}$, 桥的跨度 $\overline{AB} = 37.4$ 米，拱高 $\overline{CD} = 7.2$ 米，求拱圈的半径.

8. 如图，一工件的断面，a、b、r 为已知，求 x.

9. 已知 $\overline{AB}$ 为一半圆的直径，直线 ℓ 与半圆相切于 C 点，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 于 D 点，$\overline{AM} \perp \ell$ 于 M 点，$\overline{BN} \perp \ell$ 于 N 点.



第 7 题



第 8 题

求证：$\overline{MC} = \overline{NC}$；$\overline{CD}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{BN}$.

10. 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于 A 点，一直线与 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别相切于 T_1、T_2 两点，并与连心线 O_1O_2 相交于 S 点，

    求证：$\overline{SA}^2 = \overline{ST_1} \cdot \overline{ST_2}$.

11. 已知 $\overline{MN}$ 为一圆的直径，过圆外一点 D 作 $\overline{DA} \perp \overline{MN}$ 于 A 点交圆于 C 点，$\overline{DN}$ 交圆于 P, $\overline{MP}$ 交 $\overline{AD}$ 于 B, 求证：$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$（提示：先证 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$）.

12. 过两相交圆的公弦上的一点 P, 作一条直线交一圆于 A、B 两点与另一圆相交于 C、D 两点，求证：$\overline{AC} : \overline{CP} = \overline{BD} : \overline{BP}$.

13. 设 $\overline{AB}$ 是一圆的直径，由 A、B 两点作弦 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BD}$ 相交于 E 点，求证：$\overline{AE} \cdot \overline{AC} + \overline{BE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}^2$.

    （提示，过 E 作 $EP \perp AB$ 于 P, 寻找共圆点，利用圆幂定理）

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的外角平分线与此三角形的外接圆相交于 D, 求证 $\overline{BD} = \overline{CD}$.

15. 假设两圆互相外切，求证以两圆心之间线段作直径的圆必与前两圆的外公切线相切.

16. 知直角 $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, 过 $\overline{AC}$ 边上一点 D, 作斜边 $\overline{AB}$ 的垂线交斜边于 E 点，交它的外接圆于 G 点，交 $\overline{BC}$ 的延长线于 F 点，求证：$\overline{EG}^2 = \overline{EA} \cdot \overline{EB}$；$\overline{EG}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{EF}$.

17. 求证正三角形内的任一点到三边的距离和等于一边上的高.

18. 求证：圆内接正 n 边形内任一点到各边的距离和等于 n 倍边心距.

19. 已知等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, P 为 $\widehat{BC}$ 上任一点. 求证: $\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$.

20. 从圆外一点 P, 作这个圆的切线 PA, A 是切点, 再从 P 点引圆的割线与圆相交于 B、C, 设 $\angle P$ 的平分线与 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的交点分别是 D、E.
求证: $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{AB}}+\dfrac{\overline{EC}}{\overline{AC}}=1$

21. 已知 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 相离, 连心线与 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 的交点顺次是 A、B、C、D, 直线 PP' 分别与 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 相切于 P、P' 点, 求证: $\overline{PP'}^2=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.

第五章　轨迹与作图

在前面的几章中，我们学习了直线形和圆的有关性质．学习的途径主要是根据图形的定义和已知性质去推演图形的其它性质．这一章，我们将把图形看成点的集合（点集），研究如何根据点所具有的某种性质来求出点集在平面上的形状和位置.

第一节　轨迹

一、轨迹的概念

我们知道，物体在运动中都要经过一定的路线．例如，人在雪地里行走会留下明显的足迹，飞机飞行有一定的航线，地球运行也有它的轨道等等．一般，我们常把物体按某种规律运动的路线叫做物体运动的**轨迹**．在几何中，我们用点表示物体在空间的位置. 这样，一个点在空间按某种规律运动的路线，我们就把它叫做这个点运动的轨迹，这个点就叫做**动点**. 例如，我们用圆规画圆时，圆规的一个脚尖固定不动，而另一个脚上装上的铅笔尖端就可看作一个动点．它和固定的脚尖保持一定的距离运动，所画出的图形就是这个动点的轨迹．我们知道，圆是“同一平面上和某定点的距离等于定长的点的集合”．由此可见，按某种规律运动的点的轨迹，也就是具有某种性质的点的集合.

定义

具有性质 α 的所有点构成的集合，叫做具有性质 α 的点的轨迹.

设 $X=\{$具有性质 α 的点$\}$．由上述定义，当我们要证明某图形 A 是具有某种性质 α 的点的轨迹时，也就是要证明集合 $A=X$．要证明 $A=X$, 就必须从以下两方面进行证明：

1. P 点 $\in A \Rightarrow P$ 点具有性质 α $(P\in X)$.

2. P 点具有性质 α $(P \in X) \Rightarrow P$ 点 $\in A$.

按上述两个方面证明，这是缺一不可的．如果我们只证了第一条，实际上只是说明 A 是 X 的一个子集，并不能断定 $A = X$; 如果只证了第二条，也只是说 X 是 A 的一个子集，同样不能断定 $A = X$, 只有当我们证明了第一条: $A \subseteq X$, 又证明了第二条: $X \subseteq A$, 我们才能断定 $A = X$.

第一条证明了 $A \subseteq X$, 这就是说在图形 A 上的点，都具有性质 α. 没有一点是鱼目混珠的，通常把证这一条叫做证 **轨迹的纯粹性**. 第二条证明了 $X \subseteq A$, 这就是说，具有性质 α 的点都在图形 A 上，没有一点被遗漏掉．通常又把证这一条叫做证**轨迹的完备性**.

由于原命题与逆否命题等价，所以也可以分别去证上述两条的逆否命题，即要证轨迹的纯粹性也可证:

$$P\text{点不具有性质}\alpha \Rightarrow P \notin A$$

要证轨迹的完备性时，也可证:

$$P\text{点} \notin A \Rightarrow P\text{点不具有性质}\alpha$$

练习

1. 叙述两个集合相等的定义.
2. 在证轨迹命题时，为什么即要证轨迹的纯粹性，又要证轨迹的完备性?
3. 如果我们证明了 $\overline{AB}$ 的垂直平分线上的任一点到 A、B 两点的距离相等，能否就说与 A、B 两点距离相等的点的轨迹是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线?

二、基本轨迹

这一小节，我们来学习六个平面上的点的基本轨迹，我们只证了 1 和 4, 其它四个由同学们自证.

基本轨迹 1

与两个已知点距离相等的点的轨迹是连结这两点的线段的垂直平分线.

已知：两定点 A、B, 直线 MN 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线（图 5.1).

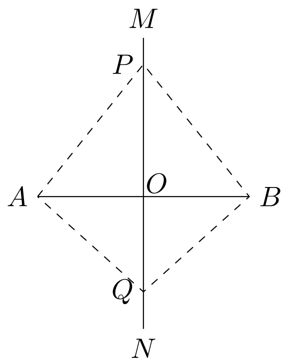


图 5.1

求证：与 A、B 两点距离相等的点的轨迹是直线 MN.

证明：

1. 设 P 是直线 MN 上的任一点，作 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$, 在 $\triangle AOP$ 与 $\triangle BOP$ 中，

   $\because \quad \overline{AO}=\overline{BO}, \quad \angle AOP=\angle BOP, \quad \overline{OP}=\overline{OP}$

   $\therefore \quad \triangle AOP \cong \triangle BOP$ （SAS），$\overline{PA}=\overline{PB}$.

   这就说明了直线 MN 上的点，都与两点的距离相等.

2. 设 Q 为与 A、B 等距的点，即 $\overline{QA}=\overline{QB}$. 过 AB 的中点 O 与 Q 作直线 OQ, 根据等腰三角形的性质，直线 OQ 垂直平分 $\overline{AB}$, 但 $\overline{AB}$ 的垂直平分线只有一条，

   $\therefore \quad MN$ 与 OQ 重合，$Q \in MN$.

于是由 1、2 可知，与 A、B 两点距离相等的点的轨迹是直线 MN.

基本轨迹 2

与已知角的两边距离相等的点的轨迹是这个已知角的平分线.

基本轨迹 3

与两条平行线等距离的点的轨迹是和这两条平行线平行且平分它们的公垂线段的直线.

基本轨迹 4

与一条直线的距离等于定长的点的轨迹，是平行于这条直线，并和这条直线的距离等于定长的两条直线.

已知：直线 $CD \parallel$ 直线 AB；直线 $EF \parallel$ 直线 AB；CD、EF 和 AB 之间的距离都是 d（图 5.2）.

求证：与 AB 的距离等于 d 的点的轨迹是 CD 和 EF.

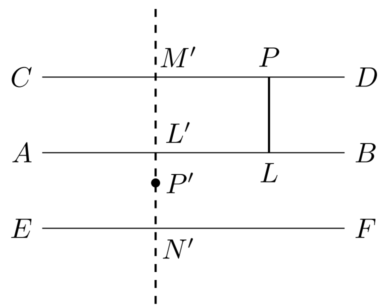


图 5.2

证明：

1. 设 P 是 CD 或 EF 上的任一点．作 $PL \perp AB$ 于 L 点.

   $\because$　$CD \parallel AB$ 且和 AB 的距离等于 d

   $\therefore$　$\overline{PL}$ 是 AB 和 CD 的公垂线段，且 $\overline{PL} = d$.

   这就是说 CD 上的任一点和 AB 的距离都等于 d，同理可证 EF 上的任一点和 AB 的距离也都等于 d.

2. 设 P' 点是不在 CD 或 EF 上的任一点．经过 P' 点作垂直于 AB 的直线，分别交 AB、CD、EF 于 L'、M'、N'，则 $\overline{M'L'} = \overline{N'L'} = d$.

   $\because$　P' 不在 CD 或 EF 上

   $\therefore$　P' 不和 M'、N' 重合

   $\because$　在直线 $M'N'$ 上和 L' 距离等于 d 的点只有 M'、N'

   $\therefore$　$\overline{P'L'} \neq d$

   这就是说，不在 CD 和 EF 上的任何一点和 AB 的距离都不等于 d.

于是由 1、2 可知，和 AB 的距离等于 d 的点的轨迹是 CD 和 EF.

基本轨迹 5

与一个定点的距离等于定长的点的轨迹，是以定点为圆心，定长为半径的一个圆.

基本轨迹 6

与一条定线段的两端连线所夹的角等于定角的点的轨迹，是以这条定线段为弦，所含的圆周角等于定角的两条弧.

以上六个基本轨迹是研究其它轨迹问题的基础，同学们一定要熟记.

例 5.1 求已知圆内等于定长的弦的中点的轨迹.

已知 $\odot(O,r)$ 和定长 a, 且 $a<2r$ （图 5.3).

求 $\odot(O,r)$ 内等于定长 a 的弦的中点的轨迹.

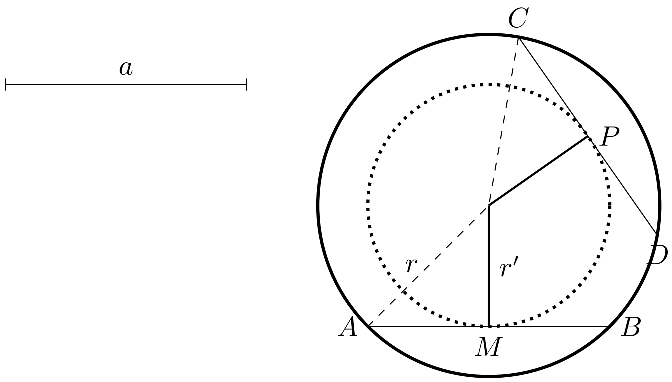


图 5.3

解： 如图 5.3, 设 $\overline{AB}$ 是 $\odot(O,r)$ 内等于定长 a 的弦，M 是它的中点，作 $\overline{OM}$, 那么，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$.

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{a}{2}$$

所以

$$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

设 $r'=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，则 r' 为定长，以 O 为圆心，r 为半径画 $\odot(O,r')$, 那么，$\odot(O,r)$ 内等于定长 a 的弦的中点都在 $\odot(O,r')$ 上. 另外，在 $\odot(O,r')$ 上任取一点 P, 作 $\overline{OP}$, 再作弦 $\overline{CD}\perp\overline{OP}$ 于 P 点，则 P 点是 $\overline{CD}$ 弦的中点，且

$$\overline{CD}=2\overline{CP}=2\sqrt{r^2-r'^2}=2\sqrt{r^2-\left[r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}=2\cdot\frac{a}{2}=a$$

这就是说 $\odot(O,r')$ 上的任一点都是 $\odot(O,r')$ 内等于定长 a 的一条弦的中点, 所以我们所求的轨迹就是 $\odot(O,r')$.

例 5.2　过定圆外一定点引圆的割线，求割线被圆截下的弦的中点的轨迹.

已知：定 $\odot(O,r)$ 和 $\odot O$ 外定点 P（图 5.4）.

求：过 P 点引 $\odot O$ 的割线，被 $\odot O$ 截下的弦的中点的轨迹.

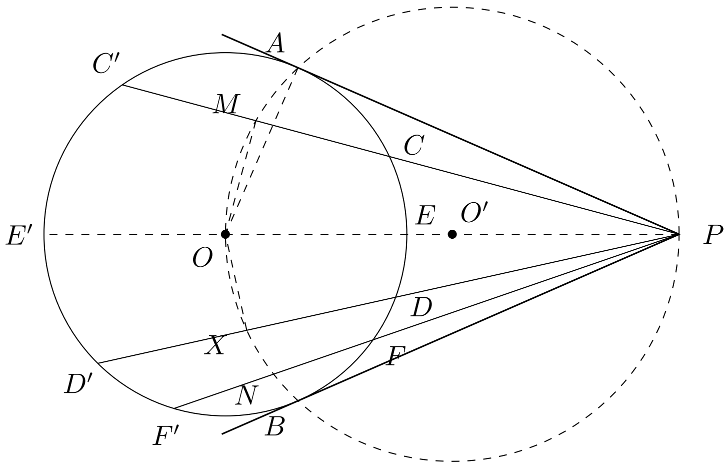


图 5.4

解： 由于轨迹是具有某种性质 α 的点的集合，求轨迹时，可先按照“性质”画出一些点，看看这些点可能构成什么样的图形，如图 5.4, 过 P 点作 $\odot O$ 的割线，与 $\odot O$ 相交于 C、C', 作弦 $\overline{CC'}$ 的中点 M, 我们证割线 PCC' 绕 P 点旋转，看这条变动的割线被 $\odot O$ 截下的弦的中点经过什么路线. 大概可以看出，可能是一段圆弧，究竟是不是圆弧，如果是圆弧，又如何把它作出来，还要进一步分析.

$\because$　M 是弦 $\overline{CC'}$ 的中点，作 $\overline{OM}$

则 $\overline{OM}\perp\overline{CC'}$，即：$\angle OMP$ 是直角.

这就是说，过 P 点作 $\odot O$ 的任一条割线被 $\odot O$ 截下的弦的中点与 O、P 的连线的夹角等于直角，因此，符合题中条件的弦的中点都在以 $\overline{OP}$ 为直径的圆上，以 $\overline{OP}$ 为直径作 $\odot O'$, 我们所作的 $\odot O'$ 是不是就是所求的轨迹呢？这还要看 $\odot O'$ 上有没有不符合条件的点. 设 $\odot O'$ 与 $\odot O$ 相交于 A、B 两点. 显然，在 $\odot O'$ 上 $\widehat{AOB}$ 外的点都是不合条件的（包括 A、B），我们再来看 $\widehat{AOB}$ 上的点是不是都是合条件的点. 在 $\widehat{AOB}$ 上任取一点 X, 设 PX 与 $\odot O$ 相交于 D、D', 作 $\overline{OX}$, 则 $\overline{OX}\perp\overline{DD'}$, 所以 X 是 $\overline{DD'}$ 的中点，这就是说 $\widehat{AOB}$ 上的点都是过 P 点的某条割线被 $\odot O$ 截下的弦的中点.

综合以上分析我们可得：过定圆外一定点引圆的割线，割线被圆截下的弦的中点的轨迹是以定点与圆心间的线段为直径的圆被夹在定圆内的一段弧.

练习

说出下列的点的轨迹是什么图形？并把它们分别画出来.

1. 到一条 5cm 长的线段的两端距离相等的点的轨迹.
2. 通过两定点的圆的圆心的轨迹.
3. 到一个等于 60° 的已知角的两边距离相等的点的轨述:
4. 与两条相交直线等距离的点的轨迹.
5. 与 $\angle AOB$ 的两边都相切的圆的圆心的轨迹.
6. 与距离是 3cm 的两条平行直线 AB、CD 的距离相等的点的轨迹.
7. 与距离是 3cm 的两条平行直线都相切的圆的圆心的轨迹.
8. 和已知直线 AB 的距离等于 2cm 的点的轨迹.
9. 和已知直线 AB 相切，并且半径等于 1.5cm 的圆的圆心的轨迹.
10. 和一条已知直线切于已知点的圆的圆心的轨迹.
11. 与定点 A 的距离等于 2cm 的点的轨迹.
12. 和一条长是 3cm 的 AB 的两端连线所夹的角是直角的点的轨迹.
13. 和一条长是 4cm 的已知线段 AB 的两端连线所夹的角等于 60° 的点的轨迹.

