中学数学实验教材
第六册

中学数学实验教材编写组编

1981 年 6 月

目　录

第一章　函数的极限和连续函数的性质

第一节　函数的极限

一、函数极限的概念

在第四册下，我们研究了数列的极限，数列是一种特殊的函数，这里的自变数 n 取自然数列 $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ 的值，现在我们来研究更一般的情形，即函数 $f(x)$ 随 x 连续变化而变化的情形，下面转到一般函数的极限。

定义 1

如果 x 通过任何一个无限增大的数列 $\{x_n\}$，对应的函数值数列 $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ 都以定数 ℓ 为它的极限，就说函数 $f(x)$，当 $x \to +\infty$ 时，以 ℓ 为极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{或} \qquad f(x) \to \ell \quad (x \to +\infty) \tag{1.1}$$

从几何上看，极限式 (1.1) 表示随着 x 无限增大，曲线 $y = f(x)$ 以直线 ℓ 为渐近线（图 1.1）。

类似地，可以定义函数极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$，这时，变量 x 通过代数值无限地变小，而绝对值无限地增大的任何一个数列 $\{x_n\}$。

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时，都以定值为极限，就说 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时，以定值 ℓ 为极限，记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$，或者 $f(x) \to \ell \ (x \to \infty)$。

例 1.1　证明 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

证明： 任何数列 $\{x_n\}$ 的值 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ 趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，对应的

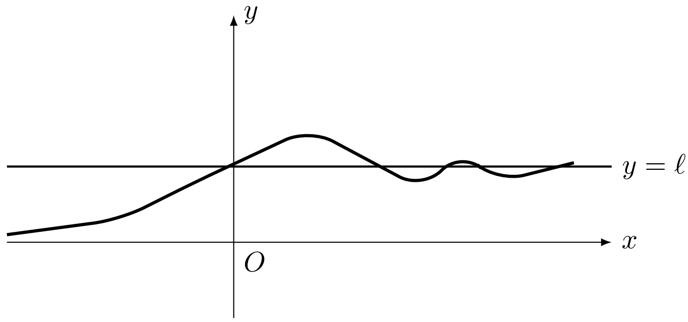


图 1.1

函数数列

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}, \ldots$$

的绝对值 $\left|\frac{1}{x_n}\right|$ 便趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x_n}\right| = 0$$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

例 1.2 证明函数 $\sin x$, 当 $x \to \infty$ 时，没有极限.

证明: 令自变量 x 取数列 $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ 的值趋向 $+\infty$，则对应的函数值数列

$$\begin{aligned}\sin x_n &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).\end{aligned}$$

恒取定值 -1, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n = \lim_{n\to\infty}\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$$

再令自变量 x 取数列

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

的值趋向于 $+\infty$, 则对应的函数值数列

$$\sin x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

恒取定值 1, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$$

由于 x 取趋向 $+\infty$ 的两个不同数列时，$y=\sin x$ 可以有不同的极限，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在。

定义 2

设函数 $f(x)$ 在点 a 附近有定义（但在 $x=a$ 时，可以没有定义），如果当自变量 x 不论通过怎样一个以 a 为极限但始终不等于 a 的数列 $\{x_n\}$, 对应的函数值数列 $f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n),\ldots$ 总有极限 ℓ, 就说：当 x 趋近于 a 时，$f(x)$ 以 ℓ 为极限，记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=\ell,\qquad \text{或}\qquad f(x)\to\ell\quad(x\to a)\tag{1.2}$$

极限式 (1.2) 的几何意义如图 1.2 所示：当 x 无限地靠近 a，但总不能等于 a 时，曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x,f(x))$ 无限地近 (a,ℓ) 点.

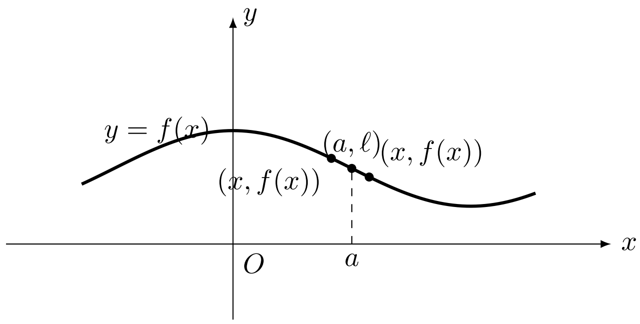


图 1.2

初学的人常常要问：为什么在定义中谈到 x 趋近于 a 时，要限制 x 始终不等于 a 呢？这是因为我们关心的是函数 $f(x)$ 在 a 附近的变化趋势，它和函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 这一点的值没有什么必然关系，这也就是说，无论 $f(x)$ 在点 a 取什么值甚至没有定义，都不影响在这一点的极限的存在和极限值。

例 1.3 设 $f(x)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

解： $f(x)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 时无意义，因为那时分母就变成零，因此，这里没有函数值 $f(1)$, 曲线 $y=f(x)$ 也没有相应于横坐标为 1 的那个点，但是

让 x 任意地趋近于 1 是完全可以的，若 $x \neq 1$, 则有

$$f(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\frac{3}{4}(x+1)$$

因此, 不论 x 通过怎样一个以 1 为极限的数列 $\{x_n\}$, 对于相应的数列 $\{f(x_n)\}$, 我们都有

$$\lim_{x_n\to 1} f(x_n)=\frac{3}{4}(1+1)=\frac{3}{2}$$

从几何上看，曲线 $y=f(x)$ 除去点 $\left(1,1\dfrac{1}{2}\right)$ 外是与直线 $y=\dfrac{3}{4}(x+1)$ 一致的，唯独在那一点，曲线有个空隙，而在 $x=1$ 的邻近的点只要充分接近于点 1, 所对应的函数值与 $\dfrac{3}{2}$ 的差的绝对值可以任意小，如图 1.3。

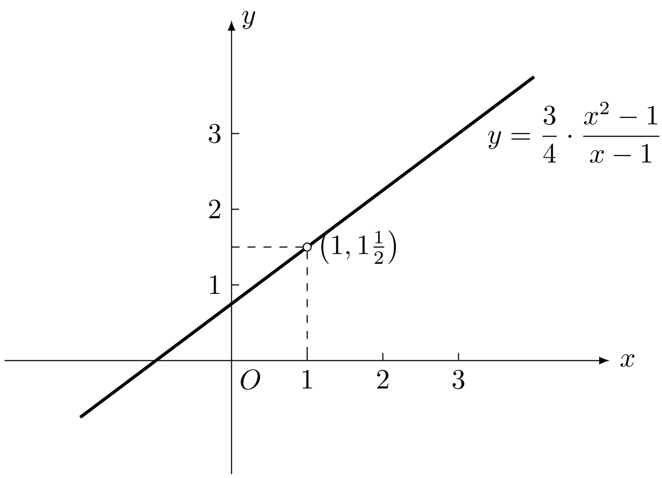


图 1.3

例 1.4　证明当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 没有极限。

证明: 函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 对于一切 $x\neq 0$ 的值有定义, 因此这个函数在点 $x=0$ 的领域内有定义。

当 x 取数列 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{2}{(2n+1)\pi}\middle|n=1,2,3,\ldots\right\}$ 的值而趋于零时，数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 相应的值是

$$\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\ldots,(2n+1)\frac{\pi}{2},\ldots$$

此时数列 $\left\{\sin\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 便交替地取 -1 和 $+1$ 这两个数值，换言之

$$\sin\frac{1}{x_n}=(-1)^n,\qquad n=1,2,3,\ldots$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，数列 $\left\{\sin \dfrac{1}{x_n}\right\}$ 不趋于任何极限值。这就证明了当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ 的极限不存在.

函数的图象大致如图 1.4 所示。曲线关于原点对称，在包含原点的每一个对称邻域 $(-\delta, \delta)$ 内，曲线 $y = \sin \dfrac{1}{x}$ 在原点的邻近作无数次振动，且曲线的振幅恒为 1, 虽将原点的邻域的长缩小，也不能减少振动的次数。

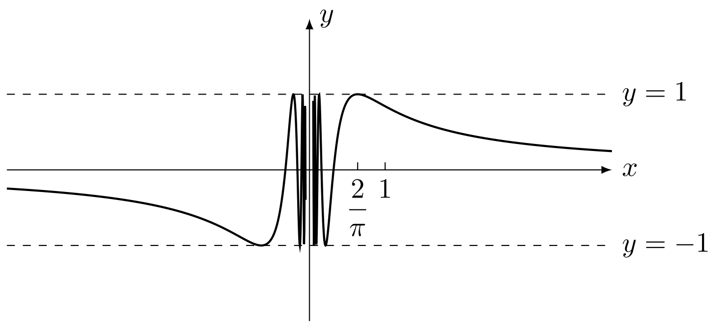


图 1.4

上面是用数列的极限来说明函数的极限，其实我们也可以直接定义函数极限。

定义 3

如果函数 f 在点 a 邻域上有定义（可能去掉点 a 本身），使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，就有 $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, 那么就说 ℓ 为当 x 趋近于 a 时，函数 f 在点 a 的极限值。

我们对这个定义需要说明以下几点：

1. 用定义 3 验证某数 ℓ 是函数 f 在点 a 的极限的办法就是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 要找到这样的正数 δ 使得能够由不等式 $|x - a| < \delta$ 推出不等式 $|f(x) - \ell| < \varepsilon$，虽然 ε 是任意的正数，但是在找 δ 的过程中，ε 是固定不变的，δ 依赖于 ε。

2. 对于已给的 ε, 只要证明有一个 $\delta > 0$ 存在就行. 因为如果有一个 δ 存在，把 δ 再缩小一些，显然仍满足我们的要求。

3. 不等式 $|x - a| > 0$ 只是说明 $x \neq a$, 即把 x 等于 a 的情况去掉，这是因为我们关心的是函数 f 在点 a 附近的变化趋势，而和函数在 $x = a$ 这点的值无关。

4. 我们指出定义 2 和定义 3 是等价的.

例 1.5 用定义 3 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

证明： 任给 $\varepsilon>0$, 要找 $\delta>0$, 使由 $0<|x-1|<\delta$ 推出 $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$ 成立。

当 $x\neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right| &= |(x^2+x+1)-3| \\ &= |(x-1)(x+2)| = |x-1|\cdot|x-2|\end{aligned}$$

要由 $|x-1|\cdot|x+2|<\varepsilon$ 找 δ，显然，这里因子 $|x+2|$ 引起了麻烦。为方便起见，先假定 $0<|x-1|<1$，即取 $\delta_1=1$，这样

$$0<|x-1|<1 \quad \rightarrow \quad |x+2|=|(x-1)+3|\leq|x-1|+3<4$$

因此，要使

$$\begin{cases}0<|x-1|<1\\ |x-1|\cdot|x+2|<\varepsilon\end{cases}$$

只须

$$\begin{cases}0<|x-1|<1\\ 4|x-1|<\varepsilon\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}0<|x-1|<1\\ |x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}\end{cases}$$

由此可见，只须取 $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{4}\right)$，即取 δ 为 1 与 $\dfrac{\varepsilon}{4}$ 中的较小者。

$\therefore$　对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{4}\right)$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，即有

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$$

这也就证明了

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

例 1.6 证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\quad(a>0)$

证明： 对于任意的 $\varepsilon>0$, 我们必须找到一个 $\delta>0$, 使得当 $|x-a|<\delta$ 时, $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ 成立，因为

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

所以要使 $\dfrac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$，只须 $|x-a| < \sqrt{a}\varepsilon$

如果取 $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$，则 $\dfrac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$ 因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$，则当 $|x-a| < \delta$ 时，就有 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ 成立。这也就证明了

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

有时虽然 $f(x)$ 在某点的左边（或右边）没有定义，如图 1.5 中的 a, b 两点，我们也可以谈论 f 在点 a 或点 b 两点的极限，譬如对于所有小于 a 的数，f 虽然没有定义，但是我们可以考察，当 x 从 a 的右侧趋近于 a 时，函数 f 的变化趋势，也就是考察 f 的单边极限是否存在。

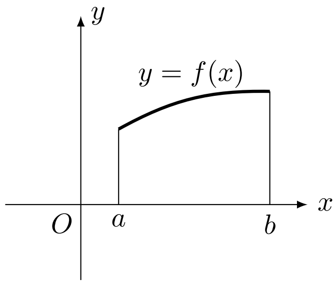


图 1.5

定义

设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有意义，如果任给 $\varepsilon > 0$, 总存在某个 $\delta > 0$ 使得当 $x \in (a, a+\delta)$ 时，总有 $|f(x) - \ell| < \varepsilon$，我们就说函数 f 在点 a 以 ℓ 为**右极限**，记作:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

类似地，可以定义**左极限**，只需把开区间 $(a, a+\delta)$ 换成 $(b-\delta, b)$ 就行了，并记作

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell$$

例 1.7　设函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ 　求 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

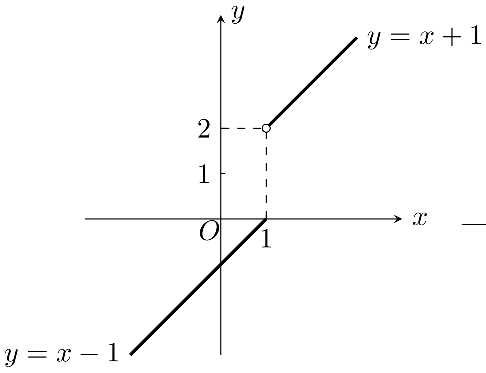


图 1.6

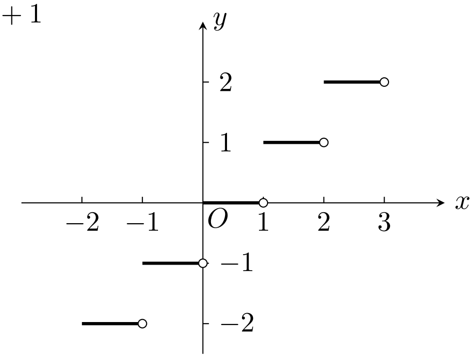


图 1.7

解:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

图 1.6 显示了上面的结果。

例 1.8 函数 $y=[x]$ 代表不超过 x 的最大整数，即若 $n\le x<n+1$，$n\in\mathbb{Z}$，则 $y=[x]=n$。(图 1.7)

求 $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]}{x}$

解: 显然，当 $x=2$ 时，$\dfrac{[x]}{x}=\dfrac{[2]}{2}=\dfrac{2}{2}=1$, 又

$$\frac{[x]}{x}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(1,2)\\ \dfrac{2}{x}, & x\in(2,3)\end{cases}$$

所以

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

下面的命题说明函数的极限与函数的单边极限的关系：

定理

极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的必要和充分条件是左极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 都存在，并且二者相等。

证明： 必要性

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, 就是说任给 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$, 即当 $x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 时，有 $|f(x)-\ell|<\varepsilon$。换言之，当 $x\in(a-\delta,a)$ 和 $x\in(a,a+\delta)$ 时，都有 $|f(x)-\ell|<\varepsilon$，因此

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$$

充分性

如果 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell$ 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell$, 那么总存在 $\delta_1>0$, 使得当 $x\in(a-\delta_1,a)$ 时，有 $|f(x)-\ell|<\varepsilon$。

又存在 $\delta_2>0$, 使得当 $x\in(a,a+\delta_2)$ 时，有 $|f(x)-\ell|<\varepsilon$。

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，于是当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，有 $|f(x)-\ell|<\varepsilon$。这就是说:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell$$

例 1.9 说明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$ 是否存在?

解:

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & x>3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(1)=1$$

$\because \quad \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}\neq\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3}$

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$ 不存在。

二、函数值趋于无穷大

如果函数 f 在点 a 的邻域上有定义（可能去掉点 a 本身）对于无论多么大的正数 G, 总存在一个够小的正数 δ, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有

$|f(x)| > G$, 那么就说当 x 趋于 a 时，函数 $f(x)$ 趋于**无穷大**，记作

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

例 1.10　求证 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$

证明： 设 G 是任意给定的正数，我们要求出一个 $\delta > 0$, 使得当 $|x| < \delta$ 时，$|f(x)| = \left|\dfrac{1}{x}\right| > G$。

事实上，要使 $\dfrac{1}{|x|} > G$, 只须 $0 < |x| < \dfrac{1}{G}$。取 $\delta = \dfrac{1}{G}$, 于是当 $|x| < \delta$ 时，就有 $\dfrac{1}{|x|} > G$ 因此，

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

例 1.11　证明当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ 不趋于无穷大.

证明： 如果自变量 x 取数列 $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2}{(2n+1)\pi} \middle| n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ 的值趋于 0 时，$\sin \dfrac{1}{x}$ 在原点的任意邻域内无限次交替地取 $-1, 1$ 这两个值，对于这些值，$|f(x)| = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$ 趋于无穷大.

但是当 x 取数列 $\{x\} = \left\{\dfrac{1}{n\pi} \middle| n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ 的值趋于 0 时，由于 $\sin \dfrac{1}{x} = \sin(n\pi) = 0$, 故对于这些值，$\lim\limits_{x'_n \to 0} f(x) = 0$.

可见在原点的邻近不存在这样的 $\delta > 0$, 使得当 $|x| < \delta$ 时，$|f(x)| > G$, 因此，当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ 不趋于无穷大.

$y = f(x)$ 的图象位于两条双曲线 $xy = \pm 1$ 之间，且在原点的邻近作无限多次振动，越靠近原点，曲线的振幅越大（图 1.8）.

如果对于任何 $G > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $f(x) > G$, 就说当 $x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 趋于正无无穷大，记作

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

如果对于任何 $G > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $f(x) < -G$, 就说当 $x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 趋于负无穷大，记作

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

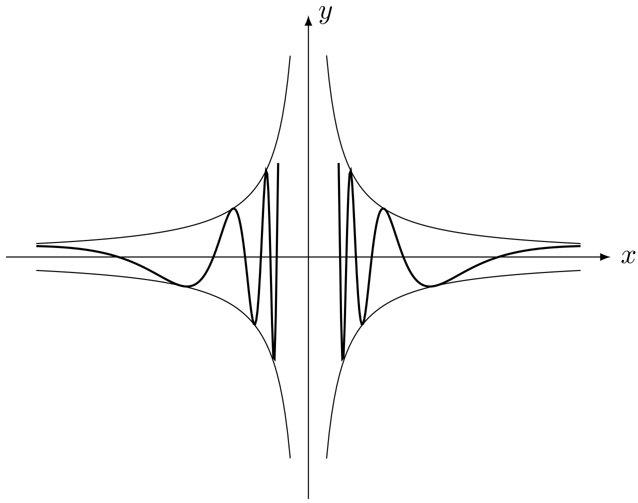


图 1.8

例如，我们有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(-1)}{x^2}=-\infty$$

类似地，我们可以定义：

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$$

的含义，这里不再写出。建议读者将这些定义严格地写出来。

例如，我们有：

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+}\tan\theta=+\infty,\qquad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\tan\theta=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty\quad (a>1),\qquad \lim_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty\quad (0<a<1)$$

练习

1. 用函数极限定义证明：

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x+1}=0$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}x^2=4$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2}=1$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x-1}=2$

2. 说明：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}=\infty$

3. 下面极限是否存在?

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x|x-1|}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{[x]^2-9}{x^2-9}$

三、函数极限算法定理

函数的极限算法定理与数列的极限算法定理类似，因为所谓 $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=B$ 的意思就是对于任何一个各项都不同于 a 并且以 a 为极限的数列 $x_n\to a$, 便有函数值数列 $\{u(x_n)\}$, $\{v(x_n)\}$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}u(x_n)=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}v(x_n)=B$, 因此，根据第四册下第三章的定理就可以直接得到相应的结果。现在给出函数的极限运算定理如下：

定理

设 $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=B$，那么

1. $\lim\limits_{x\to a}[u(x)+v(x)]=\lim\limits_{x\to a}u(x)+\lim\limits_{x\to a}v(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a}[u(x)\cdot v(x)]=\lim\limits_{x\to a}u(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}v(x)$

3. $\lim\limits_{x\to a}[c\cdot u(x)]=c\cdot\lim\limits_{x\to a}u(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$

   只要 $v(x)$ 恒不为 0，而且 $\lim\limits_{x\to a}v(x)\neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{u(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}u(x)}$

6. 如 $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A=\lim\limits_{x\to a}v(x)$, 而 $|x-a|<\delta$ 时, $u(x)<f(x)<v(x)$, 则：

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

   即：如果 $u(x)$ 与 $v(x)$ 趋向同一极限 A，且 $f(x)$ 在 $u(x)$ 与 $v(x)$ 之间，那么，$f(x)$ 便也趋向那个极限 A。

现在只有 5 需要补证.

设 $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A>0$, 则根据函数极限定义：对于 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$, 存在 $\delta>0$,

使得 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$u(x)>\frac{A}{2}>0 \tag{1.3}$$

于是，

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[n]{A}=\frac{u(x)-A}{\sum_{k=1}^{n}[u(x)]^{\frac{n-k}{n}}A^{\frac{k-1}{n}}}$$

由 (1.3) 式

$$[u(x)]^{\frac{n-k}{n}}>\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{n-k}{n}}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}[u(x)]^{\frac{n-k}{n}}A^{\frac{k-1}{n}}&>\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{n-k}{n}}A^{\frac{k-1}{n}}\\&=A^{\frac{n-1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-k}{n}}\\&=A^{\frac{n-1}{n}}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right\}\\&=A^{\frac{n-1}{n}}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}\right\}\\&=A^{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{A^{\frac{n-1}{n}}}{2-2^{\frac{n-1}{n}}}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\left|\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[n]{A}\right|<|u(x)-A|\cdot\frac{2-2^{\frac{n-1}{n}}}{A^{\frac{n-1}{n}}}$$

由题设 $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$，而 $\dfrac{2-2^{\frac{n-1}{n}}}{A^{\frac{n-1}{n}}}$ 是一个与 x 无关的常数，所以

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{u(x)}=\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}u(x)}$$

下面我们来证明两个重要极限公式，为此先介绍一个引理。

引理

对于任意实数 θ, 都有 $|\sin\theta| \leq |\theta|$

证明： 由于对于任意实数。有 $|\sin\theta| \leq 1$, 那么仅考虑 $\theta \in (0, \pi/2)$ 即可。

在单位圆 O 上（图 1.9），截取弧 $\widehat{P_0M}$ 使弧长 $|\widehat{P_0M}|$ 等于 θ, 其中 P_0 和 M 分别有坐标 $(1,0)$ 和 (x,y), 于是

$$\sin\theta = y < \sqrt{y^2+(1-x)^2} = |P_0M| < |\widehat{P_0M}| = \theta$$

显然，当 $\theta = 0$ 时，有 $\sin\theta = \theta$. 因此

$$|\sin\theta| \leq |\theta|, \qquad \theta \in (0, \pi/2)$$

如果 $-\pi/2 < \theta < 0$, 则仍有 $|MN| < \widehat{P_0M}$，于是

$$|\sin\theta| < |\theta|, \qquad \theta \in (-\pi/2, 0)$$

如果 $|\theta| \geq \pi/2$, 则因为 $\pi/2 > 1$ 与 $|\sin\theta| \leq 1$, 而同样地也得到 $|\sin\theta| < |\theta|$.

因此, 对于一切 $\theta \neq 0$ 的值, 有 $|\sin\theta| < |\theta|$; 当 $\theta = 0$ 时, 有 $|\sin\theta| = |\theta|$。

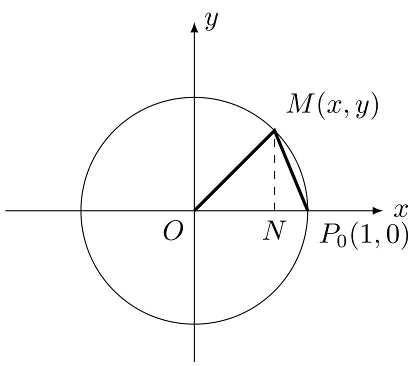


图 1.9

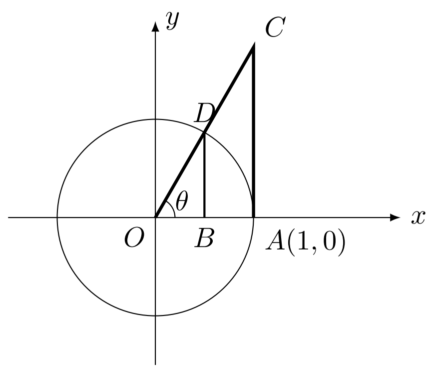


图 1.10

定理

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

证明： 让我们先证明 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$。由图 1.10 容易看出：

假定 θ 的单位是弧度，于是：

$$\triangle OBD\text{的面积} = \frac{1}{2}OB\cdot BD = \frac{1}{2}\cos\theta\cdot\sin\theta$$
$$\triangle OAC\text{的面积} = \frac{1}{2}OA\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$
$$\text{扇形 } OAD \text{ 的面积} = \frac{1}{2}OA\cdot\overset{\frown}{AD} = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta$$

假如角是用 180 等分平角的“度”作为单位，则扇形面积就是 $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\pi}{100}\theta$。因为上述扇形是夹在 $\triangle OBD$ 和 $\triangle OAC$ 之间，所以

$$\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta = \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{1.4}$$

即有，若 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \tag{1.5}$$

注意到：$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 和 $\cos(-\theta) = \cos\theta$, 不等式 (1.5) 也蕴含，若 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$, 则

$$\cos(-\theta) < \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} < \frac{1}{\cos(-\theta)} \tag{1.6}$$

将不等式 (1.5) 和 (1.6) 合并为，若 $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \tag{1.7}$$

又因为

$$0 \le |1-\cos\theta| = \left|2\sin^2\frac{\theta}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| < |\theta|$$

从而

$$0 \le \lim_{\theta\to 0}|1-\cos\theta| \le \lim_{\theta\to 0}|\theta| = 0$$

所以

$$\lim_{\theta\to 0}|1-\cos\theta| = 0$$

即：$\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ 由 (1.7) 知被夹逼在两者之间的 $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ 极限值也就一定是 1 了！

以 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 为基础，则：

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{-2\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{\theta}\right\} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}} \\
&= 0\cdot 1=0
\end{aligned}$$

例 1.12 求：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$, $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

解：如果应用前面的定理去分别求两式中的分子、分母的极限时，其分子、分母的极限值均为零，即我们得到 $\dfrac{0}{0}$ 的不定形式。我们通常要对原代数式变形，找出分子、分母中具有 $x-a$ 的因子，消去 $x-a$ 的公共因子，一般问题就可解决。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)}{(3x+1)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x+5}{3x+1} \\
&= \frac{2+5}{3\times 2+1}=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)-1}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

例 1.13 求：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$, $\qquad \lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}(m,n\in\mathbb{N})$

解：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}\\&=\frac{-2}{2^2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot 1=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

由三角函数诱导公式易知

$$\sin m(\pi-x)=\sin(m\pi-mx)=(-1)^{m-1}\sin mx$$

同样得到

$$\sin n(\pi-x)=(-1)^{n-1}\sin nx$$

因此：

$$(-1)^{m-n}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{\sin m(\pi-x)}{\sin n(\pi-x)}$$

两边乘以 $(-1)^{m-n}$，得

$$\frac{\sin mx}{\sin nx}=(-1)^{m-n}\frac{\sin m(\pi-x)}{\sin n(\pi-x)}$$

设 $y=\pi-x$, 则当 $x\to\pi$, 有 $y\to 0$, $my\to 0$, $ny\to 0$. 因此：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}&=\lim_{y\to 0}(-1)^{m-n}\frac{\sin my}{\sin ny}\\&=(-1)^{m-n}\lim_{y\to 0}\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\sin my}{my}\cdot\frac{ny}{\sin ny}\right)\\&=(-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}\cdot 1\cdot 1=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}\end{aligned}$$

例 1.14　由条件 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$，求出 a,b 的值。

解： $\because\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0,\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$\therefore\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)\cdot\frac{1}{x}=0$

即：

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0$$

又因为：当 $x<0$ 时，

$$\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

所以上式可写成

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$$

即：$-1-a-0=0 \quad\to\quad a=-1$

代入原条件，得

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-b\right)=0$$

即：

$$\begin{aligned}
b&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\therefore \quad a=-1,\quad b=\frac{1}{2}$ 为所求。

练习

1. 说明当 $x\to\infty$ 时，函数 $\dfrac{x^5-4}{x^3+x}$ 的变化趋势。

2. 求极限

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$

(b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2+x-8}{x^2-4}$

(d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4x^3-3)(1-2x)}{7x^3-6x+4}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5}{x^5-x^2+1}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-5)(x^2+7)}{x^4+35}$

(g) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$

(h) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x^2+9x+18}$

(i) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x^2+4x+3)}{x^3+3x^2+5x+3}$

(j) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-2}{x^4+2x^2-2x-1}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x+5}$

(l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

(m) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\qquad(m,n\in\mathbb{N})$

(n) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x^4+\cdots+x^{2n}-n}{x-1}$

3. 求极限

(a) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{3x}$

(b) $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}$

(c) $\lim\limits_{x\to3^-}3[x]$

(d) $\lim\limits_{x\to1^+}[x+3]$

(e) $\lim\limits_{x\to-3^+}\left(1+\sqrt{x+3}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to4^-}\left(\sqrt{4-x}+[x-1]\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x|x-1|}{x-1}$

(h) $\lim\limits_{x\to4^-}([x]-x)$

(i) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right]\qquad(a>0,\ b>0)$

(j) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]\qquad(a>0,\ b>0)$

4. 求极限

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}}$

(e) $\lim\limits_{t\to+\infty}(\sqrt{1+t}-\sqrt{t})$;

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(g) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+\sqrt{x-1}}{2x-\sqrt{x+1}}$

(j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}$

(k) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

(m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}+x\right]$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

(o) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

5. (a) $f(x)=\begin{cases}0, & x>1\\ 1, & x=1\\ x^2+2, & x<1\end{cases}$

求 $f(x)$ 在 $x=1$ 的左右极限。

(b) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左右极限。

(c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{[x]^2-9}{x^2-9}$ 是否存在?

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 是否存在?

6. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，求证:

(a) $\tan x>x$

(b) $x-\dfrac{x^2}{4}<\sin x<x$

7. 求极限

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{4x}$

(c) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sec 2\theta\sin\theta}{\theta}$

(d) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}$

(e) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{15t}{\tan 6t}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 7x}$

(g) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^2}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\csc x-\cot x}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$

(j) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\tan^2\pi x}$

(l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

(n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

(o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x+2\sin x}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$

四、数 e

我们在这里要利用数列的极限来定义一个新的数，这一个数不论对于分析本身或者对于它的应用来说都是非常重要的。

考虑数列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n=1,2,3,\ldots$ 的极限.

首先我们计算一下数列 $\{a_N\}$ 的数值:

$a_1=2.0$	$a_2=2.250$	$a_3=2.370$	$a_4=2.441$
$a_5=2.488$	$a_6=2.522$	$a_7=2.546$	$a_8=2.565$
$\cdots$	$a_{256}=2.712$	$\cdots$	$a_{1024}=2.717$

观察这一串数，我们会猜测这个数列是递增的，可能收敛于一个极限值，现在我们来证明这个猜想成立。

依牛顿二项式定理，即有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

这个等式的右边的第二项等于 1，其它各项可以变换如下：

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} &= \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!}\\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}\\
\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}\\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{n^n}\cdot\frac{1}{n!}\\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

其中 $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$。因此：

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}\\
+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

用 $n+1$ 代替 n 代入此公式，求出：

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{3!}\\
+\cdots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

(1.9) 的展开式项数比 (1.8) 的展开式的项数多一项，此外 (1.9) 的展开式各项由第三项起大于 (1.8) 的展开式对应项，这是因为

$$1-\frac{1}{n+1} > 1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n+1} > 1-\frac{2}{n}, \ldots, 1-\frac{n-1}{n+1} > 1-\frac{n-1}{n}$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

这就是说数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，$n = 1, 2, 3, \ldots$ 是递增的。

但是由等式 (1.8) 可知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

又因为

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2},\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

所以:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

但是由第二项起的级数总和小于 $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，所以:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=3$$

这就是说数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是递增有上界的，所以它有极限，设它的极限用 e 表示，因而我们有数

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

这个数 e 是无理数，取它的十进小数到十五位，其值是

$$e=2.718281328459045\cdots$$

现在要把变数 n 推广到实数 x, 这是一个以后常要用到的重要极限。

定理

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\qquad(x\in\mathbb{R})$$

证明: 先证 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

令 $[x]=n$，于是 $n\le x<n+1$，所以，当 $x\to+\infty$ 时，$n\to+\infty$，而且

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}$$

根据指数函数的单调性和幂函数在 $x>0$ 半直线上的单调性，有:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

因为:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}&=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\end{aligned}$$

$$
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}}
=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}=e
$$

所以

$$
e\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e
$$

即：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

当 $x\to-\infty$ 时，令 $x=-y$，那么 $y\to+\infty$，这时

$$
\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}
=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)
$$

所以

$$
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)
=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e
$$

综合上面两个结果，即得

$$
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e
$$

推论

$$
\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e
$$

事实上，令 $x=\dfrac{1}{y}$，当 $y\to0$ 时，$x\to\infty$，于是：

$$
\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e
$$

练习

1. 求下面变量的极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{x}$

(b) $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{3}y}$

(c) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{t}$

(d) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t}{1+t}\right)^{t}$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

2. 证明：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x}=\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x^a}=\infty$

其中 a 为任意正常数。

第二节　函数的连续性

一、连续函数的概念

在第四册下，我们用数列的语言规定了函数 f 在点 a 连续的意义. 现在用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述函数 f 在其定义域中的点 a 是连续的含义：

定义 1

函数 f 在其定义域 M 中的点 a 是连续的，如果对于每一个正数 ε，有 a 的一个 δ 邻域 $(a-\delta, a+\delta)$，使得对于定义域中满足 $|x-a|<\delta$ 的一切 x 值，不等式

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

成立。

注意： 在函数极限定义那里不要求 $f(a)$ 存在，所以特别注意要 $x\neq a$，现在，在函数于某点 a 连续的定义中，只盼 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，因此，保证 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ 成立的充分条件 $|x-a|<\delta$ 不再要求 $x\neq a$ 了。

对于一个在点 a 处连续的函数，有

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right) = f(a)$$

极限符号同函数符号可以改变次序或者说可以互换。

定义 2

如果函数 $f(x)$ 在一个区间 (a,b) 的每一点都连续，我们就说，它在这个区间 (a,b) 上连续。

函数也可以只在一点的一侧连续，当

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

时，便说 $f(x)$ 在 x_0 的右侧连续；当

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

时，便说 $f(x)$ 在 x_0 的左侧连续。显然，在一点的两侧都连续时，必在这点上连续。

所谓函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，除了它在 (a,b) 内每一点都连续外，在 a 点右侧连续，在 b 点左侧连续。

在一般自然现象中连续是常态，不连续则是在特殊情形的突变。例如，在火箭的发射过程中，随着火箭的燃烧，质量逐渐变化，当每一级火箭烧尽时，该级火箭的壳自行脱落，于是质量突然减小，质量变化如图 1.11 所示。所以，常用的函数一般只有几个特别的点是不连续的：如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不是连续的，则称 a 为函数的间断点。对于左右极限存在的间断点叫**第一类间断点**，不属于第一类间断点的叫**第二类间断点**。

例如 $y=[x]$ 在所有的整数点 n 有第一类间断点；$y=\tan x$ 在 $x=\pi/2$ 有第二类间断点。

例 1.15 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

问在 $x=1$ 处是否连续？

解： 在 $x=1$ 处的两侧，函数的对应规则由不同的式子表示，所以研究在 $x=1$ 处函数是否连续，就需要从左右极限入手（图 1.12）。

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 1$$

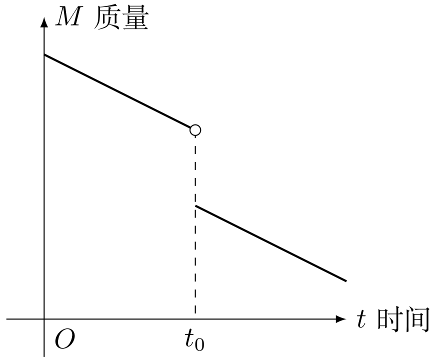


图 1.11

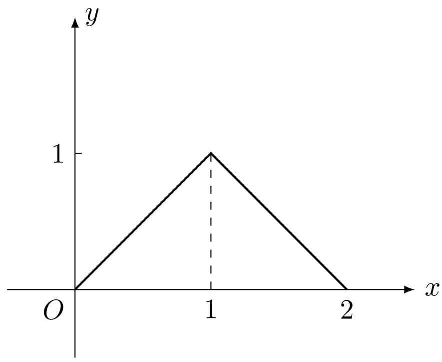


图 1.12

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

又 $f(1)=1$, 故有 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, 即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是连续的。

例 1.16 函数 $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处是否连续？如不连续，是第几类间断点？

解: 函数 f 只在 $x=0$ 没有定义, 故 f 在 $x=0$ 处间断, 它的定义域是 $\mathbb{R}-\{0\}$.

因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1$，从而:

$$0 < \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$$
$$0 \le \lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le \lim_{x\to 0}|x| = 0$$
$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

所以，f 在 $x=0$ 处左、右极限存在，这就是说 $x=0$ 是第一类间断点，它的图象大致如图 1.13 所示.