习题 5.1

1. 求下列轨迹

   (a) 以已知 $\overline{AB}$ 为一边的三角形的外心的轨迹.

   (b) 以已知 $\overline{AB}$ 为一边，并且这边上的中线的长等于定长 m 的三角形的重心的轨迹.

   (c) 以 3cm 长的已知 $\overline{AB}$ 为一边，并且面积等于 6 平方厘米的三角形的顶点 C 的轨迹.

   (d) 和一个半径等于定长 r 的 $\odot O$ 外切，并且半径等于 r' 的圆的圆心的轨迹.

(e) 以已知 $\overline{BC}$ 为斜边的直角 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的轨迹.

2. 叙述符合下列条件的点的轨迹.

(a) 平行于三角形的一边而夹在其余两边之间的线段的中点的轨迹.

(b) 平行于已知直线而在已知圆内的弦的中点的轨迹.

3. 作出下列各题中给出的两个点集，向它们的交集各含有几个元素.

(a) 和距离等于 3cm 的两条已知平行线 AB、CD 的距离相等的点集；和直线 AB 上的一定点 E 的距离是 2cm 的点集.

(b) 和已知 $\angle AOB$ 的两边的距离相等的点集；和边 OA 的距离等于 d 的点集.

(c) 和一条长 3cm 的已知 $\overline{AB}$ 的两端连线所夹的角是直角的点集；和 $\overline{AB}$ 所在直线距离等于 2cm 的点集.

4. 求通过 $\odot(O,r)$ 内一定点 P 的弦的中点的轨迹.

5. 求到 $\odot(O,3\mathrm{cm})$ 的圆面等于 4cm 的点的轨迹.

第二节　作图

一、基本作图

在前几章中，我们曾用直尺、圆规解过不少作图题. 在这一节里，我们将进一步学习解作图题的一些重要方法，下面列出我们已经学过的一些作图题（具体作法不再写出，由同学自己复习、研究），这些作图题一般叫做**基本作图题**，它们是进一步解较复杂的作图题的基础.

1. 作一条线段等于已知线段，作一条线段等于 n 条线段的和（$n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^+$）.

2. 作一条线段等于两条已知线段的差.

3. 作一个角等于已知角.

4. 平分一个已知角.

5. 过已知直线上或已知直线外一点，作已知直线的垂线.

6. 作已知线段的垂直平分线.

7. 等分已知线段.

8. 按已知条件作三角形.

   (a) 已知三边.

   (b) 已知两边及其夹角.

   (c) 已知两角及其中一角的对边.

   (d) 已知两角及其夹边.

9. 作三角形的外接圆和内切圆.

10. 已知斜边和一直角边，作直角三角形.

11. 已知线段 a, 作一线段 $x = \dfrac{m}{n}a$. (其中 $\dfrac{m}{n}$ 是正有理数).

12. 作已知三条线段 a、b、c 的比例第四项.

13. 已知线段 a、b, 作 a、b 的比例中项.

14. 已知线段 a、b $(a > b)$, 作线段 $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ 或 $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

15. 已知线段 a, 作线段 $x = \sqrt{\dfrac{m}{n}a}$ ($\dfrac{m}{n}$ 为正有理数).

16. 过已知圆上一点作圆的切线.

17. 过已知圆外一点作圆的切线.

18. 作两个已知圆的公切线.

19. 过已知直线外的一个已知点，作这条直线的平行线.

练习

1. 作一直角三角形 ABC, 使 $\angle C = 90°$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$. 你能想出几种作法?

2. 已知线段 a、b，你能用几种方法作线段 $x = \sqrt{ab}$.

3. 已知线段 a, 作线段 $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}a}$

4. 过圆外一点，你能用几种方法作这个圆的切线.

二、轨迹法作图

我们在解作图题时，常常归结为要确定某些点的位置，而这些点所要满足的条件又往往不是一个，我们只要根据点所满足的各个条件，分别作出相应的轨迹，那么，这些轨迹交集中的点，就是我们所要求作的点.

例如，已知两个定点 B、C, 且 $\overline{BC} = 3\text{cm}$ （图 5.5），以 B、C 为两个顶点，求作一三角形，使第三个顶点与 B 的距离是 2cm, 与 C 的距离是 4cm, 这个作图题，实际上就是确定三角形的第三个顶点的位置．第三个顶点要满足两个条件：

1. 和 B 点的距离是 2cm
2. 和 C 点的距离是 4cm

满足第一个条件的点的轨迹是 $\odot(B, 2\text{cm})$，满足第二个条件的点的轨迹是 $\odot(C, 4\text{cm})$，所以第三个顶点就应该是 $\odot(B, 2\text{cm})$ 与 $\odot(C, 4\text{cm})$ 的交集中的点．由作图可知：

$$\odot(B, 2\text{cm}) \cap \odot(C, 4\text{cm}) = \{A, A'\}$$

于是，A 点和 A' 点都是我们所要求作的点，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 都是我们所要求作的三角形．像这样应用轨迹的交集来确定点的位置，从而来解作图题的方法，就叫做**轨迹法**.

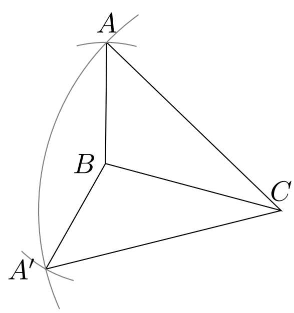


图 5.5

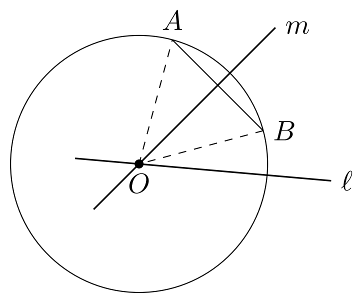


图 5.6

例 5.3　已知一条定直线和直线外两个定点，求作一个圆，使圆心在这条直线上，并且经过这两个定点.

已知：定直线 ℓ 和两定点 AB, 且 $A \notin \ell$, $B \notin \ell$ （图 5.6）.

求作：一圆使圆心在 ℓ 上，且经过 A、B 两点.

分析：假定 $\odot O$ 为所求作的圆；那么，圆心 O 应满足两个条件：

1. $O \in \ell$;

2. O 点到 A、B 两点等距离.

因为 ℓ 是已知的直线，而到 A、B 两点等距离的点的轨迹是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线，所以，圆心 O 应是 $\ell \cap \overline{AB}$ 的垂直平分线中的点，于是得作法如下：

作法：

1. 作 $\overline{AB}$;

2. 作 $\overline{AB}$ 的垂直平分线 m 与 ℓ 相交于 O 点，

3. 以 O 为圆心，OA 为半径作 $\odot O$, 则 $\odot O$ 即为所求作的圆.

证明： 作 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$,

$\because$ m 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分线，且 $O \in m$.

$\therefore$ $\overline{OA} = \overline{OB}$

$\because$ A 点 $\in \odot O$, 又知 O 点 $\in \ell$,

$\therefore$ B 点 $\in \odot O$, $\therefore \odot O$ 为所求作的圆.

讨论：

1. 当直线 ℓ 与 AB 所在的直线不垂直时，$\overline{AB}$ 的垂直平分线 m 与 ℓ 一定有一个交点，且只有一个交点．这时，问题有一解.

2. 当 ℓ 与直线 $\overline{AB}$ 垂直时，如果 ℓ 与 m 重合时，问题有无穷多解；如果 $\ell \parallel m$ 时问题无解.

例 5.4 已知三角形的一边和这条边上的中线及高，求作三角形.

已知：线段 a、m、h（图 5.7).

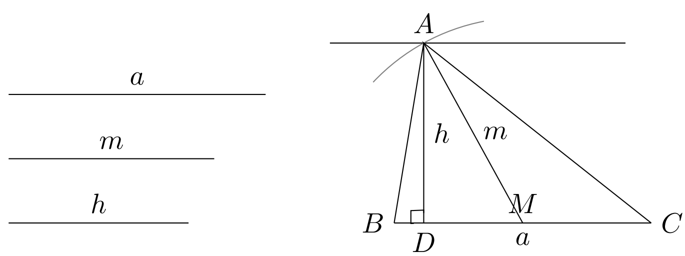


图 5.7

求作：三角形使它的一边等于 a, 且这边上的中线等于 m, 高等于 h.

分析：画一草图（图 5.7），假设 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形，且 $\overline{BC}=a$, $\overline{BC}$ 上的中线 $\overline{AM}=m$, 高 $\overline{AD}=h$, B、C 两个顶点由条件 $\overline{BC}=a$, 很容易确定；A 点的位置应该满足条件：

1. 与 $\overline{BC}$ 的中点 M 的距离等于 a 的长；

2. 与 $\overline{BC}$ 所在直线的距离等于 h.

分别满足条件 1 和 2 的轨迹都可作，故 A 的位置可作出，于是所要求作的三角形可作.

作法：（图 5.8）

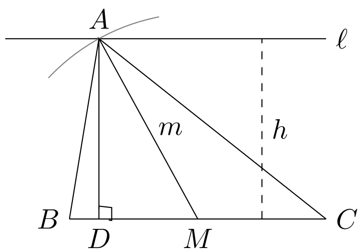


图 5.8

1. 任取一点 B, 作 $\overline{BC}=a$,

2. 作直线 $\ell\,//$ 直线 BC, 且与直线 BC 的距离等于 h.

3. 作 $\overline{BC}$ 的中点 M, 作 $\odot(M,m)$ 交 ℓ 于 A 点

4. 作 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$, 则 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形.

证明：（略）

讨论

1. 当 $m\geq h$ 时，由于 $\odot(M,m)$ 与直线 ℓ 能够相交，所以问题有一解.

2. 当 $m<h$ 时，$\odot(M,m)$ 与直线 ℓ 不相交，所以这时问题无解.

注意：上题中所求作的三角形，并没有指定它在平面上的确切位置（叫做**不定位**），我们可在不同的位置分别作出很多满足已知条件的三角形，而且这些三角形都是全等形，遇到这种情况，我们任作一个满足条件的图形就可以了，并说问题只有一解；如果作出的满足已知条件的三角形不是全等形，那么要把这

些图形都作出来，作出几个，我们就说问题有几解. 如果在问题里是要求在固定位置作图（叫做**定位**），那么不管作出的是不是全等形，都要把它们作出来，作出几个我们就说问题有几解.

例 5.5 求作和定角 $\angle ABC$ 的两边都相切，并且半径等于 r 的圆.

已知：$\angle ABC$, 线段 r（图 5.9）.

求作：和 $\angle ABC$ 的两边都相切，并且半径等于 r 的圆.

分析：画一草图（图 5.10），假设 $\odot O$ 为所求作的圆，且 $\odot O$ 的半径等于 r, 那么圆心 O 应满足条件：

1. 与 $\angle ABC$ 的两边等距离；
2. 与边 BA 或 BC 的距离等于 r.

满足 1 或 2 的轨迹都可作，故所求的圆的圆心可以作出.

作法：（图 5.9）

1. 作 $\angle ABC$ 的平分线 BF;
2. 作直线 $\ell \parallel BC$, 且与 BC 的距离等于 r, 设 ℓ 与 BF 相交于 O 点；
3. 以 O 为圆心，r 为半径作 $\odot(O,r)$, $\odot(O,r)$ 即为所求作的圆.

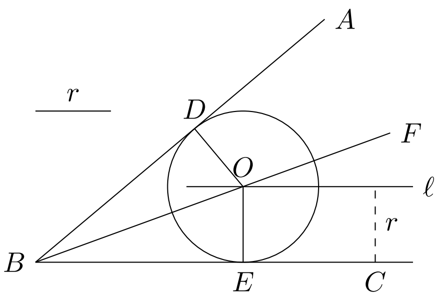


图 5.9

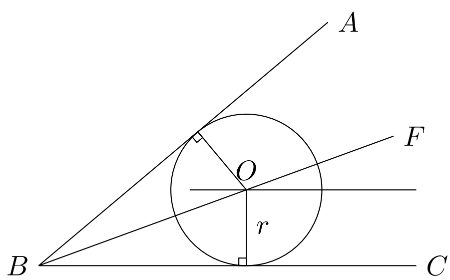


图 5.10

证明： 作 $\overline{OD} \perp BA$ 于 D 点，$\overline{OE} \perp BC$ 于 E 点.

$\because \quad EF$ 平分 $\angle ABC$, 且 $O \in BF$,

$\therefore \quad \overline{OD} = \overline{OE}$

又 $\because \quad O \in \ell$, 而 ℓ 与 BC 的距离是 r 的长.

$\therefore \quad \overline{OD} = \overline{OE} = r, \quad D \in \odot O, \quad E \in \odot O$

$\odot O$ 与 BA 和 BC 都相切，$\odot O$ 为所求作的圆.

讨论：由于 $\angle ABC$ 的平分线 BF 与直线 ℓ 不会平行，所以它们总有一个唯一的交点，所以此题只有一解.

从例 5.5 中可以看到，$\widehat{DE}$ 把 $\angle ABC$ 的两边在切点 D、E 处连接起来了，这种连结叫做**直线与圆弧的平滑连接**.

例 5.6 已知：$\odot(O_1, r_1)$ 和 $\odot(O_2, r_2)$ 外离，且 $r_1 = 10\text{mm}$, $r_2 = 8\text{mm}$（图 5.11）.

求作：一圆与 $\odot(O_1, r_1)$ 外切，与 $\odot(O_2, r_2)$ 内切，并且半径是 20mm.

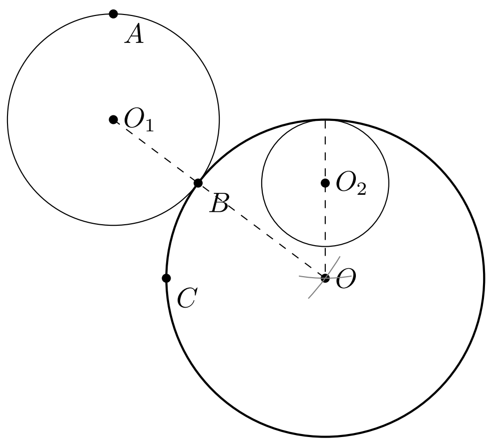


图 5.11

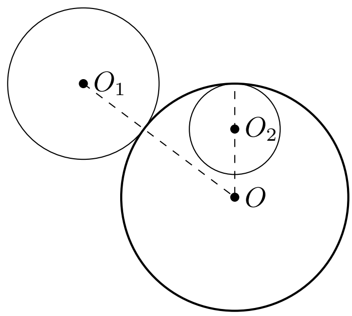


图 5.12

分析：画一草图（图 5.12），设 $\odot(O, 20\text{mm})$ 为要求作的圆. 由于 $\odot(O, 20\text{mm})$ 与 $\odot(O_1, r_1)$ 外切，并与 $\odot(O_2, r_2)$ 内切，所以

$$\overline{OO_1} = r_1 + 20\text{mm} = 30\text{mm}$$
$$\overline{OO_2} = 20\text{mm} - r_2 = 12\text{mm}$$

因此，O 点是 $\odot(O_1, 30\text{mm})$ 和 $\odot(O_2, 12\text{mm})$ 的交点，故 O 点可作出.

作法：（图 5.11）.

1. 作 $\odot(O_1, 30\text{mm})$ 和 $\odot(O_2, 12\text{mm})$, 设两圆有交点 O;

2. 以 O 为圆心，以 20mm 为半径作 $\odot O$, 即 $\odot O$ 为所求作的圆.

证明：（略）

讨论：

1. 当 $(r_1 + 20\text{mm}) + (20\text{mm} - r_2) \geq \overline{O_1O_2}$ 时，即当 $\overline{O_1O_2} \leq 42\text{mm}$ 时，问题有一解.

2. 当 $\overline{O_1O_2} > 42\text{mm}$ 时，问题无解.

从例 5.6 中的图 5.11, 我们可看出 $\odot O_1$ 的 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\odot O_2$ 的 $\overset{\frown}{BC}$ 在切点 B 处连接起来了，这种连结叫做**圆弧与圆弧的平滑连接**.

练习

1. 已知两定点 A、B, 且直线 AB 与定直线 ℓ 平行，在 ℓ 上求作与 A、B 两点直线 ℓ 距离相等的点.
2. 求作和两条相交直线 ℓ 和 m 的距离相等，且和它们的交点的距离等于定长 d 的点.
3. 求作和已知直线 ℓ 的距离等于定长 d, 并且和 ℓ 上的一个定点的距离等于 $2d$ 的点.
4. 求作和 $\overline{AB}$ 的两端的距离相等，且和 $\overline{AB}$ 的两端的连线所夹的角等于定角 α 的点.
5. 求作等腰三角形，使它的底边等于定长 a, 顶角等于定角 α.
6. 求作一圆，使它的半径等于定长 a, 且经过一定点并和一条定直线相切.
7. 已知三角形的二边和其中一边上的高，求作三角形.
8. 已知 $\odot O(0, 15\text{mm})$ 和直线 ℓ, 并且 ℓ 与 $\odot O$ 相离，画半径为 10mm 的圆，使其与 $\odot O$ 外切并和 ℓ 相切.

三、代数法作图

解作图题时，有时也常常归结为要求作一条线段的长度问题．这时我们可根据给出的条件，求出这条线段的代数表达式，根据线段的代数表达式，把线段作出，使问题得到解决．这种解作图题的方法，就叫做**代数分析法**.

例 5.7 已知：正方形 $ABCD$(图 5.13).

求作：一点 P 使 $P \in \overline{CD}$, 且 $\overline{AP} = \overline{BC} + \overline{CP}$.

分析： 画一草图（图 5.14），已知正方形 $ABCD$, 假设 P 点是所求作的点，即 $P \in \overline{CD}$, 且 $\overline{AP} = \overline{BC} + \overline{CP}$, 设 $\overline{CP} = x$, $\overline{BC} = a$, 故 $\overline{AP} = 8 + x$, $\overline{DP} = \overline{DC} - \overline{CP} = \overline{BC} - \overline{CP} = a - x$, 又因 $\triangle ADP$ 是直角三角形，所以根据

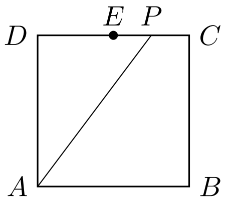


图 5.13

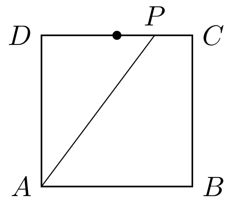


图 5.14

勾股定理有：$\overline{AP}^2=\overline{AD}^2+\overline{DP}^2$, 即：$(a+x)^2=a^2+(a-x)^2$. 解此方程得 $x=\dfrac{a}{4}$；a 为已知，$\dfrac{a}{4}$ 可作出，故 P 点也可作出.

作法：（图 5.13).

1. 作 $\overline{CD}$ 的中点 E.

2. 作 $\overline{CE}$ 的中点 P, P 点即为所求作的点.

证明： 由作图知 $\overline{CP}=\dfrac{a}{4}$,

$\therefore\quad \overline{DP}=\overline{CD}-\overline{CP}=\dfrac{3}{4}a$

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DP}^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2}=\frac{5}{4}a=a+\frac{a}{4}$$

$$\overline{AP}=\overline{BC}+\overline{CP}$$

讨论：由分析知，$\overline{DP}:\overline{PC}=3:1$, 因为分点 P 是唯一的，所以此题只有一解.

例 5.8 在已知线段上求作一点，分已知线段为两部分，使其中一部分是全线段和另一部分的比例中项.

已知：$\overline{AB}$(图 5.15).

求作：$\overline{AB}$ 的内分点 G, 使 $\overline{AG}^2=\overline{AB}\cdot\overline{GB}$.

分析： 画一草图（图 5.16），已知 $\overline{AB}$, 假定 G 为所求之点，设 $\overline{AG}=x$, 则 $\overline{BG}=a-x$, x 满足方程

$$x^2=a(a-x)$$

即：$x^2+ax-a^2=0$. 解此方程得：

$$x_1=\frac{-a+\sqrt{4a^2+a^2}}{2},\qquad x_2=\frac{-a-\sqrt{4a^2+a^2}}{2}\quad 舍去$$

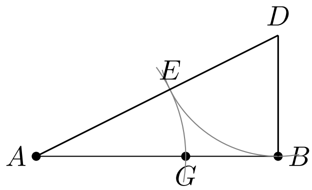


图 5.15

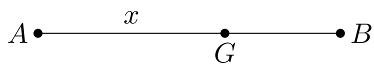


图 5.16

$$\therefore \quad x=\frac{-a+\sqrt{4a^2+a^2}}{2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$$

此线段 x 可作，故 G 点也可作出来.

作法：（图 5.15）.

1. 作 $\overline{ED}\perp\overline{AB}$, 使 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$
2. 在 $\overline{DA}$ 上截取 $\overline{DE}=\overline{DB}$,
3. 在 $\overline{AB}$ 上截取 $\overline{AG}=\overline{AE}$, G 点即为所求作的点.

证明： 设 $\overline{AB}=a$, 由作法有，

$$\begin{aligned}\overline{AG}&=\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}\\&=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2}-\overline{BD}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}\\\overline{GB}&=\overline{AB}-\overline{AG}=a-\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}\right)\\&=\frac{3}{2}a-\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overline{AB}\cdot\overline{GB}=a\left(\frac{3}{2}a-\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)$$

由于：

$$\begin{aligned}\overline{AG}^2&=\left(\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}\right)^2\\&=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\times\frac{a}{2}\times\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2\\&=\frac{3}{2}a^2-a\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\\&=a\left(\frac{3}{2}a-\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

$\therefore\quad \overline{AG}^2=\overline{AB}\cdot\overline{BG}$

故 G 点为所求之点.

讨论：由分析可知，满足条件的 $\overline{AG}$ 总有一个，所以 G 点总能作出一个，故此题有一解也只有一解.

由于

$$\overline{AG}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0.618a$$

所以 $\overline{AG}$ 是 $\overline{AB}$ 被 G 点分成的两段中，较长的一段，这种作图通常叫做分已知线段成“**中外比**”，又叫做**黄金分割**.

例 5.9 在已知圆中，作内接正十边形.

已知：$\odot(O,r)$(图 5.17).

求作：$\odot O$ 的内接正十边形.

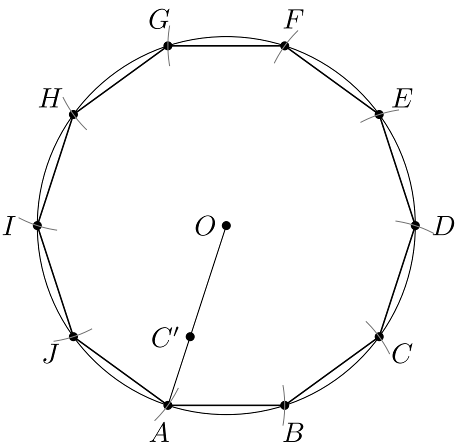


图 5.17

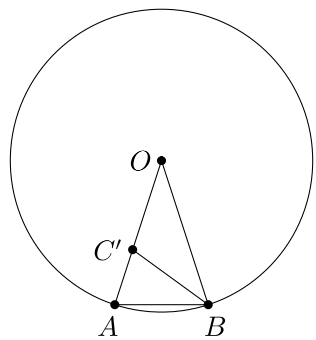


图 5.18

分析： 画一草图（图 5.18），设 $\overline{AB}$ 是 $\odot O$ 的内接正十边形的一边，则

$$\angle AOB=36^\circ,\qquad \angle OAB=\angle OBA=72^\circ$$

作 $\angle OBA$ 的平分线交 $\overline{OA}$ 于 C' 点，则

$$\angle OBC'=\angle ABC'=\frac{1}{2}\angle OBA=36^\circ$$

又知 $\angle BC'A=180^\circ-\angle ABC'-\angle OAB$,

$\therefore\quad \angle BC'A=72^\circ,\quad \overline{OC'}=\overline{BC'}=\overline{AB}$, 且

$$\triangle OAE\backsim\triangle BAC',\quad \overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC'}$$

即：$\overline{AB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{AC'}$

$\therefore \quad \overline{OC'}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{AC'}$

这个结果告诉我们，C' 点恰好把半径 $\overline{OA}$ 分成中外比且 $\overline{OC'}$ 是较长的一段．故应用黄金分割法由已知圆的半径作出正十边形的边长，从而圆内接正十边形可以作出来.

作法 (图 5.17).

1. 作半径 $\overline{OA}$.

2. 作 C' 点分 $\overline{OA}$ 成中外比，使 $\overline{OC'}$ 为较长的一段，

3. 以 A 为起点，顺次作 $\odot O$ 的弦 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$、$\overline{HI}$、$\overline{IJ}$、$\overline{JA}$, 且使它们都等于 $\overline{OC'}$, 则 $ABCDEFGHIJ$ 为所求作的圆内接正十边形.

证明:（略）

讨论：由分析可知一个圆内接正十边形的边长等于一个定值，所以此问题有一解.

我们把圆十等分后，把相间的五个分点用弦顺次连结，就可作出圆内接正五边形，把正五边形的五条对角线都作出来，然后去掉各边剩下的图形就是正五角星了（图 5.19).

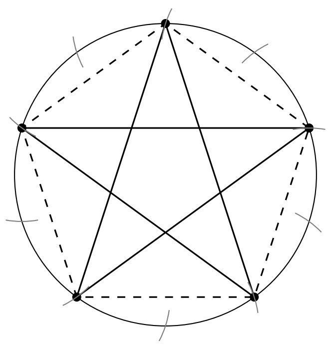


图 5.19

通过以上三例，我们看出，用代数法解作图题的一般步骤:

- 首先要分析解决这个问题需要作出哪条线段，并用 x 表示；
- 其次依照题中所给的条件和图形的性质，列出关于 x 的方程；
- 第三步，解这个方程（不合题意的根舍去）;

- 第四步，依照方程的根的表示式，作出未知线段 x;
- 第五步，完成作图．即得所求作的图形.

练习

1. 已知线段 a、b $(a>b)$, 求作下列线段 x

   (a) $x=\dfrac{ab}{a+b}$　　(c) $x=\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{4}}$

   (b) $x=\sqrt{4a^2+b^2}$　　(d) $x=\sqrt{a^2+3b^2}-\dfrac{b}{2}$

2. 求作已知三角形的相似形, 使它的面积等于已知三角形面积的三分之二.
3. 从圆外一定点求作圆的一条割线，使它的圆外部分同圆内部分相等.
4. 求作一正方形，使它同已知长方形等积.
5. 在已知梯形中，求作底的平行线，平分已知梯形的面积.
6. 作一圆的内接正五边形（只用尺、规）.
7. 经过圆内一点作一条弦，使这个点是这条弦的一个三等分点.

习题 5.2

1. 已知线段 a、b、c 且 $a>b$, 求作线段 $x=\sqrt{a^2-b^2}+c$.
2. 已知五条线段 a、b、c、d、e, 求作线段 $x=\dfrac{abc}{de}$.
3. 已知线段 a, 求作一条线段 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$
4. 已知线段 a、b, 且 $a>b$, 求作 $a+b$ 和 $a-b$ 的比例中项.
5. 求作与一个已知圆相切于已知点，且经过已知圆外的一个定点的圆.
6. 已知三角形的一边长是 3cm, 这边上的中线长 4cm, 这边的对角是 65°, 求作这个三角形.

7. 已知一边和这边上的中线及另一边上的高线，求作这个三角形.

8. 求作一个三角形，使它同已知三角形等积，又同另一个已知的三角形相似.

9. 求作直径是 d 的圆内接矩形，使它的面积等于每边是 a 的已知正方形面积（提示：设矩形的长、宽各为 x、y，列出含有 x、y 的方程组解之）.

10. 从已知圆外的一个已知点，作圆的割线，使它在圆外的部分与圆内的部分的比是 $1:2$.

11. 求作过两定点，且在一条定直线上截取定长弦的圆（提示：利用切割线定理）.

复习题五

1. 连结一定直线上的点和线外一定点的线段，求这线段中点的轨迹.

2. 求具有公共底边，且这边上的高相等的三角形顶点的轨迹.

3. 三定点 A、B、C 在一直线上，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$，求与 A、B 两点和与 B、C 两点连线夹角相等点的轨迹.

4. 从一定点 A 向通过另一定点 B 的动直线引垂线，求垂足 P 的轨迹.

5. 求到两定点 A、B 的距离的平方和等于 $\overline{AB}^2$ 的点的轨迹.

6. 求到一定圆引切线，切线长等于定长的点的轨迹.

7. 求对相交的两定圆有等幂的点的轨迹.

8. 求到两定点 A、B 平方差等于 $\overline{AB}^2$ 的点的轨迹.

9. 已知三点 A、B、C 在一条直线上，求与 A、B 两点和 B、C 两点连线夹角相等的点的轨迹.

10. 求作一个圆使和两条已知平行线都相切，并且经过两平行线间一个已知点.

11. 已知 $\odot(O_1, 1.5\text{cm})$，$\odot(O_2, 1\text{cm})$，圆心间的距离 $\overline{O_1O_2}=4\text{cm}$，求作一圆，使它的半径等于 1.3cm，并且和 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 都外切.

12. 已知 $\odot(O_1, 1.4\text{cm})$，$\odot(O_2, 1\text{cm})$，$\overline{O_1O_2}=3\text{cm}$，求作一个圆，使它的半径为 3.2cm，并且和 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 都相内切.

13. 已知线段 a, 求作线 $x=\sqrt{3a}$, $y=\sqrt{12a}$.

14. 已知线段 x 与 y 满足方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=a \\ \sqrt{xy}=b \end{cases} \qquad (a>b)$$

求作线段 x 和 y.

15. 作一个三角形具有已知的周长，并和一个已知三角形相似.

16. 求作 $\triangle ABC$ 的内接正方形，使正方形的一边位于 $\overline{AB}$ 边上，另外两个顶点各在 $\overline{AC}$ 边和 $\overline{BC}$ 边上.

17. 在已知正方形 $ABCD$ 内作内接正方形，使内接正方形的四个顶点分别在正方形的各边上，且使它的边长等于定长 b.

18. 把任一个三角形改为等边三角形，使它的面积不变.

19. 求作三个两两外切的圆，使它们的半径分别等于 1cm, 2cm, 3cm.

20. 作一个正五角星（只画出图形）.

21. 已知 A、B、C 为定直线 ℓ 上的三个定点，求作 $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 使它们两两均相切，但不切于同一点.

22. 在已知矩形内作两个互相外切的等圆，使各切于这矩形一组对角的两边.

第六章　三角比与角边关系

人们为了要确定空间各点之间的相互位置，就得做一番测量，测量是几何学的起源，也是几何学最直接的实践.

测量学的最基本原理，就是相似形的性质及三角形的边角关系. 例如，我们在第三章末用相似形性质测量两点间的，距离，物体的高度、测绘具有多边形形状的地段的平面图等. 我们知道，在两个直角三角形中，只要有一个锐角对应相等，它们就相似了，这就是说，一个直角三角形的各边之. 间的比是被它的一个锐角的大小所决定，例如在图 6.1 中，一些含有 30° 角的直角三角形，30° 角所对的直角边与斜边的比都是 1:2.

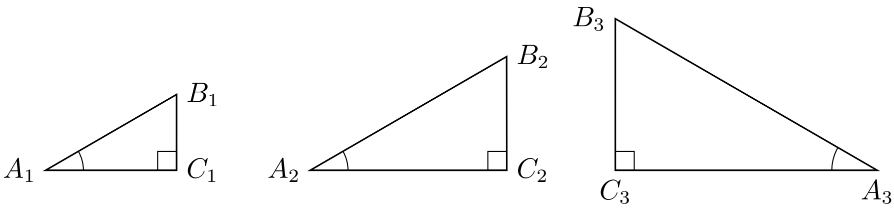


图 6.1

这一章，我们首先向同学介绍的就是直角三角形中，边与边的比与它所含锐角之间的关系. 这些边与边的比值叫做 **锐角三角比**，它们是进行测量计算时的常用数据，也是从数量方面研究几何学的基本工具.