如果把上面的函数 f 加以扩充，即我们定义一个新函数 g:

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

那么我们便得到一个在 $x=0$ 处的连续函数.

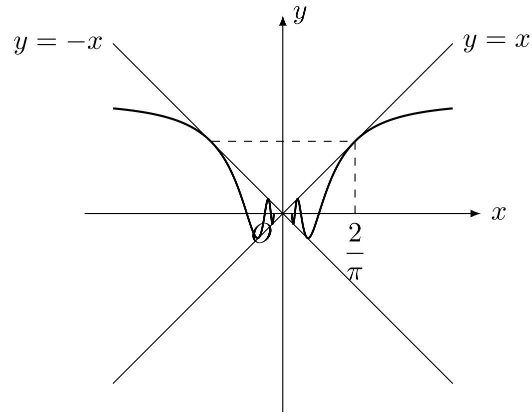


图 1.13

定义 3

$\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，但不等于 $f(a)$, 或者 $f(a)$ 没有定义，则称 f 在 a 处有**可去间断点**。

例 1.16 中的 $x=0$ 就是 f 的可去间断点.

由函数在某一点连续的概念可以直接导出连续函数的一个重要性质如下:

定理

若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，且 $f(a)>0$, 则存在一个 a 的 δ 邻域 $(a-\delta, a+\delta)$, 使得对于每一个 $x\in(a-\delta,a+\delta)$, $f(x)$ 都是正的.

证明： 因为 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)>0$, 所以对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}f(a)$, 必定存在一个 δ 使得 $|x-a|<\delta$ 时，有

$$f(x)>f(a)-\frac{1}{2}f(a)=\frac{1}{2}f(a)>0$$

二、连续函数的运算

连续函数的概念是函数概念和极限概念一个自然结合，由本章函数极限算法定理直接得出下面定理。

定理 1

设 f 和 g 在 a 处连续，则

1. $f \pm g$ 在 a 处连续；
2. $f \cdot g$ 在 a 处连续；
3. $\dfrac{1}{g}$ 在 a 处连续（若 $g(a) \neq 0$）；
4. $\sqrt[n]{f}$ 在 a 处连续（若 $f(a) > 0$）。

证明：

1. 因为 f 和 g 在 a 处连续，所以

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

根据函数极限算法定理，得

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] &= \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)\end{aligned}$$

这正好就是断言 $f + g$ 在 a 处连续.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)\end{aligned}$$

即 $f \cdot g$ 在 a 处连续。

3. 由于 $g(a) \neq 0$, 又 g 在 a 处连续，根据定理，知道存在点 a 的 δ 邻域，使得对于每一个 $x \in (a - \delta, a + \delta)$，有 $g(x) \cdot g(a) > 0$，因此

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{1}{g(a)} = \frac{1}{g}(a)$$

4. 证明留给读者。

在第四册下，我们根据定理证明了一些基本初等函数在其定义域上到处连续的命题，现在总结如下：

命题 1

任何多项式函数到处连续.

命题 2

若 f 和 g 是两个多项式，$g \neq 0$, 那么有理函数 $r = f/g$, 除去 g 的零点集合，函数 r 是有定义的，而且在其定义域上到处连续。

命题 3

n 次算术方根函数 $\sqrt[n]{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上到处连续。

因为每一个无理数可以用两串有理数数列从左、右两方面去逼近它，同样无理指数幂也可以用相应的有理指数幂去逼近它，我们用逼近法定义了无理指数幂，从而把有理指数函数开拓为在实数域上到处连续的实指数函数，于是得到下面的命题。

命题 4

指数函数 a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$ 到处连续.

由反函数连续定理，直接得到

命题 5

对数函数 $\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上到处连续.

现在将继续证明另外一些基本初等函数连续性的命题。

命题 6

三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 到处连续.

证明： 设 x_0 是任意给定的实数，由三角函数的和差化积公式，得到

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|$$

因为 $\left|\cos\dfrac{x + x_0}{2}\right| \leq 1$, 并根据引理得到

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right|$$

即

$$|\sin x-\sin x_0|\leq|x-x_0|$$

当 $x\to x_0$ 时，$|x-x_0|\to 0$, 从而 $|\sin x-\sin x_0|\to 0$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$$

因为 x_0 是任意一点，所以 $\sin x$ 到处连续。

同样证明，得到：当 $x\to x_0$ 时，

$$|\cos x-\cos x_0|\leq|x-x_0|\to 0$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$$

因此，$\cos x$ 到处连续。

由反函数连续性定理直接得出下面命题。

命题 7

反三角函数 $y=\arcsin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=\arccos x$ $(0\leq x\leq\pi)$, $y=\arctan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=\operatorname{arccot} x$ $(0<x<\pi)$ 在它们各自的定义域上到处连续。

命题 8

幂函数 x^α（α 是任何一个实数）在开区间 $(0,+\infty)$ 上到处连续。

证明： 为确定起见，假设 $\alpha>0$, n 是任何一个大于 α 的整数

$$(x+h)^\alpha-x^\alpha=x^\alpha\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha-1\right]$$

若 $h>0$, 则 $\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^\alpha>1$,（实指数幂性质），并且

$$1<\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha<\left(1+\frac{h}{x}\right)^n\quad(\text{指数函数单调性})\tag{1.10}$$

若 $h<0$, 将上面不等式方向反向，得到

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^n<\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha<1\tag{1.11}$$

因为 $\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^n$ 是关于 h 的 n 次多项式，并且显然当 $h \to 0$ 时，

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^n \to 1$$

于是，由不等式 (1.10) 和 (1.11)，得到当 $h \to 0$ 时，$\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^n \to 1$. 因此

$$\lim_{h\to 0}\left[(x+h)^\alpha - x^\alpha\right] = 0$$

即：

$$\lim_{h\to 0}(x+h)^\alpha = x^\alpha$$

这就是说 x^α 在 $(0,+\infty)$ 上处处连续。

下面介绍常用的复合函数连续性定理。

定理 2

设 X、Y、Z 是实数集，函数 $g: X \mapsto Y$，$f: g(X)(\subset Y) \mapsto Z$，又 $h: X \mapsto Z$ 定义为 f 和 g 的复合函数，即 $h(x) = f(g(x))\ (x \in X)$. 若 $y = g(x)$ 在 $x = a$ 处连续；$z = f(y)$ 在 $y = g(a) = b$ 处连续，那么复合函数 $z = h(x) = f(g(x))$ 在点 a 处也连续。

证明： 由于

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a) = b, \qquad x \in X \tag{1.12}$$

又因为：

$$\lim_{y\to b} f(y) = f(b), \qquad y \in g(X) \subset Y \tag{1.13}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y) = f(b) = f(g(a)) = h(a)$$

这就说明复合函数在点 a 的连续性。

把上面的等式写成

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

这个等式表示可以这样求复合函数的极限 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$，如果内层函数 $g(x)$ 在点 a 的极限存在，即 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$，而且 f 在点 b 连续，就可以把极限符号 $\lim\limits_{x\to a}$ 与函数符号 f 互换，也就是把极限运算移到内层函数上去施行。

例 1.17 说明 $h(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1}{1+x^2}}$ 到处连续，并求 $\lim\limits_{x\to a} h(x)$

解： $h(x)=\sqrt[4]{\dfrac{1}{1+x^2}}$ 可以看作 $y=g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in\mathbb{R}$ 和 $z=f(y)=\sqrt[4]{y}$，$y\in[0,+\infty)$ 的复合函数。

由于 $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上到处连续并且它的值域

$$g(\mathbb{R})=(0,1]\subset[0,+\infty)=Y$$

又幂函数 $f(y)=\sqrt[4]{y}$ 在 $Y=[0,+\infty)$ 上到处连续，因此 $f(y)=\sqrt[4]{y}$ 在 $g(\mathbb{R})=(0,1]$ 上也到处连续，于是

$$\lim_{x\to a}h(x)=h\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)=\sqrt[4]{\frac{1}{1+a^2}}$$

例 1.18 求 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$

解： 设 $y=g(x)=\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}$ $(x\neq\pm2)$，$z=f(y)=\sqrt{y}$ $(y\geq0)$，且知 f 在 $[0,+\infty)$ 上到处连续，于是

$$f(g(x))=\sqrt{\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$$

因此：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to2}g(x)&=\lim_{x\to2}\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}\\
&=\lim_{x\to2}\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2}x}{4-x^2}=\lim_{x\to2}\frac{\pi\sin^2\frac{\pi}{2}(2-x)}{\frac{\pi}{2}(2-x)(2+x)}\\
&=\lim_{x\to2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2-x)}{\frac{\pi}{2}(2-x)}\cdot\frac{1}{2+x}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(2-x)\right]\\
&=1\cdot\frac{1}{4}\cdot0=0\in[0,+\infty)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\lim_{x\to2}\sqrt{\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to2}\left(\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}\right)}=\sqrt{0}=0$$

例 1.19 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

解： 设 $\alpha=\arcsin x$，这里 $-1\leq x\leq1$，$-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$，于是，$\sin\alpha=x$。

根据反正弦函数的连续性，有

$$\lim_{x\to0}\alpha=\lim_{x\to0}\arcsin x=\arcsin0=0$$

进行变量替换，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$$

下面根据指数函数与对数函数的连续性，我们要建立几个重要的极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，　这里 $\ln$ 表示 $\log_e$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

证明：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$ 因为右端在对数号下的式子当 $x\to 0$ 趋向于 e, 所以根据对数函数的连续性，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln e=1$$

2. 令 $e^x-1=y$, 于是当 $x\to 0$ 时，由指数函数连续性有 $y\to 0$, 其次，我们有 $x=\ln(1+y)$, 因此，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}=1$$

3. 我们令 $(1+x)^\alpha-1=y$, 当 $x\to 0$ 时，由幂函数的连续性，也有 $y\to 0$, 在等式 $(1+x)^\alpha=1+y$ 的两边取对数得到

$$\alpha\ln(1+x)=\ln(1+y)$$

利用这一关系式，我们把所给的表达式变形为

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}$$

因此：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\alpha\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha$$

我们讨论了下面的函数：

1. $f(x)=c$　　(c 为常数)

2. x^n　（n 是整数）

3. $\sqrt[n]{x}$　$(x \geq 0)$

4. a^n　$(a > 0,\ n \neq 1)$

5. $\log_a x$

6. x^α　（α 是任意实常数）

7. $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x$

8. $\arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \operatorname{arccot} x$

上面这些函数统称为**基本初等函数**。

凡是由基本初等函数及常数，经过有限次四则运算（加、减、乘、除）及有限次函数复合的步骤而得到的且由一个式子表示的函数，及可以化为这种形式的函数，统称为**初等函数**。

例如，下列函数都是初等函数：

1. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x} + 2^x \log_2 x$

2. $\varphi(x) = \arctan\dfrac{1}{x} + \sin(x^2+1)$

连续函数的四则运算定理，复合函数连续性定理及反函数连续性定理，在研究初等函数的连续性时具有重要作用。现在根据这些定理，立即得到一个重要结论：

定理

一切初等函数在它有定义的任何区间内到处连续。

练习

1. 试证 $y = |x|$ 是一个到处连续的函数。

2. 说明下列函数到处连续：

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$　　(c) $\varphi(x) = |\sin x|$

(b) $f(x) = \sin|x|$　　(d) $k(x) = \{\cos x - \sin|x|\}^3$

3. 求出下列函数的间断点，并指出其类型。

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

(b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

(c) $h(x)=x\cos^2\dfrac{1}{x}$

(d) $y=\dfrac{1}{\sin\pi x}$

(e) $y=\tan(x-1)$

(f) $y=\dfrac{\sin x}{|x|}$

(g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

(h) $f(x)=\cot\dfrac{1}{x}$

(i) $f(y)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leq 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$

4. 试证明下列函数在其定义域内是连续的:

(a) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(b) $\varphi(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 2x^2+1, & x=0\\ 2+(x-1)^3, & x>0\end{cases}$

5. 求下列变量的极限:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\tan^2\pi x}$

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

(d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

(g) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$

(i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$

(j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_p(1+x)}{x}$

(k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$

三、闭区间上的连续函数的性质

我们在一中已经定义了闭区间上连续函数的意义. 对于这类函数, 我们要介绍它的几个重要性质。

中间值定理

设 $y=f(x)$ 是一个在闭区间 $[a,b]$ 上到处连续的函数，设 c 是一个介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的常数，则必须存在一个介于 a、b 之间的实数 x_0，使得 $f(x_0)=c$.

用几何术语来说，$y=f(x)$，$a\le x\le b$ 的图象是一条连结 $P(a,f(a))$ 点和 $Q(b,f(b))$ 点的连续曲线，而 P、Q 分居于直线 $y=c$ 的两侧，则曲线 $y=f(x)$, $a\le x\le b$ 至少和直线 $y=c$ 有一个交点 $(x_0,\ f(x_0)=c)$。(图 1.14).

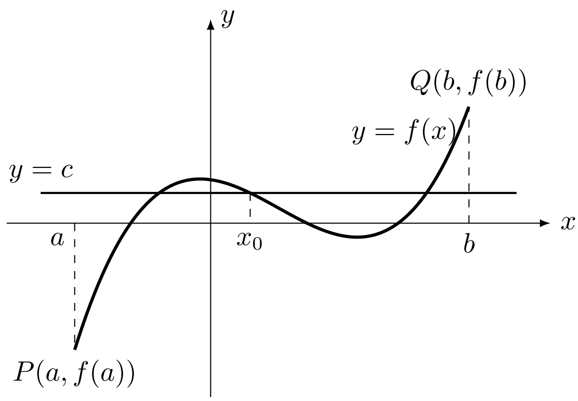


图 1.14

对这个定理，我们在第四册中利用二分逼近法及连续函数的性质给出了它的证明，这里不再重述。

最大值、最小值

在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 f 一定在该区间上取到一个最大值和最小值。

我们先利用连续函数的图象来直观地说明这个性质，然后用证明中间值定理的同样方法来证明这个定理。初学者可略过定理的证明，这不影响对本书后面内容的学习。

从图 1.15 可以看出，在 $[a,b]$ 中，能够找到两点 x_1,x_2 使 $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$, 而对于 $[a,b]$ 中所有的 x, 都有

$$m=f(x_2)\le f(x)\le f(x_1)=M$$

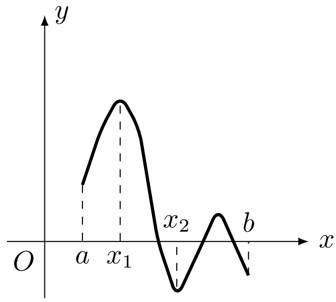


图 1.15

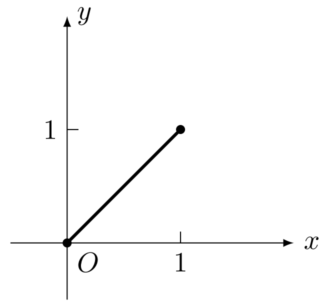


图 1.16

注意: 这个定理是假定 f 在整个闭区间上连续，如果在一点不连续，则定理的结论就可能不成立。

例如，函数 $f(x)=x-[x], x\in[0,1]$ 在 $x=1$ 这一点不连续，它的图象如图 1.16, 我们要说明它有最小值 0, 而无最大值.

事实上，f 是分段函数:

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

f 在 $[0,1)$ 上递增，故 $f(0)=f(1)=0$ 最小．又在 $[0,1]$ 上没有一点的函数值为 1, 但是对于任何一个小于 1 的正数 k, 恒有

$$f(k)=k-[k]=k<1$$

这就说明了 f 在 $[0,1]$ 上有上界 1, 但始终达不到 1, 现在我们进一步说明 1 是它的最小上界，假设定数 $k'<1$ 是 f 在 $[0,1]$ 上的上界，我们在 $(k',1)$ 内任意取一个数 x, 于是

$$f(x)=x-[x]=x>k'$$

这与假设 k' 是 f 在 $[0,1]$ 上的上界矛盾，因此 1 是 f 在 $[0,1]$ 上的最小上界，但是它不属于 f 的值域，这就说明了 f 无最大值。

从这个例中还可以看出，定理中的闭区间不能用开区间来代替。

现在给出定理的证明如下:

证明: 令 $A_1=a$, $B_1=b$, $S_1=\{f(x)|x\in[a,b]\}$，设 K 是 S_1 的最小上界，记 $K=l.u.b\{S_1\}$. 再令

$$S_1'=\left\{f(x);\ x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\right\},\quad S_1''=\left\{f(x);\ x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\right\}$$

显然有:

$$S_1 = S_1' \cup S_1''$$

由此不难看到:

$$K = l.u.b\{S_1\} = \max\left(l.u, b\{S_1'\}, l.u.b\{S_1''\}\right)$$

所以 $l.u.b\{S_1'\}$ 和 $l.u.b\{S_1''\}$ 两者之中，至少有一个等于 K, 换句话说，我们总可以在 $[A_1, B_1]$ 的两个半段之中，选取其一为 $[A_2, B_2]$, 使得

$$l.u.b\{S_2\} = K, \qquad S_2 = \{f(x),\ x \in [A_2, B_2]\}$$

如此逐步二分，每次由 $[A_n, B_n]$ 归纳地选取其半段作为 $[A_{n+1}, B_{n+1}]$，使得

$$\begin{aligned} l.u.b\{f(x);\ x \in [A_{n+1}, B_{n+1}]\} &= l.u.b\{f(x);\ x \in [A_n, B_n]\} \\ &= \cdots \\ &= l.u.b\{f(x);\ x \in [a, b]\} = K. \end{aligned}$$

对 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 根据实数的连续性，知存在 c 使得 $c \in\ A_n, B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, 且 $B_n - A_n \to 0$.

现在我们要再利用 $f(x)$ 到处连续这一性质，说明 $f(c)\ K$. 假若不然，即 $f(c) < K$，则可以取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(K - f(c)) > 0$，然后利用 $f(x)$ 在 c 点的连续性，知存在点 c 的 δ 邻域，使得当 $|x - c| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

即:

$$\begin{aligned} f(x) < f(c) + \varepsilon &= f(c) + \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}f(c) \\ &= \frac{1}{2}[K + f(c)] \\ &= \frac{1}{2}[K + K - 2\varepsilon] = K - \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$l.u.b\{f(x);\ x \in (c - \delta, c + \delta)\} \leq K - \varepsilon$$

但是，由 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = c$, 知当 n 足够大时，有

$$[A_n, B_n] \subset (c - \delta, c + \delta)$$

这显然和 $[A_n, B_n]$ 的选取法，亦即保持

$$l.u.b\{f(x);\ x \in [A_n, B_n]\} = K$$

相矛盾，因此，$f(c)$ 必须等于 K.

类似地，可以证明存在使函数 f 达到它的最小值的一个点。

习题 1.2

1. 求下列函数的极限:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\sin x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{e^{2x}}}{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{e^{2x}}}{\sin^2\dfrac{x}{e^x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} n^2\left(-x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)}{2x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} 10\left(1+\dfrac{0.03}{n}\right)^n$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$

(j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}$

2. 在一个以弦 AB 为界的弓形中，把点 A 与 B 与弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 C 用直线连结起来，于是得到一个等腰三角形 $\triangle ABC$, 再在 A 与 B 作切线，它们交于 D, 试计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ABD}$，其中 x 是弦 AB 所对应的中心角。

3. $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}$ 满足条件

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2,\qquad \lim_{x\to 2}f(x)=3$$

求 $f(x)$.

第二章　变率和微商

从本章起，我们开始学习单变量的微积分学的基本概念和基础理论。

微积分学是研究变量的数学，变量之间的关系就是函数，因此，函数是微积分学研究的主要对象。

在函数的基本性质中，有两个最基本、最重要的概念 - 变率与求和，为了解决求函数的变率与求函数 f 在 $[a, b]$ 上的和的问题就相应地产生微分与积分运算，而这两种运算之间，也存在着一种自然的互逆关系，在本章中，我们由函数的变率问题引出函数的微商（导数）概念，并给出初等函数的一套求导法则，在下一章中，我们揭示微分运算与积分运算的互逆关系，这就是微积分学的基本定理。

总起来说，微分反映了函数的局部性质，或在某个点附近的性质；积分则反映了函数的整体性质，或某个区间的性质；函数的局部性质与整体性质之间的有机联系，恰恰反映了微分运算与积分运算之间的互逆关系。

第一节　微商（导数）的定义

函数关系 $y = f(x)$ 就是确定变量 y 如何随着变量 x 的变动而变动的关系，对于给定的函数 $y = f(x)$, 变量 y 在变量 x 的不同点附近的变动情况是不尽相同的，这就是说，在变量 x 的某个值 x_1 外，当 x_1 略加变动时，相应的 y 的变动可能相当剧烈（急增，或急减）；而在变量 x 的另一个值 x_2 处，y 的变动就可能较为迟缓，但是，用这样的语言来表达函数在某一点处的变率是不精确的，我们需要用“数量”来确切地表达这个意思，这就是函数在某点（或菜时刻）的变率的问题，简称变率。

一、直线函数的变率

一次函数 $f(x) = kx + b$ 是一种最简单的函数，它的函数图象是一条斜率等于 k 的直线，如图 2.1 所示。

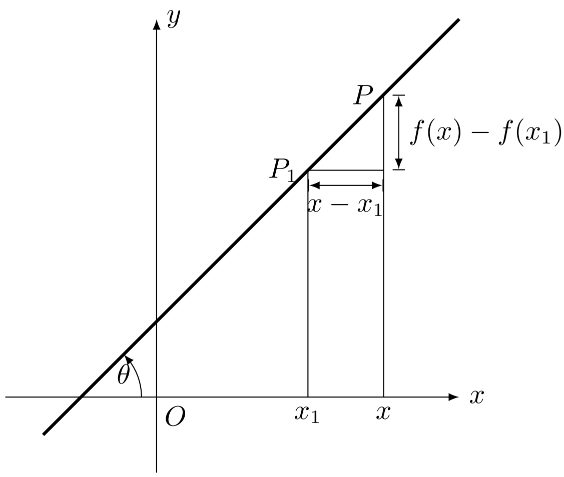


图 2.1

设 x_1, $f(x_1)$ 和 x, $f(x)$ 分别是直线上点 P_1 和 P 的坐标，为了反映函数变化快慢的问题，无论 $x < x_1$ 还是 $x > x_1$，自然地考虑在点 x_1 邻近，函数与自变量的相应的改变量的比：

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{(kx+b)-(kx_1+b)}{x-x_1}=k=\tan\theta$$

上面的表达式称为函数的**差商**，它表示函数在区间 $[x_1,x]$ 或 $[x,x_1]$ 上对于自变量 x 的**平均变化率**。由于 k 是不随变量 x 变动而变动的常数，因此，一次函数在自变量的任何一个区间内的平均变化率都是常数。

如果让自变量的变化区间的长度无限地缩短，也就是让 x 无限地接近于 x_1 时，平均变化率所趋向的极限

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=k$$

二、平滑曲线的切线与变率

一般的函数 $y=f(x)$ 的图象通常不是直线，由于函数和它的图象的多样性，为了讨论的方便起见，我们先把讨论的范围限制在“平滑”的曲线上，常用的函数 $y=f(x)$ 的图象往往是“平滑的”，平滑性的直观内涵是：用愈高倍的显微镜去观察曲线的微段，就愈象直线段，比较明确的几何说法是：一条曲线在 P 点的平滑性就是存在唯一的一条过 P 点的切线，它无限地逼近曲线在 P 点邻近的微段，于是，当 $y=f(x)$ 的图象 C 在 P 点存在唯一的一条切线时，我们就说曲线 C 在 P 点平滑，而 P 点叫做曲线的平滑点，一条在每点都

平滑的曲线叫做平滑的曲线，一个函数的图象平滑曲线时，我们就称这种函数为平滑函数。

同学可能会问这样一个问题：在曲线的点 P 存在唯一的一条切线的含义是什么？因为迄今我们对于一般的曲线的切线还未下过定义呢！

我们从图 2.2 和 2.3 注意到不能把切线定义为与曲线只有一个交点的直线。这样的定义限制得既太紧同时又太松。因为，照此定义，图 2.2 所示的直线就不是过曲线上 P 点的切线了，实际上，尽管图 2.2 的直线与曲线还有一个交点 Q, 但它在曲线 P 点邻近却与曲线密合，故仍应该是过曲线 P 点的切线；又图 2.3 表明过抛物线上任何一点 P 与 y 轴平行的直线虽然与抛物线只有一个交点，但它的其余部分却远离 P 点邻近的弧，故它不应该是抛物线的切线，定义切线的可行途径是从割线开始，并应用极限的概念。

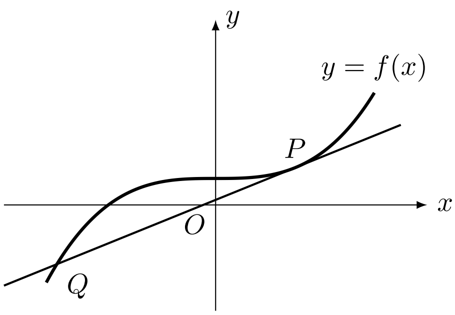


图 2.2

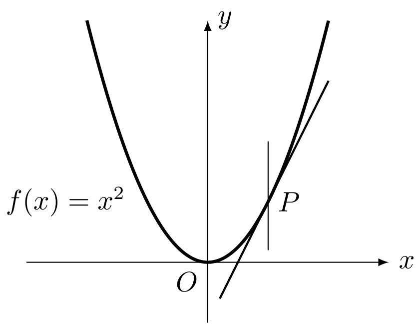


图 2.3

如图 2.4 所示，取曲线 $y = f(x)$ 上点 P 附近的另一点 Q, 通过这两点画一条直线，这直线叫做过曲线上 P 点的割线，让 Q 点沿曲线向点 P 移动，这条割线将达到极限位置，此极限位置与 Q 点从哪一侧趋向于 P 是无关的，我们称这个割线的极限位置为过曲线上 P 点的切线。

割线的这种极限位置的存在性这一假设，与曲线在点 P 具有唯一的一条切线或确定的方向的假设是等价的。

现在我们要对曲线 $y = f(x)$ 用解析式子把割线的这种极限位置存在的过程表示出来。设 α 是割线 PQ 同正 x 轴构成的夹角，α_1 是过点 P 点的切线同正 x 轴构成的夹角，于是

$$\lim_{Q\to P} \alpha = \alpha_1$$

设 x_1, y_1 和 x, y 分别是点 P 和 Q 的坐标，这时，我们立即得到

$$\tan\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

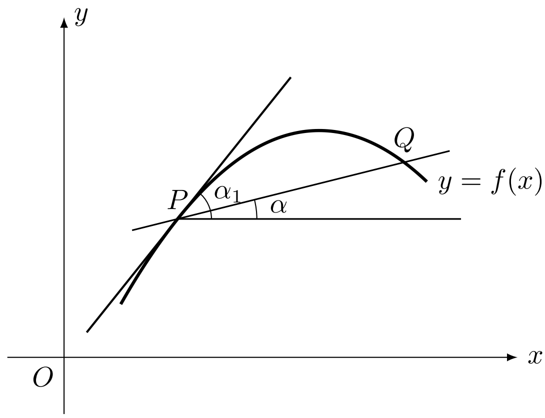


图 2.4

因此，上述求极限的过程（不考虑垂直切线 $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$ 的情况）可由下式来表示：

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \lim_{\alpha\to\alpha_1}\tan\alpha = \tan\alpha_1$$

这就是说过曲线 $y = f(x)$ 上 $P(x_1, y_1)$ 点的切线的斜率等于 $y = f(x)$ 的差商当 $x \to x_1$ 时的极限.

例 2.1 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在 x_0 处的切线的斜率。

解： 解依题意 $(x_0, f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c)$ 在抛物线上，并设 $(x_0+h, f(x_0+h))$ 是抛物线上点 $(x_0, f(x_0))$ 的附近的一点，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{[a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c]-[ax_0^2+bx_0+c]}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{(2ax_0+b)h+h^2}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}[(2ax_0+b)+h] = 2ax_0+b
\end{aligned}$$

所以抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在 x_0 处的切线的斜率是 $2ax_0 + b$.

例 2.2 一质点沿一直线在 t 秒内移动的距离是 $s = s(t) = t^2 + 4t$。

求：质点的初速度；在两秒末的速度；前两秒内的平均速度。

分析： 如果质点从起点开始所走的距离 s 是时间 t 的线性函数，则由 2.1 知道该质点在每一时刻的速度都是常数，它的大小由平均速度来确定，即等于一

次函数的斜率，此时我们说该质点作匀速运动，但是，如果运动不再是匀速的，即质点的速度每时每刻都是变的，那么我们将时刻 t 的速度（也叫做瞬时速度）理解成什么呢？为了回答这个问题，我们考察差商

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

或者写成

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

这个差商称为在 t_0 和 $t_0 + \Delta t$ 之间的这段时间间隔上的质点的平均速度，对照着 $s = s(t) = t^2 + 4t$ 的图象来看，这个平均速度也就是过曲线上的 $P(t_0, s(t_0))$ 点及它邻近一点 $Q(t_0 + \Delta t, s(t_0 + \Delta t))$ 的割线的斜率（图 2.5）。当 Δt 很小时，可以认为，从时刻 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 这段时间内，速度来不及有很大变化，可以近似地看成匀速运动，因而这段时间内的平均速度就可以看成时刻 t_0 的瞬时速度的近似值。

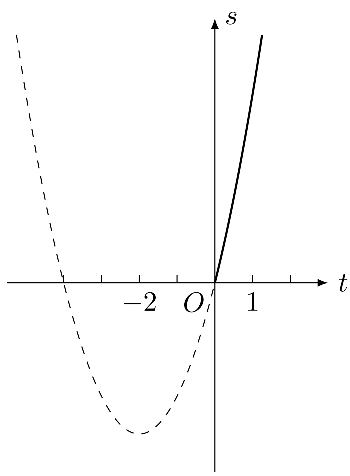


图 2.5

显然，从时刻 t_0 到时刻 $t_0 + \Delta t$, 质点走过的路程为

$$\begin{aligned}
\Delta s &= s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) \\
&= (t_0 + \Delta t)^2 + 4(t_0 + \Delta t) + (t_0^2 + 4t_0) \\
&= (2t_0 + 4)\Delta t + (\Delta t)^2
\end{aligned}$$

所以这段时间内的平均速度为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}\\ &= \frac{(2t_0+4)\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}\\ &= (2t_0+4)+\Delta t\end{aligned}$$

Δt 越小，这个平均速度就越接近时刻 t_0 的瞬时速度 v_0, 我们自然令 $\Delta t \to 0$, 求差商的极限值，得到

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}[(2t_0+4)+\Delta t]\\ &= 2t_0+4\end{aligned}$$

这样平均速度 $\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$，当 $\Delta t \to 0$ 时的极限值就表达了质点在时刻 t_0 的瞬时速度，把它记作

$$s'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

解：

1. 质点的初速度
$$s'(0)=2\times 0+4=4(\mathrm{m/s})$$

2. 质点在两秒末的速度
$$s'(2)=2\times 2+4=8(\mathrm{m/s})$$

3.
$$\text{质点在前两秒内的平均速度}=\frac{\text{在前两秒内所走距离}}{\text{时间}}=\frac{2^2+4\times 2}{2}=6(\mathrm{m/s})$$

从这个问题可以看出质点在 t_0 时刻的瞬时速度 $s'(t_0)$ 的几何意义就是曲线 $s=s(t)$ 在 $P(t_0,s(t_0))$ 点的切线的斜率，所以函数在某点的变率有确定值与函数的图象在该点有唯一的一条切线是两个密切相关的概念。

三、微商（导数）的定义

从上面所举的两个例子来看，问题来自不同的领域：

1. 求过曲线上一点的切线，

2. 求函数在某点的变率.

但解决的方法却完全一样，就是计算函数的差商的极限，这种极限反映了自然界中很多不同现象在量方面的共性，因此有必要从这些具体问题中把它抽象出来加以研究，再反过来去解决这类具体问题。

定义

设 $y = f(x)$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的一个函数，$x_0 \in (a, b)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，我们就说 $f(x)$ 在点 x_0 处**可微**，并称这极限为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**微商**（或导数），记为 $f'(x_0)$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

显然，$f'(x_0)$ 的值与点 x_0 有关，当点 x_0 在开区间 (a, b) 内变化时，$f'(x_0)$ 也将跟着变化，因此，如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每点都可微（即存在有限导数），那么 $f'(x)$ 便是一个新的函数，称为 $f(x)$ 的**导函数**。

求已知函数的导函数 $f'(x)$ 的运算，称为微商运算，计算过程如下：

1. 设 Δx 为自变量某个值 x 的改变量：

2. 计算 $f(x)$ 在点 x 的相应改变量

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3. 计算 $f(x)$ 在点 x 的差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. 计算

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

应当注意，这里 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是一个独立的记号，它表示函数 $f(x)$ 在点 x 的导数，不能把它当成一个分数来看待，必须把它看成一个整体。

从微商的定义可以看出：

1. 曲线在一点的切线的斜率，就是函数在这一点的变率（微商或导数）。

2. 微商所涉及的是函数的“局部”性质，也就是说，函数 $y = f(x)$ 在一点 x_0 处是否可微只与函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处及其近旁的性质有关，而与其它地方无关。

3. 如果 $f(x)$ 在点 x 可微，按照极限存在的条件，必须且只须

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

同时存在而且相等。

上面两式分别称为 $f(x)$ 在点 x 的**右导数**和**左导数**，记为 $f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$.

例 2.3 今有一个正在膨胀的肥皂泡，

1. 求肥皂泡的体积对于半径的增大率，

2. 如果肥皂泡的半径每秒增大 0.1cm，问当半径为 2cm 时，体积的增大率是多少?

解： 肥皂泡的体积 V 与半径 r 的函数关系是。

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

体积 $V(r)$ 对于半径 r 的增大率，依导函数定义，就是 $V(r)$ 对于 r 的导函数，故

$$\begin{aligned}
V'(r) &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{V(r+\Delta r) - V(r)}{\Delta r} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\frac{4\pi}{3}[(r+\Delta r)^3 - r^3]}{\Delta r} \\
&= \frac{4\pi}{3} \lim_{\Delta r \to 0} [3r^2 + 3r(\Delta r) + (\Delta r)^2] \\
&= 4\pi r^2
\end{aligned}$$

因此，肥皂泡的体积 V 对于半径 r 的增大率是 $4\pi r^2$. 当 $r = 2$ 时，

$$V'(2) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$$

上式表示在 $r = 2$ 时，肥皂泡体积对于半径的增大率是 16π, 它的含义也可以这样理解，体积增大的快慢在 $r = 2$ 时，是 16π 倍于半径增大的快慢。

由于半径的增大率是每秒 0.1cm，故体积在半径等于 2 时的增大率是

$$16\pi \times 0.1 = 1.6\pi (\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$$

练习

1. 设 $y = \dfrac{1}{x}$，　$(x \neq 0)$，求

   (a) 当 x 取改变量 Δx 后，函数改变量 Δy 的表达式；

   (b) 当 $x = 3, \Delta x = -1$ 时，Δy 的值；

   (c) 当 $x = 3$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的表达式和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=3}$ 的值.

2. 设 $\phi(x) = \dfrac{2}{x^2}$，　$(x \neq 0)$, 求

   (a) 当 $x = 1, \Delta x = -0.5$ 时，$\Delta\phi(x)$ 的值；

   (b) 对于任何 x $(x \neq 0)$, 在 Δx 的间隔内，$\phi(x)$ 的平均变率 $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta x}$ 的表达式；

   (c) $\phi(x)$ 在任何点 x $(x \neq 0)$ 处的瞬时变率 $\phi'(x)$.

3. 平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 依赖于哪两个变量？在平均变化率取极限求瞬时变化率的过程中，x 是变量还是常量？Δx 是变量还是常量？

4. 点 $P(2, 8)$ 在抛物线 $y = x^2 + 2x$ 上，点 Q 为抛物线上任何一点。

   (a) 求割线 PQ 的斜率的表达式；

   (b) 当 Q 点横坐标为 $2.1, 1.9, 2.002, 1.998, 2+h$ 时，求割线斜率的值；

   (c) 求在 $P(2, 8)$ 点处，抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的切线方程和法线方程。

5. 求圆面积对于它的半径的变率，对于它的直径的变率.

6. 圆的半径的变率为 2cm/s, 求圆面积在半径等于 4cm 时的变率。

四、函数的可微性与连续性的关系

定理

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，那么 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

证明： 设 $f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，也就是 $f(x)$ 在 x_0 处有导数，则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\&=f'(x_0)\cdot 0=0\end{aligned}$$

上面的定理说明函数在其有导数的点一定连续，在其不连续的点一定没有导数。但是它的逆命题不一定成立，即连续的函数不一定有导数。前面我们曾指出一个函数可微的充分必要条件是它的左导数和右导数都存在而且相等，下面给出在某些点不可微的函数的例子。

例 2.4 求函数 $f(x)=|x^2-1|$ 的导函数的定义域。

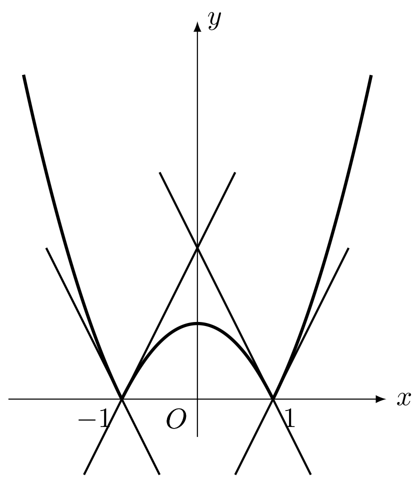


图 2.6

解： 函数 $f(x)=|x^2-1|$ 是一个到处连续的函数，它的图象如图 2.6 所示.