第一节　锐角三角比

一、定义

取任意锐角 $\angle XAY$, 在边 AY 上任取一点 B, 作 $\overline{BC}\perp AX$ 于 C(图 6.2). 在直角 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别用 a、b、c 表示，对锐角 A 来说，a 叫做 $\angle A$ 的**对边**，b 叫做 $\angle A$ 的相邻的直角边（简称**邻边**）我们定义:

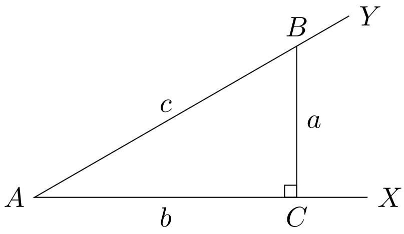


图 6.2

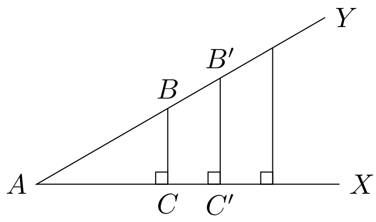


图 6.3

1. $\angle A$ 的对边与斜边的比值，叫做 $\angle A$ 的正弦，用符号 $\sin A$ 来表示，即

$$\sin A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$$

2. $\angle A$ 的邻边与斜边的比值，叫做 $\angle A$ 的余弦．用符号 $\cos A$ 来表示，即

$$\cos A = \frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$$

3. $\angle A$ 的对边与邻边的比值，叫做 $\angle A$ 的正切，用符号 $\tan A$ 来表示，即

$$\tan A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}} = \frac{a}{b}$$

4. $\angle A$ 的邻边与对边的比值，叫做 $\angle A$ 的余切，用符号 $\cot A$ 来表示，即

$$\cot A = \frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}} = \frac{b}{a}$$

我们知道，只要 $\angle A$ 的大小定了，不管 B 点在边 AY 上的位置如何（图 6.3），以上的四个比值都是不变的，只有当 $\angle A$ 变化时，这些比值才随着变化．这四个比都叫做锐角 A 的三角比．

有了以上定义，我们就在直角三角形的角与边之间建立了联系，知道了角的大小，相应的四个三角比就被唯一地确定了．反过来，如果我们知道了一个角的四个三角比中的任何一个，我们也就能确定这个角的大小．

例 6.1　在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$, $\overline{BC} = 3\text{cm}$, $\overline{AC} = 4\text{cm}$, 求 $\angle A$ 的 4 个三角比（图 6.4）．

解：根据勾股定理，

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$$

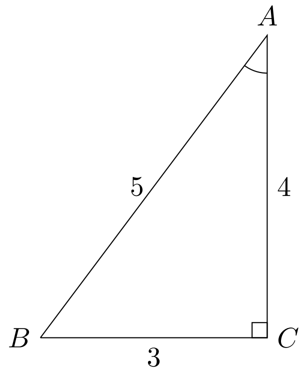


图 6.4

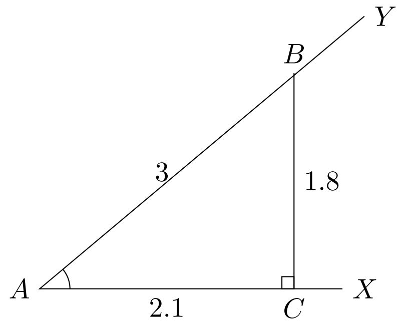


图 6.5

根据各三角比的定义有，

$$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5},\qquad \cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{4}{5}$$
$$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{3}{4},\qquad \cot A=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{4}{3}$$

例 6.2 求 40° 角的四个三角比.

解： 用量角器画 $\angle XAY=40^\circ$(图 6.5). 在边 AY 上截取 $\overline{AB}=3\text{cm}$ (为计算方便，我们尽量取整数)，作 $\overline{BC}\perp AY$ 于 C 点，量得 $\overline{BC}=1.8\text{cm}$, $\overline{AC}=2.1\text{cm}$, 在直角 $\triangle ABC$ 中，根据三角比的定义可得：

$$\sin 40^\circ=\frac{1.8}{3}\approx 0.6,\qquad \cos 40^\circ=\frac{2.1}{3}\approx 0.7$$

$$\tan 40^\circ=\frac{1.8}{2.1}\approx 0.8,\qquad \cot 40^\circ=\frac{2.1}{1.8}\approx 1.1$$

例 6.3 已知 $\tan A=\dfrac{1}{2}$, 求 $\angle A$.

解： 作一个直角 $\triangle ABC$, 使直角边 $\overline{AC}=2$ 个单位长，$\overline{CB}=1$ 个单位长（图 6.6)，于是，

$$\tan A=\frac{1}{2}$$

用量角器量 $\angle A$, 得之 $\angle A\approx 26^\circ$.

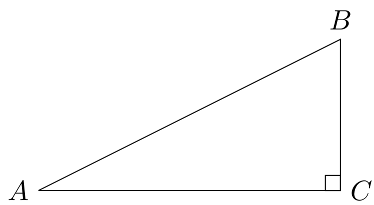


图 6.6

练习

1. 已知直角 $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, $\overline{BC}=5$ 个单位长，$\overline{AC}=12$ 个单位长，求 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的四个三角比.

2. 用作图法求出表中各角的四个三角比的近似值，填入表中：

α	20°	40°	50°	80°
$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				
$\tan\alpha$				
$\cot\alpha$				

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$，用作图法求 $\angle\alpha$.

4. 已知 $\cos\beta=\dfrac{2}{5}$，用作图法求 $\angle\beta$.

5. 已知 $\tan A=\dfrac{3}{5}$, 用作图法求 $\angle A$.

二、0° **到** 90° **角的三角比的变化**

半径等于 1 个单位长的圆叫做**单位圆**. 下面我们利用单位圆来研究锐角三角比的变化规律：

画单位圆 $\odot O$(图 6.7), 通过单位圆的圆心 O 作互相垂直的两条直线，其中一条是水平的，另一条是铅直的，以 O 为原点，单位圆的半径为长度单位，在两条直线上建立数轴，其中水平轴向右为正，铅直轴向上为正；水平轴用 x 表示，又叫做 x 轴，铅直的轴用 y 表示，又叫做 y 轴. 以 O 为顶点，x 轴的正方向为一边，作 $\angle AOP$ 等于已知角 α, $\angle AOP$ 的两边分别与单位圆相交于 A、P 两点，过 P 点作 $\overline{PM}\perp OA$ 于 M 点，

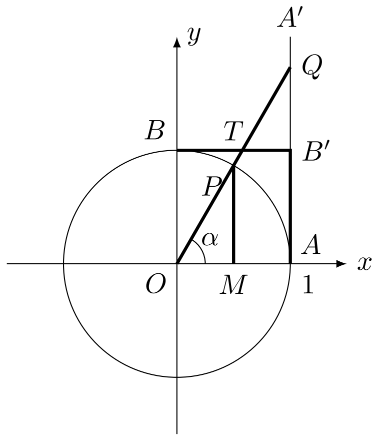


图 6.7

$\because \quad \overline{OP} = 1$

$\therefore \quad \sin\alpha = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \overline{MP}$的量数, $\quad \cos\alpha = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \overline{OM}$的量数

这样，对于任一锐角 α, 我们可直接用 $\overline{MP}$ 和 $\overline{OM}$ 的量数来分别表示 $\sin\alpha, \cos\alpha$ 的值. 我们把 $\overline{MP}$ 和 $\overline{OM}$ 分别叫做角 α 的**正弦线**和**余弦线**. 下面我们用正弦线和余弦线来研究 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的变化规律.

- 当 $\alpha = 0°$ 时，$\overline{MP} = 0, \overline{OM} = 1$
- 当 $\alpha = 90°$ 时，$\overline{MP} = 1, \overline{OM} = 0$

我们就说，

$$\sin 0° = 0, \qquad \cos 0° = 1, \qquad \sin 90° = 1, \qquad \cos 90° = 0.$$

我们使角 α 从 $0°$ 逐渐增加到 $90°$, 于是从角 α 的正弦线和余弦线的变化规律可以看到，**当 α 增大时，$\sin\alpha$ 随着增大，而 $\cos\alpha$ 随着减小；反之，当 α 减小时，$\sin\alpha$ 随着减小，而 $\cos\alpha$ 随着增大.**

在图 6.7 中，过 A 点作 $AA'\perp OA$, 与角 α 的一边 OP 相交于 Q 点，于是，

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \overline{AQ}\text{的量数}$$

$\overline{AQ}$ 叫做角 α 的**正切线**.

在图 6.7 中，过单位圆与 y 轴的交点 B 作 $BB'\perp OB$, 角 α 的一边 OP 与 BB' 相交于 T 点，于是，

$$\cot\alpha = \frac{\overline{BT}}{\overline{OB}} = \overline{BT}\text{的量数}$$

$\overline{BT}$ 叫做角 α 的**余切线**.

下面我们用正切线和余切线来说明角 α 的正切和余切随着角 α 的变化规律.

- 当 $\alpha = 0°$ 时，$\overline{AQ} = 0$, 边 OP 与 BB' 不相交，我们就说 $\tan 0° = 0$, $\cot 0°$ 不存在.
- 当 $\alpha = 90°$ 时，AQ 与 OP 不相交，$\overline{BT} = 0$, 我们就说，$\tan 90°$ 不存在，$\cot 90° = 0$.

我们使角 α 从 $0°$ 增加到 $90°$, 于是从角 α 的正切线和余切线的变化规律可以看到，**当 α 增大时，$\tan\alpha$ 也随着增大，而 $\cot\alpha$ 测随着减小. 反之当 α 减小时，$\tan\alpha$ 也随着减小，而 $\cot\alpha$ 则随着增大.**

练习

1. 在横线上填入不等号（α、β 都是锐角）.

   (a) 当 $\alpha > \beta$ 时，$\sin\alpha$__$\sin\beta$，$\cos\alpha$__$\cos\beta$，$\tan\alpha$__$\tan\beta$，$\cot\alpha$__$\cot\beta$.

   (b) 当 $\alpha < \beta$ 时，$\sin\alpha$__$\sin\beta$，$\cos\alpha$__$\cos\beta$，$\tan\alpha$__$\tan\beta$，$\cot\alpha$__$\cot\beta$.

2. 指出下列差的符号：

   (a) $\sin 34° - \sin 33°$　　(e) $\tan 5° - \tan 6°$

   (b) $\sin 27° - \sin 26°$　　(f) $\cot 14° - \cot 13°$

   (c) $\cos 83° - \cos 84°$　　(g) $\tan 46° - \tan 44°$

   (d) $\cos 10° - \cos 9°$　　(h) $\cot 44° - \cot 47°$

三、30°、45°、60° 角的三角比

我们根据锐角三角比的定义和直角三角形中的一些边角特殊关系，可以计算出 30°、45°、60° 角的三角比的精确值.

作 $\triangle ABC$, 使 $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (图 6.8), 那么 $\angle B = 60°$, 设 $\overline{BC} = a$,

则 $\overline{AB}=2a$, $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$. 由此得:

$$\sin 30^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},\qquad \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos 60^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$
$$\tan 30^\circ=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad \tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$$
$$\cot 30^\circ=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3},\qquad \cot 60^\circ=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

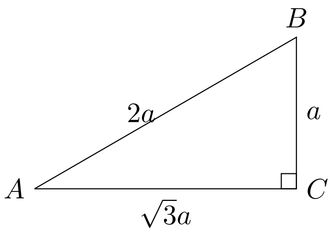


图 6.8

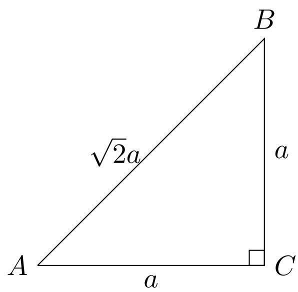


图 6.9

作 $\triangle ABC$, 使 $\angle C=90^\circ$, $\angle A=45^\circ$ (图 6.9), 那么, $\angle B=45^\circ$, 设 $\overline{BC}=a$, 则 $\overline{AC}=a$, $\overline{AB}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

由此得:

$$\sin 45^\circ=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \cos 45^\circ=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 45^\circ=\frac{a}{a}=1,\qquad \cot 45^\circ=\frac{a}{a}=1$$

为了便于记忆，我们把 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 的三角比列成表.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

例 6.4 计算 $4\cot 30^\circ-2\sin 60^\circ+2\cos 60^\circ$

解:

$$4\cot 30^\circ - 2\sin 60^\circ + 2\cos 60^\circ = 4\times\sqrt{3} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\frac{1}{2} = 3\sqrt{3}+1$$

例 6.5 计算 $\cos^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ - \tan^2 45^\circ$ 其中：$\sin^\alpha$、$\cos^2\alpha$ $\tan^2\alpha$、$\cot^2\alpha$ 分别表示 $(\sin\alpha)^2$、$(\cos\alpha)^2$、$(\tan\alpha)^2$、$(\cot\alpha)^2$

解:

$$\cos^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ - \tan^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1^2 = \frac{3}{4}+\frac{2}{4}-1=\frac{1}{4}$$

练习

求下列各式之值：

1. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$
2. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$
3. $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$
4. $2\sin 30^\circ + 2\cos 60^\circ + 4\tan 45^\circ$
5. $5\tan 30^\circ + \cot 45^\circ - 2\tan 45^\circ + 2\cos 60^\circ$
6. $\dfrac{2\sin 30^\circ}{2\cos 30^\circ - 1}$
7. $\dfrac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}$

四、三角比值表

在前面的内容中，我们讲的只是特殊角的三角比，为了应用方便，人们早已制定了任意锐角的三角比值表，下面就来介绍四位三角比值表的用法.

(一) 正弦表，余弦表

在正弦、余弦表里左右各有一列排度数，左列上端和右列下端都有 A 字，在左列 A 的下面，由上到下排着度数，在右列 A 的上面，由下到上排着度数，在

顶行 A 的右边，由左至右依次排着 $0', 6', \ldots, 60'$，在表的顶上写着正弦表，说明查正弦时用左列 A 下面的度数和顶行的分数，表的底下写着余弦表，说明查余弦时，用右列 A 上的度数和底行的分数. 例如要查 $26°18'$ 的正弦，在表中左列 A 的下面先找到 $26°$，顺着 $26°$ 所在的这一行往右，在顶行 $18'$ 所在的这一列里找到了一个数 0.4431，就是 $26°18'$ 的正弦，即 $\sin 26°18' = 0.4431$. 换句话说左列 A 下面的 $26°$ 所在的行和顶行 $18'$ 所在的列的交点处的 0.4431，就是 $\sin 26°18'$. 要查 $\cos 27°24'$，在表中右列 A 的上面找到 $27°$，底行里找到 $24'$，$27°$ 所在的行和 $24'$ 所在的列的交点处的 0.8878，就是 $\cos 27°24'$，即 $\cos 27°24' = 0.8878$.

（二）正切表、余切表

正切的查法和正弦相同，余切的查法和余弦相同，例如我们在正切表、余切表中可以查到：

$$\tan 54°30' = 1.4019, \qquad \cot 4°6' = 13.95$$

练习

查表求下列各三角比：

1. $\sin 14°$, $\sin 20°24'$, $\sin 65°30'$, $\sin 82°12'$
2. $\cos 7°$, $\cos 32°6'$, $\cos 60°54'$, $\cos 83°18'$
3. $\tan 18°$, $\tan 78°36'$, $\tan 80°24'$, $\tan 83°$
4. $\cot 42°42'$, $\cot 20°48'$, $\cot 9°36'$, $\cot 5°30'$

在三角比值表中，最右边的三列是修正值，它是用来求在左边表里找不到的角的三角比，这三列的上端和下端都标有 $1'$、$2'$、$3'$，三列中的数是小数的简写，每一个数都代表一个小数，它的末位数相当于表中间同一行小数的末位数，$1'$、$2'$、$3'$ 各列中的各数，分别是它所在的行的角度分别相差 $1'$、$2'$、$3'$ 时的三角比的修正值，下面举列说明查法：

例如，要求 $\sin 20°19'$，先从表中查得 $\sin 20°18'$ 的值是 0.3469，因为 $20°19'$ 比 $20°18'$ 大 $1'$，查修正值是 0.0003. 因为角度大，它的正弦值也大，所以 $\sin 20°19'$ 就比 $\sin 20°18'$ 大 0.0003，因此，$\sin 20°19' = 0.3469 + 0.0003 = 0.3472$. 要求 $\sin 20°46'$，先从表中查得 $\sin 20°48'$ 的值是 0.3551，$20°46'$ 比 $20°48'$ 小 $2'$，查得 $2'$ 的修正值是 0.0005，角度小，正弦值也小，所以 $\sin 20°46' = 0.3551 - 0.0005 = 0.3546$. 要求 $\cos 28°26'$，先从表中查得 $\cos 28°24' = 0.8796$，

$28°26'$ 比 $28°24'$ 大 $2'$, 查表得修正值是 0.0003, 角大余弦值反而小, 所以 $\cos 28°26' = 0.8796 - 0.0003 = 0.8793$.

正切的查法和正弦相同，余切的查法和余弦相同.

例如，我们可以求得

$$\tan 69°25' = 2.662, \qquad \cot 70°45' = 0.3492$$

练习

查表求下列各三角函数:

1. $\sin 18°19'$, $\sin 63°40'$
2. $\cos 65°2'$, $\cos 10°34'$
3. $\tan 9°19'$, $\tan 64°10'$
4. $\cot 25°28'$, $\cot 10°25'$

从三角比值表里不但可以查得任何锐角的三角比，反过来，也可以根据已知的三角比值查到未知的锐角.

例 6.6 已知 $\sin x = 0.9966$, 求锐角 x.