去掉函数式中的绝对值的符号，$f(x)$ 便可以写成分段函数式：

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le -1 \quad \text{或} \quad x\ge 1 \\ -(x^2-1), & -1\le x\le 1 \end{cases}$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x< -1 \quad \text{或} \quad x> 1 \\ -2x, & -1< x< 1 \end{cases}$$

但是当 $x=-1$ 和 1 时，函数 $f(x)$ 的左导数和右导数不相等，即此时导数不存在。因为当 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 -1 点左邻域的表达式是

$$f(x)=x^2-1$$

而在 -1 点右邻域的表达式是

$$f(x)=-(x^2-1)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 点的左导数是

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{[(-1+\Delta x)^2-1]-0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0^-}(-2+\Delta x)=-2 \end{aligned}$$

$f(x)$ 在 $x=-1$ 点的右导数是

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-[(-1+\Delta x)^2-1]-0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+}(2-\Delta x)=2 \end{aligned}$$

由于 $f'_-(-1)\neq f'_+(-1)$, 所以我们说 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处的导数不存在，同样可得

$$-2=f'_-(1)\neq f'_+(1)=2$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处也不可微.

因此，$f(x)=|x^2-1|$ 的导函数的定义域是 $x\neq\pm 1$ 的点的集合，它的函数值如下：

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & |x|>1 \\ -2x, & |x|<1 \end{cases}$$

对照图 2.6 来看，尽管函数 $f(x)=|x^2-1|$ 处处连续，但是在 $x=-1$ 和 1 这两点，曲线的特征是当动点由左侧趋于定点 1(或 -1) 时，割线的极限位置存在；当动点由右侧趋于定点 1(或 -1) 时，割线的极限位置也存在，这两个极限位置分别叫 1(或 -1) 点的**左**、**右切线**，并且它们之间的夹角不为**平角**，点 -1 和 1 分别是曲线的一种**角点**.

图 2.7 的情形是曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点连续并且在此点有平行于 y 轴的切线. 现在我们来讨论图 2.7 中所示各函数在点 x_0 处的导数：

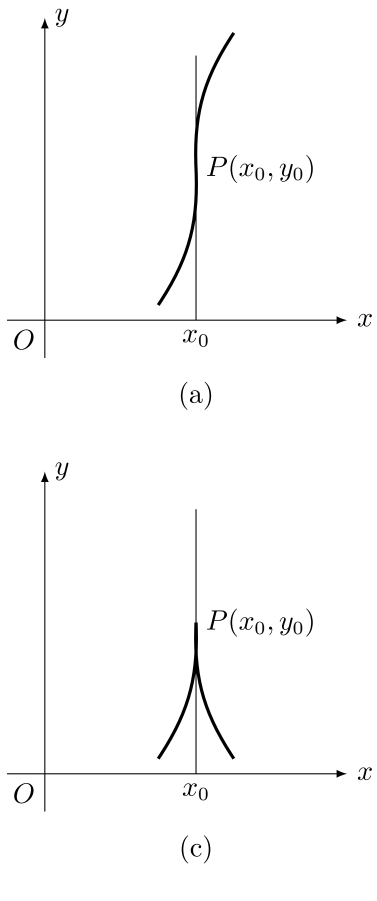


图 2.7

图 (a) 表示的函数在点 x_0 的邻近递增，因此过曲线上 $P(x_0,y_0)$ 和 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 两点的割线，无论 Q 点在 P 点的哪一侧，Δx 与 Δy 都有相同正、负号，于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$$

而且当 $\Delta x \to 0$ 时，割线的倾斜角 φ（$0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$）便以 $\pi/2$ 为极限，从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}^-}\tan\varphi=+\infty$$

可见 $f(x)$ 在点 x_0 不可微（不存在有限导数），但是我们常常把这种情况：当 $\Delta x \to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ 简略地叙述为函数 $f(x)$ 在 x_0 的导数为正无穷大，记作 $f'(x_0) = +\infty$。

图 (b) 表示的函数 f 在点 x_0 的邻近递减，因此过曲线上 $P(x_0, y_0)$ 和 $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 两点的割线，无论 Q 点在 P 点的哪一侧，Δx 与 Δy 都有相反的正、负号，于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0$$

而且当 $\Delta x \to 0$ 时，$\varphi \to \dfrac{\pi^+}{2}$，从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}^+}\tan\varphi=-\infty$$

因此 $f(x)$ 在点 x_0 处不可微，但是我们常常把这种情况叙述为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数为负无穷大，记作 $f'(x_0) = -\infty$。

图 2.7(c) 表示的函数在点 x_0 处连续，让 x 由 x_0 变动到 $x_0 + \Delta x$，于是由 Δx 所引起的相应的函数的改变量 Δy 的情形是：

- 当 $\Delta x < 0$ 时，有 $\Delta y < 0$，从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$；
- 当 $\Delta x > 0$ 时，有 $\Delta y < 0$，从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$。

于是：

- 当 $\Delta x \to 0^-$ 时，$\varphi \to \dfrac{\pi^-}{2}$，从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\varphi \to +\infty$；
- 当 $\Delta x \to 0^+$ 时，$\varphi \to \dfrac{\pi^+}{2}$，从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\varphi \to -\infty$。

因此 $f(x)$ 在点 x_0 不可微，但是我们常把这种情况叙述为 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0) = +\infty$, 而它的右导数为 $f'_+(x_0) = -\infty$, 曲线在 x_0 处由上升转为下降有一个尖点，它的切线垂直于 x 轴。

图 (d) 表示的函数在点 x_0 处连续，但是

- 当 $\Delta x \to 0^-$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\varphi \to -\infty$；

- 当 $\Delta x \to 0^+$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\varphi \to +\infty$。

因此，$f(x)$ 在点 x_0 不可微，我们常常把这种情况叙述为 $f'_-(x_0) = -\infty$ 和 $f'_+(x_0) = +\infty$, 点 x_0 是曲线的一个尖点，它的切线垂直于 x 轴。

例 2.5 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$

讨论它在 0 点的导数。

解： 在第一章，我们已经说明了

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

因此，$f(x)$ 在点 $x = 0$ 连续，很明显 $f(x)$ 在其它各点处也都连续，所以说 $f(x)$ 是一个到处连续的函数，我们将说明它在原点不存在导数。

因为

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}$$

而当 $\Delta x \to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ 没有极限，故 $f'(0)$ 不存在，就其几何意义来说，当动点沿着曲线 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 趋于原点 O 时，割线 OQ 不断地在 $-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ 这个幅度之内摆动，而不趋于任何极限位置，即切线不存在（图 2.8）。

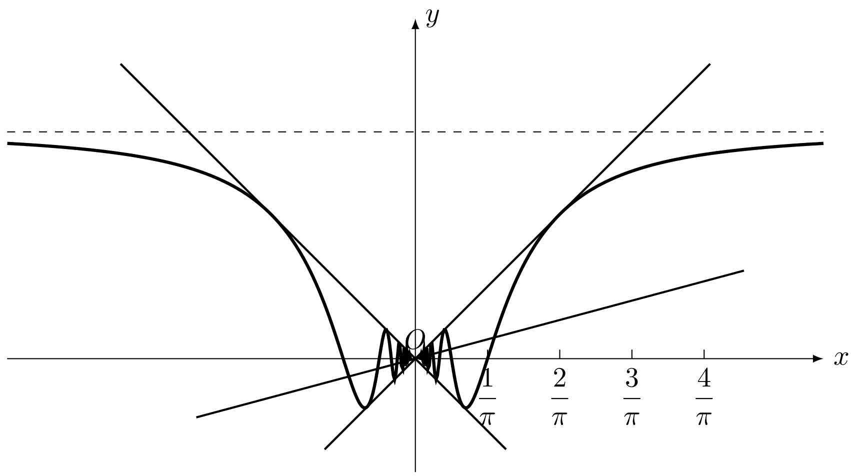


图 2.8

通过以上的例子，我们知道函数的连续点未必是它的可以微分点。几种常见的不可微分点如例 2.4 的角点，平行于 y 轴的切线的切点，特别是曲线上的尖点和在例 2.5 的曲线上的不存在割线的极限位置的点。

假如区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$, 在开区间 (a,b) 中存在着导数 $f'(x)$, 并且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间上可以微分（可导）。

练习

1. 说明下面函数在点 $x=0$ 不可微:

   (a) $f(x)=|x|$

   (b) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x, & x\ge 0 \end{cases}$

   (c) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

   (d) $f(x)=\sqrt{|x|}$

2. 说明函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$ 处处可微。

3. (a) 假设 $g(x)=f(x+c)$. 从定义出发证明 $g'(x)=f'(x+c)$, 并绘图说明。

   (b) 设 f 可微并有周期 φ, 证明 f' 也是有周期的.

第二节　微商运算的基本法则

一、几个基本函数的微商（导数）

(一) 常数函数的导数恒等于 0

证明: 设 $f(x)=c$ （c 是常数），则根据常数函数的性质，由自变数 x 的改变量 Δx 引起的相应的函数的改变量为:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$$

显然差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$, 故

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

这个事实是明显的，因为当自变数 x 有增、减时，函数值并无增、减，因此，它的变化率为零。

(二) 一次函数（直线函数）的导数是常数

若 $f(x)=kx+b$, 则 $f'(x)=k$.

（三）若 $f(x)=x^n$ （n 是正整数），则 $f'(x)=nx^{n-1}$

证明： 由自变量的改变量 Δx 引起的函数改变量为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$$

按牛顿二项式定理展开，得

$$\begin{aligned}\Delta y&=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+nx(\Delta x)^{n-1}+(\Delta x)^n-x^n\\&=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+nx(\Delta x)^{n-1}+(\Delta x)^n\end{aligned}$$

其中差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+nx(\Delta x)^{n-2}+(\Delta x)^{n-1}$$

式中除第一项外，其余各项随 $\Delta x\to 0$ 而趋于 0，因此：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

（四）若 $f(x)=x^\mu$ (其中 μ 是任意实数，函数的定义域依赖于 μ)，则 $f'(x)=\mu x^{\mu-1}$

证明：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^\mu-x^\mu}{\Delta x}=x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu-1}}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

利用第一章中已经算出的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$$

就得到

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mu x^{\mu-1}$$

特殊情形：

1. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$，$(x\neq 0)$，则 $f'(x)=(-1)x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$
2. 若 $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，$(x\geq 0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

（五）若 $f(x)=\log_a x\ (0<a\neq 1,\ 0<x<+\infty)$**，则** $f'(x)=\dfrac{\log_a e}{x}$

证明：

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}\\&=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}\\&=\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x/x}}\end{aligned}$$

利用极限 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$，以及对数函数是连续函数，得到

$$\begin{aligned}f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{1}{x}\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x/x}}\\&=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x/x}}\right]\\&=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{\log_a e}{x}\end{aligned}$$

特别：当 $f(x)=\ln x$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$。

上面的结果表明对数函数（$a>1$ 时）的增大速度是与自变数的值成反比的，当自变数无限增大时，增大速度就保持正值而趋向于 0. 由于自然对数的导数比较简单，所以在理论研究中常常采用自然对数。

（六）若 $f(x)=a^x\ (0<a\neq 1,\ -\infty<x<+\infty)$**，则** $f'(x)=a^x\cdot\ln a$

证明：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

利用 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^{\Delta x}=1$，则可设 $a^{\Delta x}=1+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\alpha\to 0$. 在此等式的两边取对数，得：

$$\Delta x=\log_a(1+\alpha)$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{\alpha}{\log_a(1+\alpha)}=a^x\cdot\frac{1}{\log_a(1+\alpha)^{1/\alpha}}$$

因此

$$\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= a^x\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\log_a(1+\alpha)^{1/\alpha}}\\
&= a^x\cdot\frac{1}{\log_a\left[\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]}\\
&= a^x\cdot\frac{1}{\log_a e}
\end{aligned}$$

又因为 $\ln a = \dfrac{1}{\log_a e}$，所以

$$f'(x) = a^x\cdot\ln a$$

特别，若 $f(x)=e^x$，则 $f'(x)=e^x$。

这个事实表明指数函数（当 $a>1$ 时）的增大速度与函数值成正比例，当底数为 e 时，导数的结果特别简单。

（七）若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$

证明：

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\
&= \frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\\
&= \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x/2\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}
\end{aligned}$$

根据 $\cos x$ 的连续性与极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, 得到 $f'(x)=\cos x$.

（八）若 $f(x) = \cos x$**，则** $f'(x) = -\sin x$

证明：

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
&= \frac{-2\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot \sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\
&= -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right] \\
&= -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x/2\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

现在将上面的导数公式列成下表：

1. $\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$

2. $\dfrac{\mathrm{d}(kx+b)}{\mathrm{d}x} = k$

3. $\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$　（n 为自然数）

4. $\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}x} = \mu x^{\mu-1}$　（μ 为任意实数）

5. $\dfrac{\mathrm{d}\log_a x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\log_a e}{x}$，　$\dfrac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$

6. $\dfrac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = a^x\cdot\ln a$，　$\dfrac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$

7. $\dfrac{\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$，　$\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$

二、求导的基本法则

现在要建立一些求导数的公式，用这些公式等函数的导数。

定理 1

函数和的导数等于各函数的导数的和，即：

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

证明： 设 $u(x)=f(x)+g(x)$, 任意固定 x, 作取非零数 Δx，有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} &= \frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

令 $\Delta x \to 0$，即得：

$$\begin{aligned}[f(x)+g(x)]' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

这个法则可以推广到任意有限个函数。

定理 2

$[A\varphi(x)]' = A\varphi'(x)$, 其中 A 是常数，即常因数不因微分法而改变。

证明： 设 $f(x)=A\varphi(x)$,

$$\begin{aligned}[A\varphi(x)]' = f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[A\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right]\\ &= A\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\\ &= A\varphi'(x)\end{aligned}$$

例 2.6 求 $3x^2-7x-1$ 的导数。

解：

$$(3x^2-7x-1)'=(3x^2)'+(-7x)'+(-1)'=6x-7$$

推论

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$，则

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

例 2.7　求过抛物线 $y=3x^2+6$ 外一点 $P(2,-9)$ 所引抛物线的两条切线的方程。

解： 在点 x 处的抛物线的切线的斜率为

$$k=y'_x=6x$$

故过抛物线上一点 $T(x_1,y_1)$ 的切线方程为

$$y-y_1=6x_1(x-x_1)$$

$\because$　$y_1=3x_1^2+6$

$\therefore$　切线方程可化简为

$$y=6x_1x-3x_1^2+6$$

设切线通过 $P(2,-9)$ 点，于是

$$9=12x_1-3x_1^2+6$$

即：$x_1^2-4x_1-5=0$

$\therefore$　$x_1=-1$ 或 5，从而 $y_1=9$ 或 81.

故所求切线方程为：

$$y-9=-6(x+1)\quad \text{和}\quad y-81=30(x-5)$$

即：

$$y+6x-3=0\quad \text{和}\quad y-30x+69=0$$

例 2.8　求三次函数 $f(x)=ax^3+3bx^2+3cx+d$ 的图象与 x 轴相切的条件。

解： 由函数 $f(x)=ax^3+3bx^2+3cx+d$ 求得它的图象任意一点 $x=x_0$ 处的切线斜率为

$$f'(x)=3ax_0^2+6bx_0+3c=3(ax_0^2+2bx_0+c)$$

要此曲线与 x 轴相切于 $(x_0,0)$ 点，x_0 必须满足条件

$$\begin{cases} ax_0^3+3bx_0^2+3cx_0+d=0 & (2.1)\\ ax_0^2+2bx_0+c=0 & (2.2)\end{cases}$$

将 (2.1) 改写成

$$x_0(ax_0^2+2bx_0+c)+bx_0^2+2cx_0+d=0 \tag{2.3}$$

(2.2) 代入得

$$bx_0^2+2cx_0+d=0 \tag{2.4}$$

于是解 (2.1) 和 (2.2) 即解 (2.2) 和 (2.4)，要方程 (2.2) 和 (2.4) 有公共解，必须

$$D=\begin{vmatrix} a & 2b\\ b & 2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)\neq 0$$

于是

$$x_0^2=\frac{c^2-bd}{b^2-ac},\qquad x_0=\frac{ad-bc}{2(b^2-ac)}\ (b^2-ac\neq 0)$$

所以，a,b,c,d 必须适合条件

$$\begin{cases} b^2-ac\neq 0\\ \dfrac{c^2-bd}{b^2-ac}=\dfrac{(ad-bc)^2}{4(b^2-ac)^2}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} b^2-ac\neq 0\\ (ad-bc)^2=4(b^2-ac)(c^2-bd)\end{cases}$$

定理 3

二函数之积的导数为两项之和，其中第一项是第一个因子的导数与第二个因子的乘积，而第二项是第二个因子的导数与第一个因子的乘积，即

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

证明： 设 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, 任取非零数 Δx, 则

$$\begin{aligned}
[f(x) \cdot g(x)]' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) \\
&\qquad + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\Big] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) \\
&\qquad + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

重复应用这个定理，我们便可以求两个以上的函数之积的导数，例如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uvw) = (vw)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(vw)$$

但是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(vw) = w\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

代入上式便得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uvw) = vw\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + uw\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + uv\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

例 2.9 设 $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 3)$，求 $f'(x)$

解：

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\sqrt{x}(x^2-3)\right]' \\
&= \left(\sqrt{x}\right)'(x^2-3) + \sqrt{x}(x^2-3)' \\
&= \frac{7}{2\sqrt{x}}(x^2-3) + \sqrt{x} \cdot 2x = \frac{5x^2-3}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

例 2.10 设 $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2 x + x\sin x + \dfrac{7}{x^2}$，求 $f'(x)$

解：

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right)' + (x\sin x)' + \left(\frac{7}{x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left[(\sin x)'\sin x + \sin x(\sin x)'\right] + (\sin x + x\cos x) - \frac{14}{x^3} \\
&= \sin x\cos x + \sin x + x\cos x - \frac{14}{x^3}
\end{aligned}$$

定理 4

两个函数的商的导数，等于分子的导数与分母的积，减去分母的导数与分子的积，再除以分母的平方，即

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

证明： 设 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$，任取非零数 Δx，则

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\right\}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)}\right\}\\
&= \frac{v(x)\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}}{v(x)\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}\\
&= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}
\end{aligned}$$

例 2.11 求证：$(\tan x)' = \sec^2 x, \qquad (\cot x)' = -csc^2x$

证明：

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'\\
&= \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

例 2.12 求 $\left(\dfrac{2x-1}{x^2+1}\right)'$

解:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right)' &= \frac{(x^2+1)(2x-1)'-(2x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{(x^2+1)\cdot 2-(2x-1)(2x)}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{2(x^2+1)-(4x^2-2x)}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{-2(x^2-x-1)}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

练习

1. 求下面各函数的导函数:

   (a) $3x^3-1$

   (b) $x+2x^2+3x^3$

   (c) $1-\dfrac{1}{x^2}$

   (d) $\dfrac{x^2+1}{x}$

   (e) $1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$

   (f) $\dfrac{2x^5-7x^3-3x^2}{6x^2}$

   (g) $(x+2)(x^2+1)$

   (h) $x+\sqrt{x}$

   (i) $x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   (j) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

   (k) $\dfrac{2x\sqrt{x}-x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}}{-\sqrt{x}}$

   (l) e^x-e^{-x}

   (m) $\dfrac{x^n-x^{-n}}{x}$

   (n) $\sin x+\cos x$

   (o) $\sin x-\cos x$

2. 求下面各函数的导函数:

(a) $(x^2+1)^3\sqrt{x}$

(b) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

(c) $x\sin x$

(d) $x\cot x$

(e) $\dfrac{\tan x}{x}$;

(f) $x\log_2 x + x^2\tan x$

(g) $\dfrac{x^2}{x^3+c^3}$

(h) x^3e^{-x};

(i) $a^{-x}\sin x$

(j) $a^x\{(x+1)\cos x+\log_2 x\}$

(k) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{2x+1}$

(l) $\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

(m) $\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-5)}$

(n) $\dfrac{x^2(x^2-1)(x^3-1)}{x+1}$

(o) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

(p) $x\sin x\cos x$

(q) $\sec x$

(r) $\csc x$

(s) $\dfrac{\sin x}{1+\tan x}$

3. 已知抛物线 $y=x^2-x$ 上一点的切线平行于直线 $y=x$。求此点的坐标。

4. 求曲线 $y=x^3-x^2$ 上这样的点，使过该点的切线与 x 轴平行。

5. 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过原点，且过该点的切线的斜率等于 2, 又抛物线过 $(1,1)$ 点，求 a、b、c.

6. 对于函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 方程 $f(x)+\dfrac{1}{2}x=0$ 有不相等的三根 $2,\alpha,\beta$, 若 $f'(\alpha)=f'(\beta)$, $f'(1)=0$, 求 a,b,c.

7. 求三次函数 $y=f(x)$, 使它同时满足下面的条件:

   (a) 用 $x+1$ 去除 $f(x)$ 与用 $(x-1)(x-2)$ 去除，$f(x)$ 所得余式相同;

   (b) 过曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(1,f(1))$ 的切线方程是 $y=-2x+1$

8. 过 $(2,0)$ 点求与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 相切的直线方程。

9. (a) 在抛物线 $y=x^2$ 上求这样一点，使过该点的切线与过 (a,a^2) 点的切线垂直;

   (b) 求抛物线两条正交切线交点的轨迹方程.

10. 设抛物线方程为 $y = x^2 + ax + b$, 试问点 (x_0, y_0) 位于何处时，可以从点 (x_0, y_0) 对此抛物线作出两条切线或一条切线，或作不出切线?

11. 求抛物线 $y = x^2 + ax$, $y = x^2 + bx$ $(a \neq b)$ 的公切线的方程。

三、复合函数的求导法则

定理

假设函数 $y = g(x)$ 在点 x 可导，而函数 $z = f(y)$ 在点 $g(x)$ 可导，那么复合函数 $z = \varphi(x) = f(g(x))$ 在点 x 可导，并且

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

简写成 $[f(g(x))]' = f'_g \cdot g'_x$，或者写成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

证明： 设 D_g, D_f 分别是函数 $g(x), f(y)$ 的定义域，令 $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$, 任取非零数 Δx, 且使 $g(x + \Delta x) \in D_f$，于是 $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$, 又根据 $g(x)$ 在点 x 连续，故当 $x \to 0$ 时，$\Delta y \to 0$. 因为 $g(x)$ 在点 x 可导，可以设

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - g'(x) \tag{2.5}$$

而且由上式知道

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - g'(x) \right) = g'(x) - g'(x) = 0$$

把 (2.5) 改写成

$$\Delta y = g'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \tag{2.6}$$

其中 α 随 Δx 一同趋向于零，且 $\alpha\Delta x$ 是比 Δx 更小的量。

1. 若 $g'(x) \neq 0$，只要 Δx 够小，由 (2.6) 知 $\Delta y \neq 0$，那么

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} &= \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(g(x) + \Delta y) - f(g(x))}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\end{aligned}$$

令 $\Delta x \to 0$，由上式得

$$\varphi'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

即

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

2. 如果 $g'(x) = 0$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，有两种情形:

(a) 若 $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x) = 0$，则

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} &= \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(x))}{\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

(b) 若 $\Delta y \neq 0$，则

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{f(g(x+\Delta y)) - f(g(x))}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \to 0$，得到

$$\varphi'(x) f'(g(x)) \cdot 0 = 0$$

合并上述两种情形，都有

$$\varphi'(x) = [f(g(x))]' = 0$$

于是定理得证。

这个定理是说：复合函数对自变量的导数，等于已知函数对中间变量的导数，乘以中间变量对自变量的导数。

例 2.13 设 $\varphi(x) = 2^{\sin x}$, 求 $\varphi'(x)$。

解： 把 $\varphi(x)$ 看成 $u = \sin x$ 和 $f(u) = 2^u$ 的复合函数，于是 $\varphi(x) = 2^{\sin x} = f(\sin x)$.

依上述定理，得

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= [f(u)]' \cdot u'_x = (2^u)' \cdot (\sin x)' \\ &= 2^u \ln 2 \cdot \cos x \\ &= 2^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

例 2.14 设 $y=\sin(x^2+x+1)\cdot\cos(x^3+2x^2)$, 求 y'_x.

解: 设 $u=x^2+x+1$, $v=x^3+2x^2$, 则

$$
\begin{aligned}
y' &= (\sin u)'\cdot u'_x\cdot\cos v+\sin u\cdot(\cos v)'\cdot v'_x \\
&= \cos u\cdot u'_x\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v\cdot v'_x \\
&= (2x+1)\cos\left(x^2+x+1\right)\cos\left(x^3+2x^2\right) \\
&\qquad -(3x^2+4x)\sin\left(x^2+x+1\right)\sin\left(x^3+2x^2\right)
\end{aligned}
$$

例 2.15 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$, 求 $f'(x)$.

解:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{9+x^2}(x)'-x\left(\sqrt{9+x^2}\right)'}{9+x^2} \\
&= \frac{\sqrt{9+x^2}-x\cdot\dfrac{1}{2}(9+x^2)^{-\frac{1}{2}}(9+x^2)'}{9+x^2} \\
&= \frac{\sqrt{9+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}}{9+x^2}=\frac{9}{(9+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

推论 1

如果函数有两个以上的中间变量，上面的求导法则可以推广使用。

例如，设 $y=f(u)$, $u=g(v)$, $v=h(x)$, 那么对于复合函数。$y=\varphi(x)=f\{g[h(x)]\}$ 的导数可以这样来求:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

即: $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$

事实上，依前定理有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

这里 $u=g[h(x)]$。再用同一定理

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

例 2.16 设 $y=\ln\sqrt{5-2x+3x^4}$, $(5-2x+3x^4>0)$，求 y'_x.

解： 设 $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=5-2x+3x^4$，于是：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{1}{u}\cdot\left(\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot(-2+12x^3)\\&=\frac{1}{\sqrt{5-2x+3x^4}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5-2x+3x^4}}\cdot(-2+12x^3)\\&=\frac{6x^3-1}{5-2x+3x^4}\end{aligned}$$

求复合函数的导数，关键在于分析清楚函数的复合关系，适当选定中间变量，根据复合函数求导法则由外向里逐层求导，直到最后一个中间变量对自变量求导为止，每次求导时，必须明确是哪个变量对哪个变量求导，所有这些导数的乘积就是复合函数的导数。

推论

$$(\ln|g(x)|)'=\frac{g'(x)}{g(x)}\quad(g(x)\neq 0)$$

证明：

$$\ln|g(x)|\text{有意义}\quad\Longleftrightarrow\quad g(x)\neq 0$$

又

$$|g(x)|'\text{存在}\quad\Longleftrightarrow\quad g(x)\neq 0$$

所以由

$$|g(x)|'=\begin{cases}g'(x), & g(x)>0\\ [-g(x)]'=-g'(x), & g(x)<0\end{cases}$$

和复合函数求导法则，便得

$$[\ln|g(x)|]'=\frac{1}{|g(x)|}\cdot|g(x)|=\frac{g'(x)}{g(x)}\quad(g(x)\neq 0)$$

例 2.17 求 $(\ln|x^2-5x+4|)'$

解：

$$(\ln|x^2-5x+4|)'=\frac{(x^2-5x+4)'}{x^2-5x+4}=\frac{2x-5}{x^2-5x+4}$$

其中：$x^2-5x+4\neq 0$，即 $x\neq 1$ 和 $x\neq 4$.

例 2.18　求 $\left[\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^2}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right]'$

解： 设 $y=\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^2}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$，则

$$\begin{aligned}\ln|y|&=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2\ln|x-1|-\frac{3}{2}\ln|x+1|\\ \frac{1}{y}\cdot y'&=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{2(x+1)}\\ &=\frac{3x^3+7x^2-x+7}{2(x^2+1)(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'&=\frac{3x^3+7x^2-x+7}{2(x^2+1)(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^2}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\\ &=\frac{(3x^3+7x^2-x+7)(x-1)}{2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

例 2.19　设 $f(x)=u(x)^{v(x)}\quad(u(x)>0)$，求 $f'(x)$.

解： 先求此函数的对数，有

$$\ln f(x)=v(x)\ln u(x)$$

两边对 x 求导，即得

$$-\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$$

所以

$$f'(x)=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]$$

例 2.20　一人在放风筝，且知风筝在 80 米的高度飘行，放线速度为 2 米/秒，求当线长为 100 米时，风筝和此人之间的水平距离的变率。

解： 设在某时刻 t, 线长为 $\ell(t)$ 米，水平距离为 $x(t)$ 米，根据勾股定理得到绳长和水平距离的关系式

$$\ell^2(t) = x^2(t) + 6400$$

两边对时间 t 求导数，得到

$$\frac{\mathrm{d}\ell^2}{\mathrm{d}\ell} \cdot \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x^2 + 6400)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\ell \cdot \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

但是已知 $\dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = 2(\mathrm{m/s})$，又当 $\ell = 100$ 时，

$$x = \sqrt{100^2 - 6400} = \sqrt{3600} = 60$$

于是

$$60\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 100 \times 2$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}(\mathrm{m/s})$$

答：当 $\ell = 100$ 米时，风筝和人之间的水平距离的变率为 $3\dfrac{1}{3}$（米 / 秒）。

练习

1. 求下面函数对于 x 的导数:

(a) $(x+1)^2$

(b) $(1-3x)^3$

(c) $\sqrt{x+1}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

(e) $\sqrt{x^2+1}$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(g) $\sqrt{2x^2+x-1}$

(h) $\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$

(i) $\dfrac{1}{\sin^3 x}$

(j) $\cos(ax+b)$

(k) $\cos^3(ax+b)$

(l) $\cot\sqrt{x}$

(m) $\sec\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(n) $x\sqrt{\sin x}$

(o) $x^2\sqrt{\sec 2x}$

(p) $\ln(1+x^2)$

(q) $\log_a(\sin x)$

(r) $\log_a(\sec x)$

(s) $\sqrt{\ln x}$

(t) e^{ax^2}

(u) e^{1+x-x^2}

(v) $a^{\sqrt{2x+1}}$

2. 对下面各函数先取对数再求导数:

(a) $\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

(b) $\dfrac{\sqrt{x-1}(x+1)}{x^2+1}$

(c) $\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-5)}$

(d) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

(e) $(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$

3. 求下列函数对于 x 的微商:

(a) $e^{2x}(2\cos 3x+3\sin 3x)$

(b) $\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$

(c) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{3-4x-4x^2}}$

(d) $\cos[\ln(x^2+9)]$

(e) $\ln(1-\tan^2 x)$

(f) $x^x+(\ln x)^x$

(g) $(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{3}{20}}(1-2x)^{-\frac{2}{5}}$

4. 若 $y=e^{ax}\cos(bx+c)$，求证:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{ax}\cos(bx+c+r)$$

其中：$\tan r=b/a$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的导函数。

（提示：对于 $x\neq 0$，可用本节的方法得出，而 $f'(0)$ 需直接由定义得出）。

6. 有一个长度为 5 米的梯子贴靠在铅直的墙上，假设其下端沿地板以 3 米/秒的速率离开墙脚而滑动，则

(a) 当其下端离开墙脚 1.4 米时，梯子上端下滑之速率为多少?

(b) 何时梯子的上下端能以相同的速率移动?

(c) 何时其上端下滑之速度为 4 米/秒?

7. 求曲线 $y=\cos^2\sqrt{x}$ 在点 $x=0$ 处的切线方程.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=7\text{cm}$, $b=5\text{cm}$, $c=8\text{cm}$, P 为 AB 边上一动点，从 A 往 B 以每秒 2 厘米的速度运动. 当 P 点在 AB 边中点时，CP 长度的变率是多少?

9. 求曲线 $y=2\left(e^x+\dfrac{1}{5}e^{-3x}\right)$ 在横坐标 $x_0=0$ 的点的切线方程.

10. 试由公式 $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ 分别导出 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ 与 $x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots+n^2x^n$ 的公式.

四、反函数求导法则

定理

若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内连续，且严格单调，又函数 $f(x)$ 在点 $x_0=f^{-1}(y_0)$ 的导数 $f'(x_0)$ 存在并且异于零，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应点 $y_0=f(x_0)$ 的导数存在，并且等于 $\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$，即

$$[f^{-1}(y_0)]'=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}$$

证明： 给数值 $y=y_0$ 以任意增量 Δy, 则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也得到对应增量 Δx, 当 $\Delta y\neq 0$ 时，由于 $y=f(x)$ 的严格单调性，从而 $x=f^{-1}(y)$ 也是严格

单调的，也有 $\Delta x \neq 0$, 于是有

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y} &= \frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}\end{aligned}$$

现在令 $\Delta y \to 0$，则由于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也是连续的，故增量 $\Delta x \to 0$，于是

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

上面等式右边的分母就趋于极限 $f'(x_0)\neq 0$，而左边按定义就是 $[f^{-1}(y_0)]'$，因此

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

再将 $x_0=f^{-1}(y_0)$ 代入上式，得到

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}$$

推论

$$\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, &\quad -1<x<1\\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, &\quad -1<x<1\\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, &\quad -\infty<x<\infty\\
(\operatorname{arccot} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, &\quad -\infty<x<\infty
\end{aligned}$$

证明： 如果我们限制正弦函数 $x=\sin y$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，那么 $x=\sin y$ 的反函数存在，即

$$y=\arcsin x, \qquad x\in(-1,1)$$

于是

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

由于 $\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos y > 0$, 从而

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

最后得到

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1)$$

我们除去了数值 $x = \pm 1$, 因为在它的对应值 $y = \pm\frac{\pi}{2}$ 处导数 $(\sin y)' = \cos y = 0$.

在第四册，我们已经证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$，所以

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1$$

其余同理可证。

例 2.21 求 $(\operatorname{arcsec} x)'$.

解： 函数 $x = \sec y$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上，由 1 递增到 $+\infty$，而在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上，由 $-\infty$ 递增到 -1。因此，$x = \sec y$，$y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 有反函数存在，即：

$$y = \operatorname{arcsec} x, \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

依反函数求导法则，有

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arcsec} x)' &= \frac{1}{(\sec y)'} = \frac{1}{\sec y \cdot \tan y} \\
&= \frac{1}{\sec(\operatorname{arcsec} x) \cdot \tan(\operatorname{arcsec} x)} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{\sec^2(\operatorname{arcsec} x) - 1}}, & 0 < \operatorname{arcsec} x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{x\left(-\sqrt{\sec^2(\operatorname{arcsec} x) - 1}\right)}, & \dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} x < \pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

例 2.22 若已知 $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$, $\quad x \in (0, +\infty)$，试利用反函数求导法则求 $(a^x)'$

解： 因为 $y=a^x$,　$(a>0,\ a\neq 1,\ -\infty<x<+\infty)$ 是 $x=\log_a y\ (y>0)$ 的反函数，所以

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\dfrac{\log_a e}{y}} = \frac{y}{\log_a e} \\ &= \ln a\cdot(a^x) = a^x\ln a\end{aligned}$$

例 2.23　求函数 $f(x)=2x\arctan 2x-\ln\sqrt{1+4x^2}$ 的导数。

解：

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left[(2x)'\arctan 2x + 2x\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'\right] \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+4x^2}}\cdot(1+4x^2)' \\ &= 2\arctan 2x + \frac{4x}{1+4x^2} - \frac{4x}{1+4x^2} \\ &= 2\arctan 2x\end{aligned}$$

例 2.24　求曲线 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的交角。

解： 设这两条曲线交于 $T(x_0,y_0)$ 点，则

$$y_0=\arcsin x_0=\arccos x_0,\qquad 0<y_0<\frac{\pi}{2}$$

由此得

$$\sin(\arcsin x_0)=\sin(\arccos x_0) \tag{2.7}$$

即

$$x_0=\sqrt{1-x_0^2}$$

解得

$$x_0=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

因为 $0<y_0<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x_0>0$. 如此应取 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 由于

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

所以在点 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 处，$y=\arcsin x$ 的切线的斜率为

$$\tan\alpha\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}}=\sqrt{2}$$

又 $y=\arccos x$ 的切线的斜率是

$$\tan\beta\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}}=-\sqrt{2}$$

设 θ 是这两条曲线在交点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的夹角，也就是过 T 点的两条切线的交角，于是

$$\tan\theta=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+\left(-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$$

因此，这两条曲线的交角 $\theta=\arctan 2\sqrt{2}$.