解: 在正弦表里找到 0.9966, 因为它是正弦的值，要用到左列的度和顶行的分，在 0.9966 这一行的左端是 $85°$, 在 0.5966 的上端是 $18'$. 所以 $\sin 85°18' = 0.9966$, 因此 $x = 85°18'$.

例 6.7 已知 $\cos y = 0.9966$, 求锐角 y.

解: 在表中找到 0.9966, 因为它是余弦的值，余弦要用到右列的度数和底行的分，在 0.9966 这一行的右端是 $4°$, 在 0.9966 这一列的下端是 $42'$.

所以 $\cos 4°42' = 0.9966$, 因此 $y = 4°42'$.

例 6.8 $\tan x = 14.30$, $\cot y = 1.4715$, 求 x、y.

解: 倒查正切表（查法和例 6.6 相同）可得: $x = 86°$.

倒查余切表（查法和例 6.7 相同）可得: $y = 34°12'$.

由三角比值求角度，有时要用到修正值，用修正值时，必须注意到，对于正弦、正切的值越大，角度也越大；对于余弦、余切的值越大，角度反而越小，下面举例说明用修正值查法.

例 6.9 $\sin x = 0.2493$, 求 x.

解： 在正弦表里，和 0.2493 最接近的正弦值是 0.2487，它是 $14°24'$ 的正弦，$0.2493-0.2487=0.0006$，在 $14°$ 这一行里正弦值相差 0.0006 时，角度的修正值是 $2'$，$\sin x$ 比 $\sin 14°24'$ 大 0.0006，x 就比 $14°24'$ 大 $2'$，因此

$$x = 14°24' + 2' = 14°26'$$

例 6.10 $\cos y = 0.9841$，求 y.

解： 在余弦表中和 0.9841 最接近的余弦值是 0.9842，它是 $10°12'$ 的余弦，$0.9842-0.9841=0.0001$，在 $10°$ 这一行里余弦值相差 0.0001 时，角度的修正值是 $1'$ 或 $2'$，$\cos y$ 比 $\cos 10°12'$ 小 0.0001，y 比 $12°12'$ 大 $1'$ 或 $2'$，因此

$$y = 10°12' + 1' = 10°13'$$

或

$$y = 10°12' + 2' = 10°14'$$

这里 y 有两个答案，一个是不足近似值，一个过剩近似值.

例 6.11 $\tan x = 1.3773$，$\cot = 0.1950$，求 x、y.

解： 倒查正切表，得 $x = 54°1'$（查法和例 6.9 相同）.
倒查余切表，得 $y = 78°51'$（查法和例 6.10 相同）.

练习

由三角比值表求锐角 x:

1. $\sin x = 0.9816$，$\sin x = 0.6639$，$\tan x = 9.595$，$\tan x = 0.1890$
2. $\cos x = 0.8607$，$\cos x = 0.9893$，$\cot x = 2.106$，$\cot x = 67.40$
3. $\sin x = 0.2476$，$\sin x = 0.9709$，$\cos x = 0.3372$
   $\cos x = 0.4174$，$\tan x = 0.365$，$\cot x = 0.1614$

五、互为余角的三角比间的关系

在直角 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle C = 90°$(图 6.10)，则

$$\angle A + \angle B = 90°, \qquad \angle B = 90° - \angle A$$

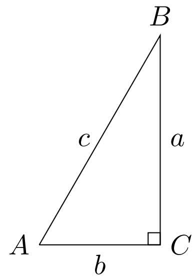


图 6.10

由于 $\angle A$ 的对边是 $\angle B$ 的邻边，$\angle B$ 的对边是 $\angle A$ 的邻边，那么，根据三角比的定义，我们便得出 $\angle A$ 和 $\angle B$ 这两个互为余角的三角比之间有下面的关系：

$$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B=\cos(90^\circ-A),\qquad \cos A=\frac{b}{c}=\sin B=\sin(90^\circ-A)$$
$$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B=\cot(90^\circ-A),\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\tan B=\tan(90^\circ-A)$$

这就是说，**互为余角的两个角中，任一角的正弦等于另一角的余弦；任一角的正切等于另一角的余切.**

有了这个关系，我们就可把任意大于 45° 的锐角的三角比化为小于 45° 的锐角的三角比.

例 6.12　把下面各角的三角比化为小于 45° 的锐角的三角比.

1. $\sin 75^\circ$
2. $\cos 62^\circ 22'$
3. $\tan 80^\circ$
4. $\cot 56^\circ 18'$

解：

1. $\sin 75^\circ=\cos(90^\circ-75^\circ)=\cos 15^\circ$
2. $\cos 62^\circ 22'=\sin(90^\circ-62^\circ 22')=\sin 27^\circ 38'$
3. $\tan 80^\circ=\cot(90^\circ-80^\circ)=\cot 10^\circ$
4. $\cot 56^\circ 18'=\tan(90^\circ-56^\circ 18')=\tan 33^\circ 42'$

例 6.13　下列等式是否成立：

1. $\sin(60^\circ+\alpha)=\cos(30^\circ-\alpha)\qquad(0\le\alpha\le 30^\circ)$
2. $\sin(45^\circ+\alpha)=\cos(45^\circ-\alpha)\qquad(0\le\alpha\le 45^\circ)$

3. $\tan(50^\circ + \alpha) = \cot(40^\circ - \alpha) \qquad (0 \le \alpha < 40^\circ)$

解： 由于

$$(60^\circ + \alpha) + (30^\circ - \alpha) = 90^\circ$$
$$(45^\circ + \alpha) + (45^\circ - \alpha) = 90^\circ$$
$$(50^\circ + \alpha) + (40^\circ - \alpha) = 90^\circ$$

而 α 角的取值范围使得各式中的三角比都有意义，所以根据互为余角的三角比之间的关系可知，各等式都成立.

练习

1. 为什么三角比值表中，锐角 α 的正弦和 $90^\circ - \alpha$ 角的余弦共用一个表.

2. 把下列各角的三角比化为小于 45° 的锐角的三角比.

   (a) $\sin 73^\circ$, $\sin 77^\circ 18'$ (c) $\tan 78^\circ$, $\tan 79^\circ 5'$

   (b) $\cos 57^\circ$, $\cos 52^\circ 38'$ (d) $\cot 48^\circ$, $\cot 78^\circ 31'$

3. 下列各式中的 x 应为多少度?

   (a) $\sin 75^\circ = \cos x$ (c) $\tan 5^\circ = \cot x$

   (b) $\cos 18^\circ = \sin x$ (d) $\cot 83^\circ = \tan x$

4. 下列等式是否成立（x、α 的取值都使各三角比有意义）.

   (a) $\sin(75^\circ + \alpha) = \cos(15^\circ - \alpha)$ (c) $\tan(30^\circ + x) = \cot(60^\circ - x)$

   (b) $\sin(15^\circ - \alpha) = \sin(30^\circ + \alpha)$ (d) $\cot(89^\circ + \alpha) = \tan(1^\circ - \alpha)$

六、同一锐角的各三角比间的关系

定理

同一锐角 α 的四个三角比之间有下列关系：

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

证明： 作直角 $\triangle ABC$, 使 $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$ (图 6.11).

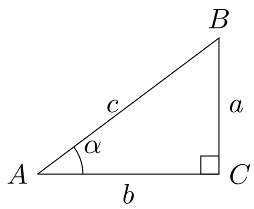


图 6.11

1. $\because \quad a^2 + b^2 = c^2$

$\therefore \quad \left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$

又 $\because \quad \dfrac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \dfrac{b}{c} = \cos\alpha,$

$\therefore \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，即：**一锐角的正弦和余弦的平方和等于 1.** 该式也就是勾股定理的三角比的表示式.

2. $\because \quad \tan\alpha = \dfrac{a}{b}, \quad \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{b},$

$\therefore \quad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

又 $\because \quad \cot\alpha = \dfrac{b}{a}, \quad \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \dfrac{b}{a},$

$\therefore \quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3. $\because \quad \tan\alpha = \dfrac{a}{b}, \quad \cot\alpha = \dfrac{b}{a}$

$\therefore \quad \tan\alpha \cdot \cot\alpha = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = 1$

上面的定理，表示了同一锐角的三角比之间的关系，我们可利用定理中的三个公式，由已知锐角的一个三角比，去计算这个角的其它的三个三角比；也可以利用它们来化简含有三角比的式子.

例 6.14 已知：$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, 求 α 角（α 为锐角）的其它的三个三角比.

解： 从公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

由于锐角的三角比都是正数，所以根号前应取正号，把 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ 代入上式，得

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{25-9}{5^2}}=\frac{4}{5}$$

根据 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，可得

$$\tan\alpha=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

再根据 $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$，可得

$$\cot\alpha=\frac{4}{3}$$

例 6.15 化简 $\sin^2 54^\circ+\sin^2 36^\circ-\tan 45^\circ$

解：

$$\begin{aligned}\sin^2 54^\circ+\sin^2 36^\circ-\tan 45^\circ&=\cos^2(90^\circ-54^\circ)+\sin^2 36^\circ-\tan 45^\circ\\&=\cos^2 36^\circ+\sin^2 36^\circ-1\\&=1-1=0\end{aligned}$$

例 6.16 化简 $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\cdot\tan\alpha$

解：

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\cdot\tan\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\tan\alpha=\cot\alpha\cdot\tan\alpha=1$$

例 6.17 化简 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

解：

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\\&\quad=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha\\&\quad=1+1=2\end{aligned}$$

练习

1. 证明 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

2. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，求 $\cos\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$

3. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，求 $\sin\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$

4. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$，求 $\sin\alpha,\cos\alpha.$

   提示：$\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{9}{16}$，令 $\sin\alpha=x$，解方程.

5. 化简

   (a) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

   (b) $\tan\alpha\cdot\cos\alpha$

   (c) $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

   (d) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$

   (e) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$

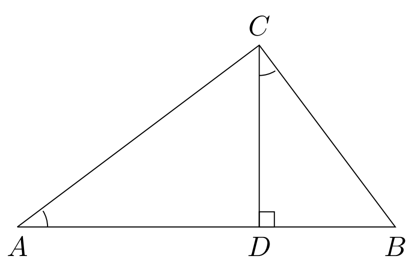
   (f) $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\tan\alpha-\cot\alpha)^2$

习题 6.1

1. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$, $a=3$, $b=2$, 求 $\angle A$ 的四个三角比.

2. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$,$\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=8$, 求：$\sin A$、$\cos A$.

3. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$, $\overline{CD}$ 为 $\overline{AB}$ 边上的高，问图中哪些线段的比可以表示 $\angle A$ 的正弦？哪些线段的比可以表示 $\angle B$ 的正弦？



第 3 题

4. 判断下列等式是否正确:

(a) $\sin 35°30' = \cos 54°30'$

(b) $\sin(30° - \alpha) = \cos(60° + \alpha)$

(c) $\cos(2\alpha + 14°) = \sin(76° - 2\alpha)$

5. 化简下列各式:

(a) $\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$

(b) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha$

(c) $\sin(45° + \alpha) - \cos(45° - \alpha)$

(d) $\dfrac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$

(e) $\dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$

(f) $\sin(90° - \alpha) \cdot \cot(90° - \alpha)$

6. 已知 $\tan \alpha = 2$, 求 $\tan(90° - \alpha)$.

7. 已知 $\sin A = \dfrac{1}{3}$ 求 $\cos A$, $\tan A$.

8. 已知互为余角的两角的正切的和等于 3, 求两角正切的平方和.

9. 求下列各题中的未知锐角 x:

(a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

(b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\tan x = \sqrt{3}$

(d) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

(f) $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

10. 已知 $\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$, 求 x.

11. 已知 $\cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$, 求 x.

12. 回答下列问题:

(a) 当 $0° \leq \alpha \leq 90°$ 时，$\sin \alpha$ 的最大值是多少? 最小值是多少?

(b) 当 $0° \leq \alpha \leq 90°$ 时，$\cos \alpha$ 的最大值是多少? 最小值是多少?

13. 当 $0° \leq \alpha \leq 45°$, $\alpha = 45°$, $45° < \alpha \leq 90°$ 时，分别比较 $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$ 的大小.

第二节　解直角三角形

一、直角三角形中的边角关系

我们把学过的直角三角形中的边角基本关系总结如下：

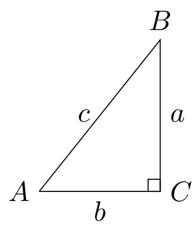


图 6.12

已知 $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ (图 6.12).

1. 勾股定理：$a^2 + b^2 = c^2$
2. 两锐角互余：$\angle A + \angle B = 90^\circ$
3. 四个三角比：

$$\sin A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{斜边}}, \qquad \cos A = \frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{斜边}}$$

$$\tan A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}, \qquad \cot A = \frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}$$

为了应用方便，我们把 3 中的四个公式写成下面的形式：

$$\angle A\text{的对边} = \text{斜边} \times \sin A, \qquad \angle A\text{的邻边} = \text{斜边} \times \cos A$$

$$\angle A\text{的对边} = \text{邻边} \times \tan A, \qquad \angle A\text{的邻边} = \text{对边} \times \cot A$$

改用语言叙述，就是：

在直角三角形中：

1. 一条直角边等于斜边乘上这条直角边所对锐角的正弦.
2. 一条直角边等于斜边乘上这条直角边相邻锐角的余弦.
3. 一条直角边等于另一条直角边乘上这条直角边所对锐角的正切.
4. 一条直角边等于另一条直角边乘上这条直角边相邻锐角的余切.

练习

1. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$, 求证：

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\sin A}, \qquad \overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos A}$$

并把这两个式子用语言叙述出来.

2. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$, 求证：

   (a) $\sin A = \cos B, \qquad \sin B = \cos A$

   (b) $\tan A = \cot B, \qquad \cot A = \tan B$

二、解直角三角形

根据三角形的某些已知元素求出它的未知元素，这种过程叫做**解三角形**. 在直角三角形中，直角总是已知的. 除直角外，只要再知道两个元素，其中至少有一边，就可以求出直角三角形的其它各元素. 因此，解直角三角形，只有下面四种情况：

1. 已知斜边与一锐角，
2. 已知一条直角边与一锐角；
3. 已知斜边与一条直角边；
4. 已知两条直角边.

上述四种情况，都可用前面中所列出的关系式，并利用三角比值表来求解.

例 6.18 已知 $c = 18$, $\angle A = 62°20'$ (图 6.13), 求：$\angle B, a, b$

解：

$$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 62°20' = 27°40'$$

$$a = c\sin A = 18 \times \sin 62°20' = 18 \times 0.8857 \approx 15.9$$

$$b = c\cos A = 18 \times \cos 62°20' = 18 \times 0.4643 \approx 8.3600$$

例 6.19 已知 $c = 27.5$, $a = 22.6$, 求 b、$\angle A$、$\angle B$ (图 6.14).

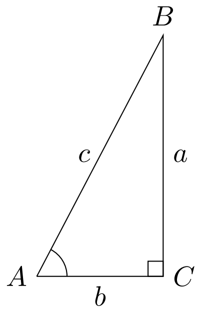


图 6.13

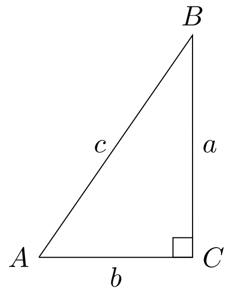


图 6.14

解:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{27.5^2-22.6^2}\approx 15.7$$

由于 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{22.6}{27.5}\approx 0.8218$，因此:

$$\angle A\approx 55^\circ 16'$$
$$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-55^\circ 16'=34^\circ 44'$$

例 6.20　已知 $a=3.8$, $\angle A=42^\circ$, 求 $\angle B$, C, b (图 6.15).

解:

$$B=90^\circ-\angle A=48^\circ$$
$$b=a\cot A=3.8\times\cot 42^\circ\approx 4.22$$
$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{3.8}{\sin 42^\circ}\approx 5.68$$

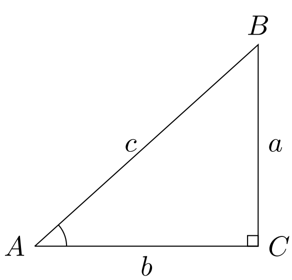


图 6.15

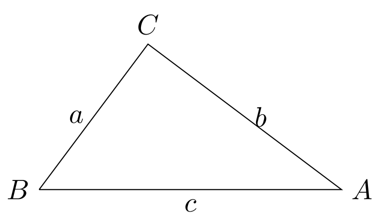


图 6.16

例 6.21　已知 $a=3$、$b=4$, 求 c、$\angle A$、$\angle B$ (图 6.16)

解：

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

由于 $\tan A=\dfrac{3}{4}=0.75$，因此：

$$\angle A\approx 36^\circ 52', \qquad \angle B\approx 90^\circ-36^\circ 52'=53^\circ 8'$$

练习

1. 解下列直角三角形：
   (a) 已知 $c=58.5,\quad \angle A=45^\circ 13'$
   (b) 已知 $c=14,\quad \angle B=62^\circ$
   (c) 已知 $c=28,\quad \angle A=34^\circ$
   (d) 已知 $c=195,\quad \angle B=78^\circ 47'$
   (e) 已知 $a=87,\quad \angle A=55^\circ$
   (f) 已知 $b=99,\quad \angle B=83^\circ$
   (g) 已知 $c=32,\quad a=18$
   (h) 已知 $a=14,\quad \angle B=78^\circ$
   (i) 已知 $c=79,\quad b=56$
   (j) 已知 $a=12.8,\quad b=15.6$
   (k) 已知 $c=73,\quad \angle B=66.2^\circ$
   (l) 已知 $c=350,\quad \angle A=3.8^\circ$
2. 已知直角 $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=\alpha$ 和 $\angle A$ 对的直角边是 a
   求证：直角 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{a^2}{2}\tan\alpha$
3. 已知直角三角形的一个锐角为 α, 面积等于 S, 求它的外接圆的面积.

三、解直角三角形的应用

下面我们举例说明解直角三角形在实际中的应用.

例 6.22　如图 6.17, 已知在测点 C 处, 测得一铁塔顶端 A 的仰角 $\angle ACE = \aleph$, $\overline{BD} = a$, 仪器的高度 $\overline{CD} = b$, 求铁塔的高 $\overline{AB}$.

解:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB}$$

已知 $\overline{EB} = \overline{CD} = b$, 在 $\triangle ACE$ 中,

$$\overline{AE} = \overline{CE} \times \tan\alpha$$

又 $\overline{CE} = \overline{BD} = a$.

$\therefore \quad \overline{AB} = a \cdot \tan\alpha + b$

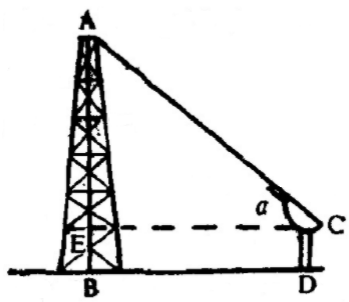


图 6.17

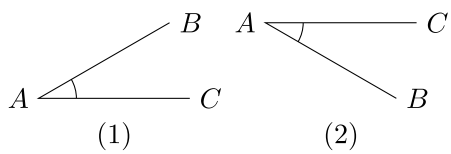


图 6.18

注意: 如图 6.18(1) 连结测点 A 和目的物 B, 并且经过 A 点画和 AB 在同一铅直平面内的水平线 AC, 如 AB 在 AC 的上方, 那么 $\angle BAC$ 叫做仰角; 如图 6.18(2), 如果 AB 在 AC 的下方, 那么 $\angle CAB$ 叫做俯角.

例 6.23　如图 6.19, 已知 C、D 两点与物体"$\overline{AB}$"的底端 B 点共线, 且 $\overline{CD} = a$, 仪器 $\overline{CC'}$、$\overline{DD'}$ 的高都等于 b, 在 C'、D' 两点测得物体的顶端 A 的仰角分别是 α、β, 求物体的高 $\overline{AB}$

解: 在直角 $\triangle AEC'$ 与直角 $\triangle AED'$ 中,

$$\overline{C'E} = \overline{AE} \times \cot\alpha \tag{6.1}$$

$$\overline{D'E} = \overline{AE} \times \cot\beta \tag{6.2}$$

(6.1) − (6.2) 得:

$$\overline{D'E} - \overline{C'E} = \overline{AE} \times (\cot\beta - \cot\alpha)$$

即: $\overline{C'D'} = \overline{AE} \times (\cot\beta - \cot\alpha)$

已知 $\overline{C'D'} = \overline{CD} = a$

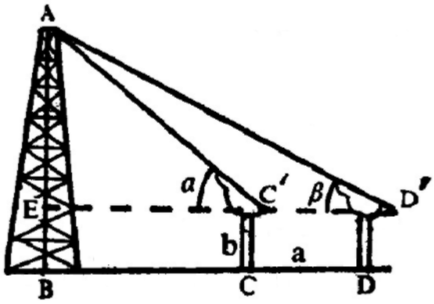


图 6.19

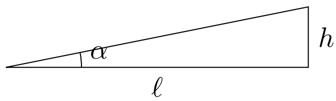


图 6.20

$\therefore \quad \overline{AE} = \dfrac{a}{\cot\beta - \cot\alpha}$

但 $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AE} + b$,

$\therefore \quad \overline{AB} = b + \dfrac{a}{\cot\beta - \cot\alpha}$

如果要测底部可以到达的物体的高度，可用例 6.22 所介绍的方法，如要测底部不能到达的的物体的高度，可用例 6.23 所介绍的方法.

例 6.24 一条公路的路面升高 h 与水平距离 ℓ 的比值 i 叫做路面的坡度. 即 $i = h : \ell$ (图 6.20). 已知某段公路，每前进 100 米就升高 4 米，求路面的坡度及路面对水平面的倾角 α.

解： 路面的坡度 $i = \dfrac{h}{\ell}$ ，已知 $h = 4$ 米，$\ell = 100$ 米，

$\therefore \quad i = \dfrac{4}{100} = 0.04$

从图 6.20 中的直角三角形可见，$h : \ell$ 正好是角 α 的正切，即：$i = \tan\alpha$,

$\therefore \quad \tan\alpha = 0.04$. 倒查正切表得：$\alpha = 2°17'$.

答：路面的坡度是 0.04, 路面对水平面的倾角是 $2°17'$.

例 6.25 已知一门式起重机（图 6.21），机身高 21 米，吊杆长 $\overline{AB} = 36$ 米，吊杆的倾角 A（即吊杆与水平线的夹角）可以从 $30°$ 转到 $80°$, 求这门起重机工作时的最大高度和最大水平距离.

解： 当吊杆 $\overline{AB}$ 的倾角 A 达到最大限度 $80°$ 时，这时起重机吊的最高位置如图 6. 21 中 $\overline{AB}$ 的位置. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 80°$, $\overline{AB} = 36$ 米，因此：

$$\overline{EC} = \overline{AB} \times \sin 80° = 36 \times \sin 80° = 36 \times 0.9848 \approx 35.45\text{m}$$

$$\text{起重机的最大高度} = \text{机身高} + \overline{BC} = 21 + 35.45 = 56.45\text{m}$$

当倾角 A 达到最小角时，起吊的水平距离最远，这时，如图 6.21 中 $\overline{AB'}$ 的位置. 在直角 $\triangle AB'C'$ 中，$\angle A = 30°$, $\overline{AB'} = 36$ 米.

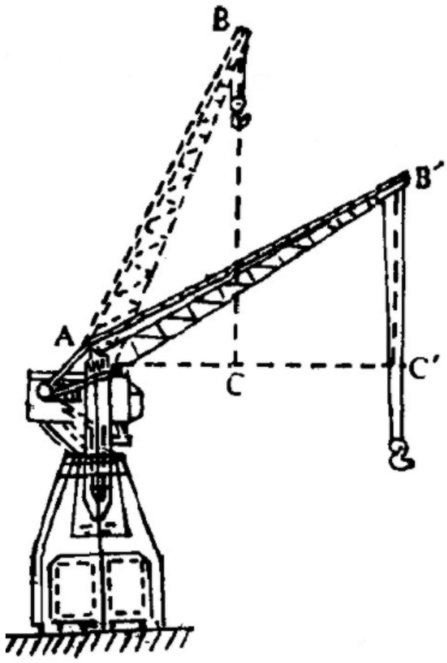


图 6.21

因此：起重机起吊的最远水平距离

$$\overline{AC'} = \overline{AB'} \times \cos 30^\circ = 36 \times 0.8660 \approx 31.18\text{m}$$

答：起重机工作的最大高度是 56.45 米，最远水平距离是 31.18 米.

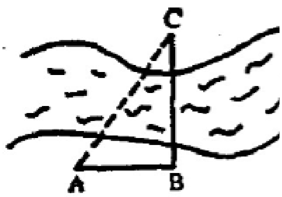
练习

1. 测量学校旗杆的高度.
2. 选择底部不能到达的建筑物或树本，测量它的高度.
3. 如图，要求河两岸 B、C 两点间的距离，在 B 点这一岸垂直于 BC 方向上找一点 A，测出 $\angle BAC = 58^\circ 12'$，$\overline{AB} = 25$ 米，求 B、C 两点间的距离.
4. 如图，从山顶 D 测得地平面上同一方向的两点 A 和 B 的俯角分别是 18° 和 23°，已知 $\overline{AB} = 140$ 米，求山高 $\overline{CD}$（得数保留整数米）.
5. 已知传送带和地面的夹角是 25°，它把物件从地面运到离地面 9 米

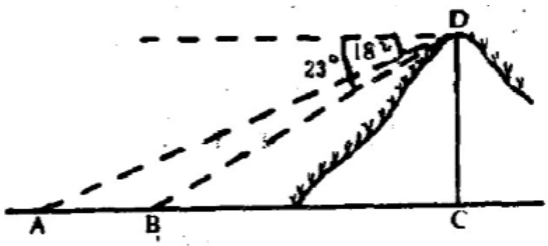
高的地方，求物件所走的路程.

6. 工件上有 V 形槽，测出上口宽 200mm, 深 19.2mm, 求 V 形角 α 多大.

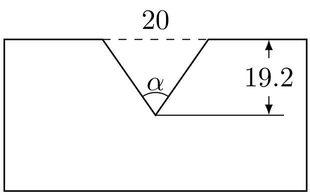
7. 如图, 在离地面高 5 米处引拉线固定电线杆, 拉线和地面成 $60°$ 角, 求每根拉线多长，拉线底端离杆底多远.



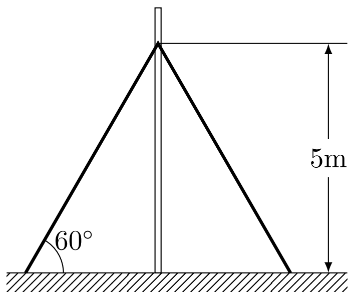
第 3 题



第 4 题



第 6 题



第 7 题

习题 6.2

1. 已知等腰 $\triangle ABC$, 腰长为 5cm, 底边长为 8cm, 求 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

2. 把 2 米的竹杆，垂直于地面的时候，影长 1.6 米，这时太阳的仰角大约是多少度?

3. 已知等腰 $\triangle ABC$, 腰长 $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\text{cm}$, 底角为 $40°$, 求高 $\overline{AD}$, 底边 $\overline{BC}$ 和面积 S.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$、$\angle C$ 是锐角，$\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 边上的高，求证:

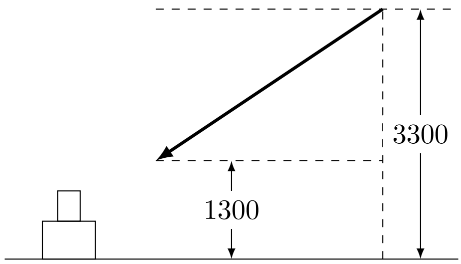
(a) $\overline{AD} = b\sin C = c\sin B$

(b) $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

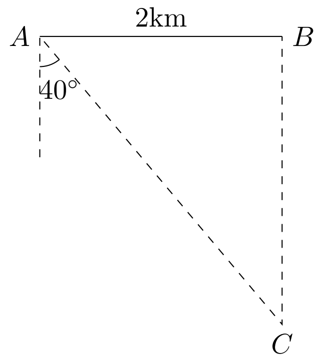
5. 已知正 n 边形的半径是 r，周长是 ℓ，求证：

$$\ell = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n}$$

6. 一架战斗机从 3300 米高空以每秒 150 米的速度向轰炸目标俯冲，俯冲角为 42°, 在离地面 1300 米时投弹，击中目标，问飞机开始俯冲到投弹共用几秒钟？



第 6 题



第 7 题

7. 东西两炮台 A、B 相距 2km, 同时发现入侵敌舰 C, 炮台 A 测得敌舰 C 在它的南偏东 40° 的方向，炮台 B 测得敌舰 C 在它的正南方，试求敌舰与两炮台的距离.

8. 从圆外一点向圆引两条切线,已知切线长等于 21.8cm, 圆的半径等于 10.6cm, 求这两条切线间的夹角.

第三节　任意三角形中的边角关系

一、正弦定理

为了解任意的三角形，下面我们用三角比来研究任意三角形中的边角关系.

我们约定在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 分别用 α、β、γ 来表示；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别用 a、b、c 来表示；外接圆的半径用 r 来表示.

假定 α 是锐角（图 6.22)，作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O, 再作 $\odot O$ 的直径 $\overline{CA'}$, 弦 $\overline{BA'}$, 在 $\triangle A'BC$ 中，$\angle A'BC$ 是直角，因此 $a = 2r\sin A'$

$\because \quad \angle A' = \angle A = \alpha$

$\therefore \quad a = 2r\sin\alpha$，因此：

$$\frac{a}{\sin\alpha} = r \tag{6.3}$$

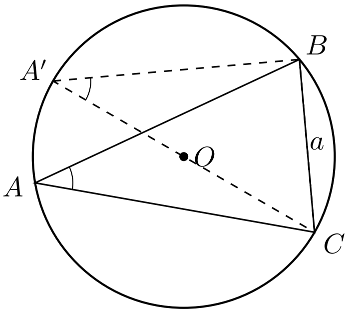


图 6.22

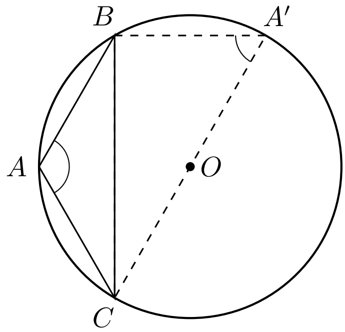


图 6.23

假定 $\angle A$ 是钝角（图 6.23），作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$, 再作直径 $\overline{CA'}$, 弦 $\overline{BA'}$

$\because \quad \angle A + \angle A' = 180°$

$\therefore \quad \angle A' = 180° - \angle A$, $\angle A'$ 是一个锐角，

在直角 $\triangle A'BC$ 中，$\angle A'BC$ 是直角.

$\therefore \quad a = 2r\sin A' = 2r\sin(180° - A) = 2r\sin(180° - \alpha)$，因此：

$$\frac{a}{\sin(180° - \alpha)} = 2r \tag{6.4}$$

我们比较 (6.3)、(6.4) 两式，可以看出，如果我们定义一个钝角的正弦等于它的补角的正弦，即

$$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$$

其中：α 是钝角. 那么 (6.4) 式在形式上就与 (6.3) 式相同了，这就是说，α 不论是锐角还是钝角都有：

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$$

当 α 是直角时（图 6.24），作直角 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 这时斜边 α 正好是 O 的直径.

$\because \quad \sin 90° = 1$

$\therefore \quad \dfrac{a}{\sin\alpha} = 2r$ 仍然成立.

同理，我们还可得出，

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2r, \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

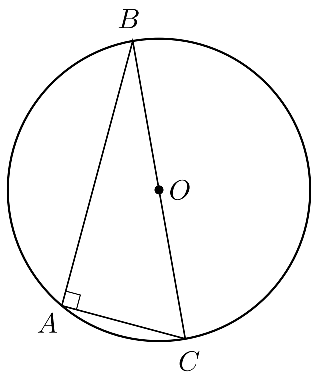


图 6.24

总结上面的讨论，我们得到：

正弦定理

在任意 $\triangle ABC$ 中，边角关系满足：

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r$$

例 6.26 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长是 a, 求 r.

解： $\because \quad \dfrac{a}{\sin\alpha}=2r, \quad \alpha=60^\circ$

$\therefore \quad \dfrac{a}{\sin 60^\circ}=2r$

$$r=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

例 6.27 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b\sin\beta=c\sin\gamma$, 求证 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明： $\because \quad b\sin\beta=c\sin\gamma$

$\therefore \quad \dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

又 $\because \quad \dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

$\therefore \quad \dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \quad \dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{b}, \quad b^2=c^2$

$\because \quad b>0, \quad c>0$

$\therefore \quad b=c$，$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

例 6.28 已知 P 点是 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 边上的任一点，求证：

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}=\frac{c\sin\angle PAB}{b\sin\angle PAC}$$

证明： 如图 6.25 所示，在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle APC$ 中，根据正弦定理有：

$$\frac{\overline{BP}}{\sin\angle PAB}=\frac{c}{\sin\angle APB},\qquad \frac{\overline{PC}}{\sin\angle PAC}=\frac{b}{\sin\angle APC}$$

即：

$$\overline{BP}=\frac{c\sin\angle PAB}{\sin\angle APB},\qquad \overline{PC}=\frac{b\sin\angle PAC}{\sin\angle APC}$$

$\because\quad \angle APB+\angle APC=\pi$

$\therefore\quad \sin\angle APB=\sin\angle APC,\qquad \dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}}=\dfrac{c\sin\angle PAB}{b\sin\angle PAC}$

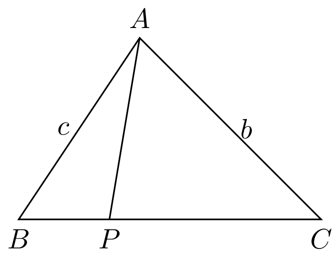


图 6.25

练习

1. 求证在 $\triangle ABC$ 中，
   (a) $\sin\alpha=\dfrac{a}{b}\sin\beta=\dfrac{a}{c}\sin\gamma$
   (b) $a+b+c=2r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$
   (c) $\sin\alpha+\sin\beta<\sin\gamma$
2. 在 $\odot O$ 中，量得一个 30° 的圆周角所对的弦长是 4cm，求 $\odot O$ 的半径 r.
3. 求下列各角的正弦：

   $$90^\circ,\quad 120^\circ,\quad 150^\circ,\quad 135^\circ,\quad 132^\circ$$

4. 在半径是 5cm 的圆中，120° 的圆心角所对的弦长是多少？

5. 在半径是 15cm 的圆中，一条长 18cm 的弦所对的圆心角是多少度（精确到度）.