例 2.25 一飞机在离地面 2 公里的高度，以每小时 200 公里的速度飞临某目标的上空，以便进行航空摄影，试求飞机飞至该目标正上方时摄影机转动的角速度（图 2.9）。

解： 我们把该目标取为坐标原点，设飞机和目标的水平距离为 x, 显然它是时间 t 的函数 $x=x(t)$. 现在要求出飞机在目标正上方时，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 之值，为此，先找出 θ 和 x 的关系，从图 2.9 中可以看出

$$\tan\theta=\frac{2}{x},\quad 0<\theta\leq\frac{2}{\pi}$$

$\therefore\quad \theta=\arctan\dfrac{2}{x}$ 于是

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{-2}{x^2+4}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

但根据题意知道 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-200$, 这里负号表示 x 在减小，故得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{400}{x^2+4}$$

当飞机在目标正上方时，即 $x=0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=100$弧度/时，将弧度化为角度即为 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{5}{\pi}$度/秒

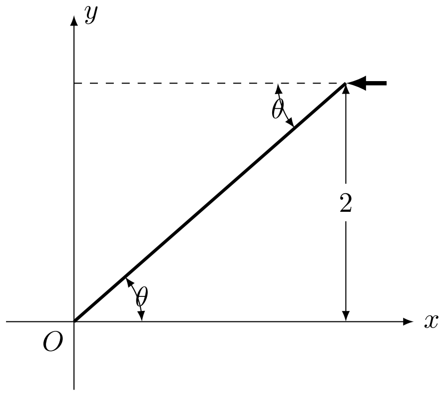


图 2.9

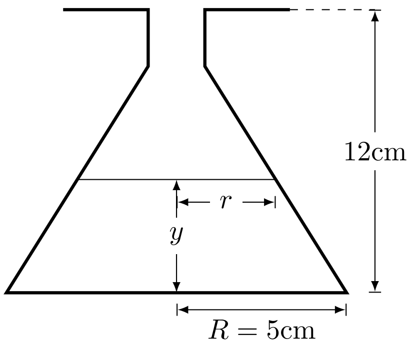


图 2.10

例 2.26 有一底半径为 5cm, 高为 12cm 的正圆锥形容器（图 2.10）, 以每秒 2cm^3 的速度往容器中倒水，试求容器水位等于锥高一半时，水面上升速度。

解： 设在某时刻 t, 容器水高为 y, 则此时水的体积 V 为

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\pi r^2}{3}(h-y) \\ &= \frac{\pi}{3}\cdot 5^2 \cdot 12 - \frac{\pi r^2}{3}(12y) \\ &= 100\pi - \frac{\pi r^2}{3}(12-y) \end{aligned}$$

而

$$\frac{r}{R} = \frac{h-y}{h}$$

即

$$r = \frac{R}{h}(h-y) = \frac{5}{12}(12-y)$$

代入上式，得

$$\begin{aligned} V &= 100\pi - \frac{\pi}{3}\cdot\frac{5^2}{12^2}(12-y)^3 \\ &= 100\pi - \frac{25\pi}{432}(12-y)^3 \end{aligned}$$

又由题设知：$V=2t$，所以

$$2t = 100\pi - \frac{25\pi}{432}(12-y)^3$$

即

$$t = 50\pi - \frac{25\pi}{864}(12-y)^3 \tag{2.8}$$

这就确定了水的高度与时间 t 的关系，水面上升速度就是 y 关于时间 t 的变化率，也就是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。根据反函数求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}}$$

由 (2.8) 得

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{25\pi}{864}\cdot 3(12-y)^2(12-y)'=\frac{25\pi}{288}(12-y)^2$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{288}{25\pi(12-y)^2}$$

当 $y=\dfrac{1}{2}h=6$ 时，

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{y=6}=\frac{288}{25\times 36\pi}\approx 0.102(\mathrm{cm/s})$$

答：水面上升速度为每秒 0.102 厘米.

练习

1. 求下列函数的微商：

(a) $\arcsin\dfrac{x}{4}$

(b) $\arccos x^2$

(c) $\arctan\dfrac{1}{x}$

(d) $\arcsin\sqrt{x}$

(e) $(\arcsin x)^2$

(f) $\arctan(\tan x)$

(g) $\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$

(h) $\arctan(2\tan x)$

(i) $x^2\operatorname{arccot}\dfrac{x}{a}$

(j) $\ln\sqrt{1+4x^2}\cdot\operatorname{arccot}\dfrac{1-x}{1+x}$

(k) $\dfrac{1-\arccos 2x}{\arctan x}$

(l) $\operatorname{arccsc} x$

2. 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\arctan\left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)\right\}=\frac{3\cos x-\cos 3x}{2(1-\sin x\sin 3x)}$$

3. 求下列函数的导数：

(a) $\arcsin\cdot\dfrac{6x^2}{\sqrt{4+81x^8}}$

(b) $\arctan\dfrac{1}{1-3x^2}-\arctan\dfrac{1}{1+3x^2}$

(c) $\operatorname{arccot}\dfrac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

4. 一圆锥形容器，深 10 尺，上顶圆半径为 4 尺；求

   (a) 灌入水时，水的体积 V 对水面高度 h 的变化率；

   (b) 体积 V 对容器截面圆半径 R 的变化率.

5. 一圆锥形容器底面朝上放着，它的顶角为 $2\arctan\dfrac{3}{4}$，今向里面倒进某种液体，试求

   (a) 当液面半径 r 为 3, 半径增加的速度 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 为 $\dfrac{1}{4}$ 时，体积增加的速度 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$；

   (b) 当液面半径为 6, 体积增加的速度为 24 时，半径增加的速度。

6. 水从高为 18 厘米，底半径为 6 厘米的圆锥形漏斗中流入半径为 5 厘米的圆柱形筒内. 已知此漏斗中水深为 12 厘米时，漏斗中水面的下降速度为 1 厘米/分，求此时圆筒中水面的上升速度.

7. 底数 a 为什么值时，直线 $y=x$ 才能与对数曲线 $y=\log_a x$ 相切? 在何处相切?

8. 求曲线 $y=e^{-x}$ 上的一点，使过该点的切线与直线 $y=-ex$ 平行，并写出该点的法线方程。

9. 求曲线 $y=\dfrac{1}{2}(1+2x^2\pm\sqrt{1+4x^2})$ 上横坐标 $x=u$ 的点处的切线方程。这切线还与曲线交于何处? y 的反函数为何?

五、隐函数的导数

到现在为止，我们所讨论的函数都是可以由自变量明显地表示出来的函数，例如，方程 $y=x^3+1$ 就定义了一个明显的函数 f, 这里 $f(x)=x^3+1$. 这种函数叫做显函数。但是并不是所有的函数都可以用这种明显的表达式来定义的，例如由下面的 x,y 的方程

$$x^3-x=y^3-y^2+24$$

就不容易解出用 x 表示 y 的解，或用 y 表示 x 的解。但是，却有可能存在一个函数 f, 使得方程

$$x^3 - x = f^3(x) - f^2(x) + 24$$

对于函数 f 的定义域中的一切 x 值都成立，这样一个函数，如果存在的话，就叫做被这个方程定义的隐函数。最简的情形是二元一次方程:

$$Ax + By + C = 0$$

当 $B \neq 0$ 时，就定义一个隐函数 $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, 这里 $f(x) = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$.

应该注意:

1. 方程 $F(x, y) = 0$ 的解有可能不存在，例如方程 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 没有实数解，因此，由它不能定义一个隐函数。

2. 由方程 $F(x, y) = 0$ 可能定义几个函数. 例如，由方程 $x^2 + y^2 = 16$ 就定义了两个函数:

$$f_1(x) = \sqrt{16 - x^2}, \qquad x \in [-4, 4]$$

和

$$f_2(x) = -\sqrt{16 - x^2}, \qquad x \in [-4, 4]$$

定义

方程

$$F(x, y) = 0 \tag{2.9}$$

给出了变元 x, y 之间的一个关系。如果存在一个函数 $y = f(x)$, 或 $x = g(y)$ 使得对于函数的定义域中的一切值，等式 $F(x, f(x)) = 0$ 或 $F(g(x), y) = 0$ 恒成立，我们就说方程 (2.8) 定义了一个**隐函数**:

$$y = f(x) \qquad 或 \qquad x = g(y)$$

要对方程 (2.8) 给出的隐函数求导数，通常的办法是直接对这个方程求导数，而不是先解出显函数，再来求导数。

例 2.27 设 $xy + x^2 - 1 = 0$, 求 y'_x.

解: 先把 y 看成 x 的函数，即 $y = f(x)$, 然后，在等式 $xf(x) + x^2 - 1 = 0$ 的两边对 x 求导数，得到

$$(x \cdot f(x))' + (x^2)' = 0$$

$$xf'(x) + f(x) + 2x = 0$$

$$\therefore \quad f(x) = -\frac{2x + f(x)}{x} = -\frac{2x + \dfrac{1-x^2}{x}}{x} = -\frac{1+x^2}{x^2}$$

例 2.28 方程 $x^2 + y^2 = 16$ 定义了两个可微函数：$y = \sqrt{16-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{16-x^2}$, $x \in [-4, 4]$. 求每一个函数的导数。

解： 我们用 $f(x)$ 代表上面两个函数中的任何一个，则

$$x^2 + f^2(x) = 16, \qquad x \in [-4, 4]$$

对上面等式的两边微分，得到

$$\begin{aligned} 2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \\ f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{16-x^2}\right)' &= -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \\ \left(-\sqrt{16-x^2}\right)' &= \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}, \qquad x \in [-4, 4] \end{aligned}$$

注意： 应用这个方法求隐函数的导数时，我们作了两点假设：

1. 存在一个由方程 $F(x, y) = 0$ 定义的函数；
2. 这样定义的函数是可微的.

至于在什么条件下，这种假设是合理的问题，已经超出了本书的范围，故不在此讨论。

例 2.29 求证椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在点 (x_0, y_0) 处切线的方程为 $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

证明：

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)'_x &= (1)'_x \\ \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y_x &= 0 \end{aligned}$$

若 $y \neq 0$，则：

$$y'_x = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

于是，在点 (x_0,y_0) 处（这里 $y_0\neq 0$）的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{b^2x}{a^2y}(x-x_0)$$

即：$b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2$

$\because$ 点 (x_0,y_0) 在椭圆上，

$\therefore$ $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，因此，所求切线方程是

$$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$$

也就是

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

若 $y=0$ 则 $x=\pm a$, 显然在点 $(-a,0)$ 和点 $(a,0)$ 处的切线方程分别是 $x=-a$, $x=a$, 它们是方程 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 的特殊形式.

例 2.30 如果将抛物线 $y^2=2px$ 绕它的对称轴旋转成旋转挑物面，那么与对称轴平行的光线射到曲面上，经曲面反射后通过焦点，试证明之。

证明： 从物理学知道，光线经镜面反射后，要服从光的反射定律：

1. 在均匀介质中，光沿直线传播。

2. 当光线碰到平面镜时，光线要反射。入射线与镜面法线夹角（记作 i）等于反射线与镜面法线的夹角（记作 r），见图 2.11, 角 i 称为入射角，角 r 称为反射角.

3. 光从曲面镜的反射也遵守同样的法则：

$$\text{入射角}i=\text{反射角}r$$

此时镜面的法线定义为与镜面在入射点的切线相垂直的直线。

假设光线经位于 xy 平面上的抛物线 $y^2=2px$ 形的镜面反射。当入射线与 x 轴平行且与抛物线交于 $P_1(x_1,y_1)$ 点时，我们要求反射线的方程，并证明它通过焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$. 如果过 $P_1(x_1,y_1)$ 点的切线与 x 轴成 θ 角，那么平行于 x 轴的入射光线与法线的夹角是 $90^\circ-\theta$. 由光的反射定律，反射光线与法线的夹角也是 $90^\circ-\theta$. 于是，从图 2.12 上看出，反射光线与 x 轴的夹角是 2θ.

现在，在方程 $y^2=2px$ 的两边对 x 求导数，得到

$$2yy'=2p\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{2p}{2y}=\frac{p}{y}$$

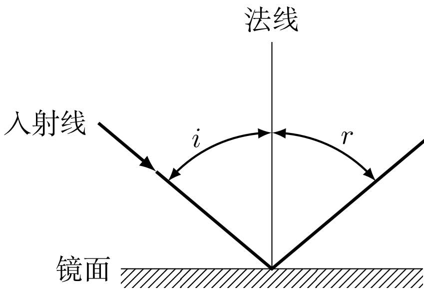


图 2.11

所以，由导数的几何意义得出，在 $P_1(x_1,y_1)$ 点的切线的斜率是

$$\tan\theta = y'_{x_1} = \frac{p}{y_1}$$

于是反射光线的斜率是

$$\begin{aligned}\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} &= \frac{2\cdot\dfrac{p}{y_1}}{1-\dfrac{p^2}{y_1^2}} \\ &= \frac{2py_1}{y_1^2-p^2} = \frac{2py_1}{2px_1-p^2} = \frac{2y_1}{2x_1-p}\end{aligned}$$

从而，得出反射线方程

$$y-y_1 = \frac{2y_1}{2x_1-p}(x-x_1)$$

令 $y=0$, 得到反射光线与 x 轴交点的横坐标，

$$0-y_1 = \frac{2y_1}{2x_1-p}(x-x_1) \quad\Rightarrow\quad x=\frac{p}{2}$$

即反射线通过焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$. 由于 $P_1(x_1,y_1)$ 是抛物线上任意一点，所以只要入射光线与 x 轴平行，反射光线必通过焦点。如果把光源放在焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ 上，那么从焦点发出的光线经抛物线镜面反射后的反射光线是与对称轴（x 轴）平行的光线。我们常利用这个原理获得平行光。

练习

1. 求下列隐函数在指定点的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

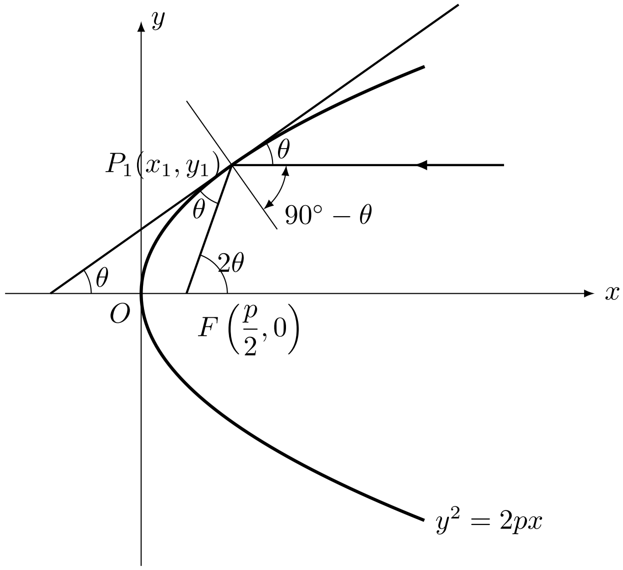


图 2.12

(a) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\sin y$, 点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

(b) $ye^x + \ln y = 1$, 点 $(0, 1)$

(c) $x^2 + xy + y^2 = 1$, 点 $(1, -1)$

(d) $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 9$, 点 $(1, 2)$

2. 求下列隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(b) $y^2 = 8x$

(c) $x^2 = 2y$

(d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

(e) $x^3 + y^3 = a^3$

(f) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

(g) $y - \cos(x + y) = 0$

(h) $y = x + \arctan y$

(i) $y = 1 - \ln(x + y) + e^y$

(j) $\arctan \dfrac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

3. 求下列方程在指定点的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(a) $x - \sqrt{xy} + y = 2$，点 (x_1, y_1)

(b) $(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$，点 (x_0, y_0)

(c) $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 的点；在 $x=y$ 的点；在 $x=-y$ 的点

(d) $x^2+xy+y^2=c^2$，在斜率等于 -1 的点

4. 若 $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=c$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

5. 求椭圆 $x^2+4y^2=9$ 的切线方程，使它和直线 $2x+3y=0$ 平行。

6. 曲线 $y=(x-2)(x-3)(x-4)$ 和 x 轴交于 $P(2,0)$, $Q(3,0)$ 和 $R(4,0)$ 点.

   (a) 求证在 P 点和 R 点处的切线互相平行;

   (b) 求曲线在 Q 点处的法线与 y 轴的交点.

7. 求曲线 $2x^3-xy+8=0$ 上的 P 点，使在该点的切线通过原点，过 P 点的切线与曲线交于另一点 Q 的坐标。

8. (a) 求证直线 $\ell x+my+n=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 抛物线 $y^2=2px$ 相切的条件分别是 $a^2\ell^2+b^2m^2=n^2$, $a^2\ell^2-b^2m^2=n^2$, $pm^2=2n\ell$.

   (b) 证明对于任意 k, 直线 $y=kx+\sqrt{a^2k^2+b^2}$ 是椭圆曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的切线。

9. (a) 求过 $P(5,3)$ 点与椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$ 相切的直线方程.

   (b) 求过 (a) 中的两切点的直线方程.

10. 椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$ 的切线与 x 轴成 60° 角，求该切线的方程。

11. 通过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点而与横轴垂直的弦的两个端点分别记作 A 和 B, 求证过 A、B 两点的切线交于横轴上的点 Q, 且 Q 点离中心的距离等于 $\dfrac{a}{e}$.

12. 求证过双曲线上一点 P 的切线与过 P 点的焦点半径成等角。

六、高阶导数

对于给定的可微函数 $f(x)$, 它的导数 $f'(x)$ 仍是 x 的函数。如果 $f'(x)$ 是可微的, 它的导函数 $(f'(x))' = f''(x)$ 或 $f^{(2)}(x)$ 称为 $f(x)$ 的**二阶导函数**, ⋯⋯ 如此类推, $f(x)$ 的 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$, 可以归纳地定义为:

$$
\begin{aligned}
&f^{(1)}(x) = f'(x)\\
&f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \qquad n = 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

因此，求高阶导函数，实际上就是连续地求一阶导函数。

高阶导函数有时也记作 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x)$. 例如

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\\
f^{(3)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}
\end{aligned}
$$

二阶导数有它的实际意义，例如动点的速度 v 等于它所经过的路程 S 对于时间 t 的变率：$v = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$；而加速度 a 是速度 v 对于时间 t 的变率：$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，这就是说加速度是路程 S 对于时间 t 的二阶导数：$a = \dfrac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}$。在以后的学习中，我们还会知道二阶导数有它的重要的几何意义。我们已经知道一次函数 $f(x) = ax+b$ $(a \neq 0)$ 的图象是一条直线, 而它的二阶导数 $f''(x) = (f'(x))' = (a)' = 0$. 因此，若一函数的二阶导数 $f''(x) \neq 0$, 那么它的图象就不是直线.

例 2.31 设 $y = \dfrac{x}{1-x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.

解:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{-[(1-x)^2]'}{(1-x)^4} = \frac{-2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}\\
\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} &= \frac{-2[(1-x)^3]'}{(1-x)^6} = \frac{2 \cdot 3(1-x)^2(-1)}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}
\end{aligned}
$$

例 2.32 若 $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$，求 $f''(x)$

解： 解法 1:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2+x^2)' \\
&= \frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\sqrt{a^2+x^2}\cdot x' - x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)'}{a^2+x^2} \\
&= \frac{\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} \\
&= \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

解法 2: 将原来的函数变形为隐函数，用隐函数微分法求二阶导数。设 $y=\sqrt{a^2+x^2}$, 则 $y^2=a^2+x^2$, 对 x 微分得:

$$y\cdot y_x = x$$

再对 x 微分得:

$$y\cdot y''_x + (y'_x)^2 = 1$$

将 $y'=\dfrac{x}{y}$ 代入，得

$$y\cdot y''_x + \frac{x^2}{y^2} = 1$$

因此:

$$y''_x = \frac{1-\dfrac{x^2}{y^2}}{y} = \frac{1-\dfrac{x^2}{x^2+a^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例 2.33 若 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$，求证:

$$(x^2+1)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 2\sqrt{x^2+1}$$

证明: 将原式去分母

$$y\sqrt{x^2+1} = x^2$$

对 x 微分得

$$\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 2x$$

两边乘以 $\sqrt{x^2+1}$，得到

$$(x^2+1)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cdot x=2x\sqrt{x^2+1}$$

再对 x 微分得：

$$(x^2+1)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(2x)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{x^2+1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

即：

$$(x^2+1)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{x^2+1}+2y$$

因此：

$$(x^2+1)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=2\sqrt{x^2+1}$$

有时需要求一些函数的 n 阶导数，但是在一般情形下，函数的 n 阶导数是如此的复杂，以致求函数的 n 阶导数的通式是办不到的，然而有一些函数，我们不难写出它的 n 阶导数的通式。

例 2.34 设 $y=(ax+b)^m$, 求 $y^{(n)}$ $(m>n)$

解：

$$\begin{aligned}
y' &= ma(ax+b)^{m-1}\\
y'' &= m(m-1)a^2(ax+b)^{m-2}\\
y^{(3)} &= m(m-1)(m-2)a^3(ax+b)^{m-3}\\
\cdots & \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

由此推知：

$$y^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!}a^n(ax+b)^{m-n}$$

这个结果的正确性可用数学归纳法证明。

例 2.35 设 $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$，求 $y^{(n)}$.

解：

$$y=\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(x-3)^2} - \frac{-1}{(x-1)^2}\right] = \frac{(-1)}{2}\left[\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right]$$
$$y'' = \frac{(-1)}{2}\left[\frac{-2(x-3)}{(x-3)^4} - \frac{-2(x-1)}{(x-1)^4}\right] = \frac{(-1)^2 2!}{2}\left[\frac{1}{(x-3)^3} - \frac{1}{(x-1)^3}\right]$$
$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

假设一般地有：

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

那么：

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{-(n+1)(x-3)^n}{(x-3)^{2(n+1)}} - \frac{-(n+1)(x-1)^n}{(n-1)^{2(n+1)}}\right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2}\left[\frac{1}{(x-3)^{n+2}} - \frac{1}{(x-1)^{n+2}}\right] \end{aligned}$$

即仍有此规律。因此，对于任何自然数 n，都有

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

成立。

例 2.36 设 $y = \sin(ax+b)$，求 $y^{(n)}$.

解：

$$y' = a\cos(ax+b) = a\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$$

因此，求 $\sin(ax+b)$ 的导数是将函数乘以 a，同时将幅角加上 $\frac{\pi}{2}$.

不难推知：

$$y^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

请读者用数学归纳法证明这个猜想正确。

例 2.37 设 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$，$h$ 为任取非零实数，求证：

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

证明： 已给 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$，令 $x = a+h$，并按 h 的升幂展开每一项，得到一个形式如

$$f(a+h) = C_0 + C_1h + C_2h^2 + \cdots + C_nh^n \tag{2.10}$$

的表达式。

我们将说明，系数 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 由 $f(x)$ 在点 a 的函数值 $f(a)$ 以及直到 n 阶为止的各阶导数在 $x=a$ 的值表示，即

$$C_0 = f(a), \quad C_i = \frac{1}{i!}f'(a), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

为了证明这个事实，(2.10) 中把 h 看作自变量，首先令 $h \to 0$, 立刻得到

$$f(a) = C_0$$

然后，应用复合函数求导法则，对方程 (2.10), 关于 h 逐次求导，依次得到：

$$\begin{aligned}
f'(a+h) &= C_1 + 2C_2h + 3C_3h^2 + \cdots + nC_nh^{n-1} \\
f''(a+h) &= 2C_2 + 3\times 2C_3h + \cdots + n(n-1)C_nh^{n-2} \\
f^{(3)}(a+h) &= 3!C_3 + \frac{4!}{1!}C_4h + \frac{5!}{2!}C_5x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-3)!}C_nh^{n-3} \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
f^{(i)}(a+h) &= i!C_i + \frac{(i+1)!}{1!}C_{i+1}h + \cdots + \frac{n!}{(n-i)!}C_nh^{n-i} \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
f^{(n-1)}(a+h) &= (n-1)!C_{n-1} + n!C_nh \\
f^{(n)}(a+h) &= n!C_n
\end{aligned}$$

把 $h=0$ 代入上面一个方程中，便得到

$$C_1 = f^{(1)}(a), C_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2!}, C_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}, \ldots, C_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}, \ldots, C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

把上面 $C_0 = f(a)$, $C_i = \dfrac{f^{(i)}(a)}{i!}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$ 代入 (2.10) 中，最后得到：

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n \tag{2.11}$$

这个公式叫做多项式的泰勒公式。

在 (2.11) 中，令 $a+h=x$, 则 (2.11) 可以改写成

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

练习

1. 求下列函数的 n 阶导数:

(a) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$　　(b) $f(x)=\sin^2 x$

2. 若 $y=\tan(m\cdot\arctan x)$，验证

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2(my-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

3. 若 $y=\dfrac{A\cos mx+B\sin mx}{x^n}$，其中 A,B,m,n 是常数，验证

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{n}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[\frac{n(n-1)}{x^2}+m^2\right]y=0$$

4. 若 $h(x)=f(x)g(x)$，其中 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是 n 阶可微，求证:

$$\begin{aligned}h^{(n)}(x)=f(x)\cdot g^{(n)}(x)&+C_n^1f^{(1)}(x)g^{(n-1)}(x)+\cdots\\&+C_n^hf^{(h)}(x)g^{(n-h)}(x)+\cdots\\&+C_n^{n-1}f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x)+C_n^nf^{(n)}(x)g(x)\end{aligned}$$

5. 求下列函数的 n 阶导数:

(a) $f(x)=x\ln x$

(b) $f(x)=xe^x$

(c) $f(x)=e^{ax}\sin\beta x$

6. 证明 $x^3-7x^2+15x-9=0$ 有一个二重根.

7. 检验方程 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 有无重根?

8. 方程 $x^4-6x^2-8x-3=0$ 有重根，解此方程.

9. 应用泰勒公式将多项式 $(x+a)^n$ 按 x 的升幂展开.

10. 若 $f(x)=x^3-3kx+2k+8$ 在实数范围内能分解成一个二重因式，试求 k 值和它的因式乘积。

七、参数方程表示的函数的导数

用方程 $y=f(x)$ 来表示曲线在几何上受很大的限制：这样表示的曲线与平行于 y 轴的任意直线相交不能多于一点。通常，把曲线分成可以表为 $y=f(x)$ 的若干部分来克服这个限制，例如，以原点为中心，r 为半径的圆，可以由定义在闭区间 $[-r,r]$ 上的两个函数 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 给出。

曲线最直接和最灵活的描述法是参数表示。我们不把直角坐标 x 或 y 中的一个看成另一个的函数，而把两个坐标 x 和 y 都看成为第三个自变量 t 的函数，t 叫做**参数**或**参变量**。当 t 在 t 轴上或 t 轴上的一个区间 $[a,b]$ 变化时，由 t 轴上的原象点，通过参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 映射到曲线 C 上的一点 $(x,y)=(\varphi(t),\psi(t))$，使得对应于 t 的某个区间 $[a,b]$ 或 $(-\infty,\infty)$，一对函数值 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 定义的点集

$$\Big\{\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\Big|t\in[a,b]\Big\}$$

就是曲线 C 上的全部点，而且没有其它点。

在解析几何中，我们已经知道：

圆的参数方程是

$$x=a\cos t,\qquad y=a\sin t$$

这里 t 表示圆心角。

椭圆的参数方程是

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t\quad(a>b>0)$$

这里 t 是偏心角.（图 2.13）

曲线 C 可以有许多参数表示法，就好象同一条路可以有许多不同走法，例如抛物线 $y^2=2px$ 可以用在其上的点 (x,y) 的切线的斜率作参数，由于 $2yy'=2p$，所以抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程是

$$x=\frac{p}{2(y')^2},\qquad y=\frac{p}{y'}$$

其中 $y'\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

如果用 $\dfrac{1}{y'}=\cot\theta$ 作参数，那么它的参数方程是

$$x=\frac{p}{2}\cot^2\theta,\qquad y=p\cot\theta$$

我们也可以用 $\dfrac{y}{2p}=\dfrac{x}{y}=\lambda,\quad \lambda\in(-\infty,\infty)$ 作参数，于是又得一参数方程

$$x=2p\lambda^2,\qquad y=2p\lambda$$

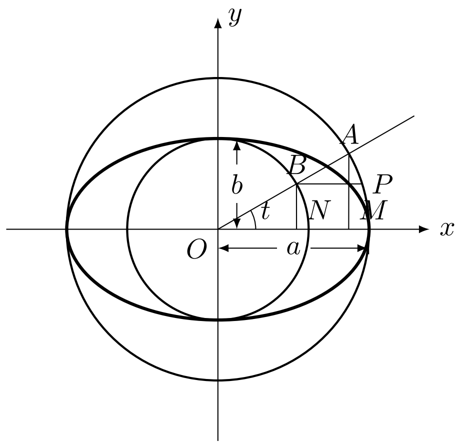


图 2.13

例 2.38 讨论由参数方程

$$x=\sin t,\qquad y=\cos^2 t,\quad t\in[0,2\pi]$$

所定义的曲线 C.

解： 因为 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$，所以曲线 C 在抛物线

$$x^2+y=1 \tag{2.12}$$

上。反过来，抛物线 (2.12) 并不与曲线 C 一致，我们要说明限制在长方形区域 $R=\{-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ 内的抛物线 (2.12) 上的部分是曲线 C（图 2.14）。

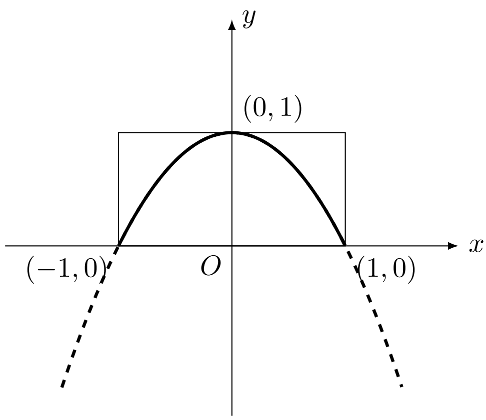


图 2.14

事实上，$x=\sin t$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上处处连续，且在闭区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上由 1 单调递减到 -1，因此根据反函数存在定理，对于每一个 $x\in[-1,1]$，存在唯一的一个 t，使得 $\sin t=x$ 成立，从而得到

$$y=1-x^2=1-\sin^2 t=\cos^2 t\in[0,1]$$

这就说明了，点 $(x,1-x^2)$ $(x\in[-1,1])$ 在曲线 C 上，而且只有这些点在曲线 C 上，换言之，在 (2.12) 上的除去这些点的其它任何一点不在曲线 C 上。

在参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 中，由于 t 轴是有序的，我们可以用明显的方式把曲线 C 的点规定一个次序或“指向”，即如果 $t_1<t_2$，那么由 t_1 映射的点在由 t_2 映射的点的前面。例如例 2.38 的曲线上的动点 P 随着 t 增加的方向这样运动：P 点在 $t=0$ 时，由点 $(0,1)$ 开始移动到在 $t=\frac{\pi}{2}$ 时的 $(1,0)$ 点，然后沿原路线返回移动到 $t=\pi$ 时的 $(0,1)$ 点，再继续移动到在 $t=\frac{3\pi}{2}$ 时的 $(-1,0)$ 点，最后又返回到在 $t=2\pi$ 时的 $(0,1)$ 点.

如果函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 的定义域是 t 轴上的闭区间 $[a,b]$, 而且在这区间上的 t 的不同值对应曲线 C 上不同的点，那么我们称 C 为**简单弧**，例 2.38 中的抛物线，由上面知道不是简单弧，而抛物线 $x=t$, $y=t^2$, $t\in[0,1]$ 是简单弧的一个例子。

如果曲线 C 上的始点 $P(\varphi(a),\psi(a))$ 与终点 $P(\varphi(b),\psi(b))$ 相同，并且除 $t=a$ 和 $t=b$ 外，在 $[a,b]$ 上没有另外一对不同值对应曲线上同一点，那么曲线 C 叫做**简单闭曲线**。$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $t\in[-\pi,\pi]$ 就是简单的闭曲线。

有时我们使用 $y=f(x)$ 表示曲线 C 或 C 的一部分是方便的，如果 C 用参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 给出，而对于曲线的一部分 $t_2\leq t\leq t_1$, 函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 中的一个, 譬如说 $x=\varphi(t)$ 是单调的和连续的, 那么这样的表示法总是可能的，办法是先由 $x=\varphi(t)$ 解出它的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 再代入 $y=\psi(t)$ 中，便得到

$$y=\psi\left(\varphi^{-1}(t)\right)=f(x)$$

即 $y=f(x)$ 是由 $y=\psi(t)$ 和 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的复合函数。

要求曲线 C 的斜率，我们不必重新建立 y 对 x 的函数关系 $y=f(x)$, 再去求导，只须由方程组

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\tag{2.13}$$

当 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\neq 0$ 时，按照复合函数求导法则可以直接得到 $f'(x)$.

事实上，当 $\varphi'(t) \neq 0$ 时，$t = \varphi^{-1}(x)$ 的导数存在，并且是 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$.

按照复合函数求导法则，得到

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

于是，当 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \neq 0$ 时，就得到曲线 C 的斜率:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{2.14}$$

当 $\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \neq 0$ 时，就得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \tag{2.15}$$

因此，只要 $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$, 切线总是存在的：如果 $\psi'(t) = 0$, 切线是水平的；如果 $\varphi'(t) = 0$, 切线是垂直的。

当曲线由参数方程组 (2.13) 给出，那么曲线上点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$(y - y_0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - (x - x_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.16}$$

法线的斜率是 $-\dfrac{1}{y'_x}$，因此法线方程为

$$(x - x_0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (y - y_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.17}$$

例 2.39 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ 在点 t 的切线方程和法线方程。

解： 椭圆在点 t 的切线方程，按照 (2.16) 得到

$$(y - b\sin t)(-a\sin t) - (x - a\cos t)(b\cos t) = 0$$

化简得

$$y(-a\sin t) - x(b\cos t) + ab = 0$$

两边除以 $-ab$, 得到在点 t 的切线方程

$$\frac{x}{a}\cos t + \frac{y}{b}\sin t = 1$$

在点 t 的法线方程，按照 (2.17) 得到

$$(x - a\cos t)(-a\sin t) + (y - b\sin t)(b\cos t) = 0$$

化简得

$$-ax\sin t+by\cos t+(a^2-b^2)\sin t\cdot\cos t=0$$

或

$$xa\sin t-yb\cos t-\frac{c^2}{2}\sin 2t=0$$

例 2.40 求曲线 $\begin{cases}x=t^2\\y=t^3\end{cases}$ 在点 t 的切线方程，并求此切线与曲线的另一交点的坐标.

解： 在点 t 的切线方程是

$$(y-t^3)(2t)-(x-t^2)(3t^2)=0$$

若 $t\neq 0$, 则得切线方程

$$2y-3tx+t^3=0$$

设此切线与曲线交于 (T^2,T^3) 点，于是数 T 满足等式

$$2T^3-3tT^2+t^3=0$$

这是 T 的三次方程，它表示切线与曲线相交于三个点，由于切点的 t 值是它的二重根，根据根和系数的关系，得

$$2t+T=-(-3t)\quad\Rightarrow\quad T=-\frac{1}{2}t$$

故切线与曲线的另一交点的坐标是 $\left(\frac{1}{4}t^2,-\frac{1}{6}t^3\right)$

如果再假定 $\varphi''(t)$，$\psi''(t)$ 存在，则 y 对 x 的二阶导数可按照复合函数求导法及商的导数法来求：

$$\begin{aligned}y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left\{\varphi'(t)\right\}^3}\end{aligned}$$

练习

1. 设 $x=\dfrac{1}{2}p\lambda^2$, $y=p\lambda$ 是抛物线以 λ 为参数的方程，求在点 λ 的切线方程和法线方程。

2. 过点 (x_0,y_0) 作抛物线 $y^2=2px$ 的两条切线，设切点的参数为 λ_1 和 λ_2, 求证
$$\begin{cases} p(\lambda_1+\lambda_2)=2y_0 \\ p_1\lambda_1\lambda_2=2x_0 \end{cases}$$

3. 过抛物线 $y^2=2px$ 的定长为 c 的弦的两端作切线，求切线交点的轨迹方程。

4. 求曲线 $\begin{cases} x=t(1-t^2) \\ y=1+t^2 \end{cases}$ 在点 t 的切线方程。

5. 曲线 $y^2=x^3$ 上点 $P(t^2,t^3)$ 的切线交 x 轴于 T 点，过 T 点与 PT 垂直的直线交 y 轴于 N 点，求证 $\dfrac{ON^2}{OT}$ 是一个与 t 无关的常数，这里 O 是原点。

6. 如果曲线 $ay^2=x^3$ 上 $P(at^2,at^3)$ 点的切线交曲线于另一点 Q, 交 y 轴于 R 点，

   (a) 求 Q 点坐标；

   (b) 如果由点 P 引 x 轴的垂线的垂足为 N 点，求证：OQ 和 RN 的斜率的绝对值相等。

7. (a) 求以 a 为参数的抛物线系
$$y+\frac{35}{16}a=\frac{a^3}{3}\left(x+\frac{3}{4a}\right)^2$$
   的顶点的轨迹方程。

   (b) 证明对应于参数 a 的抛物线与双曲线 $xy=-\dfrac{7}{6}$ 相切于点 $\left(\dfrac{1}{a},-\dfrac{7a}{6}\right)$，又与双曲线 $xy=\dfrac{10}{3}$, 相切于点 $\left(-\dfrac{2}{a},-\dfrac{5}{3}a\right)$.

8. 试证曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ 的每条法线都与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切

9. 若 $x=\sec\theta$ 和 $y=2\tan\theta$,

(a) 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 以 θ 表示之;

(b) 求证: $y^3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+16=0$

10. 求证过椭圆 $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ 上两点 φ_1、φ_2 的切线的交点的坐标为 $\left(a\dfrac{\cos\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}{\cos\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}, b\dfrac{\sin\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}{\cos\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\right)$

八、微分与变率（微商）

(一) 微分的概念

当函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 在点 x_0 处得到一个微小的改变量 $\Delta x=x-x_0$ 时，函数 y 的值得到相应的改变量，即

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \tag{2.18}$$

函数的改变量 Δy 最能表现函数的特征，无论函数变化的大小，或者是函数在某一点的递增或递减的变化趋势，都是由它来刻画的。

从数的观点来看，一个变量就是一个可以取很多不同的值的符号，所以我们也可以把 Δx 看成一个新变量，这样 Δy 就是 x_0 和 Δx 这两个变量的函数。如

例 2.41 设 $y=x^3$，那么

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

例 2.42 设 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$，那么

$$\begin{aligned}\Delta y&=\left[(x+\Delta x)^2-\frac{1}{x+\Delta x}\right]-\left[x^2-\frac{1}{x}\right]\\&=2x\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}\end{aligned}$$

从上面的例子看出，通常 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是一个很复杂的关系，但是如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在变率 $f'(x_0)$, 我们可以把 Δy 分解成一个的线性部分和一个比 Δx 变小得更快的微量部分. 事实上

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.19}$$

我们用 $\varepsilon(x_0,\Delta x)$ 表示 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 与 $f'(x_0)$ 的差，那么，我们可以写出

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\varepsilon(x_0,\Delta x) \tag{2.20}$$

这里因为 (2.19)，而有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\varepsilon(x_0,\Delta x)=0$.

将 (2.20) 的两边乘以 Δx，我们得到

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\Delta x\cdot\varepsilon(x_0,\Delta x) \tag{2.21}$$

这个等式右边的第一项是与 Δx 成比例的量，其比例常数是 $f(x)$ 在点 x_0 的变率 $f'(x_0)$, 而第二项 $\varepsilon(x_0,\Delta x)\Delta x$ 和 Δx 比较起来，当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\varepsilon(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x|$ 就更小，从极限的观点来看，就是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(x_0,\Delta x)=0$$

这也就是说，$\varepsilon(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x$ 比 Δx 变小得更快．因此，若 $f'(x_0)\neq 0$, (2.21) 中的线性部分 $f'(x_0)\Delta x$, 当 $|\Delta x|$ 很小时就是函数改变量 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的很好的近似值，它的误差等于 $\varepsilon(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x$, 由于这个与 Δx 成比例的部分是 Δy 的**主要部分**，我们把 $f'(x_0)\Delta x$ 叫做函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**微分**。

定义

设函数 $y=f(x)$ 是可微的，我们称 $f'(x)\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处与自变量的改变量 Δx 相对应的微分，记作 $\mathrm{d}y$, 于是

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x \tag{2.22}$$

因为函数 $f(x)=x$ 的导数等于 1, 所以对于任何 x 来说，微分 $\mathrm{d}f(x)$ 便等于 $\mathrm{d}x=(x')\Delta x=\Delta x$. 因此，习惯上，常以 $\mathrm{d}x$ 代替 Δx, 于是 (2.22) 就可以写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.23}$$

从而

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

即变率等于微分的商，这也就是称变率（导数）为微商的根据。

下面我们用前面的例 2.41 和例 2.42 将 $\mathrm{d}y$ 和 Δy 的值作个比较。

例 2.43

$$y=x^3,\qquad \mathrm{d}y=3x^2\,\mathrm{d}x,\qquad \Delta y=3x^2\,\mathrm{d}x+(3x+\,\mathrm{d}x)(\,\mathrm{d}x)^2$$

当 $x=1$ 时，$\mathrm{d}y=3\,\mathrm{d}x$, $\Delta y=3\,\mathrm{d}x+(3+\,\mathrm{d}x)(\,\mathrm{d}x)^2$.

$\mathrm{d}x$	10	1	0.1	0.01	$\cdots$
$\mathrm{d}y$	30	3	0.3	0.03	$\cdots$
Δy	1330	7	0.331	0.030301	$\cdots$

我们注意到 $|\mathrm{d}x|$ 愈小，$\mathrm{d}y$ 与 Δy 的值愈靠近，而且 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 的差的绝对值比 $\mathrm{d}x$ 的绝对值变小得更快。

例 2.44

$$f(x)=x^2-\frac{1}{x},\qquad \mathrm{d}f(x)=f'(x)\,\mathrm{d}x=\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Delta y=2x\,\mathrm{d}x+(\mathrm{d}x)^2+\frac{\mathrm{d}x}{x(x+\mathrm{d}x)}$$

令 $x=2$，则 $\mathrm{d}y=4.25\,\mathrm{d}x$, $\Delta y=\left[4+\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2(2+\mathrm{d}x)}\right]\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}x$	1	0.5	0.1	0.01	$\cdots$
$\mathrm{d}y$	4.25	2.13	0.425	0.0425	$\cdots$
Δy	5.17	2.35	0.434	0.0426	$\cdots$

上面的例子验证了我们在前面讨论的结论：当自变量的改变量 Δx 很小时，可以用微分 $\mathrm{d}y$ 来近似地代替函数改变量 Δy.

例 2.45 半径为 r 的金属圆片加热膨胀，求当半径从 r 变到 $r+\Delta r$ 时，圆面积 S 变化大小和此时圆面积 S 与 Δr 相应的微分 $\mathrm{d}S$, 并试用几何图形解释所得的结果。

解： 已知圆面积 $S=\pi r^2$, 设 ΔS 是半径从 r 变到 $r+\Delta r$ 时圆面积改变量，即圆环的面积（图 2.15），则

$$\begin{aligned}\Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2&=\pi\left[2r\Delta r+(\Delta r)^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[2\pi r+2\pi(r+\Delta r)\right]\Delta r\end{aligned}$$

此时，$\mathrm{d}S=2\pi r\Delta r$.

把圆沿半径剖开，把圆周拉直，圆环就“变成”一个梯形，它的两个底边长分别是 $2\pi r$, $2\pi(r+\Delta r)$, 高为 Δr（图 2.16），其中的矩形面积就是微分 $\mathrm{d}S=2\pi r\cdot\Delta r$, 它表示圆面积 S 在从 r 到 $r+\Delta r$ 的整段变化过程中都以同一瞬时变率 $(\pi r^2)'=2\pi r$ 作匀速变化所产生的面积增量. 图 2.16 中的两个小直角三角形的面积表示 ΔS 与 $\mathrm{d}S$ 的误差，即

$$\Delta S-\mathrm{d}S=\pi(\Delta r)^2$$

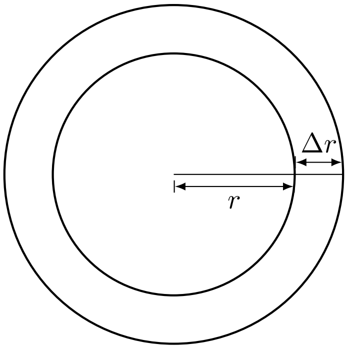


图 2.15

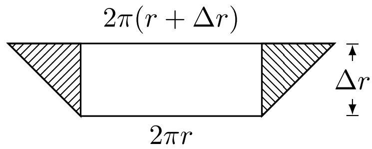


图 2.16

它比 $|\Delta r|$ 更快地变小，即

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta S-\mathrm{d}S}{\Delta r}=\lim_{\Delta r\to 0}\pi(\Delta r)=0$$

（二）微分的几何意义

从几何的观点来说，变率的根本想法就是以直代曲，即以在点 x_0 处的切线 $y=f(x_0)\ f'(x_0)(x-x_0)$ 来逼近曲线 $y=f(x)$ 的微段。因此，$f'(x_0)\Delta x$ 的几何意义可以从图 2.17 看出.

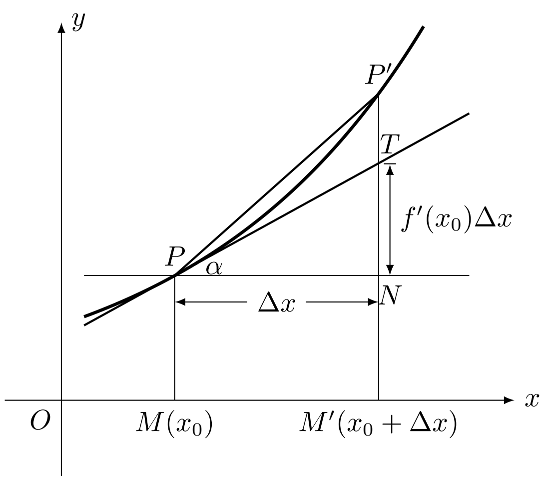


图 2.17

在直角三角形 TPN 中，$PN=\Delta x, \tan\alpha=f'(x_0)$, 故

$$NT=PN\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0)=f'(x_0)\Delta x$$

也就是切线函数 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 的相应改变量。至于函数的改变量则是曲线 $y = f(x)$ 本身的纵坐标在这一段的改变量，在图 2.17 中用线段 NP' 来代表。所以 $f(x)$ 相应于这一段的微分就是以曲线的切线改变量代替函数的改变量. 从图 2.17 可以看出，当 $|\Delta x|$ 减小时，TP' 跟着减小，但 TP' 比 $|\Delta x|$ 要变小得更快。

回顾上面的讨论，微分的意义是，当 $|\Delta x|$ 充分小时，曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 的切线

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

的改变量 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x - x_0)$，就是相应于函数改变量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 的微分，它可以近似地表达函数改变量，而差是一个比 $|\Delta x| = |x - x_0|$ 变小得更快的微量。因此我们得到

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y \qquad \text{或} \qquad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

上式可改写为

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

可见 $f(x)$ 在 $x_0 + \Delta x$ 点的函数值，可以通过它在 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 加上一个与 Δx 成正比例的量 $f'(x_0)\Delta x$ 来表达，比例系数就是 f 在点 x_0 的微商。上面的公式常用来作近似计算。

例 2.46 计算 $\sqrt{101}$

解: 设 $y = \sqrt{x}$，令 $x_0 = 100$, $\Delta x = 1$，则

$$\mathrm{d}y = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$$

因此:

$$\sqrt{101} \approx \sqrt{100} + \mathrm{d}y = 10 + 0.05 = 10.05$$

例 2.47 一个立方体形状的盒子，它的设计边长等于 4(dm)，但允许误差为 0.05(dm), 求盒子体积的可能误差。

解: 设盒子的边长由 x 改为 $x + \mathrm{d}x$, 那么盒子体积的改变量是

$$\Delta V = (x + \mathrm{d}x)^3 - x^3$$

但是

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V = 3x^2\,\mathrm{d}x$$

令 $x=4$, $\mathrm{d}x=\pm 0.05$, 那么

$$\mathrm{d}V = 3\times 16\times(\pm 0.05) = \pm 2.4$$

因此，体积的可能误差近似地等于 $\pm 2.4(\mathrm{dm})^3$.

例 2.48 证明当 $|x|$ 很小时，$\ln(1+x)\approx x$.

解： 设 $f(x)=\ln(1+x)$, 令 $x_0=0$, $\Delta x = x$，则

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{1+x_0}\Delta x = x$$

因此：

$$f(x_0+\Delta x) = \ln(1+x) \approx \ln 1 + x = x$$

即：$\ln(1+x)\approx x$

例 2.49 当 $|x|$ 很小时，导出近似公式：$\tan x\approx x$.

解： 设 $f(x)=\tan x$, 令 $x_0=0$, $\Delta x = x$, 则

$$\mathrm{d}f(x) = \sec^2 x_0\,\mathrm{d}x = \sec^2 0\cdot x = 1\cdot x = x$$

因此：

$$f(x_0+\Delta x) = \tan x \approx \tan 0 + x = x$$

即：$\tan x \approx x$.

例 2.50 如图 2.18, 加工锥形工件时，已知工件两头直径分别为 d_1, d_2, 长度为 ℓ, 当斜角 α 很小时，导出近似公式：

$$\alpha = 28.6^\circ \times \frac{d_1-d_2}{\ell}$$

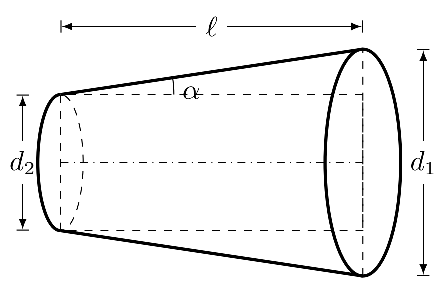


图 2.18

解： 由图：$\tan\alpha = \dfrac{d_1 - d_2}{2\ell}$. 当 α 很小时，根据 $\tan\alpha \approx \alpha$，得到：

$$\alpha \approx \frac{d_1 - d_2}{2\ell}$$

又：1弧度 $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$，因此：

$$\alpha \approx 57.3^\circ \times \frac{d_1 - d_2}{2\ell} \approx 28.6^\circ \times \frac{d_1 - d_2}{\ell}$$

（三）微分的运算

如果函数 $f(x)$ 可微，即导数 $f'(x)$ 存在，求函数的微分只要求出导数再乘以自变量的改变量 Δx 就行了，求已知函数的微分或求导数的方法都叫做微分法。

我们已经知道当 x 是自变量时，$\mathrm{d}x = \Delta x$, 原来的微分表达式 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ 就可以改写为 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, 例如 $(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$. 所以我们可以根据函数的和、积、商的求导数法则得到函数的和、积、商的求微分法则，即

1. $\mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u$
2. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
3. $\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$
4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$

这里只证明最后一个法则，其余请读者自证。

证明：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'\mathrm{d}x &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{v(u'\,\mathrm{d}x) - u(v'\,\mathrm{d}x)}{v^2} \\ &= \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}\end{aligned}$$

现在我们来研究求复合函数的微分法则。

如果 $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, 那么 y 是 t 的复合函数 $y = f(\varphi(t))$, 这时 x 和 y 的微分根据定义都要以 t 为自变量来确定。在这情况下，须注意 $\mathrm{d}x \neq \Delta x$, 比如若 $x = t^2$, 则 $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, 而 $\Delta x = (t + \Delta t)^2 - t^2 = 2t\Delta t + (\Delta t)^2$, 显然 $\mathrm{d}x \neq \Delta x$, 对于复合函数 $y = f(\varphi(t))$ 的微分，我们有下面重要定理。

定理

设 $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$ 都是可微函数，x 是中间变量，那么关系式 $\mathrm{d}y=f(x)\,\mathrm{d}x$ 仍成立。

证明：

$$\mathrm{d}y=[f(\varphi(t))]'\,\mathrm{d}t$$

根据复合函数求导数法则有

$$[f(\varphi(t))]'=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

因此

$$\mathrm{d}y=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

因为 $x=\varphi(t)$，$\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$，最后得到

$$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$$

这个定理是说不论 x 是自变量或是中间变量，函数 $f(x)$ 的微分形式不变，只须注意，若 x 是中间变量，$\mathrm{d}x$ 不是任意增量 Δx, 而是 x 的微分，$\mathrm{d}y$ 不能写成 $f'(x)\Delta x$ 即 $\mathrm{d}y\neq f'(x)\Delta x$, 这个性质叫做**微分不变性**。有了微分不变性，我们在作微分运算时，就无需指明对哪一个变量的微分，而在求函数的变率时，总要指明对中间变量求导数还是对自变量求导数。另外，求复合函数的导数法则用微分符号写出，就是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

它就成为简单的代数恒等式了。

例 2.51　求由方程 $y^3=x^2+xy+y^2$ 确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解： 对等式两边求微分得到

$$3y^2\,\mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x+(x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x)+2y\,\mathrm{d}y$$

移项

$$(3y^2-x-2y)\,\mathrm{d}y=(2x+y)\,\mathrm{d}x$$

最后得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+y}{3y^2-x-2y}$$

例 2.52 求 $\mathrm{d}\sin[\tan(x^2-x+1)]$.

解:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sin\left[\tan\left(x^2-x+1\right)\right]&=\cos\left[\tan\left(x^2-x+1\right)\right]\,\mathrm{d}\tan\left(x^2-x+1\right)\\&=\cos\left[\tan\left(x^2-x+1\right)\right]\cdot\sec^2(x^2-x+1)\cdot\mathrm{d}(x^2-x+1)\\&=\cos\left[\tan\left(x^2-x+1\right)\right]\sec^2(x^2-x+1)\cdot(2x-1)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

（例 2.52 的计算中，将微分符号“d”逐步顺着复合函数的层次从 sin 到 tan 到 x^2-x+1, 由外到里，尤如剥笋。）

练习

1. 边长 4cm 的正方形铁皮，在加热中边长增加了 0.001cm, 求此时刻面积的可能误差 ΔS, 和可能误差的近似值 $\mathrm{d}s$, 又正方形的面积近似值是多少?

2. 半径为 10cm 的球，在冷却中 R 缩短了 0.001cm, 求此时刻体积的微分 $\mathrm{d}V$ 和体积的近似值。

3. 当 $|x|$ 很小时，导出下列近似公式:

   (a) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}$

   (b) $e^x\approx 1+x$

   (c) $(1+x)^n\approx 1+nx$

   (d) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$

   (e) $\sin x\approx x$

   (f) $\arcsin x\approx x$

   (g) $\ln(1+\sin x)\approx x$

4. 计算下列各式的值:

   (a) $\sqrt[3]{1.02}$

   (b) $\sqrt[3]{0.998}$

   (c) $e^{-0.1}$

   (d) $\tan 0.01$

   (e) $\sin 0.1^\circ$

   (f) $\ln 1.0021$

5. 求下列函数的微分:

(a) $y=\dfrac{x+5}{x^2-2}$

(b) $y=\left(\sqrt{1+x^2}\right)^n$

(c) $y=\ln(\sin\sqrt{x})$

(d) $y=\sin^3(\sqrt{x})$

(e) $y=\arcsin\sqrt{2x}$

(f) $y=\arctan(\cos x)$

(g) $y=\sin(\ln x)$

(h) $y=x^n\ln(nx)$

(i) $y=e^x\ln x$

(j) $y=(e^x+e^{-x})^2$

6. 一直圆锥内接于半径等于 R 的球中，球心在直圆锥的内部且到圆锥底面的距离等于 p, 若 p 增加一个微量 x 而球半径 R 不变，求证圆锥体积的增量约等于 $\dfrac{\pi}{3}(R+p)(R-3p)x$.

7. 直圆锥的底面半径为 $r$cm, 高为 $h$cm, 若半径 r 和高 h 分别有一个增量 ρcm 和 λcm, 求证圆锥体积的增量近似地等于 $\left(\dfrac{2\rho}{r}+\dfrac{\lambda}{h}\right)$.

习题 2.2

1. 求下列函数的导函数:

(a) $f(x)=2x^3-3x^3+4x-5$

(b) $f(x)=x^5-6x^2+13$

(c) $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+1}$

(d) $f(x)=\cos mx\sin nx$

(e) $f(x)=[\sin x+\cos x+(x^2+x+1)]^2$

(f) $f(x)=\tan[\sin x+\cos x+(x^2+x+1)]$

(g) $f'(x)=\cot(x^2+1)$

(h) $f(x)=\sqrt{a^2+b^2x^2}$

(i) $f(x)=\sqrt[3]{x^4+x^2+1}$

(j) $f(x)=\cos\left(\sqrt[3]{3x^4+5x^2+6}\right)$

(k) $f(x)=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

(l) $f(x)=x\sin x+\cos x$

(m) $f(x)=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$

(n) $f(x)=x^{\sin x}$

(o) $f(x)=e^{-x^2}\cos\left(e^{-x^2}\right)$

(p) $f(x)=\arctan\sqrt{x^2-2x}$

(q) $f(x)=xe^{1-\cos x}$

(r) $f(x)=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$

(s) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$

(t) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$

(u) $f(x) = x - \ln\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)$

(v) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ (w) $f(x) = \log_a e^{\sin^2 x + 1}$

(x) $f(x) = \ln\tan\dfrac{x}{2} - \cot x \cdot \ln(1 + \sin x) - x$

2. 验证函数 $f(x) = e^x \sin x$ 满足方程

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

3. 验证函数 $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$ 满足方程

$$2[f'(x)]^2 = [f(x) - 1]f''(x)$$

4. P 点在直线上运动，在时刻 t, 点 P 与直线上的定点 O 的距离由方程 $s^2 = a^2 + V^2t^2$ 给出，其中 a 和 V 是常量，试用 s 表示 P 点在时刻 t 的速度和加速度。

5. 在 xy 平面上，求通过点 $P(-3, 6)$ 且与曲线 $y = x^3 - 5x^2 + x + 5$ 相切，并且切点的横坐标满足 $x \geq 0$ 的切线方程。

6. 求证方程 $16x^4 - 24x^2 + 16x - 3 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有一个三重根，又在 $(-2, -1)$ 内有一个单根.

7. 设三次函数 $y = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ （其中 a, b, c 是常数）。

   (a) 该曲线与直线 $y = 2x - 1$ 切于点 $(2, 3)$, 试用 a 的式子表示 b, c;

   (b) 另外，该曲线还与 $y = 2x + 3$ 相切，试确定 a, b, c 的值。

8. 在中午十二点整，甲船以 6 公里/小时的速率向东行，乙船在甲船之北 16 公里，以 8 公里/小时的速率向南行，在下午一点整两船相近之速率为多少？在下午两点整两船相离之速率是多少?

9. 已知圆心为 O, 半径为 1 的圆与直线 ℓ 相切于点 A, 一动点 P 自切点 A 沿直线 ℓ 向右移动时，取弧 $\widehat{AC}$ 的长为 $\dfrac{2}{3}AP$，直线 PC 与直线 AO 交于点 M(图 2.19), 又知当 $AP = \dfrac{3\pi}{4}$ 时，点 P 的速率为 v, 求这时 M 点的速率。

10. 溶液自深 18cm, 顶直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中, 开始时漏斗中盛满了水, 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其水平面下落速率为 1cm/s, 问此时圆柱形筒中水平面上升之速率为多少?

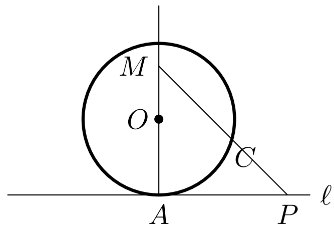


图 2.19

11. 求曲线 $y = \arctan \ln x$ 与 x 轴的交角。

12. 设质点 P 在时刻 t 的位移方程是

$$x = \frac{58}{240} + A\cos\left(\sqrt{24}gt + \alpha\right)$$

其中 A, α 是待定常数，$g \approx 9.8\text{m/s}$，且知当 $t = 0$ 时，$x = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$，求 A 和 α.

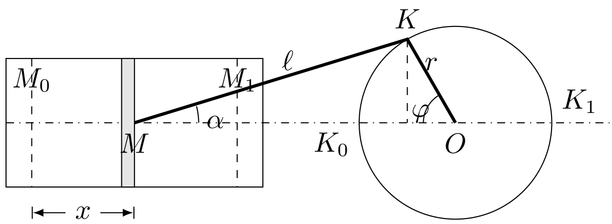


图 2.20

13. 图 2.20 表示曲柄机构装置的图样，连接杆 MK 的长 $\ell = 125\text{cm}$, 曲柄 OK 的长 $r = 25\text{cm}$, 连杆与汽缸的轴 OM 成 α 角，曲柄与同一轴成 φ 角。

 (a) 求用 φ 的式子表示活塞 M 的位移 x 的公式；

 (b) 如果 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega$ （ω 是常量），求活塞 M 的速率。

14. 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 上两点作切线，它们在何处相交?

15. 求抛物线 $y^2 = 4ax$ 在点 $(a\lambda^2, 2a\lambda)$ 的切线方程，并求它的两条互相垂直的切线的交点的轨迹方程。

16. (a) 求曲线 $4y^3 = 27x^2$ 在点 $(2t^3, 3t^2)$ 的切线方程；

 (b) 求互相垂直的两条切线的交点的轨迹方程.

17. 计算 $\sqrt{\dfrac{2.037^2-1}{2.037^2+1}}$ 的近似值。

18. 计算 $\cos 151^\circ$ 的近似值.

19. 设 $f(x)=e^{0.1x(1-x)}$, 试计算 $f(1.05)$ 的近似值。

20. 若球体积的相对误差 $\dfrac{\Delta V}{V}=0.01$, 试计算球半径的相对误差 $\dfrac{\Delta R}{R}$ 约等于多少?

第三节 微商运算的初步应用——函数的增减与极值

一、局部极值和中值定理

我们在第一章中曾说明在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数必有最大值和最小值。函数 f 在闭区间 $M=[a,b]$ 上的最大值的大小涉及到两个因素，既依赖于 f, 也依赖于 M.

如图 2.21, 若 $N=[c,d]\subset M=[a,b]$, 则

$$\max_N f\leq\max_M f$$

相应地,

$$\min_N f\geq\min_M f$$

在这两种情形里都可能出现严格不等式（即不带等号的不等式）。

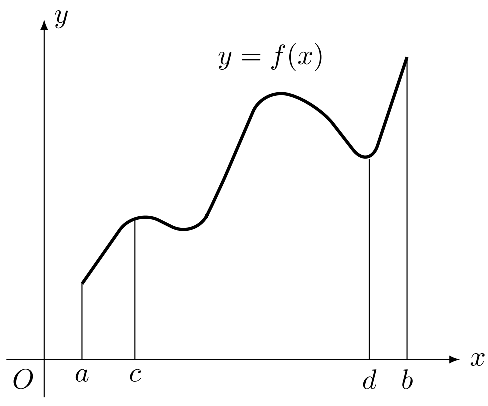


图 2.21

现在我们将阐明一种只决定于 f 的性质的局部极大与极小的概念。

定义

设函数 f 在点 x 的某个 $\delta > 0$ 的邻域，即 $(x-\delta, x+\delta)$ 内有定义，如果对于充分小的 $|\Delta x| < \delta$, 能使 $x + \Delta x \in (x-\delta, x+\delta)$, 而且对于一切 $x' = x + \Delta x \in (x-\delta, x+\delta)$, 都有

$$f(x+\Delta x) \le f(x) \quad \text{或} \quad f(x+\Delta x) \ge f(x)$$

那么函数 f 在点 x 达到局部极大值（或局部极小值）。

费马定理

如果函数 f 在区间 (a, b) 上有定义，并且在这个区间内的一点 c 取局部极大值（或极小值），又若 f 在 c 点可微，那么

$$f'(c) = 0$$

证明: 为确定起见, 设 $f(x)$ 在点 $c \in (a, b)$ 取最大值、于是对于一切点 $x \in (a, b)$, 就有

$$f(x) \le f(c)$$

由导数定义:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

并且极限 $f'(c)$ 的存在与 x 是从右边还是从左边趋向 c 无关。

1. 如果 $x > c$，我们有 $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$，从而

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$$

2. 如果 $x < c$，我们有 $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$，从而

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$$

根据假设 f 在 c 点可微，因此这两个极限必相等，且应等于 $f'(c)$，这表示 $f'(c) \ge 0$ 和 $f'(c) \le 0$, 由此得：$f'(c) = 0$.

f 在 c 点有局部极小值的情形留给读者自证。

罗尔定理

如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微，且在两端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，那么至少存在一个点 c, $c\in(a,b)$，使 $f'(c)=0$.

证明： 如果 f 在 $[a,b]$ 上恒为常数，无疑对于任何 $c\in(a,b)$ 有 $f'(c)=0$. 因此，可设 f 在 $[a,b]$ 中不为常数，此时 f 在 $[a,b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 至少有一个不等于 $f(a)=f(b)$，为确定起见，不妨设 $M\neq f(a)=f(b)$。故 f 在 $[a,b]$ 上的最大值 M 不会在 a 点或 b 点达到，这时根据闭区间上连续函数的性质，在 (a,b) 内至少有一点 c，使 $f(c)=M$，于是，由费马定理，即得 $f'(c)=0$.

本定理的几何意义如图 2.22，曲线 $y=f(x)$ 在 a,b 处有相同高度，如果在点 c 处、曲线达到最高度，并有切线存在，那么，曲线在该处的切线与 x 轴平行。同样，在曲线的最低点处的切线也与 x 轴平行。

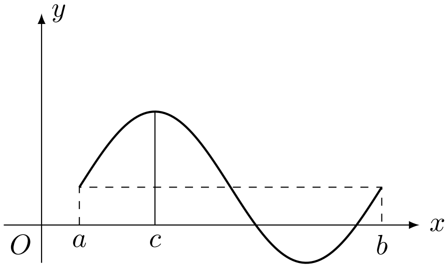


图 2.22

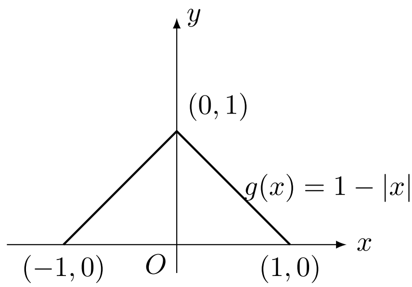


图 2.23

注意： 注意如果罗尔定理中的条件不被满足，结论就不成立. 例如 $g(x)=1-|x|$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且 $g(-1)=g(1)=0$，但在 $x=0$ 处，$g'(x)$ 不存在，对于这个 g，在 $(-1,1)$ 中就没有 c 能使 $g'(c)=0$. 它的图象如图 2.23 所示，

拉格朗日中值定理

如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那么在 (a,b) 内至少有一点 c，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

罗尔定理是拉格朗日定理的特殊情形，我们借助于罗尔定理来证明这个重要的定理。

证明： 我们作一个辅助函数 Φ 使它具有函数 f 的性质：即它在 $[a,b]$ 上连续且

在 (a,b) 内可微，同时满足 $\Phi(a)=\Phi(b)$. 为此，设 $\Phi(x)=f(x)+k(x-a)$, 并由条件 $\Phi(a)=\Phi(b)$ 来决定参数 k.

因为当 $x=a$ 时，有 $\Phi(x)=f(a)$; 当 $x=b$ 时，有 $\Phi(b)=f(b)+k(b-a)$, 所以

$$k=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

这样得到的函数

$$\Phi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

就满足罗尔定理中的所有的条件，由罗尔定理，至少存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $\Phi'(c)=0$, 但

$$\Phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

所以

$$\Phi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

即

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

为了便于应用，拉格朗日定理的结论，通常写成如下形式:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),\qquad a<c<b \tag{2.24}$$

在上式中，令 $b=a+h$，$c=a+\theta h$，$0<\theta<1$，得到中值定理的另一形式:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),\qquad 0<\theta<1 \tag{2.25}$$

中值定理的几何意义如图 2.24 所示. 在闭区间 $[a,b]$ 上有一条连续的曲线，且过曲线 $y=f(x)$ 上每一点（端点除外），都可以作出一条切线，那么在曲线上至少有一点 $M(c,f(c))$, $c\in(a,b)$, 使得过点 M 的切线与弦 AB 平行。

例 2.53　求 $f(x)=1+\dfrac{4}{x}$ 在 $(1,4)$ 内满足中值定理 $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$ 的点 c 的值。

解: 显然 f 在 $[1,4]$ 上连续，又 $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}$, 故 f 在 $(1,4)$ 内可微，根据中值定理，存在点 $c\in(1,4)$, 使得

$$f(4)-f(1)=(4-1)f'(c)$$

成立。

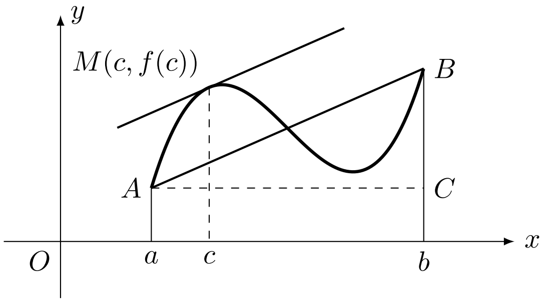


图 2.24

$\because \quad f(4)=2, \quad f(1)=5,$

$\therefore \quad 2-5=3\left(-\dfrac{4}{c^2}\right)$, 即：$c^2=4$，得 $c=\pm 2$.

又 $\because \quad 2\in(1,4), \quad -2\notin(1,4),$

$\therefore \quad c=2$. 于是

$$f(4)-f(1)=(4-1)f'(2)$$

例 2.54 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 求证在 $f'(x)=0$ 的相邻二根之间，至多有 $f(x)=0$ 的一个根.

证明： 因为多项式函数处处连续和可微，所以若在 $f'(x)=0$ 的两相邻实根 x_1,x_2 之间有 $f(x)=0$ 的二实根 α,β $(\alpha<\beta)$, 那么根据罗尔定理，至少存在 $f'(x)=0$ 的一个根 c, 使得 $\alpha<c<\beta$。但是 $(\alpha,\beta)\subset(x_1,x_2)$, 于是 $x_1<c<x_2$, 由此得出矛盾，所以在 $f'(x)=0$ 的相邻两根之间，至多有 $f(x)=0$ 的一个根。

例 2.55 求证不等式 $\dfrac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h$, 对于 $h\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ 成立.

证明： 设 $f(x)=\ln x$, 于是 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. 由于 $\ln x$ 在区间 $[a,b]$, $(0<a<b)$ 上连续且在 (a,b) 内可微，根据中值定理 (a,b) 内存在 c，使得：

$$\ln b-\ln a=\frac{1}{c}(b-a), \quad a<c<b \tag{2.26}$$

若 $h>0$, 令 $a=1$, $b=1+h$, 于是 $c=1+\theta h$, 这样 (2.26) 可写成

$$\ln(1+h)=\frac{h}{1+\theta h}, \quad 0<\theta<1$$

若把上式中的 θ 看作变数，由 0 变到 1，那么 $\ln(1+h)=\dfrac{h}{1+\theta h}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{h}+\theta}$ 便由 h 递减到 $\dfrac{h}{1+h}$，所以

$$h>\ln(1+h)>\frac{h}{1+h},\quad h>0$$

若 $-1<h<0$，令 $a=1+h$，$b=1$，于是 $c=1+\theta h$，这样 (2.26) 可以写成

$$\ln 1-\ln(1+h)=\frac{-h}{1+\theta h}$$

仍得

$$\ln(1+h)=\frac{h}{1+\theta h}$$

同样可证

$$h>\ln(1+h)>\frac{h}{1+h}$$

因此，当 $h>-1$ 且 $h\neq 0$ 时，不等式

$$\frac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h$$

成立。

练习

1. 曲线 $y=x^2$ 上的某点的切线平行于连接横坐标为 a,b 两点的弦，求出此点。
2. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上的某点的切线平行于连接横坐标为 a,b $(0<a<b)$ 两点的弦，求出此点。
3. 若 $\varphi(x)=(x-a)^m(x-b)^n$，验证罗尔定理成立。
4. 用罗尔定理证明，无论 m 为何值，多项式函数 $f_m(x)=x^3-3x+m$ 在 $[0,1]$ 之间至多有一个根.
5. 证明下列不等式：

   (a) $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$

   (b) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{a-b}{b},\quad 0<b<a$

   (c) $\dfrac{h}{1+h^2}<\arctan h<h,\quad h>0$

(d) 若 $0<m<1$，且 $x>1$，则：$\dfrac{m(x-1)}{x^{1-m}}<x^m-1<m(x-1)$

(提示：利用中值定理形式 1，取 $b=x$，$a=1$)

(e) 若 $h>-1$，$h\neq 0$，$n>1$，则：$(1+h)^{\frac{1}{n}}<1+\dfrac{h}{n}$

(f) 若 $h>-1$，$h\neq 0$，则：$1-\dfrac{h}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}<1-\dfrac{h}{2\sqrt{(1+h)^3}}$

6. 说明方程 $3x^5-25x^3+60x-20=0$ 有三个实数根，给出根所在的区间，使每个区间只含一个根。

二、函数的增减与极值——中值定理的应用

(一) 函数的增减性

我们已经学过增函数与减函数的概念，现在要阐明导数的正负与函数的增减的关系。

读者已经知道常量的导数等于零，现在反过来问：如果函数 f 在给定区间上的导数永远是零，那么这个函数在这个区间上就是一个常量？由拉格朗日定理可得到肯定的回答。

定理 1

如果函数 f 在开区间 (a,b) 上的每一点的导数等于零，即 $f'(x)=0$, 那么函数 f 在 (a,b) 上是一个常数.