6. 应用正弦定理证明三角形内角平分线定理（提示：模仿例 6.28 的证法）.

二、余弦定理

在 $\triangle ABC$ 中，如果 β、γ 都是锐角（图 6.26），作 $\overline{BC}$ 边上的高 $\overline{AD}$, 则 $a=\overline{BD}+\overline{DC}$.

但 $\overline{BD}=c\cos\beta$, $\overline{DC}=b\cos\gamma$，因此：

$$a=c\cos\beta+b\cos\gamma \tag{6.5}$$

如果 β、γ 中有一个是钝角，设 γ 是钝角（图 6.27）作 $\overline{BC}$ 边上的高 $\overline{AD}$, 这时垂足 D 落在 $\overline{BC}$ 的延长线上，则 $a=\overline{BD}-\overline{CD}$. 但 $\overline{BD}=c\cos\beta$, $\overline{CD}=b\cos(180^\circ-\gamma)$，因此：

$$a=c\cos\beta-b\cos(180^\circ-\gamma) \tag{6.6}$$

比较 (6.5)、(6.6) 两式，为了使它们在形式上得到一致，我们定义钝角 Y 的余弦为：

$$\cos\gamma=-\cos(180^\circ-\gamma) \qquad (\gamma \text{ 为钝角})$$

这样，不论 γ 是锐角还是钝角都有关系式

$$a=c\cos\beta+b\cos\gamma$$

如果 β 是钝角，由 $\cos\beta=-\cos(180^\circ-\beta)$ 同样可以得到：

$$a=c\cos\beta+b\cos\gamma$$

如果 β、γ 中有一个是直角，设 $\gamma=90^\circ$（图 6.28),

$\because$ $\cos\gamma=\cos 90^\circ=0$

$\therefore$ $a=c\cos\beta+b\cos\gamma$ 仍然成立.

若分别作 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 边上的高，同样还可证明

$$b=a\cos\gamma+c\cos\alpha$$

$$c=b\cos\alpha+a\cos\beta$$

总结上面的讨论，我们得到：

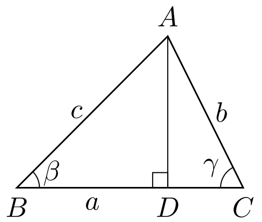


图 6.26

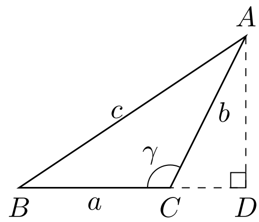


图 6.27

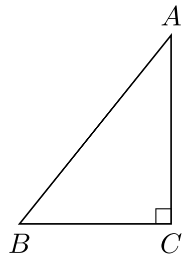


图 6.28

定理

在任意 $\triangle ABC$ 中，边角关系满足：

$$a = c\cos\beta + b\cos\gamma \tag{6.7}$$

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha \tag{6.8}$$

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta \tag{6.9}$$

由上面的定理，我们就可推出余弦定理

余弦定理

在任意的 $\triangle ABC$ 中，边角关系满足

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

证明： 由上面的定理的 (6.7) 式得，

$$\cos\beta = \frac{a - b\cos\gamma}{c}$$

由 (6.8) 式得

$$\cos\alpha = \frac{b - a\cos\gamma}{c}$$

把 $\cos\beta$、$\cos\alpha$ 代入 (6.9) 得

$$c = a\frac{a - b\cos\gamma}{c} + b\frac{b - a\cos\gamma}{c} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}{c}$$

$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

用同样的办法我们可证：

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

请同学们自证如下两个推论：

推论 1

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

推论 2

一个三角形两边平方的和如果等于第三边的平方，那么第三边所对的角是直角；如果小于第三边的平方，那么第三边所对的角是钝角；如果大于第三边的平方，那么第三边所对的角是锐角.

例 6.29 分别求出 $120°$、$135°$、$150°$、$140°$ 的余弦.

解： 由定义知，一个钝角的余弦等于它的补角的余弦的相反数，所以有：

$$\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 135° = -\cos(180° - 135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 140° = -\cos(180° - 140°) = -\cos 40° \approx -0.7660$$

例 6.30 用余弦定理证明广义勾股定理.

已知：$\square ABCD$ (图 6.29)

求证：$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2)$

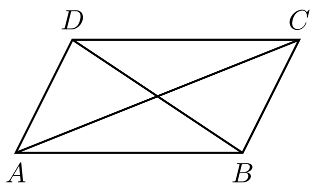


图 6.29

证明： 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 中，

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos\angle ABC \tag{6.10}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\angle BAD \tag{6.11}$$

$\because\quad \angle BAD + \angle ABC = 180°$

$\therefore\quad \cos\angle ABC = -\cos\angle BAD$

又 $\because\quad \overline{BC} = \overline{AD}$

$(6.10) + (6.11)$ 则得：

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\left(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2\right)$$

练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = 4$, $b = 7$, $\gamma = 40°$, 求 c.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, 求 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$.
3. 已知 $\triangle ABC$ 的三边：
   (a) 56, 65, 33, 求最大角；
   (b) 7、$4\sqrt{3}$、$\sqrt{13}$, 求最小角.
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 120°$, 求证：
   (a) $a^2 - b^2 = c(b + c)$
   (b) $b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2)$
5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos\beta = \dfrac{\sin\alpha}{2\sin\gamma}$, 求证 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.
6. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：
$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

三、解斜三角形

在一个三角形中，如果没有一个角是直角，那么，这个三角形叫做斜三角形. 斜三角形的解法可以分成下面的四种情形:

1. 已知一边和两角；
2. 已知两边和它们的夹角；
3. 已知三边；
4. 已知两边和其中一边的对角.

下面我们分别举例说明每种情形的解法.

例 6.31 已知: $c = 100$、$\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (图 6.30), 求 γ、a、b.

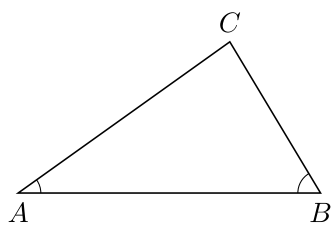


图 6.30

解:

$$\begin{aligned}
\gamma &= 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ \\
a &= \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \approx \frac{100\times\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{100\times 0.6428}{0.9848} = 65.27 \\
b &= \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{100\times\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{100\times 0.8660}{0.9848} = 87.94
\end{aligned}$$

例 6.31 告诉我们，如果已知两角和一边，先用内角和定理求出未知的第三个角，然后再用正弦定理便可求出未知的两边了.

练习

1. 已知下列条件，解三角形，并求其外接圆的半径.

   (a) $b = 4$,　$\alpha = 30^\circ$,　$\beta = 120^\circ$

   (b) $c = 13$,　$\alpha = 45^\circ$,　$\beta = 60^\circ$

2. 解三角形:

(a) $\alpha = 62°$, $\beta = 48°$, $c = 24$

(b) $\alpha = 55°12'$, $\beta = 29°18'$, $c = 18$

例 6.32 已知 $b = 60$、$c = 34$、$\alpha = 41°$ (图 6.31). 求 α, β, γ.

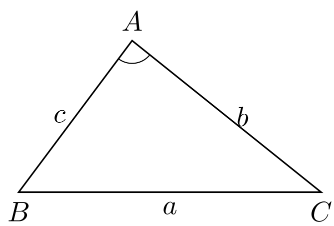


图 6.31

解:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= 602 + 342 - 2 \times 60 \times 34\cos 41° \\ &= 3600 + 1156 - 4080 \times 0.755 \approx 1676 \end{aligned}$$

查平方根表, 得: $a \approx 41$.

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a} = \frac{34 \times \sin 41°}{41} = \frac{34 \times 0.655}{41} \approx 0.5441$$

$$\therefore \quad \gamma \approx 32°58'$$

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (41° + 32°58') = 106°2'$$

例 6.32 告诉我们, 如果已知两边及夹角, 可由余弦定理先求出未知的一边, 然后由正弦定理就可算出未知的一个角了, 再由内角和定理, 就可求出未知的另一个角了. 再求出未知边后, 最好先求较短边所对的角, 因为较短边所对的角一定是锐角, 这样就可避免求钝角的情况.

练习

已知下列条件，解三角形

1. $a = 22,\quad b = 26,\quad \gamma = 78^\circ$
2. $b = 10,\quad c = 10,\quad \alpha = 102^\circ$
3. $a = 0.8,\quad c = 0.6,\quad \beta = 50^\circ$
4. $a = 4,\quad b = 5,\quad \gamma = 60^\circ$

例 6.33 已知 $a = 134.6$, $b = 87.8$, $c = 161.7$(图 6.32)，求 α、β、γ.

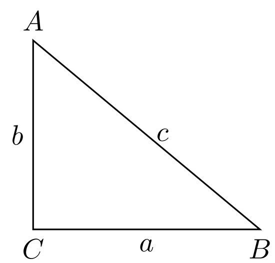


图 6.32

解： **解法一：** 先用余弦定理求两个较短的边所对的角.

$$\cos\alpha = \frac{87.8^2 + 161.7^2 - 134.6^2}{2\times 87.8\times 161.7} \approx 0.5549$$

$\therefore\quad \alpha = 56^\circ 18'$

$$\cos\beta = \frac{134.6^2 + 161.7^2 - 87.8^2}{2\times 134.6\times 161.7} \approx 0.8400$$

$\therefore\quad \beta = 32^\circ 51',\quad \gamma = 180^\circ - (56^\circ 18' + 32^\circ 51') = 90^\circ 51'$

解法二：

$$\cos\alpha = \frac{87.8^2 + 161.7^2 - 134.6^2}{2\times 87.8\times 161.7} \approx 0.5549$$

$\therefore\quad \alpha = 56^\circ 18'$

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{87.8\times\sin 56^\circ 18'}{134.6} \approx 0.5427$$

$\therefore\quad \beta = 32^\circ 51',\quad \gamma = 180^\circ - (56^\circ 18' + 32^\circ 51') = 90^\circ 51'$

由例 6.33 可知，如果已知三边 a、b、c, 可用余弦定理求出两个较短的边所对的角的余弦；或由余弦定理求出一角后，再改用正弦定理求另一角的正弦.

一般地说后一种方法比较方便. 我们所以要先求较短边所对的角, 主要还是避免在计算中出现求钝角的情况.

练习

已知下列条件, 解三角形

1. $a=40,\quad b=19,\quad c=41$
2. $a=1.5,\quad b=2.5,\quad c=1.8$
3. $a=6,\quad b=3,\quad c=3\sqrt{3}$
4. $a=\sqrt{10},\quad b=4,\quad c=\sqrt{2}$

例 6.34 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=12$, $b=20$, $\alpha=34°$, 求: β、γ 和 c (图 6.33).

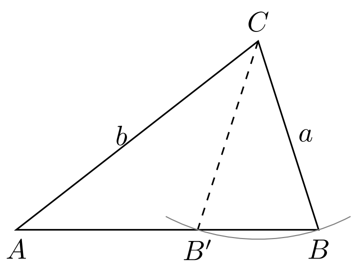


图 6.33

解: $\because\quad \dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$

$\therefore\quad \sin\beta=\dfrac{b\sin\alpha}{a}=\dfrac{20\times\sin 34°}{12}=\dfrac{20\times 0.5592}{12}=0.9320$

由于 β 是锐角, 反查正弦表得: $\beta=68°45'$

$\therefore\quad \gamma=180°-(\alpha+\beta)=180°-(34°+68°45')=77°15'$

又 $\because\quad \dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

$\therefore\quad c=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}=\dfrac{12\times\sin 77°15'}{\sin 34°}=\dfrac{12\times 0.9753}{0.5582}=20.93$

如果在例 6.34 中, 不限 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 那么 β 角就可能是钝角 (图 6.33 中的 $\angle AB'C$), 这样 β 角就有两个解. 对于已知 a、b、α 解三角形这种情形, 我们详细讨论如下:

1. 如果已知 α 角是钝角或直角, 那么必须 $a>b$ 才能有解 (为什么?), 这时从 $\sin\beta=\dfrac{b\sin\alpha}{a}$ 求 β 角的时候, 只能取锐角的值, 因此只有一个解.

2. 如果已知的 α 角是锐角，并且 $a > b$ 或者 $a = b$. 这时从 $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$ 求 β 角的时候，也只能取锐角的值，因此都只有一个解（图 6.34 和图 6.35）.

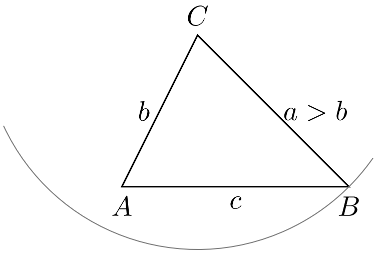


图 6.34

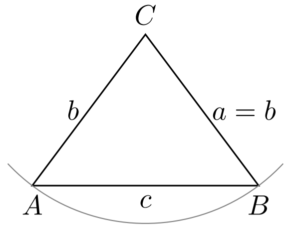


图 6.35

3. 如果已知的 α 角是锐角，并且 $a < b$，我们再分下面三种情况来讨论：

(a) $a > b\sin\alpha$, 这时从 $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$ 求得 $\sin\beta < 1$, β 可以取一个锐角的值和一个钝角的值，因此可以有两个解（图 6.36）.

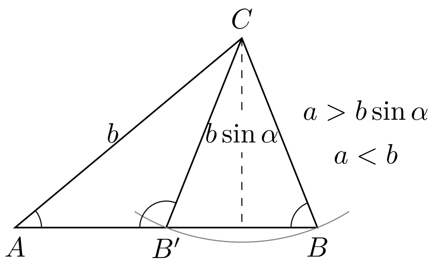


图 6.36

(b) $a = b\sin\alpha$, 这时从 $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$ 求得 $\sin\beta = 1$, 所以 β 只能是直角，因此，只有一个解（图 6.37）.

(c) $a < b\sin\alpha$, 这时从 $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$ 求得 $\sin\beta > 1$, 但是一角的正弦值不能大于 1, 因此没有解（图 6.38）.

上面所得的结果可以列成下表：

	$\alpha \geq 90^\circ$	$\alpha < 90^\circ$
$a > b$	一解	一解
$a = b$	无解	一解
$a < b$	无解	$a > b\sin\alpha$ 时，两解 $a = b\sin\alpha$ 时，一解 $a < b\sin\alpha$ 时，无解

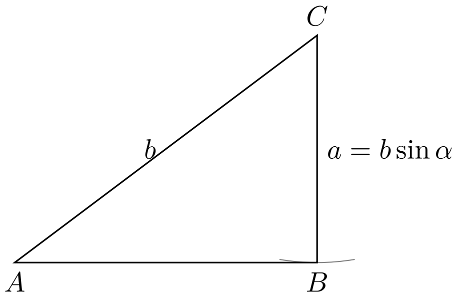


图 6.37

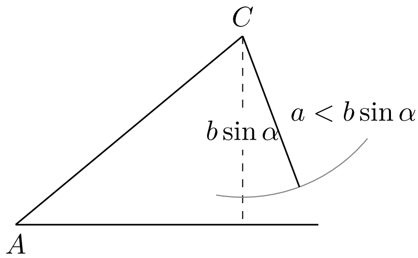


图 6.38

练习

1. 已知 $a=2$, $b=3$, $\alpha=30^\circ$, 解三角形.
2. 已知 $a=2$, $b=3$, $\beta=120^\circ$, 解三角形.
3. 已知 $b=3$, $c=4$, $\beta=45^\circ$, 解三角形.

四、三角形的面积公式

在解题中，有时需要根据三角形的已知元素来计算它的面积，下面导出几个常用的求三角形面积的公式.