证明： 我们从区间 (a,b) 中固定某一点 x_0, 再取其它的任何一点 $x\in(a,b)$. 对于区间 $[x_0,x]$ 或 $[x,x_0]$, 函数 f 满足拉格朗日定理条件，因此，我们可以写出

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),\qquad c\in(x_0,x)\text{ 或}(x,x_0)$$

也就是 $c\in(a,b)$, 依已知条件 $f'(c)=0$, 因而对任何一点 $x\in(a,b)$, $f(x)=f(x_0)=$ 常数。

例 2.56 求证：如果 $x>1$，那么 $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$ 成立。

证明： 设 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，因为当 $x>1$ 时，$\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|<1$，

故对于所指定的 x 值的范围，$f(x)$ 有定义，又因为：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2(\arctan x)' + \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{(1+x^2)\cdot 2 - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)} \\
&= 2\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

所以：

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = c\,(\text{常数})$$

另一方面，因为

$$f\left(\sqrt{3}\right) = 2\arctan\sqrt{3} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

因此：

$$2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi, \quad (x > 1)$$

定理 2

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内 $f'(x)\ 0$ (或 $f'(x) < 0$)，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增（或严格递减）。

证明： 设 $a \le x_1 < x_2 \le b$，由于在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日定理的条件，因此，在开区间 (x_1, x_2) 上可以找到点 c，使得

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \quad (x_1 < c < x_2)$$

根据条件，如果在 (a,b) 内，$f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$)，那么 $f'(c) > 0$ (或 $f'(c) < 0$)，从而

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad (\text{或} < 0)$$

因为对于任意 x_1 和 x_2 (其中 $a \le x_1 < x_2 \le b$)，上面不等式成立，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增（或严格递减)。

定理 2 的几何意义是明显的，$f'(x)$ 是函数图象上点 x 处的切线的斜率 $\tan\theta$, 这里 $0 \le \theta \le \pi$. 这斜率的符号指出切线是向上或向下倾斜的，而曲线本身也就随着它向上升或向下降。

如果 $f'(x)$ 在个别的 x 值等于零，其他条件不变，则定理 2 仍然成立，这一点很容易证实，就是把区间 $[a,b]$ 用使 $f'(x)=0$ 的点来分成若干个小区间，再在每个小区间上分别应用定理 2. 图 2.25 和 2.26 表示定理 2 的几何意义.

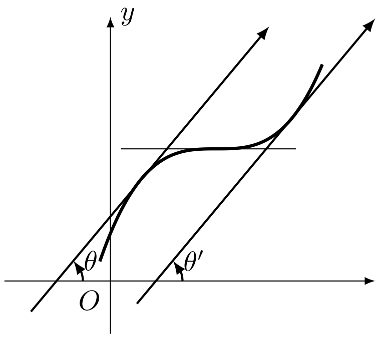


图 2.25

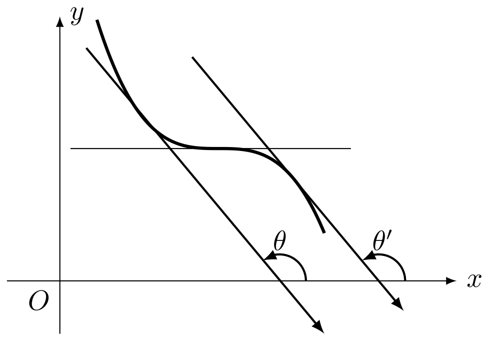


图 2.26

例 2.57 证明 $\tan x > x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

证明: 我们只须证明 $\tan x - x > 0$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$。为此，设 $f(x) = \tan x - x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，因为 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上连续，且在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 $f'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$，依定理 2, $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上递增，所以有

$$f(x) > f(0) = \tan 0 - 0 = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

即：$\tan x - x > 0$，也就是 $\tan x > x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

例 2.58 求证当 $x > 0$ 时，有 $e^x > 1 + \ln(1+x)$.

证明: 设 $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$ $(x > 0)$, 则

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = e^x + \frac{1}{(1+x)^2}$$

显然，当 $x > 0$ 时，$f''(x) > 0$, 又 $f'(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，由定理 2, $f'(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上递增，所以

$$f'(x) > f'(0) = e^0 - \frac{1}{1+0} = 0 \quad (x > 0)$$

又 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 连续，同理 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上递增，所以当 $x>0$ 时，有

$$f(x)>f(0)=e^0-1-\ln(1+0)=0$$

即：

$$e^x-1-\ln(1+x)>0 \quad 或 \quad e^x>1+\ln(1+x)$$

例 2.59 确定 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+5$ 的递增区间和递减区间，并画出这个函数图象的草图。

解：

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

当 $x<1$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$ 内递增；

当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内递减。

图象的 y 截距 $f(0)=5$，为确定图象的 x 截距，根据例 2.54 和连续函数中间值定理，由计算的结果

$$f(-1)=-18, \quad f(1)=10, \quad f(2)=9, \quad f(+\infty)>0$$

得知 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内没有零点，即图象在 $x>1$ 的范围内与 x 轴不相交：由于 $f(x)$ 在 $x<1$ 的区间内递增，并且 $f(-1)\cdot f(0)<0$, 故 $f(x)$ 的图象在 $x<1$ 的范围内与 x 轴只有一个交点，它的横坐标在区间 $(-1,0)$ 内.

把 $f(x)$ 的递增、递减情况列成下表，就更加醒目。

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	10	$\searrow$	9	$\nearrow$

图象的草图如图 2.27.

练习

1. 若 $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^n$，$n>1$，求证 f 是一常数。

2. 若 $f'(x)=g'(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 求证 $f(x)=g(x)+c$.

3. 证明在任何区间内，函数 $x-\sin x$ 是增函数，又 α 为何值，函数 $\alpha x-\sin x$ 是增函数，$\alpha x-\sin x$ 为减函数？

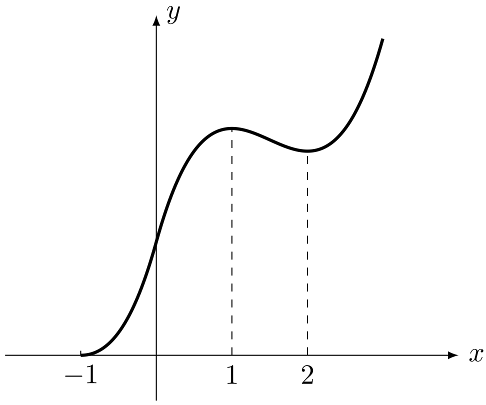


图 2.27

4. 证明 $\dfrac{x}{\sin x}$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 内是增函数.

5. 若 $x > 0$, 求证

   (a) $\cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2 > 0$

   (b) $\sin x - x + \dfrac{1}{6}x^3 > 0$

   (c) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$

6. 证明下列不等式当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时成立:

   (a) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$

   (b) $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{2}{\pi}$

7. 已知 $x + e^x = y + e^y$, 问 $\sin x = \sin y$ 是否为真?

8. 若 $a > b$, 求证 $a^3 - 3a^2 + 3a > b^3 - 3b^2 + 3b$.

9. 设 $f(0) = 0$, 且 f' 在 $[0, +\infty)$ 内递增, 证明 $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内递增.

10. (a) 已知 a, b 为实数, 并且 $e < a < b$, 其中 e 是自然对数的底, 证明: $a^b > b^a$.

    (b) 如果正实数 a, b 满足 $a^b = b^a$, 且 $a < 1$, 则 $a = b$.

11. 证明: 对于所有 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 有不等式 $(\sin x)^{-2} \leq x^{-2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$ 成立。

（二）函数的极大值与极小值

从例 2.59 我们看到 $x=1$ 和 $x=9$ 分别是函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+5$ 取到极大值 $f(1)=10$ 和极小值 $f(2)=9$ 的点，我们称 $x=1$ 为极大点，$x=9$ 为极小点，以后，极大值与极小值统称为**极值**，极大点与极小点统称为**极值点**。

下面我们来讨论如何确定一个函数的极值。

1. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在点 x_0 可微，那么总存在 x_0 的一个邻域，使 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域中满足费马条件，因而必有 $f'(x_0)=0$. 例如例 2.59, $f'(1)=f'(2)=0$.

2. 若 $f(x)$ 在 x_0 不可微，这时 x_0 也可能是极值点，例如，$f(x)=|x|$, 它在 $x_0=0$ 这一点不可微，但从图 2.28 即可看出 $x_0=0$ 是它的极小点.

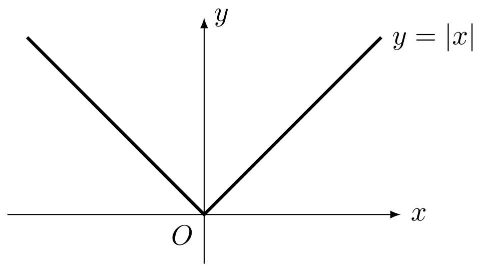


图 2.28

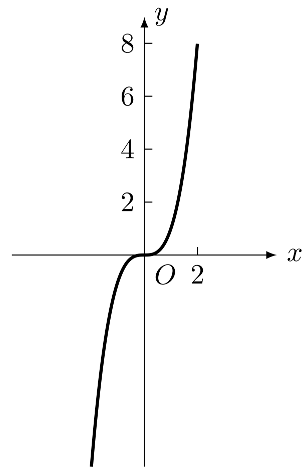


图 2.29

这就告诉我们连续函数的极值点应该从它的导函数 $f'(x)$ 的零点和 $f(x)$ 的不可微点中去找，但是，$f'(x)$ 的零点和 $f(x)$ 的不可微点只是 $f(x)$ 可能达到极值的点，并不一定是极值点，例如 $f(x)=x^3$, $x=0$ 是 $f'(x)=3x^2$ 的零点，然而在整个区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，$f'(x)\geq 0$, 而且只在 $x=0$ 时，$f'(x)=0$, 即函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增，因而 $x=0$ 不是极值点，它的图象如图 2.29, 在 y 轴的左侧，图象位于切线 $y=0$ 的下方；而在 y 轴的右侧，图象位于切线 $y=0$ 的上方，我们把方程 $f'(x)=0$ 的根称为函数 $f(x)$ 的**驻点**。

又如函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x-1), & x\in[1,2]\\ \dfrac{3}{2}(x-2)+\dfrac{1}{2}(2-1), & x\in[2,3]\\ (x-3)+\dfrac{1}{2}(2-1)+\dfrac{3}{2}(3-2), & x\in[3,4]\end{cases}$$

的图象是折线，如图 2.30, 易知

$$g'(x)>0,\quad x\in(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)$$

但 $g'(2)$ 和 $g'(3)$ 不存在，由于 $g(x)$ 在 $[1,4]$ 上严格递增，所以 $x=2$, $x=3$ 都不是极值点.

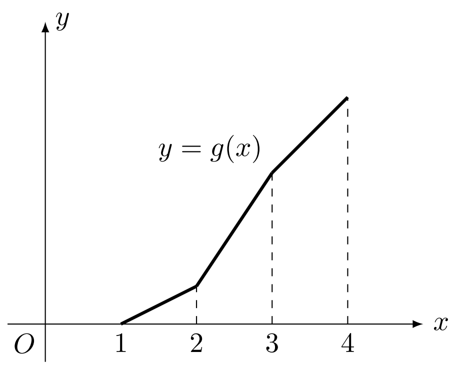


图 2.30

综上讨论，我们得到函数 f 取极值的必要条件：

定理 1（极值的必要条件）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，x_0 是 $f(x)$ 的极值点，那么 x_0 只可能是 $f'(x)$ 的零点或 $f(x)$ 的不可微点。

下面给出极值点的两个充分性判别法。

定理 2

如果函数 f 在 x_0 的邻域内连续，并且在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 可微：

- 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内，$f'(x)<0$ (>0);
- 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内，$f'(x)>0$ (<0);

那么，x_0 是 f 的局部极小点（极大点）。

证明： 按照前一节中定理 2, f 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内严格递减(递增), 而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内严格递增（递减），故 $f(x_0)$ 必为极小值（极大值）。

注意： 这个定理并不要求函数 f 在点 x_0 处存在导数，如果导数存在，那么根据费马定理，它等于零。

例 2.60 讨论 $y=\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$ 的极值，并绘出图象的草图。

解： 将 $y=\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$ 的两边立方，得

$$\begin{aligned} y^3 &= (x-1)(x+2)^2 \\ 3y^2\cdot y' &= (x+2)^2+(x-1)\cdot 2\cdot(x+2) \\ &= (x+2)[x+2+2(x-1)] \\ &= 3x(x+2) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y'=\frac{x(x+2)}{y^2}=\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)^4}} \text{ 即}$$

$$y'=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}} \quad (x\neq 1,\ x\neq -2)$$

- 当 $x=0$ 时，$y'=0$, 函数图象在点 $x=0$ 处有水平切线；
- 当 $x=-2$ 和 1 时，y' 不存在，但是由 $\lim\limits_{x\to 1} y'=+\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to -2^+} y'=-\infty$, 而 $\lim\limits_{x\to -2^-} y'=+\infty$ 得知函数图象在点 $x=1$ 和 $x=-2$ 处有平行 y 轴的切线，所以函数的可能的极值点是 $x=-2,0,1$ 这三个点.

为确定曲线的 y 截距，令 $x=0$, 得 $y=-\sqrt[3]{4}4\approx-1.59$; 为确定它的 x 截距，令 $y=0$, 得 $x=-2$ 和 $x=1$, 现列表讨论它的增减性与极值如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$-$	0	$+$	不存在	$+$
y	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	0	$\nearrow$
			0		$-\sqrt[3]{4}\approx-1.59$		

函数 $y=\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$ 的图象如图 2.31.

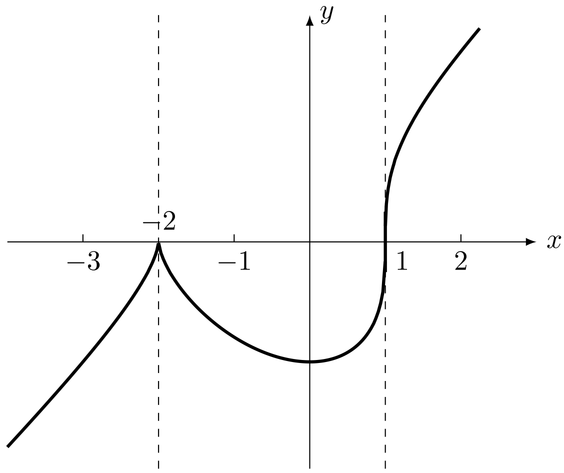


图 2.31

定理 3

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 中有二阶连续的导函数，又 $c \in (a,b)$, 使得 $f'(c) = 0$,

1. 如果 $f''(c) < 0$, 则 c 是 $f(x)$ 的一个极大点。
2. 如果 $f''(c) > 0$, 则 c 是 $f(x)$ 的一个极小点。

证明： 设 $f''(c) < 0$, 由于 $f''(x)$ 的连续性，故存在点 c 的一个 $\delta > 0$ 的邻域 $(c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$, 使得 $f''(x)\ 0$, $x \in (c-\delta, c+\delta)$. 按前节定理 2, $f'(x)$ 在 $(c-\delta, c+\delta)$ 中是递减的，又由于 $f'(c) = 0$, 因此，$f'(x)$ 在点 c 处由正变为负，由前面的定理 2, c 是 $f(x)$ 的极大点。

当 $f''(c) > 0$ 时，同理可证 c 是 $f(x)$ 的一个极小点.

为说明定理 3 的应用，我们求例 2.60 的二阶导函数：

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{y^2(2x+2) - x(x+2)\cdot 2y \cdot y'}{y^4} \\ &= \frac{2[(x+1)y - x(x+2)y']}{y^3} \end{aligned}$$

从例 2.60 知，当 $x = 0$ 时，$y' = 0$. 又 $f(a) = -\sqrt[3]{4}$. 故在 $x = 0$ 处

$$y''_{x=0} = \frac{2\left[(0+1)\left(-\sqrt[3]{4}\right) - 0\right]}{-4} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} > 0$$

由定理 3, $x = 0$ 是函数 $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$ 的极小点.

例 2.61 讨论 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的极值.

解:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c, \qquad y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$\Delta = a^2 - 3b$ 是导函数的判别式. 我们可以分 $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ 和 $\Delta < 0$ 的三种情形讨论 y' 的正负区间。

1. 若 $\Delta > 0$, 则

$$y' = 3x^2 + 2ax + b = 3(x - x_1)(x - x_2)$$

这里 $x_1 = \dfrac{1}{3}\left(-a - \sqrt{a^2 - 3b}\right)$ 和 $x_2 = \dfrac{1}{3}\left(-a + \sqrt{a^2 - 3b}\right)$ 是导函数 y' 的二个实根。

(a) 当 $x \in (-\infty, x) \cup (x_2, +\infty)$ 时，$y' > 0$;

(b) 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时，$y' < 0$

所以，x_1 是 y 的一个极大点，x_2 是 y 的一个极小点.

2. 若 $\Delta = 0$, 则

$$y' = 3x^2 + 2ax + \frac{a^2}{3} = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2$$

这里，y' 虽然在 $-\dfrac{a}{3}$ 处等于 0, 但 y' 在 $-\dfrac{a}{3}$ 的左、右两侧都取正值，即 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 是一个递增函数. 因此，$-\dfrac{a}{3}$ 不是 y 的极值点.

3. 若 $\Delta < 0$, 则对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 恒有

$$y' = 3x^2 + 2ax + b = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{3b - a^2}{3} > 0$$

因此，$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 是一个增函数，也是没有极值点.

练习

1. 先求出 $f'(x)$, 然后由 $f'(x)$ 的正负去讨论 $f(x)$ 的增减与极值，并画出函数图象的草图:

(a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$

(b) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 15$

(c) $f(x) = -x^5 - 5x^4$

(d) $f(x) = (x - 1)^3$

(e) $f(x) = |x^2 - 1|$

(f) $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$

2. 讨论 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 1}$ 的增减和极值，并画函数图象的草图。

3. 求 $f(\theta) = \sin\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的极大值和极小值。

4. (a) 求两条曲线 $y = \dfrac{4e^x + 2e^{-x}}{3}$ 和 $y = e^{-x}$ 的交点的坐标；

   (b) 求函数 $y = \dfrac{4e^x + 2e^{-x}}{3}$ 的极值点，又它在此点取极大值，还是极小值？

5. 讨论函数 $y = x^2 e^{-x^2}$ 的增减与极值。

6. 求 $f(x) = x^x\ (x > 0)$ 的极值，并说明此极值是极大值还是极小值。

7. 求函数 $\dfrac{\ln x}{x}$ 的极大值，

8. 函数 $f(x) = \dfrac{ax + b}{(x-1)(x-4)}$ 在点 $(2, -1)$ 有一极值，求 a, b 并证明此极值是极大值。

9. 证明 $f(x) = \left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha} - x\right)(4 - 3x^2)$ 仅有一个极大值和一个极小值，且它们的差是 $\dfrac{4}{9}\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3$，又此差值的绝对值的最小值是多少？

10. 函数 $f(x) = x(x-1)(x-a)$ 有绝对值相等，符号相反的极大值与极小值，试确定常数 a 的值。

11. 求曲线 $y = e^{-x}\sin x$ 上的极值点，并证明极值点上的纵坐标成等比数列，又该等比数列的公比是多少？

（三）函数的最大值和最小值

在实践中有一类“最大”、“最小”、“最省”的问题，例如生产搪瓷杯时，就要考虑在一定容积下，杯子的高和直径取多大时，用料最省。又如把一根圆木锯成矩形截面横梁时，怎样选取矩形的长和宽才能使横梁强度最大？这类“最大”、“最小”、“最省”等问题，在数学上叫做最大值、最小值问题。

我们曾在第一章中指出过“在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 总是具有最大值和最小值”，但是，微积分并未提供确定函数 $f(x)$ 的最大值、最小值的直

接方法。如果我们讨论的函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有连续的一阶导数，那么只要求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点，即 $f'(x)=0$ 的根，就可以求出 $f(x)$ 的局部极值。显然，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值一定出现在局部极大值、局部极小值和端点值之中，从几何上来说，最大值、最小值如果不是位于定义区间的端点上，则分别是曲线的波峰和波谷. 从图 2.33 可以看到局部极大值可能小于局部极小值。

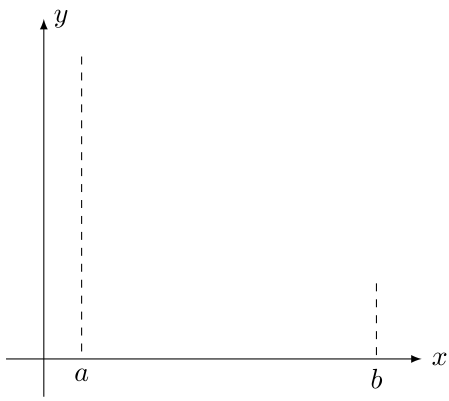


图 2.32

下面给出求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值和最小值的法则，这个法则适用于在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微的函数 $f(x)$, 并且 $f'(x)$ 最多在有限个点上等于零。

1. 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点，即解 $f'(x)=0$;
2. 计算 $f(x)$ 在驻点和端点的函数值，并把这些值加以比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值。

假如 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有一个驻点 c, 且在整个 (a,b) 上，$f''(x)<0\ (>0)$, 那么点 c 是最大值（最小值）点.

事实上，如果 $f''(x)<0,\ x\in(a,b)$, 那么函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减，因而 c 是其唯一的驻点，由中值定理知:

当 $a\le x<c$ 时，$f'(x)-f'(c)=(x-c)\cdot f''(\xi)$，这里 $x<\xi<c$。

$\because\quad f'(c)=0,\quad f''(\xi)<0,\quad x-c<0,$

$\therefore\quad f'(x)>0$

同理说明当 $c<x\le b$ 时，$f'(x)<0$。再根据 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上递增而在 $[c,b]$ 上递减。故当 $x\neq c$ 时有 $f(x)<f(c)$。由此可知 c 是最大值点。当 $f''(x)<0$ 时，也可以进行同样的论证。

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有不可微的点，而且这种点只有有限个，那么求最大值和最小值的法则改为求出三种点的对应函数值再加以比较，即 $f(x)$ 的驻点的函数值，$f(x)$ 的不可微点的函数值，最后还有端点的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$, 这些值中最大的就是最大值，最小的就是最小值。

在实际问题中，如果在 (a,b) 内部，$f(x)$ 只有一个驻点 c, 而且从实际问题本身又可以知道在 (a,b) 内必定有最大值或最小值，那么 $f(c)$ 就是所要求的最大值或最小值，不需要算出 $f(a)$, $f(b)$ 了。

例 2.62 求函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值。

解:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x \\ &= \frac{2}{3}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的驻点是 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 不可微点是 $x=0$, $x=\pm 1$, 且这些点都在 $[-2,2]$ 内，因此 $f(x)$ 的极值点可能是

$$-1,\quad \frac{-1}{\sqrt{2}},\quad 0,\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 1$$

由于 $f(x)$ 是偶函数，故仅需计算

$$f(0)=1,\qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4,\qquad f(1)=1$$

又在端点 $x=2$ 处的函数值 $f(2)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$, 把上面这些函数直相互比较，可见 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 中的最大值为 $\sqrt[3]{4}\approx 1.59$, 最小值为 $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\approx 1.59-1.44\approx 0.15$.

例 2.63 设 $a>0$, 证明 $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x-a|}$ 的最大值是 $\dfrac{2+a}{1+a}$.

证明: 把 $f(x)$ 写成分段函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & 0\le x\le a \\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x-a}, & x>a \end{cases}$$

于是

$$f`(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & 0 \le x \le a \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+x-a)^2}, & x > a \end{cases}$$

因而 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上递增，而在 $[a, +\infty)$ 上递减，由此得知 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上的最大值也就是在 $\mathbb{R}$ 上的最大值。

设对于 $(0, a)$ 内的 x 有 $f'(x) = 0$, 则

$$(1+x)^2 - (1+a-x)^2 = 0$$

上式唯一解是 $x = \dfrac{a}{2}$. 因为 $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{4}{2+a}$, $f(0) = f(a) = \dfrac{2+a}{1+a}$，并且

$$\frac{2+a}{1+a} - \frac{4}{2+a} = \frac{a^2+4a}{(1+a)(2+a)} > 0 \quad (a > 0)$$

所以 $f(x)$ 的最大值是 $\dfrac{2+a}{1+a}$.

例 2.64 用铁皮做体积为 V 的圆柱形封闭容器，如何使材料最省?

解： **解法 1:** 设圆柱形底面半径为 r, 高为 h, 于是需用材料即圆柱表面积

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

但 $V = \pi r^2 h$ 为已知，因此，$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$，从而问题变为求函数 $S(r) = \dfrac{2V}{r} + 2\pi r^2$ $(0 < r < +\infty)$ 的最小值。

根据经验, 当 r 很小时, S 很大, 又当 r 很大时, S 也很大, 因此在 $(0, +\infty)$ 内必有 r 的一个值使 S 最小，即它是 $S'(r) = 0$ 的一个根，由

$$S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$

得唯一正根 $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$。从这个实际问题知道，当 $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时，S 为最小，这时相应的高为

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

这说明圆柱的高和直径相等时，用料最省。

解法 2: 我们可以不先将下面两个式子中的 h 消去，再求 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 0$ 的根

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{2.27}$$

$$\pi r^2 h = V \tag{2.28}$$

而是保留辅助变量 h，将 (2.27), (2.28) 对 r 求导数，只须记着 V 是常量，h 是 r 的函数，于是由 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=0$，得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=2\pi\left(h+r\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}+2r\right)=0 \tag{2.29}$$

由 (2.28) 得

$$\pi\left(2rh+r^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}\right)=0 \tag{2.30}$$

由此得:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}=-\frac{2h}{r}$$

将它代入 (2.29)，得

$$2r\left[h+r\left(-\frac{2h}{r}\right)+2r\right]=0$$

所以: $2r=h$.

同样地说明了圆柱的高和直经相等时，用料最省。

例 2.65 由半径为 ℓ 的圆铁皮，剪去一个扇形，把剩下的部分围成一个圆锥形容器，为了使用所得圆锥容器有最大的容积，问剪去扇形的中心角应该多大?

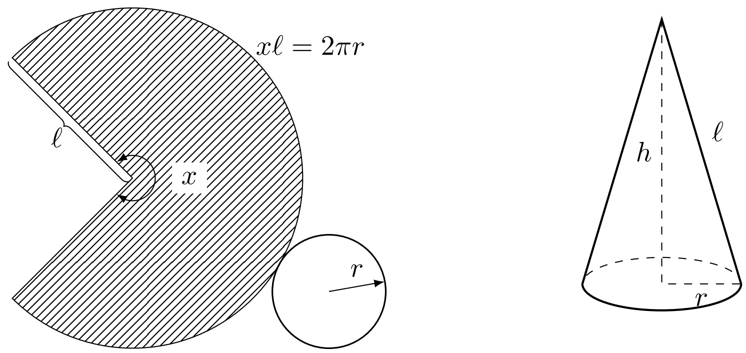


图 2.33

解: 设剪去扇形后，所剩材料的圆心角为 x (弧度)，扇形的弧长为 $x\ell$, 由它围成一个圆锥，其底面半径为 r, 母线长为 ℓ, 高为 h, 如图 2.34. 于是

$$r=\frac{\ell x}{2\pi}$$

圆锥高为

$$h=\sqrt{\ell^2-r^2}=\sqrt{\ell^2-\left(\frac{\ell x}{2\pi}\right)^2}=\frac{\ell}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$$

因此圆锥的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
&= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\ell x}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} \\
&= \frac{\ell^3 x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad (0 \le x \le 2\pi)
\end{aligned}$$

由于 $V(0) = 0, V(2\pi) = 0$, 故在 $(0, 2\pi)$ 内必有一个值 x_0 使 V 的值最大，因而使 $V'(x_0) = 0$. 由于

$$\begin{aligned}
V'(x) &= \frac{\ell^3}{24\pi^2}\left[2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{2}x^2(4\pi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\right] \\
&= \frac{\ell^3}{24\pi^2}\left(\frac{8\pi^2 x - 3x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)
\end{aligned}$$

令 $V'(x) = 0$, 即 $8\pi^2 x - 3x^3 = 0$, 解得

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

这里只有 $x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \in (0, 2\pi)$, 故知 $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ 是 $V(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内的唯一的极大点，因而也是最大点. 于是最后得到结论，剪去扇形的圆心角为

$$2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\pi\left(3 - \sqrt{6}\right) \text{（弧度）}$$

时，才能使所围成的容器有最大的容积。

例 2.66 求证：若 $p > q > 1$，又 $x \ge 0$ 且 $x \ne 1$，则 $\dfrac{x^p - 1}{p} > \dfrac{x^q - 1}{q}$.

证明： 设 $f(x) = \dfrac{x^p - 1}{p} - \dfrac{x^q - 1}{q}$ $(x \ge 0)$，则：

$$f'(x) = x^{p-1} - x^{q-1} = x^{p-1}\left(x^{p-q} - 1\right) \quad (p > q > 1)$$

函数的增、减如下表所示：

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\frac{1}{q} - \frac{1}{p}$	$\searrow$	极小值 0	$\nearrow$

$$\because \quad f(0) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0 = f(1)$$

$\therefore$　$f(1)=0$ 不仅是极小值也是最小值。于是:

$$f(x)=\frac{x^p-1}{p}-\frac{x^q-1}{q}\geq 0 \quad (x\geq 0)$$

因为 $x\neq 1$，所以

$$\frac{x^p-1}{p}>\frac{x^q-1}{q} \quad (x\geq 0,\ x\neq 1)$$

例 2.67（光的折射定律）设有两种介质，$X'X$ 是它们的交界线，光由一种介质中的某点 A 走向另一种介质中的某点 B. 又设当光走过交界线 $X'X$ 时，它的速度由 v_1 变成 v_2. 依据物理学中的一个基本原理 "光由 A 到达 B 时，所采取的途径要使用的时间为最小"，如果两种介质是均匀的 (例如一为空气，一为水)，那么 v_1, v_2 都是常数，从而光在这两种介质中所走的路径是两段直线 AP, PB, P 表示光达到交界线时与这条线的交点，如果 AB 不与 $X'X$ 垂直，一般 APB 不是直线，我们来定出 AP, BP 与 $X'X$ 的法线的夹角 θ_1 和 θ_2 的关系。

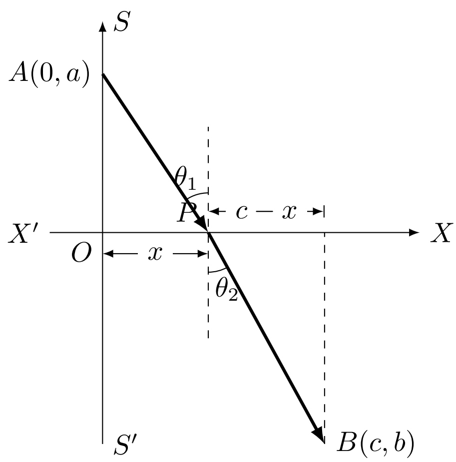


图 2.34

解: 如图 2.35 建立坐标系，A 点坐标是 $(0,a)$, B 点的坐标是 (c,b), 设 P 点的坐标是 $(x,0)$, 光由 A 到 P 所需时间是 $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}$，从 P 到 B 所需时间是 $\dfrac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$, 则整个时间 $t(x)$ 是

$$t(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

为了使 $t(x)$ 极小，应使 $t'(x)=0$, $x\in(0,c)$. 由 $t(x)$ 得

$$t'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

$$\begin{aligned}t''(x)&=\frac{-x^2}{v_1(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{1}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}-\frac{(c-x)^2}{v_2\left[b^2+(c-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{b^2}{v_2\left[b^2+(c-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}>0.\end{aligned}$$

既然 $t'(0)<0$, $t'(c)>0$, 及 t' 是严格递增的，故在 $(0,c)$ 内有唯一的 x_0, 使得

$$t'(x_0)=0$$

从而当 $x=x_0$ 时，$t(x_0)$ 是极小值也是最小值，于是由 $t'(x_0)=0$ 得到

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2+x_0^2}}=\frac{c-x_0}{v_2\sqrt{b^2+(c-x_0)^2}}$$

即

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

这就是光的折射定律。

练习

1. 由 $y=0$, $x=8$, $y=x^2$ 围成一曲边三角形 OAB, 在曲边 $\overset{\frown}{OB}$ 上，求一点使得过此点所作 $y=x^2$ 的切线与 OA、AB 所围成的三角形面积最大。

2. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的内接矩形中怎样的矩形面积最大？又此最大的矩形面积比椭圆的内接正方形的面积大多少？

3. 设 $\triangle ABC$ 是定圆的内接三角形，其中 A、B 两点固定，C 点在圆周上变动，试求其面积最大时的位置。

4. 要做一个底面为长方形的带盖箱子，其体积为 72 立方厘米，其底边成 $1:2$ 的关系，问各边的长怎样，才能使表面积最小？

5. 设有底为等边三角形的直棱柱，体积为 V, 要使其总面积为最小，问底边长应为多少？

6. 设正三棱锥的侧面积为 S, 问当侧面与底面所成角 α 为何值时，其体积最大？

7. 平面上通过一个已知点 $P(1,4)$ 引一条直线，要使它在两个坐标轴上的截距都为正，且它们的和为最小，求这条直线的方程。

8. 直圆柱内接于半径为 R 的球中，当圆柱的高为何值时，其体积最大。

9. 三个点 A, B 和 C 不在同一直线上，$\angle ABC = 60°$, 汽车以 80 公里/小时的速度由 A 向 B 行驶，同时火车以 50 公里/小时的速度由 B 向 C 行驶. 若 $AB = 200$ 公里，问运动开始几小时后汽车与火车的距离最小?

10. 船航行一昼夜的耗费由两部分组成：一为固定部分，设为 a 元；另一为变动部分，设它与速度立方成比例，试问船应以怎样的速度 v 行驶为最经济?

11. 在某种产品的制造过程中，次品率 y 依赖于日产量 x, 即 $y = y(x)$, 已知

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{101-x}, & 0 \leq x \leq 100, \\ 1, & x > 100 \end{cases}$$

其中 x 为正整数。又该厂每生产一件产品可盈利 A 元，但每生产出一件次品就要损失 $\dfrac{A}{3}$ 元。问为了获得最大盈利，该厂的日产量应定为多少?

12. 抛物线 $y = x^2$ 上的哪一点到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离最短?

13. 一弹在空中飞行（不计空气阻力），其弹道方程为

$$y = mx - \frac{(m^2+1)x^2}{800}$$

这里原点取在此弹发射之点，其中 m 为曲线在原点处的切线斜率。

   (a) 若要此弹击中同一水平面上最远距离的目标；
   (b) 若要此弹击中 300 米远处一直立墙壁上的最大高度，问 m 之值各为多少?

14. 若直角三角形的周长 $2p$ 一定，求它的面积的最大值.

三、函数的凸性与拐点

上面已经讨论了函数的增减性与极值，这对于我们了解函数的性质与图象形状有很大的帮助。现在我们还要进一步考察函数在什么区间是向上凸的，什么区间是向下凸的，以及上凸函数和下凸函数的一些性质。

定义 1

函数 f 在区间 (a,b) 内，称为向下（上）凸的，指对于任意 $c\in(a,b)$，曲线位于在点 $(c,f(c))$ 处的切线上（下）面（见图 2.37 和 2.38）.

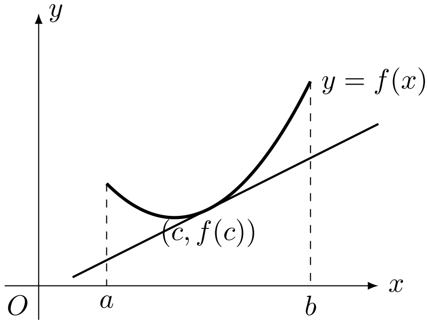


图 2.35

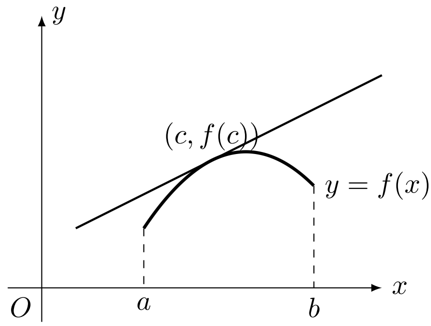


图 2.36

定义 2

函数 f 的图象若经过某点 $x=c$ 时，它的图象 $y=f(x)$ 由向上凸变为向下凸，或者由向下凸变为向上凸，则点 $x=c$ 称为函数 f 的**拐点**，如图 2.39 和 2.40.

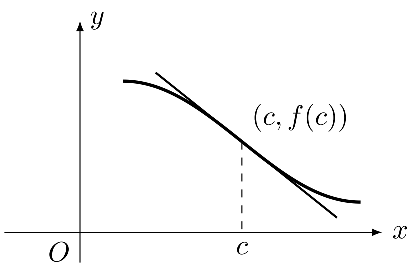


图 2.37

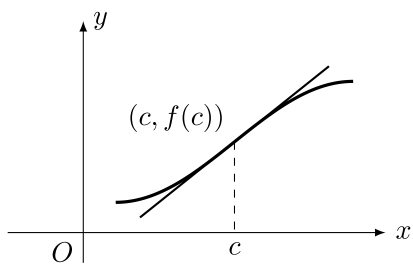


图 2.38

这时过 $x=c$ 的点的切线，把曲线分成两部分，换言之，存在充分小的邻域 $\delta>0$，使得对于一切 $x\in(c-\delta,c)$，曲线位于在点 c 处的切线的一方，而对

于 $x \in (c, c+\delta)$, 曲线在该切线的另一方。

凸性判定定理

设函数 f 在区间 (a,b) 内有二阶导数，则

1. 函数 f 在区间 (a,b) 内为向下凸的充分必要条件是，对于每个 $x \in (a,b)$, 有 $f''(x) \geq 0$;
2. 函数 f 在区间 (a,b) 内为向上凸的充分必要条件是，对于每个 $x \in (a,b)$, 有 $f''(x) \leq 0$.

证明： 假设曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内是向下凸的，因为函数 f 在 (a,b) 内有二阶导数，则对于任意一点 $c \in (a,b)$, $f'(c)$ 存在，曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = c$ 处的切线方程是

$$y = f(c) + f'(c)(x-c) \tag{2.31}$$

对于每个点 $x \in (a,b)$, 曲线 $y = f(x)$ 的对应点的纵坐标与切线上的对应点的纵坐标之差用 $g(x)$ 表示，如图 2.41, 于是

$$g(x) = f(x) - [f(c) + f'(c)(x-c)] = [f(x) - f(c)] - (x-c)f'(c) \tag{2.32}$$

根据中值定理，得到

$$g(x) = (x-c)f'(d) - (x-c)f'(c)$$

这里 $d \in (x,c)$ 或 (c,x). 又 $g(x) = (x-c) \cdot [f'(d) - f'(c)]$, 再根据中值定理，得到

$$g(x) = (x-c)(d-c)f''(e) \tag{2.33}$$

这里 $e \in (d,c)$ 或 (c,d).

于是对于一切 $x \in (a,b)$, 点 $(x, f(x))$ 不在切线 (2.31) 的下方的充要条件是 $g(x) \geq 0$, 显然只有点 c 使 $g(c) = 0$. 根据等式 (2.33), 并且注意到

$$(x-c)(d-c) > 0$$

便知道 $g(x) \geq 0$ 的充分必要条件是 $f''(e) \geq 0$. 这里 $e \in (a,b)$ 且随着 c 和 x 的不同值而改变。因此，依曲线向下凸的定义，曲线向下凸的充分必要条件是对于任意 $x \in (a,b)$ 有 $f''(x) \geq 0$.

用同样的方法便可说明曲线 $y = f(x)$ 向上凸的充分必要条件是 $f''(x) \leq 0$.

向下凸或向上凸的函数的重要性质如下面的定理所述：

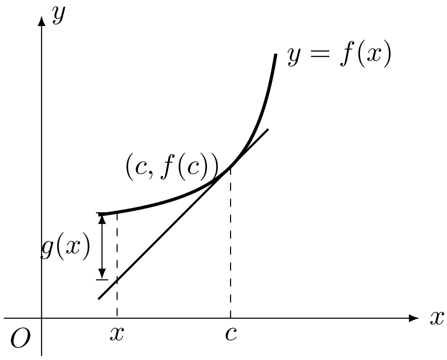


图 2.39

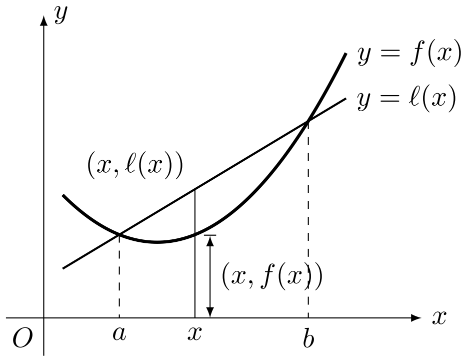


图 2.40

定理

设 f 是 $[a,b]$ 上二次可微函数，并且 $f''(x)>0$, $x\in(a,b)$, 那么对于每一个满足 $a<x<b$ 的 x，有

$$f(x)<f(b)\cdot\frac{x-a}{b-a}+f(a)\cdot\frac{b-x}{b-a}$$

这一定理有一个明显的几何意义（图 2.42），用 $\ell(x)$ 表示右端的一次函数:

$$\ell(x)=f(b)\cdot\frac{x-a}{b-a}+f(a)\cdot\frac{b-x}{b-a}$$

它在 $x=a$ 和 $x=b$ 的值是 $\ell(a)=f(a)$ 和 $\ell(b)=f(b)$, 即与 $f(x)$ 在这些点的值一致. 因为 $y=\ell(x)$ 的图象是 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的割线，因此 $[a,b]$ 上的向下凸函数 f 的图象 $y=f(x)$ 位于该区间的割线的下面。

证明： 设 $F(x)=f(x)-f(b)\dfrac{x-a}{b-a}-f(a)\dfrac{b-x}{b-a}$，这里 $x\in[a,b]$. 我们需要证明在 $[a,b]$ 上，$F(x)\leq 0$. 因为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 的某点达到它的最大值，用 c 表示最大值点，我们证明 c 是两端点之一。

假设 $a<c<b$，那么 c 也是 $F(x)$ 的极大值点。因此 $F'(c)=0$. 又

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)}{b-a}+\frac{f(a)}{b-a}$$

$$F''(x)=f''(x)>0,\qquad x\in(a,b)$$

因此我们得出结论，$F(c)$ 是 $[a,b]$ 上的最小值，即对于任意 $x\in[a,b]$ 且 $x\neq c$, 有

$$F(x)>F(c)=f(c)-\ell(c)$$

这与 c 是极大值点矛盾, 因此, 唯一的可能是 c 是一个端点 a 或 b, 但是 $f(a)=\ell(a)$, $f(b)=\ell(b)$, 这表明 $F(x)=f(x)-\ell(x)$ 的最大值是 0, 因此在 $[a,b]$ 上除

端点以外的所有其它点 x, 有

$$F(x)=f(x)-f(b)\frac{x-a}{b-a}-f(a)\frac{b-x}{b-a}<0$$

即

$$f(x)<f(b)\frac{x-a}{b-a}+f(a)\frac{b-x}{b-a}$$

这就完成了向下凸函数定理的证明。

对于向上凸函数有类似的定理，即：区间 $[a,b]$ 上向上凸的函数的图象位于 $[a,b]$ 的割线上面，用式子表示就是

$$f(x)>f(b)\frac{x-a}{b-a}+f(a)\frac{b-x}{b-a},\quad x\in(a,b)$$

例 2.68 求证 $\cos\pi x>1-2x,\quad x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

证明： 设 $f(x)=\cos\pi x$, $\ell(x)=1-2x$, 因为

$$f(0)=1=\ell(0),\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=0=\ell\left(\frac{1}{2}\right)$$

所以：$y=1-2x$ 是曲线 $y=\cos\pi x$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的割线。

又 $f'(x)=-\pi\sin\pi x$, $f''(x)=-\pi^2\cos\pi x$, 且当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，有 $f''(x)<0$, 即 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内是向上凸的．因此，$y=\cos\pi x$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的图象是在该区间的割线 $y=1-2x$ 的上面，从而

$$\cos\pi x>1-2x,\qquad x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

下面给出拐点满足的必要条件。

定理

如果 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，并且 $f''(c)$ 存在，则 $f''(c)=0$.

证明： 因为 $x=c$ 是曲线的拐点，即它是曲线 $y=f(x)$ 向上凸和向下凸的分界点，依凸性判定定理，我们可以取 $a<c<b$, 使得 $f''(x)$ 在 (a,c) 内的函数值的符号与在 (c,b) 内的函数值的符号相反。

设 $g(x)=f'(x)$, $x\in(a,b)$, 于是 $g'(x)=f''(x)$ 经过 c 点由负变正或由正变负，因此点 c 是 $g(x)$ 在 (a,b) 内的唯一的极值点，又 $g'(c)=f''(c)$ 存在，根据费马定理

$$g'(c)=f''(c)=0$$

例 2.69 讨论函数 $f(x)=x^3$ 和 $f(x)=x^4$ 有无拐点.

解： $f(x)=x^3$ 有导数 $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, 显然 $f'(0)=f''(0)=0$, 而且：当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$; 当 $x<0$ 时，$f''(x)<0$, 即曲线 $y=x^3$ 在 $(-\infty,0)$ 内是向下凸的，而在 $(0,+\infty)$ 区间内是向上凸的．因此，$x=0$ 是曲线的拐点而不是极值点.

又 $f(x)=x^4$ 有导数 $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, 显然 $f'(0)=f''(0)=0$, 并且对于每一个 $x\neq 0$ 都有 $f''(x)>0$, 因此这个曲线 $y=x^4$ 是处处向下凸的，$x=0$ 不是曲线 $y=x^4$ 的拐点而是一个极小点。

下面给出判定拐点的充分条件。

定理（拐点的充分条件）

设 f 在点 c 处连续，在点 c 附近（可以不包括 c 点）具有二阶导数，如果自变量 x 通过 c 时，二阶导数变号，则 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

证明： 我们可以取 c 点的一个邻域 (a,b) 使 $f''(x)$ 在 (a,c) 上的函数值的符号和在 (c,b) 上的相反，依凸性判定定理，f 经过 c 时将由向上凸变为向下凸或者由向下凸变为向上凸，即 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

例 2.70 说明 $x=0$ 是曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点。

证明： 设 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},\qquad f''(x)=\frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}}$$

显然 $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 都不存在，但是当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$, 即曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 向下凸；当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$, 即曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 向上凸，因此点 $x=0$ 是曲线的拐点.

由 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ 知，曲线在点 $x=0$ 处的切线就是 y 轴本身（见图 2.43）。

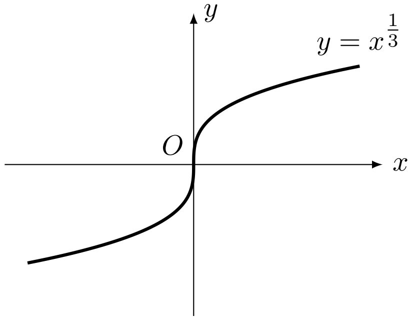


图 2.41

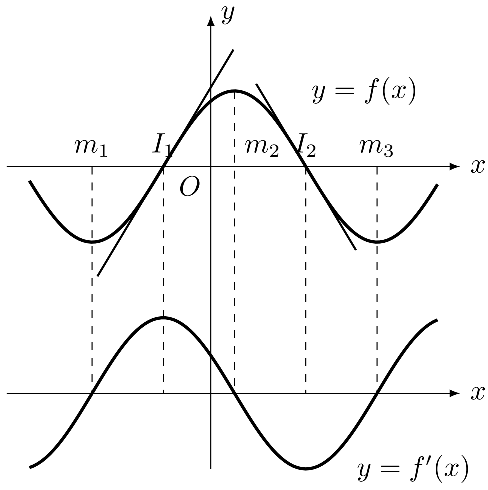


图 2.42

在图 2.44 中，函数 $y = f(x)$ 的图象上的极值点 m_1, m_2 和 m_3, 对应于函数 $y = f'(x)$ 图象上的零点；$y = f(x)$ 的图象上的拐点对应于 $y = f'(x)$ 的图象上的极值点。

练习

1. 讨论下列函数的极值、凸性及拐点，并出函数图象的草图；

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$　　　　(b) $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

2. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有二阶导数，并且向上凸，求证：对于满足条件 $a \le x_1 < x_2 \le b$ 的任意两点 x_1, x_2，恒有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad 0 \le \lambda \le 1$$

   如果上面的函数在区间 (a, b) 内向下凸，则应有怎样的结论?

3. 求证函数

   (a) $y = \log_a x\ (a > 1)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是向上凸的；

   (b) $f(x) = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 内是向上凸的；

   (c) $\log_a \dfrac{x_1 + x_2}{2} \ge \dfrac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} \quad (x_1 > 0,\ x_2 > 2)$

(d) $\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\geq\dfrac{\sin x_1+\sin x_2}{2}\quad(0\leq x_1,x_2\leq\pi)$

4. 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是向上凸的，求证：对于任意 $a\leq x_1<x_2<x_3\leq b$，$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=1$，有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\geq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$$

5. 求证对于任意正数 x_1,x_2,x_3 有

$$\ln\left(\frac{1}{6}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)\geq\ln\left(x_1^{\frac{1}{6}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{1}{2}}\right)$$

6. 若 A,B,C 是任意三角形的三个内角，求证

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

又当 A,B,C 为何值时，上面等式成立?

7. 对于 $a>0$, $b>0$, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$，$\alpha+\beta=1$，求证：$a^{\alpha}b^{\beta}\leq\alpha a+\beta b$ 成立.（提示：利用对数函数是上凸函数）

8. $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 为具有正系数的非零多项式，若为偶函数，求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内向下凸，且仅有一个极值。

四、作函数的图象

给出函数 $y=f(x)$, 常常希望画出它的图象来，这对于许多问题是有用的，在初中我们所介绍的用列表法来描绘函数的图象, 有很大的不精确性和盲目性，由于所取的点是有穷多个，很可能在所要画出的某两点之间的曲线有比较剧烈的变化，如果我们用比较平滑的曲线弧去连结，于是所得曲线与实际相差很大. 以前各节所介绍的函数性态可以帮助我们断定函数图象的主要特征，因此在取点之前，应先对函数的性态作一番讨论，兹将描绘曲线的一般步骤列出如下：

1. 确定函数的定义域;

2. 确定曲线关于坐标轴的对称性；

3. 确定曲线与坐标轴的交点（如果不易确定，不必强求）;

4. 确定函数的增减性，极大值与极小值；
5. 确定函数的凸性与拐点；
6. 确定曲线的渐近线；
7. 需要时，还得由曲线方程计算出一些适当的点的坐标；
8. 把上面所得的结果，按自变量大小顺序列入一个表格内，以观察图形的大概形态，然后描绘成图。

在用例子说明如何绘图之前，我们需要补充说明如何求曲线的渐近线。

定义

假设曲线 $y=f(x)$ 不限制在有限平面内，即其上的点 P 可以趋于无穷远，如果曲线的点 P 到直线 ℓ：$ax+ty+c=0$ 的距离 d, 当 P 沿曲线趋于无穷远时，$d\to 0$，那么我们称直线 ℓ 为所给曲线的**渐近线**。

(一) 水平渐近线及其求法

设 ℓ_1：$y=\alpha$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线，曲线上的 $P(x,f(x))$ 点到 ℓ_1 的距离为

$$d=|\alpha-f(x)|$$

因 ℓ_1 为渐近线，所以，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，应有 $d\to 0$, 即

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha,\qquad \text{或} \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\alpha$$

反之，若上式成立，则 $y=\alpha$ 必为 $y=f(x)$ 的一条渐近线。

(二) 铅直渐近线及其求法

设 ℓ_2：$x=\beta$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线，又 $P(x,f(x))$ 为曲线上的任意一点，它到 $x=\beta$ 的距离是

$$d=|\beta-x|$$

因为 ℓ_2 是 $y=f(x)$ 的渐近线，那么

$$\lim_{x\to\pm\beta}f(x)=\pm\infty$$

反之，若上式成立，则 ℓ_2 为 $y=f(x)$ 的一条渐近线.

例如，对于 $y=\dfrac{1}{x}$, 当 $x\to 0$, $y\to\pm\infty$，故 $x=0$ 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条渐近线。

（三）任意渐近线及其求法

设直线 ℓ_3： $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线，曲线上任意一点 $P(x,f(x))$ 到直线 ℓ_3 的距离是

$$d=\left|\frac{kx+b-f(x)}{\sqrt{1+k^2}}\right|$$

因为 ℓ_3 是渐近线，所以当 $x\to\pm\infty$ 时，$d\to 0$, 即

$$kx+b-f(x)\to 0$$

我们必须用上式求出 k,b, 才能确定 ℓ_3. 由于当 $x\to\pm\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left[k+\frac{b}{x}-\frac{f(x)}{x}\right]&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}[kx+b-f(x)]\\&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}[kx+b-f(x)]=0\end{aligned}$$

由于 b 是常数，故有

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad\text{(渐近线方向)}\tag{2.34}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]\tag{2.35}$$

例 2.71　求函数 $f(x)=-3x^5+5x^3$ 的极值、拐点，并画出它的图象的草图。

解：

1. 曲线的范围与截距：这函数 f 的定义域与值域都是无限的，它的曲线伸展在整个平面内，与 y 轴的交点是原点，而与 x 轴有三个交点，其零点是 $0,\pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

2. 对称性：因为 $f(-x)=-f(x)$, 所以曲线关于原点对称。

3. 函数的增、减与极值：

   $$f'(x)=-15x^4+15x^2=-15x^2(x-1)(x+1)$$

   由此知 $f(x)$ 的驻点是 $-1,0,1$. $f'(x)$ 的符号变化的情况是：

   - 当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$, 这时 $f(x)$ 递减；
   - 当 $-1<x<1$ 时, $f'(x)>0$，这时 $f(x)$ 递增；

- 当 $x > 1$ 时，$f'(x) < 0$, 这时 $f(x)$ 递减.

因此，$x = -1$ 是极小点，极小值 $f(-1) = -2$; $x = 1$ 是极大点，极大值 $f(1) = 2$.

4. 函数的凸性与拐点：

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = -60x\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

拐点的可能值是 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $f''(x)$ 的符号变化情况是

- 当 $x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f''(x) > 0$, 此时曲线向下凸；
- 当 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ 时，$f''(x) < 0$, 此时曲线向上凸；
- 当 $0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f''(x) > 0$, 此时曲线向下凸；
- 当 $x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f''(x) < 0$, 此时曲线向上凸；

因此：$x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点都是拐点。

5. 列表：今将讨论情况列成下表，并作图（如图 2.45）

x		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	下凸 $\searrow$	极小值 -2	$\nearrow$	-1.24	上凸 $\nearrow$	0	下凸 $\nearrow$	1.24	上凸 $\nearrow$	极大值 2	$\searrow$

例 2.72 描绘函数 $y = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的图象。

解： 这个函数在 $x = 1$ 这点没有定义，并且，当 $x \to 1^-$ 时，$y \to -\infty$; 当 $x \to 1^+$ 时，$y \to +\infty$, 所以 $x = 1$ 是曲线的铅直渐近线，曲线在 $x = 1$ 这点断开.

求导数，得

$$y' = \frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}$$

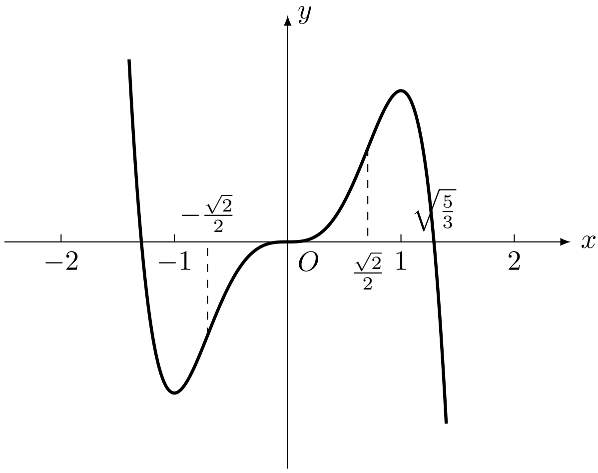


图 2.43

当 $x<-1$ 时，$y'>0$; 当 $-1<x<3$ 时，$y'>0$. 因此，$x=-1$ 是极大点；$x=3$ 是极小点．又极大值 $f(-1)=-2$; 极小值 $f(3)=0$

求二阶导数，得

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

- 当 $x<1$ 时，$y''<0$, 曲线向上凸；
- 当 $x>1$ 时，$y''>0$, 曲线向下凸，但是曲线在 $x=1$ 这一点断开，因此 $x=1$ 不是曲线的拐点.

又因为

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\frac{1}{4}(x-5)+\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}(x-5)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

这就是说曲线以 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ 为渐近线。

综合起来得到下面结果：

x		-1		0		1		3	
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$
		-2		$-\frac{9}{4}$	$-\infty$		$+\infty$	0	

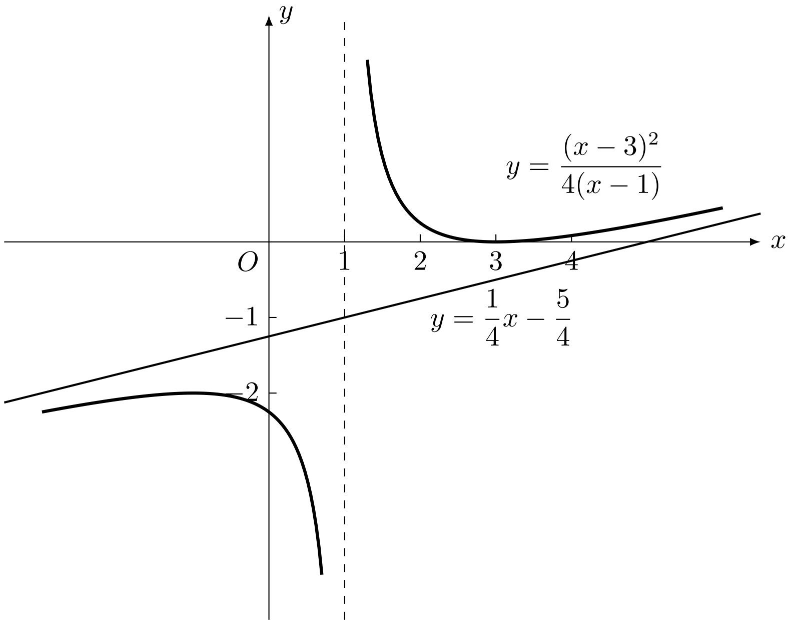


图 2.44

画出具体图形如图 2.46.

练习

1. 讨论下列函数的极值、凸性和拐点, 并画出函数图象.

(a) $y=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$

(b) $y=(x-1)^3-3(x-1)$

(c) $y=\dfrac{x^4}{2}-x^2$

(d) $y=1+4x^3-3x^4$

(e) $y=\sqrt{(x+2)^2\,(16-x^2)}$

(f) $y=x^x\quad(x>0.1)$

(g) $y=xe^{-x}$

2. 作下列函数的图象, 并画出渐近线及在拐点处的切线:

(a) $y=x+\dfrac{1}{x}$

(b) $y=\dfrac{x^2}{1+x^3}$

(c) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$

(d) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

(e) $y=\dfrac{(x-5)(x+3)}{(x+2)^2}$

习题 2.3

1. 求函数 $f(x)=x^3+ax^2-3bx+c$ 的图象关于原点对称时，$f(x)$ 在区间 $-2\le x\le 2$ 上的最小值，其中 $b>0$.

2. 函数 $f(x)=3x^2-ax^3$ 在区间 $0\le x\le 2$ 上的最小值是 -4, 求

    (a) a 的值

    (b) $f(x)$ 在区间 $0\le x\le 2$ 的最大值 M

3. 设 a,b 为实数，求函数 $y=x^3-3ax^2+bx+1$ 在区间 $0\le x\le 1$ 上单调增加时，点 (a,b) 存在范围，并用图表示出来。

4. 设 $f(x)=x^3-5x^2+3x+a$, 在怎样的情况下对于 x 的正值, 总有 $f(x)>0$ 成立?

5. 设 a 是常数，对于函数 $f(x)=4x^3-3x+a$

    (a) 求 $y=f(x)$ 的极大值和极小值;

    (b) 确定当方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实根时，a 值的范围。

6. 讨论函数 $y=\dfrac{x^3}{2(x+2)}$ 的极值，凸向，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7. 求证 $\pi<\dfrac{\sin\pi x}{x(1-x)}\le 4$.

8. 对于已知半径为 R 的球，求具有最小体积的外切圆锥的体积。

9. 一长方体的对角线长 $\sqrt{11}$cm, 全面积为 14cm^2, 求它的体积的最大值，并求体积为最大时三边的长。

10. 一浮标由三部分组成，一个圆筒与两个相等的圆锥，其中每一个圆锥的高等于圆筒的高，问当表面积一定时，什么样的形状会有最大的体积。

证明： 设 $F(x)=f(x)-f(b)\dfrac{x-a}{b-a}-f(a)\dfrac{b-x}{b-a}$，这里 $x\in[a,b]$. 我们需要证明在 $[a,b]$ 上，$F(x)\le 0$. 因为 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 的某点达到它的最大值，用 c 表示最大值点，我们证明 c 是两端点之一。

假设 $a<c<b$，那么 c 也是 $F(x)$ 的极大值点。因此 $F'(c)=0$. 又

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)}{b-a}+\frac{f(a)}{b-a}$$
$$F''(x)=f''(x)>0,\qquad x\in(a,b)$$

因此我们得出结论，$F(c)$ 是 $[a,b]$ 上的最小值，即对于任意 $x\in[a,b]$ 且 $x\neq c$，有

$$F(x) > F(c) = f(c) - \ell(c)$$

这与 c 是极大值点矛盾，因此，唯一的可能是 c 是一个端点 a 或 b，但是 $f(a)=\ell(a)$，$f(b)=\ell(b)$，这表明 $F(x)=f(x)-\ell(x)$ 的最大值是 0，因此在 $[a,b]$ 上除端点以外的所有其它点 x，有

$$F(x) = f(x) - f(b)\frac{x-a}{b-a} - f(a)\frac{b-x}{b-a} < 0$$

即

$$f(x) < f(b)\frac{x-a}{b-a} + f(a)\frac{b-x}{b-a}$$

这就完成了向下凸函数定理的证明。

对于向上凸函数有类似的定理，即：区间 $[a,b]$ 上向上凸的函数的图象位于 $[a,b]$ 的割线上面，用式子表示就是

$$f(x) > f(b)\frac{x-a}{b-a} + f(a)\frac{b-x}{b-a}, \quad x\in(a,b)$$

例 2.73 求证 $\cos\pi x > 1-2x, \quad x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

证明： 设 $f(x)=\cos\pi x$，$\ell(x)=1-2x$，因为

$$f(0)=1=\ell(0), \qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=0=\ell\left(\frac{1}{2}\right)$$

所以：$y=1-2x$ 是曲线 $y=\cos\pi x$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的割线。

又 $f'(x)=-\pi\sin\pi x$，$f''(x)=-\pi^2\cos\pi x$，且当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，有 $f''(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内是向上凸的．因此，$y=\cos\pi x$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的图象是在该区间的割线 $y=1-2x$ 的上面，从而

$$\cos\pi x > 1-2x, \qquad x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

下面给出拐点满足的必要条件。

定理

如果 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，并且 $f''(c)$ 存在，则 $f''(c)=0$.

证明： 因为 $x=c$ 是曲线的拐点，即它是曲线 $y=f(x)$ 向上凸和向下凸的分界点，依凸性判定定理，我们可以取 $a<c<b$, 使得 $f''(x)$ 在 (a,c) 内的函数值的符号与在 (c,b) 内的函数值的符号相反。

设 $g(x)=f'(x)$, $x\in(a,b)$, 于是 $g'(x)=f''(x)$ 经过 c 点由负变正或由正变负，因此点 c 是 $g(x)$ 在 (a,b) 内的唯一的极值点，又 $g'(c)=f''(c)$ 存在，根据费马定理

$$g'(c)=f''(c)=0$$

例 2.74 讨论函数 $f(x)=x^3$ 和 $f(x)=x^4$ 有无拐点.

解： $f(x)=x^3$ 有导数 $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, 显然 $f'(0)=f''(0)=0$, 而且：当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$; 当 $x<0$ 时，$f''(x)<0$, 即曲线 $y=x^3$ 在 $(-\infty,0)$ 内是向下凸的，而在 $(0,+\infty)$ 区间内是向上凸的. 因此，$x=0$ 是曲线的拐点而不是极值点.

又 $f(x)=x^4$ 有导数 $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, 显然 $f'(0)=f''(0)=0$, 并且对于每一个 $x\neq 0$ 都有 $f''(x)>0$, 因此这个曲线 $y=x^4$ 是处处向下凸的，$x=0$ 不是曲线 $y=x^4$ 的拐点而是一个极小点。

下面给出判定拐点的充分条件。

定理（拐点的充分条件）

设 f 在点 c 处连续，在点 c 附近（可以不包括 c 点）具有二阶导数，如果自变量 x 通过 c 时，二阶导数变号，则 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

证明： 我们可以取 c 点的一个邻域 (a,b) 使 $f''(x)$ 在 (a,c) 上的函数值的符号和在 (c,b) 上的相反，依凸性判定定理，f 经过 c 时将由向上凸变为向下凸或者由向下凸变为向上凸，即 $x=c$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

例 2.75 说明 $x=0$ 是曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点。

证明： 设 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},\qquad f''(x)=\frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}}$$

显然 $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 都不存在，但是当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$, 即曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 向下凸；当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$, 即曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 向上凸，因此点 $x=0$ 是曲线的拐点.

由 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ 知，曲线在点 $x=0$ 处的切线就是 y 轴本身（见图 2.43）。

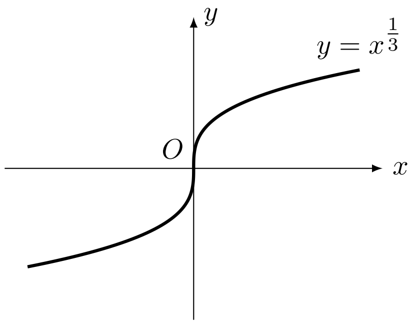


图 2.45

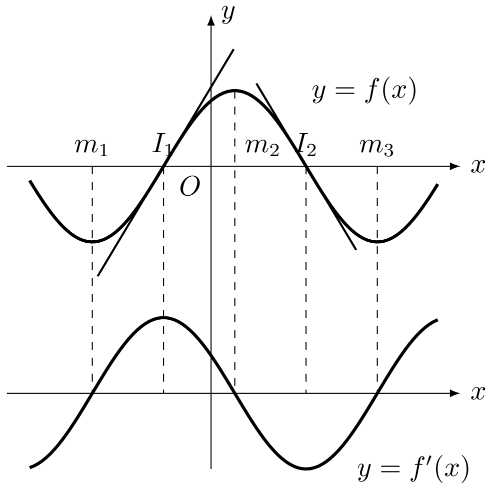


图 2.46

在图 2.44 中，函数 $y=f(x)$ 的图象上的极值点 m_1, m_2 和 m_3, 对应于函数 $y=f'(x)$ 图象上的零点；$y=f(x)$ 的图象上的拐点对应于 $y=f'(x)$ 的图象上的极值点。

练习

1. 讨论下列函数的极值、凸性及拐点，并出函数图象的草图；

   (a) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$

2. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有二阶导数，并且向上凸，求证：对于满足条件 $a\le x_1<x_2\le b$ 的任意两点 x_1,x_2，恒有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\quad 0\le\lambda\le1$$

   如果上面的函数在区间 (a,b) 内向下凸，则应有怎样的结论？

3. 求证函数

   (a) $y=\log_a x\ (a>1)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是向上凸的；

   (b) $f(x)=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 内是向上凸的；

(c) $\log_a \dfrac{x_1+x_2}{2} \geq \dfrac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} \quad (x_1>0,\ x_2>2)$

(d) $\sin \dfrac{x_1+x_2}{2} \geq \dfrac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} \quad (0 \leq x_1, x_2 \leq \pi)$

4. 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是向上凸的，求证：对于任意 $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$，$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$，有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$

5. 求证对于任意正数 x_1, x_2, x_3 有

$$\ln\left(\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right) \geq \ln\left(x_1^{\frac{1}{6}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{2}}\right)$$

6. 若 A, B, C 是任意三角形的三个内角，求证

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

又当 A, B, C 为何值时，上面等式成立?

7. 对于 $a>0$, $b>0$, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$，$\alpha+\beta=1$，求证：$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$ 成立.（提示：利用对数函数是上凸函数）

8. $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为具有正系数的非零多项式，若为偶函数，求证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内向下凸，且仅有一个极值。

五、作函数的图象

给出函数 $y = f(x)$, 常常希望画出它的图象来，这对于许多问题是有用的，在初中我们所介绍的用列表法来描绘函数的图象，有很大的不精确性和盲目性，由于所取的点是有穷多个，很可能在所要画出的某两点之间的曲线有比较剧烈的变化，如果我们用比较平滑的曲线弧去连结，于是所得曲线与实际相差很大. 以前各节所介绍的函数性态可以帮助我们断定函数图象的主要特征，因此在取点之前，应先对函数的性态作一番讨论，兹将描绘曲线的一般步骤列出如下：

1. 确定函数的定义域;

2. 确定曲线关于坐标轴的对称性;

3. 确定曲线与坐标轴的交点（如果不易确定，不必强求）；
4. 确定函数的增减性，极大值与极小值；
5. 确定函数的凸性与拐点；
6. 确定曲线的渐近线；
7. 需要时，还得由曲线方程计算出一些适当的点的坐标；
8. 把上面所得的结果，按自变量大小顺序列入一个表格内，以观察图形的大概形态，然后描绘成图。

在用例子说明如何绘图之前，我们需要补充说明如何求曲线的渐近线。

定义

假设曲线 $y=f(x)$ 不限制在有限平面内，即其上的点 P 可以趋于无穷远，如果曲线的点 P 到直线 ℓ：$ax+ty+c=0$ 的距离 d，当 P 沿曲线趋于无穷远时，$d\to 0$，那么我们称直线 ℓ 为所给曲线的**渐近线**。

（一）水平渐近线及其求法

设 $\ell_1: y=\alpha$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线，曲线上的 $P(x,f(x))$ 点到 ℓ_1 的距离为

$$d=|\alpha-f(x)|$$

因 ℓ_1 为渐近线，所以，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，应有 $d\to 0$，即

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha, \qquad \text{或} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha$$

反之，若上式成立，则 $y=\alpha$ 必为 $y=f(x)$ 的一条渐近线。

（二）铅直渐近线及其求法

设 $\ell_2: x=\beta$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线，又 $P(x,f(x))$ 为曲线上的任意一点，它到 $x=\beta$ 的距离是

$$d=|\beta-x|$$

因为 ℓ_2 是 $y=f(x)$ 的渐近线，那么

$$\lim_{x\to\pm\beta} f(x)=\pm\infty$$

反之，若上式成立，则 ℓ_2 为 $y=f(x)$ 的一条渐近线.

例如，对于 $y=\dfrac{1}{x}$, 当 $x\to 0$, $y\to\pm\infty$，故 $x=0$ 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一条渐近线。

（三）任意渐近线及其求法

设直线 ℓ_3： $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线，曲线上任意一点 $P(x,f(x))$ 到直线 ℓ_3 的距离是

$$d=\left|\frac{kx+b-f(x)}{\sqrt{1+k^2}}\right|$$

因为 ℓ_3 是渐近线，所以当 $x\to\pm\infty$ 时，$d\to 0$, 即

$$kx+b-f(x)\to 0$$

我们必须用上式求出 k,b, 才能确定 ℓ_3. 由于当 $x\to\pm\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left[k+\frac{b}{x}-\frac{f(x)}{x}\right]&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}[kx+b-f(x)]\\&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}[kx+b-f(x)]=0\end{aligned}$$

由于 b 是常数，故有

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad(\text{渐近线方向})\tag{2.36}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]\tag{2.37}$$

例 2.76　求函数 $f(x)=-3x^5+5x^3$ 的极值、拐点，并画出它的图象的草图。

解：

1. 曲线的范围与截距：这函数 f 的定义域与值域都是无限的，它的曲线伸展在整个平面内，与 y 轴的交点是原点，而与 x 轴有三个交点，其零点是 $0,\pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.
2. 对称性：因为 $f(-x)=-f(x)$, 所以曲线关于原点对称。
3. 函数的增、减与极值:

$$f'(x)=-15x^4+15x^2=-15x^2(x-1)(x+1)$$

由此知 $f(x)$ 的驻点是 $-1,0,1$. $f'(x)$ 的符号变化的情况是:

- 当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$, 这时 $f(x)$ 递减；
- 当 $-1<x<1$ 时, $f'(x)>0$，这时 $f(x)$ 递增；
- 当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$, 这时 $f(x)$ 递减.

因此，$x=-1$ 是极小点，极小值 $f(-1)=-2$; $x=1$ 是极大点，极大值 $f(1)=2$.

4. 函数的凸性与拐点：

$$f''(x)=-60x^3+30x=-60x\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

拐点的可能值是 $-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $f''(x)$ 的符号变化情况是

- 当 $x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f''(x)>0$, 此时曲线向下凸；
- 当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<0$ 时，$f''(x)<0$, 此时曲线向上凸；
- 当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f''(x)>0$, 此时曲线向下凸；
- 当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f''(x)<0$, 此时曲线向上凸；

因此：$x=-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点都是拐点。

5. 列表：今将讨论情况列成下表，并作图（如图 2.45）

x		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	下凸 $\searrow$	极小值 -2	$\nearrow$	-1.24	上凸 $\nearrow$	0	下凸 $\nearrow$	1.24	上凸 $\nearrow$	极大值 2	$\searrow$

例 2.77 描绘函数 $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的图象。

解： 这个函数在 $x=1$ 这点没有定义，并且，当 $x\to 1^-$ 时，$y\to-\infty$; 当 $x\to 1^+$ 时，$y\to+\infty$, 所以 $x=1$ 是曲线的铅直渐近线，曲线在 $x=1$ 这点断开.