(一) 已知三角形的两边及其夹角，求面积

当已知三角形的两边及其夹角时，它的面积 $S_\triangle$ 可表示成下面的公式:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$
$$S_\triangle = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$
$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

证明:

1. 当 α、β 都为锐角时图（6.39），设 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CD}=h$. 那么,

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ch$$

在直角 $\triangle ACD$ 中，$h=b\sin\alpha$. 代入上式得

$$S_\triangle = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

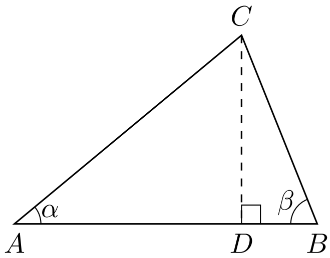


图 6.39

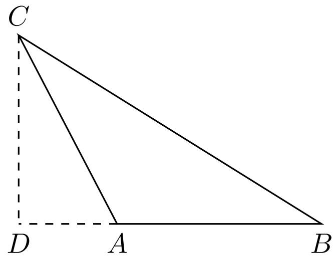


图 6.40

2. 当 α 为钝角时（图 6.40），仍设 $\overline{AB}$ 边上的高 $\overline{CD}=h$, 那么:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ch$$

在直角 $\triangle ACD$ 中，$h=b\sin(180^\circ-\alpha)=b\sin\alpha$

$\therefore\quad S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$

当 β 为钝角时，同理也可证明:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

3. 当 α 为直角时，那么，

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}bc$$

但 $\sin\alpha=\sin 90^\circ=1$

$\therefore\quad S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ 仍然成立.

同理可证:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ac\sin\beta,\qquad S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

（二）已知三角形的三边求面积

如果已知三角形的三边，则

$$S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

其中: $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$

证明: 由余弦定理得:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

因此:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}&=\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}\\
&=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}}\\
&=\frac{1}{2bc}\cdot\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}
\end{aligned}
$$

令 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，则 $2p=a+b+c$

$$
b+c-a=(a+b+c)-2a=2p-2a=2(p-a)
$$

同理:

$$
a+c-b=2(p-b),\qquad a+b-c=2(p-c)
$$

因此:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha&=\frac{1}{2bc}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}
$$

由于 $S_\triangle=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$，因此:

$$
\begin{aligned}
S_\triangle&=\frac{1}{2}bc\times\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}
$$

这个公式，我国叫做**三斜求积公式**，国外又叫做**海伦公式**.

(三) 已知三角形二角一夹边，求三角形的面积

如果已知三角形的二角一夹边，则

$$
S_\triangle=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}
$$

$$
S_\triangle=\frac{b^2\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}
$$

$$
S_\triangle=\frac{c^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}
$$

证明： 已知 $S_\triangle=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$，由正弦正理，

$$b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha},\qquad c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

因此：

$$S_\triangle=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)\cdot\sin\alpha=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

但 $\sin\alpha=\sin[180^\circ-(\beta+\gamma)]=\sin(\beta+\gamma)$

$\therefore\quad S_\triangle=\dfrac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$

同理可证明其它两个公式.

练习

1. 在三角形中，已知
   (a) 两边长分别为 4、7, 夹角是 40°,
   (b) 三边长各为 2、4、4.
   (c) $\alpha=60^\circ$、$\beta=80^\circ$、$c=12$,

   求它们的面积各等于多少?
2. 求边长等于 a 的等边三角形的面积.
3. r 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径，求证：
$$S_\triangle=2r\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$
4. 已知三角形的三边 a、b、c, 且 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, 求证：内切圆半径
$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$
5. 设 h_a、h_b、h_c 分别表示 $\triangle ABC$ 的三边 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上的高，求证：
$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

五、解三角形在测量中的应用

利用解三角形的原理，可以解许多实际测量问题. 下面我们来研究如何计算不便测量的两点间的距离.

测量工作者，为了测量远方某个目标 C 的距离（图 6.41），总先选定适当长的基线 $\overline{AB}$, 然后从基线两端 A、B, 分别测得目标 C 的方向与 AB 的夹角为 α、β. 那么，根据基线 $\overline{AB}$ 的长度和 α、β 的值就可算出 C 点与 A 点、B 点的距离. 以及 C 点与基线 $\overline{AB}$ 的距离，计算方法如下：

$$\because\quad \frac{\overline{AC}}{\sin\beta}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha+\beta)},\qquad \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore\quad \overline{AC}=\frac{\overline{AB}\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\qquad \overline{BC}=\frac{\overline{AB}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

设 $\overline{CD}$ 是 $\overline{AB}$ 边上的高且 $\overline{CD}=x$, 则 $\overline{AD}=x\cot\alpha$, $\overline{BD}=x\cot\beta$

$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=x(\cot\alpha+\cot\beta)$$

$$\therefore\quad x=\frac{\overline{AB}}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

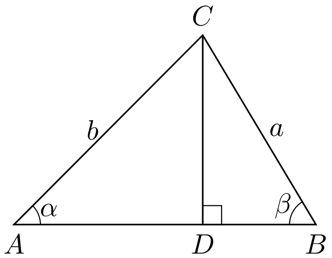


图 6.41

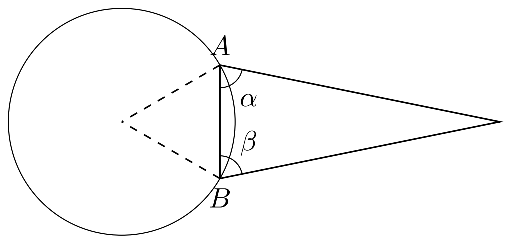


图 6.42

在测量中，基线越长，量得越准确，测的精确度就越高.

天文学家曾用了这个方法测出了地球和月亮间的距离. 1671 年两个法国天文学家拉让德和拉卡伊，一个在柏林，一个在好望角（这两个城市差不多位于同一子午线上），测出了 α、β 的大小和 AB 的长度（图 6.42）. 从而确切地算出了地月平均距离为 385400 公里.

在地球上，我们可使用的最长基线是地球的直径，由于地球绕太阳按椭圆形轨道运行，当我们要测量其它星球到地球的距离时，可使用的最长基线是地球椭圆轨道的长轴（图 6.43）.

从以上的分析我们知道，当我们应用解三角形原理在地球上测量地球与其它星球的距离时，可使用的基线是有限的，所以星球离地球越远、视角也越小，相对基线就越短，测的结果也就越不精确了.

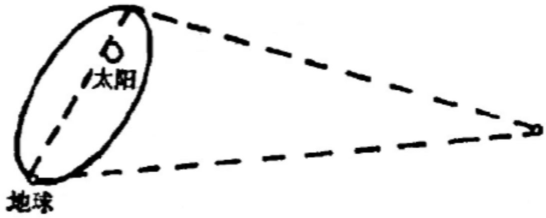


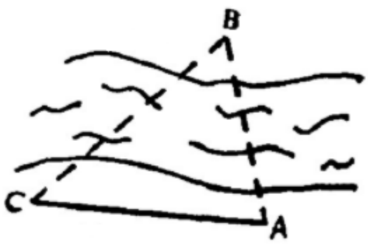
图 6.43

练习

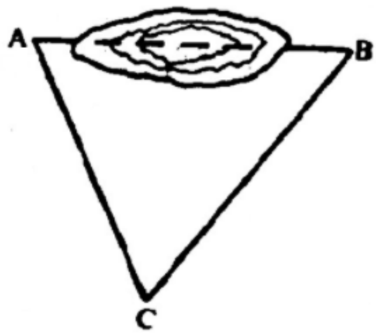
1. 要测量一条河两岸的两点 A、B 之间的距离，在 A 点所在的岸边选择一条基线 $\overline{AC} = 380$ 米，测出 $\angle BAC = 75°32'$，$\angle BCA = 45°35'$，求 A、B 间的距离.

2. 如图，A、B 两地不能直接测量，选同时能看到 A、B 的一点 C，测得 $\overline{AC} = 280$ 米，$\overline{BC} = 470$ 米，$\angle ACB = 80°21'$，求 A、B 两地的距离.

3. 河对岸有两个目标 A、B，若不准过河，如何测量才能算出 A、B 两点间的距离?



第 1 题

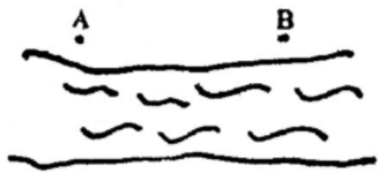


第 2 题

习题 6.3

1. 在 $\triangle ABC$ 中，

   (a) 已知 $a = 8$、$\beta = 40°$、$\gamma = 90°$，求 b.



第 3 题

(b) 已知 $a=25$、$b=31$、$\gamma=90^\circ$, 求 a、c.

(c) 已知 $a=6$、$\beta=40^\circ$、$\gamma=80^\circ$, 求 b.

(d) 已知 $a=8$、$b=6$、$\alpha=75^\circ$, 求 β、c.

(e) 已知 $a=3$、$b=4$、$c=5$, 求 γ.

2. 已知下列条件，求 $S_\triangle$.

(a) $a=6,\qquad c=12,\qquad \beta=135^\circ$

(b) $a=10,\qquad \beta=45^\circ,\qquad \gamma=60^\circ$

(c) $a=3,\qquad b=5,\qquad c=10$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=10\text{cm}$, $\beta=54^\circ16'$, $\alpha=63^\circ6'$, 求 $\triangle ABC$ 的面积和 $\angle C$ 的平分线长.

4. 设 D 把 $\triangle ABC$ 的边 $\overline{BC}$ 分成 $m:n$, 求证：

$$n\overline{AB}^2+m\overline{AC}^2=(m+n)\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+m\overline{CD}^2$$

5. 已知 $\triangle ABC$, 且 $\dfrac{a+b}{6}=\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}$，求证：

(a) $\dfrac{\sin\alpha}{7}=\dfrac{\sin\beta}{5}=\dfrac{\sin\gamma}{3}$

(b) $\dfrac{\cos\alpha}{-7}=\dfrac{\cos\beta}{11}=\dfrac{\cos\gamma}{13}$

(c) $\alpha=120^\circ$

6. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\gamma=60^\circ$, 求证：$a^2+b^2=c^2+ab$.

7. 求证在 $\triangle ABC$ 中，$a^2-b^2=ac\cos\beta-bc\cos\alpha$

8. 已知三角形三边的比是 $3:5:7$, 求最大角.

9. 如果 $\triangle ABC$ 的边角之间满足下列关系，那么这个三角形是什么三角形，

(a) $\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^\gamma$

(b) $a\cos A=b\cos B$

10. 等腰梯形 $ABCD$ 的上底 $\overline{AD}=18\text{cm}$, 下底 $\overline{BC}=22\text{cm}$, $\angle ABC=60°$, 求它的面积.

11. 已知梯形 $ABCD$, $AD\ //\ BC$. $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=18$, $\overline{CD}=15$, $\overline{DA}=4$, 求它的面积.

12. 如果已知四边形 $ABCD$ 的 $\angle A=90°$, $\overline{AB}=32$, $\overline{BC}=27$, $\overline{CD}=35$, $\overline{DA}=24$, 那么它的面积是多少?

13. 已知一四边形的两条对角线的长分别为 x、y, 夹角为 θ, 面积为 S, 求证:

$$S=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$

复习题六

1. 用作图法求锐角 x.

(a) $\sin x=\dfrac{4}{5}$

(b) $\cos x=\dfrac{1}{3}$

(c) $\tan x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(d) $\sin x=2\cos x$

2. 已知: $\tan\alpha=m$, $m\geq 0$, 求 $\cos\alpha$、$\sin\alpha$.

3. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$, 求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的值.

4. 计算:

(a) $3\sin 90°+2\cos 0°-3\sin 45°$

(b) $\sin^2 30°-\dfrac{1}{2}\cos 90°+\cos^2 30°$

(c) $\sin^2 45°+\tan^2 30°$

5. 已知 $\triangle ABC$, $\angle C=90°$, 求证

$$\tan A+\tan B=\frac{c^2}{ab}$$

6. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, $\overline{CECB}$, 延长 CA 到 D 使 $\overline{AD}=\overline{AB}$, 作 $\overline{DB}$, 求 $\angle D$ 的度数, 并根据图形求 $\angle D$ 的正弦、余弦、正切和余切的值.

7. 在正方形 $ABCD$ 中，已知 E 是 $\overline{BC}$ 的中点，求 $\angle AEC$ 的正弦和余弦.

8. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2a$, $BC=(\sqrt{3}+1)a$, $\overline{CD}=\sqrt{2}a$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=75^\circ$, 求 $\overline{AC}$ 的长和四边形 $ABCD$ 的面积.

9. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$a=4$、$b=5$、$c=6$, 求 $\cos\alpha$、$\sin\gamma$、$\sin\beta$、$\sin\alpha$, 问 α、β、γ 是锐角还是钝角?

10. 一个三角形的三边的长分别为 3 尺，4 尺及 $\sqrt{37}$ 尺，求此三角形的最大角的度数.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，求证:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b+c}{\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{b-c}{\sin\beta-\sin\gamma}$$

12. 设 P 是等边三角形 ABC 外接圆的 $\widehat{BC}$ 上的一点，求证

$$\overline{PA}^2=\overline{AB}^2+\overline{PB}\cdot\overline{PC}$$

(提示：求 $\cos\angle ABP$, $\cos\angle ACP$，利用 $\cos\angle ABP=-\cos\angle ACP$ 化简即得).

13. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\gamma=60^\circ$, $\overline{AC}=4$, 面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\overline{AB}$ 及 $\overline{BC}$ 的长.

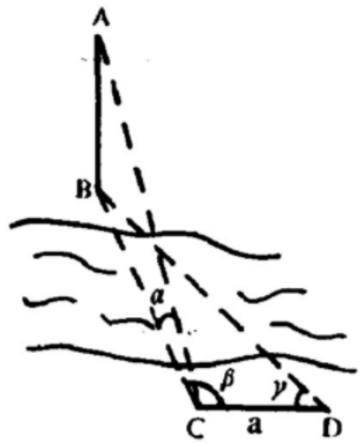
14. 如图, 为求得河对岸某建筑物的高 $\overline{AB}$, 在地面上引一条基线 $\overline{CD}=a$, 测得 $\angle ACB=\alpha$, $\angle BCD=\beta$, $\angle BDC=\gamma$, 求 $\overline{AB}$.

15. 已知 $\odot(A,\sqrt{3})$、$\odot(B,2-\sqrt{3})$、$\odot(c,1)$. $\odot A$ 分别与 $\odot B$ 和 $\odot C$ 相外切. $\angle BAC=60^\circ$, 求 $\overline{BC}$ 的长和 $\angle ACB$ 的度数.

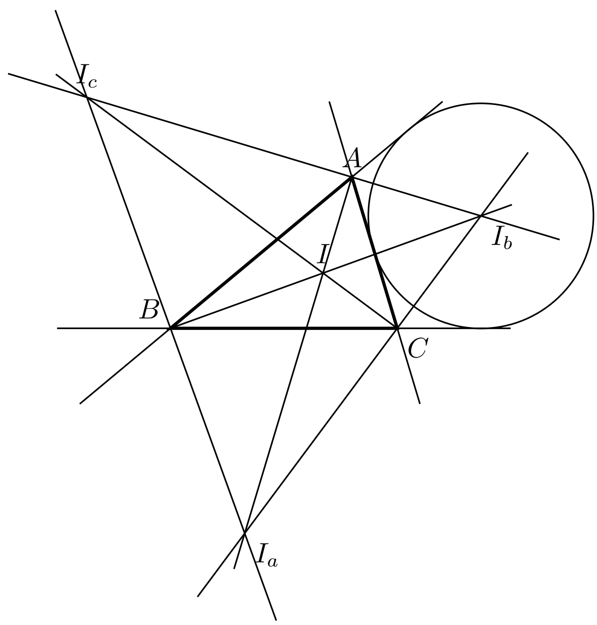
16. 外国船只除特许者外，不得进入离我海岸 d 海里以内的区域，设 A 和 B 是我们的两个观测站，A 与 B 之间的距离为 S 海里，海岸线是过 A 点及 B 点的直线，一外国船在 P 点，在 A 站测得 $\angle BAP=\alpha$, 同时在 B 站测得 $\angle ABP=\beta$, 问 α 及 β 满足什么简单的三角比的不等式，就应当向此未经特许的外国船发出警告，命令退出我海域.

17. 已知 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, I_a、I_b、I_c 为 $\triangle ABC$ 的三个旁心, r, r', r_a, r_b 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆、内切圆和三个旁切圆的半径; 设 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, $S_\triangle$ 为 $\triangle ABC$ 的面积; 求证:

    (a) $S_\triangle=r'p=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$



第 14 题



第 17 题

(b) $4rS_{\triangle} = abc$

(c) $4r = r_a + r_b + r_c - r'$