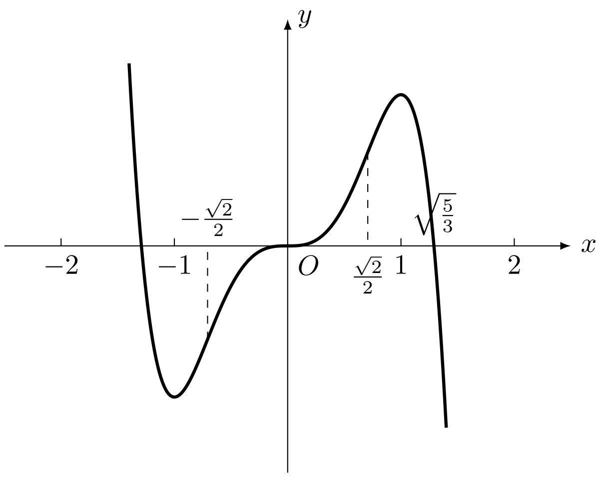


图 2.47

求导数，得

$$y' = \frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}$$

当 $x < -1$ 时，$y' > 0$; 当 $-1 < x < 3$ 时，$y' > 0$. 因此，$x = -1$ 是极大点；$x = 3$ 是极小点． 又极大值 $f(-1) = -2$; 极小值 $f(3) = 0$

求二阶导数，得

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

- 当 $x < 1$ 时，$y'' < 0$, 曲线向上凸；

- 当 $x > 1$ 时，$y'' > 0$, 曲线向下凸，但是曲线在 $x = 1$ 这一点断开，因此 $x = 1$ 不是曲线的拐点.

又因为

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = \frac{1}{4}(x-5) + \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{1}{4}(x-5)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$

这就是说曲线以 $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ 为渐近线。

综合起来得到下面结果：

x		-1		0		1		3	
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$
		-2		$-\dfrac{9}{4}$	$-\infty$		$+\infty$	0	

画出具体图形如图 2.46.

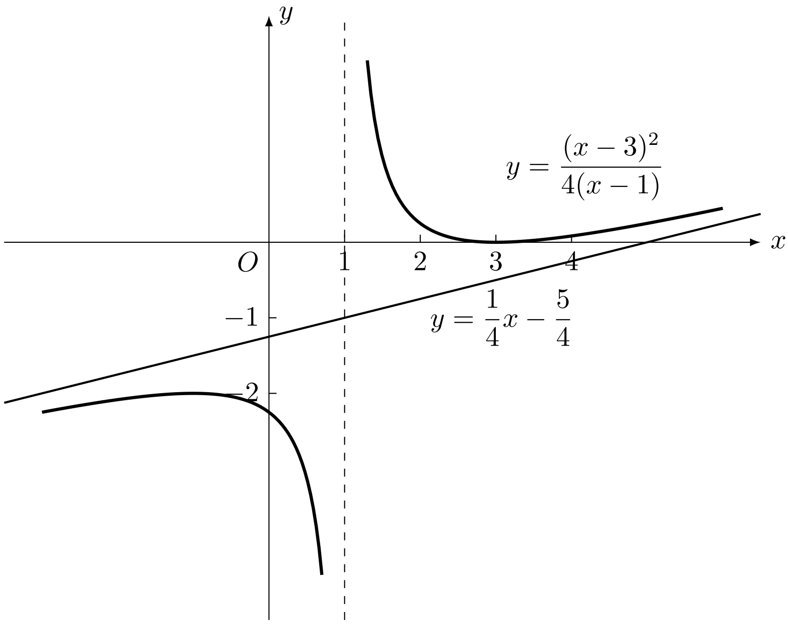


图 2.48

练习

1. 讨论下列函数的极值、凸性和拐点, 并画出函数图象.

   (a) $y=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$

   (b) $y=(x-1)^3-3(x-1)$

   (c) $y=\dfrac{x^4}{2}-x^2$

   (d) $y=1+4x^3-3x^4$

   (e) $y=\sqrt{(x+2)^2\,(16-x^2)}$

   (f) $y=x^x \quad (x>0.1)$

   (g) $y=xe^{-x}$

2. 作下列函数的图象, 并画出渐近线及在拐点处的切线:

(a) $y = x + \dfrac{1}{x}$

(b) $y = \dfrac{x^2}{1+x^3}$

(c) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

(d) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

(e) $y = \dfrac{(x-5)(x+3)}{(x+2)^2}$

习题 2.3

1. 求函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - 3bx + c$ 的图象关于原点对称时，$f(x)$ 在区间 $-2 \le x \le 2$ 上的最小值，其中 $b > 0$.

2. 函数 $f(x) = 3x^2 - ax^3$ 在区间 $0 \le x \le 2$ 上的最小值是 -4, 求

   (a) a 的值

   (b) $f(x)$ 在区间 $0 \le x \le 2$ 的最大值 M

3. 设 a, b 为实数，求函数 $y = x^3 - 3ax^2 + bx + 1$ 在区间 $0 \le x \le 1$ 上单调增加时，点 (a, b) 存在范围，并用图表示出来。

4. 设 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + a$, 在怎样的情况下对于 x 的正值，总有 $f(x) > 0$ 成立？

5. 设 a 是常数，对于函数 $f(x) = 4x^3 - 3x + a$

   (a) 求 $y = f(x)$ 的极大值和极小值；

   (b) 确定当方程 $f(x) = 0$ 有三个不相等的实根时，a 值的范围。

6. 讨论函数 $y = \dfrac{x^3}{2(x+2)}$ 的极值，凸向，拐点，渐近线，并作出它的图象。

7. 求证 $\pi < \dfrac{\sin \pi x}{x(1-x)} \le 4$.

8. 对于已知半径为 R 的球，求具有最小体积的外切圆锥的体积。

9. 一长方体的对角线长 $\sqrt{11}$cm，全面积为 14cm^2, 求它的体积的最大值，并求体积为最大时三边的长。

10. 一浮标由三部分组成，一个圆筒与两个相等的圆锥，其中每一个圆锥的高等于圆筒的高，问当表面积一定时，什么样的形状会有最大的体积。

第三章　求函数从 a 到 b 的和与积分

函数有两个基本性质——变率与和，在前一章，我们研究了函数的瞬时变率的概念，即

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

以及它的应用，在本章我们将研究对于一个给定函数 $f(x)$ “求从 a 到 b 的和”这个概念。在给出定义之前，我们先举几个实例来看一看。

速率与距离　一列行驶中的火车,它的行进速率 v 是时间 t 的函数,即 $v = f(t)$,如图 3.1, 我们可以从速率表读得当时的速率，很自然地，我们想知道火车在从 $t = a$ 到 $t = b$ 这一段时间间隔内一共走了多少路程。从函数的观点看，所谓求在时间 $[a, b]$ 内所走过的距离就是求速率函数 $v = f(t)$ 由 $t = a$ 到 $t = b$ 的和。

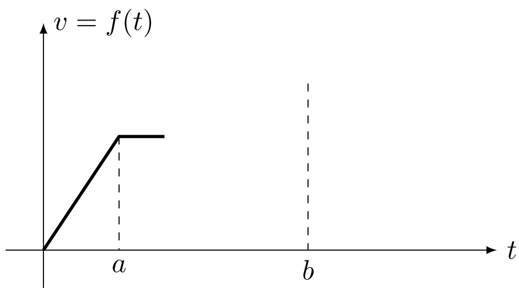


图 3.1

让我们用 $D(f, [a, b])$ 表示所走过的距离，这个记号强调 D 依赖于 f 和区间 $[a, b]$。

变力所作的功　假定某物体在一个平行于 OX 轴的力 P 的作用下沿直线 OX 运动，力 P 的方向与物体运动的方向一致，并且力的大小随离开 O 点的距离

而改变，即变力 P 是所在点的横坐标 x 的函数 $P=P(x)$, 如图 3.2。假定物体在这个变力 P 作用之下，从直线 OX 的一点 a 移到另一点 P, 那么力 P 所作的功就是变力函数 $P(x)$ 由 $x=a$ 到 $x=b$ 的和，我们用 $W(P,[a,b])$ 表示力 P 所作的功，它表明 W 依赖于 $P(x)$ 和 $[a,b]$。

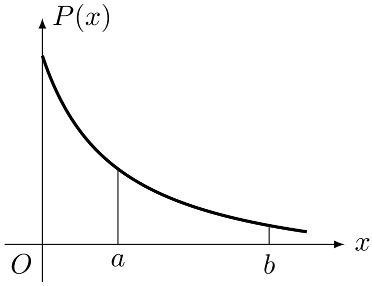


图 3.2

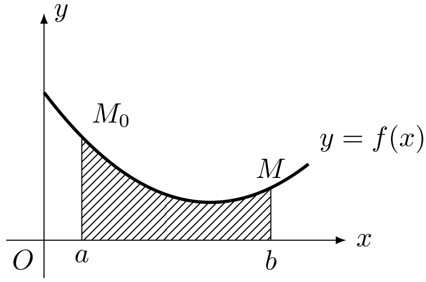


图 3.3

曲边梯形的面积 令 $y=f(x)$ 是函数 f 的图象，表示一条曲线，如图 3.3. 我们要求曲线上的一段弧 M_0M 与其两端的纵坐标线及 x 轴上的线段 $[a,b]$ 所围成的图形的面积。这样的图形（它有三条边是直线，其中两条互相平行，第三条与前两条互相垂直，而第四条边是曲线）叫做曲边梯形。显然曲边梯形的面积 A 依赖于 $y=f(x)$ 和 x 轴上的线段 $[a,b]$, 记这一面积为 $A(f,[a,b])$。

在上一章，我们利用函数 $f(x)$ 和它的图象之间的对应关系，就可以把函数的变率和它的图象的切线的斜率相对应地一并分析讨论，这样，一方面可以把函数的变率这种“数量”的概念用切线来形象化，便于想象；而另一方面又可以把“切线”这种几何概念数量化，便于计算，在这一章，我们也要利用函数 $f(x)$ 和它的图象之间的对应关系，把函数 $f(x)$ 由 $x=a$ 到 $x=b$ 的“和”与曲线 $y=f(x)$ 的曲边梯形的“面积”相对应地一并分析讨论，并且说明函数的“求从 a 到 b 的和”恰好对应于求曲边梯形的面积。这也就是为什么把函数“求从 a 到 b 的和”这种基本运算叫做积分的道理。

第一节 “和”与“面积”

对于任意曲线围成的图形，我们还没有规定它的“面积”的意义，和它密切相关的“函数从 a 到 b 的和”的概念至今也没有明确的解析的定义。在这一节我们要把这两个概念由“直观的定性理解”推进到“数量化的定量定义”。唯有确立了它们的“解析的定义”，它们才真正地成为能算好用的量。

一、“和”与“面积”的基本性质

现在让我们先从“函数的和”与“曲线形的面积”的直观内涵来分析一下它们分别所应有的基本性质。

(一) “曲线形的面积”的基本性质

从面积的直观内涵容易看出下列两点:

1. (单调性) 设区域 R_1 包含在 R_2 之内, 即 $R_1 \subseteq R_2$, 则: R_1 的面积 $\leq R_2$ 的面积. (图 3.4)
2. (可加性) 设区域 R 可以用一条曲线分割成两块区域 $R_1 + R_2$, 则有: R 的面积 $= R_1$ 的面积 $+R_2$ 的面积. (图 3.5)

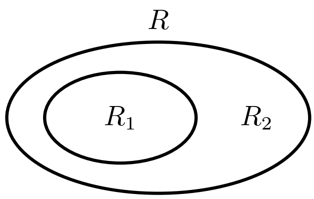


图 3.4

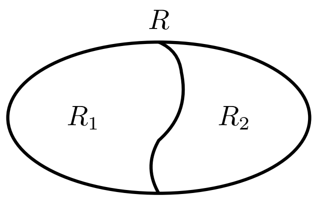


图 3.5

(二) “函数的和”的基本性质

同样地, 从“函数从 a 到 b 的和”的直观内涵容易看出下列两个基本性质, 即

性质 1: 单调性

设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $a \leq t \leq b$ 上, $f(t) \leq g(t)$ 恒成立, 那么:
“$f(t)$ 由 $t=a$ 到 $t=b$ 的和” $\leq$ “$g(t)$ 由 $t=a$ 到 $t=b$ 的和”。

例如, 两部车子在 $t=a$ 到 $t=b$ 的时间内, 甲车的速率 $f(t) \leq$ 乙车的速率 $g(t)$, 则甲车在上述时间内所经过的里程 $\leq$ 乙车在上述时间内所经过的里程。

性质 2: 可加性

设 $a<b<c$, 那么, 有:
“$f(t)$ 由 $t=a$ 到 $t=b$ 的和” $+$ “$f(t)$ 由 $t=b$ 到 $t=c$ 的和” $=$ “$f(t)$

由 $t=a$ 到 $t=c$ 的和”。

上述基本性质是一目了然的，让我们先用来说明一些简单的基本事实。

例 3.1 设函数 $y=f(t)=k$（常数），则由和的直观内涵，显然应有：

$$\text{常数函数从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} = k(b-a)$$

例如，以等速率每小时 k 公里行驶的火车从 $t=a$ 小时到 $t=b$ 小时内所走的总里程应该是 $k(b-a)$ 公里。

现在让我们利用函数的图象来观察上述数值 $k(b-a)$ 的几何意义。

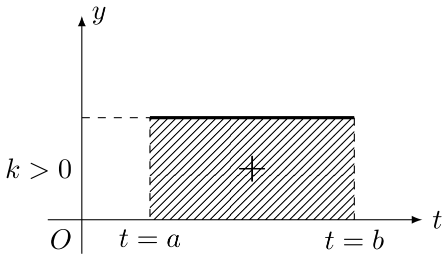


图 3.6

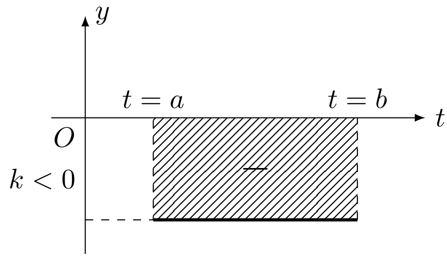


图 3.7

1. 当 $k>0$ 时，函数 $f(t)=k$ 的图象在 t 轴上方，$k(b-a)$ 对应于一个矩形的面积，如图 3.6 中阴影部分的面积.

2. 当 $k<0$ 时，函数 $f(t)=k$ 的图象在 t 轴下方，$k(b-a)$ 对应于一个矩形的面积的负值，如图 3.7 中阴影部分的面积的负值。

假如我们把 t 轴之上的面积定义为正的，而把 t 轴之下的面积定义为负的，则当 $y=k$（常数）时，常数函数从 a 到 b 的和 $=k(b-a)=$ 上述的有号面积。

例 3.2 设 $y=f(t)$ 是一个阶梯函数，即分段地是常数函数：

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b$$

当 $t_{i-1}\leq t<t_i$ 时，$f(t)=k_i$，$i=1,2,\ldots,n$。由性质 2，我们可以分段地用常数函数求和，就可以得到阶梯函数 $f(t)$ 从 a 到 b 的和：

$$k_1(t_1-t_0)+k_2(t_2-t_1)+\cdots+k_n(t_n-t_{n-1})$$

作出阶梯函数的图象（图 3.8），上述函数和就等于下列逐段由矩形并起来的区域的“有号面积”。

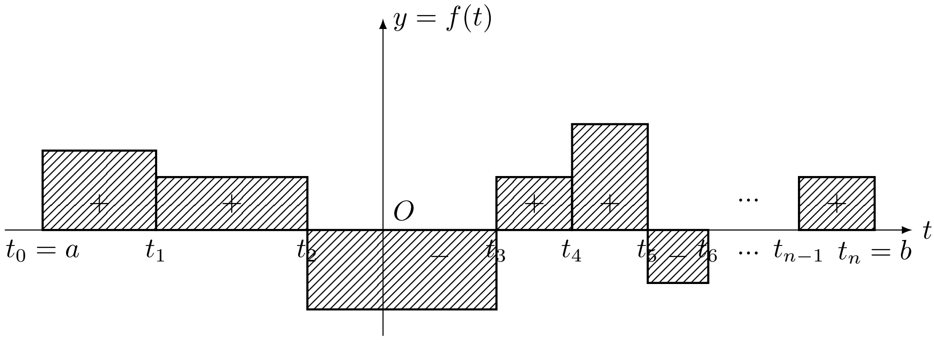


图 3.8

二、逼近法求和

对于一个比较一般的函数，例如 $y = kt + c$, $y = t^2$, $y = \sin t$ 等等，我们必须给函数的和下一个适当的定义，同时要提供计算这个和的方法，这里我们将要再一次地用逼近法的观点去解答上述问题，回顾上一章讨论变率时，我们的基本想法是用折线函数去逼近一般的平滑函数，所以折线函数是讨论函数变率的简单好用的基本函数，因为它们的变率十分简单，分段地是个常数而且无限逼近函数在某一点的变率，由上一段的讨论；我们知道阶梯函数的“从 a 到 b 的和”是十分简明的，它们在“函数求从 a 到 b 的和”这方面是不是也扮演着这种既简单又基本的角色呢? 这就得看一看能否用阶梯函数的从 a 到 b 的和去无限逼近一般性的“函数从 a 到 b 的和”了。

现在让我们使用几个简单的实例来试试看。

例 3.3 假设物体以初速度 u, 加速度 $a > 0$ 在直线上运动，于是物体在任何时刻 t 的速度是 $v = f(t) = u + at$, 求物体从 $t = 0$ 到 $t = T$ 时所经过的距离，即求速度函数 $f(t)$ 在时间间隔 $[0, T]$ 上的和.

分析： 一个自然的作法是用两个阶梯函数 $g_n(t)$ 和 $G_n(t)$ 把上述函数 $f(t) = u + at$ 夹逼在中间，即

$$g_n(t) \le f(t) \le G_n(t)$$

对于任何 $0 \le t \le T$ 都成立，那么由性质 1，$g_n(t)$ 从 0 到 t 的和 $\le f(t)$ 从 0 到 T 的和 $\le G_n(t)$ 从 0 到 T 的和。

如果能使 $g_n(t)$ 从 0 到 T 的和与 $G_n(t)$ 从 0 到 T 的和，当 $n \to \infty$ 时的极限相同，则由上述夹逼关系就可以看出 $f(t)$ 从 0 到 T 的和必须等于这个共同极限.

下面就是把上述想法付诸实践的具体做法之一。

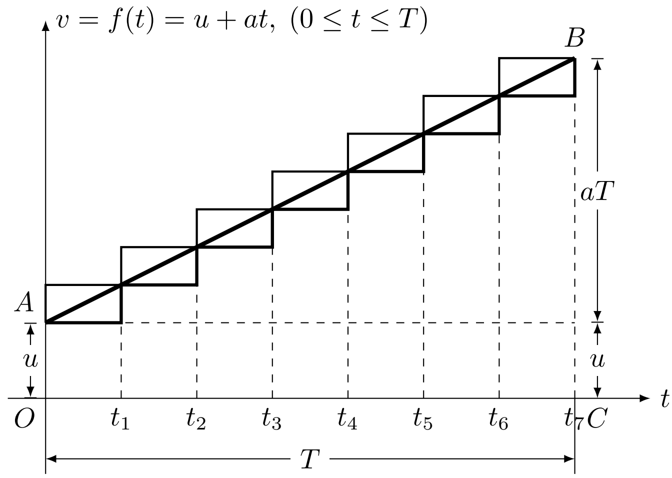


图 3.9

解:

1. 把时间间隔 n 等分，取分点 $t_i = \dfrac{i}{n}T,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$, 于是在每个分点 $t_i = \dfrac{i}{n}T$ 处的速度分别是

   $f(t_0) = f(0) = u,\ f(t_1) = u+at_1,\ f(t_3) = u+at_2, \ldots, f(t_n) = f(T) = u+aT$

2. 用阶梯函数近似代替 $v = f(t) = u + at$.

   假设物体在时间的每个小区间 $[t_i, t_{i+1}],\ i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ 内，以小区间起点处的速度作匀速运动，我们得到一个速度的阶梯函数

   $$g_n(t) = f(t_i) = u + at_i, \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

   因为 $f(t) = u + at$ 是严格递增的，所以 $g_n(t)$ 有以下性质:

   $$g_n(t) = f(t_i) \le f(t), \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

   从而，对于任何 $0 \le t \le T$，有 $g_n(t) \le f(t)$.

   假设物体在时间的每个小区间 $[t, t+1],\ i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ 内，以小区间终点处的速度作匀速运动，我们得到另一个速度的阶梯函数

   $$G_n(t) = f(t_{i+1}) = u + at_{i+1}, \quad t_i < t \le t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

   由于 $f(t) = u + at$ 是递增的，所以 $G(t)$ 有以下性质

   $$G_n(t) = f(t_{i+1}) \ge f(t), \quad t_i < t \le t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

从而对于任何 $0 \le t \le T$，有

$$G_n(t) \ge f(t)$$

这样，我们就得到了 $v = f(t)$ 的夹逼阶梯函数：

$$g_n(t) \le f(t) \le G_n(t), \quad 0 \le t \le T$$

(在图 3.8 中，绘出了 $f(t) = u + at$ 的图象和当 $n = 7$ 时阶梯函数 $g_7(t)$ 和 $G_7(t)$ 的图象.)

3. 求阶梯函数的总和

应用基本性质 2, 我们得到 $g_n(t)$ 从 0 到 T 的和

$$f(t_0)(t_1 - t_0) + f(t_1)(t_2 - t_1) + \cdots + f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})$$

$$\because \quad t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_n - t_{n-1} = \frac{T}{n}$$

因此：

$$\begin{aligned}
g_n(t) \text{ 从 } 0 \text{ 到 } T \text{ 的和} &= [f(t_0) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1})] \cdot \frac{T}{n} \\
&= [u + (u + at_1) + (u + at_2) + \cdots + (u + at_{n-1})] \cdot \frac{T}{n} \\
&= [nu + a(t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1})] \cdot \frac{T}{n} \\
&= \left[nu + a\left(\frac{T}{n} + \frac{2T}{n} + \cdots + \frac{(n-1)T}{n}\right)\right] \cdot \frac{T}{n} \\
&= uT + a \cdot [1 + 2 + \cdots + (n-1)] \left(\frac{T}{n}\right)^2 \\
&= uT + a \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{T^2}{n^2} \\
&= uT + \frac{1}{2}aT^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_n(t) \text{ 从 } 0 \text{ 到 } T \text{ 的和} &= f(t_1)(t_1-t_0)+f(t_2)(t_2-t_1)+\cdots+f(t_n)(t_n-t_{n-1}) \\
&= [f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_n)]\cdot\frac{T}{n} \\
&= [(u+at_1)+(u+at_2)+\cdots+(u+at_n)]\cdot\frac{T}{n} \\
&= \left[nu+a\left(\frac{T}{n}+\frac{2T}{n}+\cdots+\frac{nT}{n}\right)\right]\cdot\frac{T}{n} \\
&= uT+a\cdot(1+2+\cdots+n)\cdot\left(\frac{T}{n}\right)^2 \\
&= uT+\frac{1}{2}aT^2\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

综合上述计算和基本性质 1, 即得：$g_n(t)$ 从 0 到 T 的和 $\leq f(t)$ 从 0 到 T 的和 $\leq G_n(t)$ 从 0 到 T 的和，即

$$uT+\frac{1}{2}aT^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq f(t)\text{从 } 0 \text{ 到 } T \text{ 的和} \leq uT+\frac{1}{2}aT^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

4. 求阶梯函数和式的极限.

因为

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left\{uT+\frac{1}{2}aT^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{uT+\frac{1}{2}aT^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \\
&= uT+\frac{1}{2}aT^2
\end{aligned}$$

所以，这个共同的极限值 $uT+\frac{1}{2}aT^2$ 就是物体在变速 $v=f(t)=u+at$ 运动下，从 $t=0$ 到 $t=T$ 所走的距离，也就是函数 $v=f(t)=u+at$ 从 $t=0$ 到 $t=T$ 的和.

从几何上看，上述极限值 $uT+\frac{1}{2}aT^2=\frac{u+(u+aT)T}{2}$ 就是在图 3.8 中的梯形 $OABC$ 的面积.

例 3.4　设函数 $f(x)=x^2$, $a=0$, $b>0$, 求 $f(x)$ 由 0 到 b 的和，相应地，求抛物线 $y=x^2$ 在线段 $[0,b]$ 上所盖的曲边三角形 OBC 的面积（图 3.9）.

解：

1. 把线段 $[0,b]$ n 等分，等分点的坐标是 $x_i=\frac{b}{n}i$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$

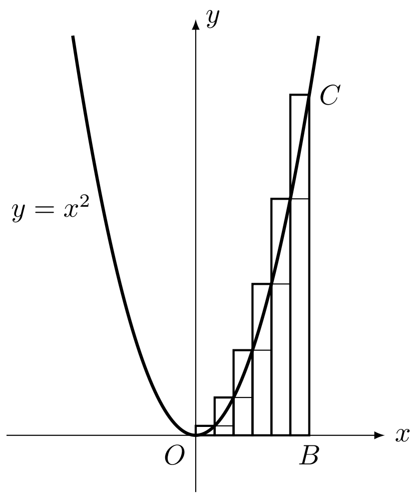


图 3.10

2. 作阶梯函数 $g_n(x)$ 和 $G_n(x)$.

根据 $f(x) = x^2$ 在 $x > 0$ 时递增，定义

$$g_n(x) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^2 i^2, \quad x_i \le x < x_{i+1}$$
$$G_n(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^2 (i+1)^2, \quad x_i < x \le x_{i+1}$$

其中，$i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$。于是，$g_n(x) \le f(x) \le G_n(x), \quad 0 \le x \le b$

3. 求阶梯函数的和

$$\begin{aligned}
s_n &= g_n(x)\text{从 } 0 \text{ 到 } b \text{ 的和} \\
&= f(x_0) \cdot \frac{b}{n} + f(x_1) \cdot \frac{b}{n} + \cdots + f(x_{n-1}) \cdot \frac{b}{n} \\
&= \{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\} \cdot \frac{b}{n} \\
&= \left\{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right\} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^3 \\
&= \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^3 = \frac{b^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_n = G_n(x) \text{ 从 } 0 \text{ 到 } b \text{ 的和} &= \{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\}\cdot\frac{b}{n}\\
&=\{1^2+2^2+\cdots+n^2\}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^3\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^3\\
&=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

综合上述计算和性质 1，有：

$$
\begin{aligned}
\frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=s_n &\le \begin{bmatrix}\text{函数 } f(x)=x^2 \text{ 从 } 0 \text{ 到 } b \text{ 的和，}\\ \text{相应的曲边三角形 } OBC \text{ 的面积}\end{bmatrix}\\
&\le S_n=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

4. 令 $n\to\infty$，求阶梯函数和式的极限。因为

$$
\begin{aligned}
&\frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\to\frac{b^3}{3}\qquad(n\to\infty)\\
&\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\to\frac{b^3}{3}\qquad(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

所以 $\frac{1}{3}b^3$ 是能被 s_n、S_n 左、右夹逼的唯一实数，而所求的“$f(x)=x^2$ 从 0 到 b 的和”以及“曲边三角形 OBC 的面积，”这两个值都是夹逼在 s_n 和 S_n 中间的实数，故它们都等于 $\frac{1}{3}b^3$.

推论

$f(x)=x^2$ 从 a 到 b 的和 $=\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{3}a^3\quad(b>a>0)$.

例 3.5　设 $y=f(x)$ 是一个定义在 $[a,b]$ 上的递增连续函数，试说明它从 a 到 b 的和是可以确定的。

解：

1. 取 $[a,b]$ 之间的 n 等分点，将它分成 n 段，即有

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

它的第 i 段是 $[x_{i-1},x_i]$，且 $x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$，$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$

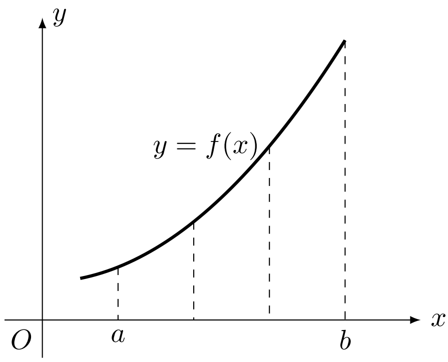


图 3.11

2. 定义 $f(x)$ 的上、下夹逼阶梯函数如下:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= f(x_{i-1}), \qquad x_{i-1} \le x \le x_i \\ G_n(x) &= f(x_i), \qquad x_{i-1} \le x \le x_i \end{aligned} (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

由 $f(x)$ 的递增性，对于任何一个 $x \in [a, b]$，有

$$g_1(x) \le g_2(x) \le \cdots \le g_n(x) \le \cdots \le f(x) \le \cdots \le G_n(x) \le \cdots \le G_2(x) \le G_1(x)$$

简写成

$$g_n(x) \le f(x) \le G_n(x), \qquad a \le x \le b$$

3. 求相应的阶梯函数从 a 到 b 的和

$$\begin{aligned} s_n = g_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} &= \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right] \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} S_n = G_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} &= \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right] \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \end{aligned} \tag{3.2}$$

由性质 1, 有:

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \cdots < f(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} < \cdots < S_n < \cdots < S_2 < S_1$$

简写成

$$s_n < f(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} < S_n \tag{3.3}$$

在例 3.3, 例 3.4 中, $f(x)$ 有明确的解析式, 我们可以用求和公式直接求出 s_n 和 S_n 的表达式，从而可以得出它们的共同极限值，在这里，我们只知道 $f(x)$ 的递增性, 当然无法将和式 s_n 和 S_n 进一步化简, 但是我们可以说明, 当 $n \to \infty$ 时，$S_n - s_n \to 0$.

事实上，

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{b-a}{n}[f(x_n) - f(x_0)] = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，$S_n - s_n \to 0$.

又 $f(x)$ 从 a 到 b 的和是介于 s_n 和 S_n 中间的唯一实数，此

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = f(x) \text{ 从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和}$$

以上简单明了的分析，说明了下面两点互相关联的事实：

1. 当函数 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 上递增时，则它从 a 到 b 的和可以用上述两个夹逼阶梯函数从 a 到 b 的和去无限逼近.

2. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, 我们可以用 $f(x)$ 的上、下夹逼阶梯函数序列，即：$g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_n(x) \leq \cdots \leq f(x) \leq \cdots \leq G_1(x) \leq \cdots \leq G_2(x) \leq G_1(x)$, $(a \leq x \leq b)$ 的从 a 到 b 的和的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 作为上述 $f(x)$ 从 a 到 b 的和的数量化定义。

定义 1

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增连续函数，将 $[a,b]$ 等分成 n 段，分点坐标 $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, 则存在两个阶梯函数：

$$g_n(x) = f(x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq x < x_i$$

和

$$G_n(x) = f(x_i), \quad x_{i-1} < x \leq x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

满足下面的性质：

1. 对于任何 $x \in [a,b]$，$g_n(x) \leq f(x) \leq G_n(x)$

2. 相应的阶梯函数从 a 到 b 的和

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}), \qquad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

当 $n \to \infty$ 时，$S_n - s_n \to 0$，那么 $f(x)$ 从 a 到 b 的和是 s_n 与 S_n 的共同极限，即：

$$\begin{aligned} f(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} &= \frac{b-a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \end{aligned}$$

同样地，如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递减连续函数。那么将 $[a,b]$ n 等分，分点坐标 $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, 这时有两个阶梯函数

$$g_n(x) = f(x_i), \quad x_{i-1} < x \le x_i$$

和

$$G_n(x) = f(x_{i-1}), \quad x_{i-1} \le x < x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

满足下面的性质：

1. 对于任何 $x \in [a,b]$，$g_n(x) \le f(x) \le G_n(x)$
2. 相应的阶梯函数 $g_n(x)$ 与 $G_n(x)$ 相应的和

$$s_n = g_n\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$S_n = G_n\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

当 $n \to \infty$ 时，$S_n - s_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] \to 0$，即：

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

定义 2

递减连续函数从 a 到 b 的和为上述夹逼阶梯函数 $g_n(x)$ 和 $G_n(x)$ 从 a 到 b 的和的共同极限，即

$$\begin{aligned} f(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

通常我们把递增或递减的函数合称为单调函数，常见的函数 $f(x)$ 都是分段单调连续的，例如，$y=\sin x$ 本身虽然不是单调的，但是它在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbb{Z})$ 这些区间的每一段是递增的；而在 $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbb{Z})$ 这些区间的每一段是递减的。因此，对于一般在 $[a,b]$ 上连续的函数，如果存在有限个分点使得 $f(x)$ 在每个分段上都是单调的，我们可以逐段取上、下夹逼阶梯函数，合起来作为定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 的阶梯函数，于是得出

$$g_n(x)\le f(x)\le G_n(x),\qquad x\in[a,b]$$

又因为有限个在分段上趋于 0 的量的和仍趋于 0, 所以

$$\text{“}G_n(x)\text{ 从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和”} - \text{“}g_n(x)\text{ 从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和”} \to 0$$

总结以上讨论，我们叙述为存在定理和定义如下：

定理

设 $y=f(x)$ 是一个定义在 $[a,b]$ 上分段单调函数，则存在满足下列性质的两系列阶梯函数：

$$g_n(x)\le f(x)\le G_n(x),\qquad x\in[a,b]$$

而且当 $n\to 0$ 时，“$G_n(x)$ 从 a 到 b 的和，”与“$g_n(x)$ 从 a 到 b 的和”趋于共同极限。

定义 3

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，如果存在有限个分点：

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_k<\cdots<a_1=b$$

使得 $f(x)$ 在每个分段 $[a_{k-1}, a_k]$ 都是单调的，再将每个分段 $[a_{k-1}, a_k]$ 都 n 等分，则当 $n \to \infty$ 时，有

$$f(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 - a_0}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \lim_{n\to\infty} \frac{a_2 - a_1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} f(x_i) + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{a_\ell - a_{\ell-1}}{n} \sum_{i=\ell(n-1)+1}^{\ell n} f(x_i)$$

为了说明上述定义是合理的，我们就得证明上述 $f(x)$ 从 a 到 b 的和与夹逼的阶梯函数列 $\{G_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 的选取无关，其证明如下：

证明： 设 $\{\bar{G}_m(x)\}$ 和 $\{\bar{g}_m(x)\}$ 是另外一组满足存在定理的上、下夹逼函数列，则由下述不等式

$$g_n(x) \le f(x) \le G_n(x), \quad \bar{g}_m(x) \le f(x) \le \bar{G}_m(x), \qquad a \le x \le b$$

即有

$$g_n(x) \le \bar{G}_m(x), \qquad \bar{g}_m(x) \le G_n(x)$$

所以由基本性质 1，有

$$s_n = g_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} \le \bar{G}_m(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} = \bar{S}_m$$

$$\bar{s}_m = \bar{g}_m(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} \le G_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} = S_n$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{m\to\infty} \bar{S}_m, \qquad \lim_{m\to\infty} \bar{s}_m \le \lim_{n\to\infty} S_n$$

但是

$$\lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{m\to\infty} \bar{S}_m = \lim_{m\to\infty} \bar{s}_m \le \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

所以上述极限必须相等，即：

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{m\to\infty} \bar{S}_m = \lim_{m\to\infty} \bar{s}_m = \lim_{n\to\infty} S_n$$

例 3.6 求 $f(x) = 2x - x^2$ 从 0 到 2 的和.

解： 由 $f'(x) = 2 - 2x$, $f''(x) = 2$ 知 $f(1) = 2 - 1 = 1$ 是 $f(x)$ 的极大值，并且 $y = 2x - x^2$ 在 $[0, 1]$ 上递增，在 $[1, 2]$ 上递减，于是，我们把区间 $[0, 1]$ 和 $[1, 2]$ 都 n 等分，设分点坐标 $x_i = \dfrac{i}{n}$，$i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, 即有

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1 < x_{n+1} < x_{n+2} < \cdots < x_{2n} = 2$$

且 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}$，由定义 3 得到：

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 2x - x^2 \text{从 0 到 2 的和} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[2\left(\frac{i}{n}\right) - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right] + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} \left[2\left(\frac{i}{n}\right) - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} 2\left(\frac{i}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} i - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} i^2 \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(2n+1)2n}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right) \\
&= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

练习

1. 已知质点的运动速度 $v = t + 4$，试求质点在前 10 秒内所走的路程。
2. 求 $f(x) = x^3$ 在 $1 \le x \le 2$ 上的和。

第二节　定积分的定义和基本性质

一、定积分定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，如果存在有限个分点

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{\ell-1} < a_\ell = b$$

使得 $f(x)$ 在每个分段 $[a_{k-1}, a_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, \ell)$ 上都是单调的，我们把 $f(x)$ 从 a 到 b 的和叫做 $f(x)$ 从 a 到 b 的**定积分**，并记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这里,积分符号所使用的是长 S 形的求和号的变形,而从部分区间长 $\Delta x_i = \dfrac{a_k - a_{k-1}}{n}$ 过渡到极限，则通过字母 d 来表示。

我们把数 a 与 b 称为**积分限**（a 称为**下限**，b 称为**上限**）。区间 $[a,b]$ 称为**积分区间**，函数 $f(x)$ 称为**被积函数**，乘积 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，定积分符号下出现的字母 x 叫做**积分变量**。

上述定积分定义用定积分符号表示就是：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{t}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 $\displaystyle\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 为单调的第 k 个分段 $[a_{k-1},a_k]$ 上的夹逼阶梯函数 $g_n(x)$ 和 $G_n(x)$ 从 a_{k-1} 到 a_k 的和的共同极限，即：

$$\begin{aligned}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_k-a_{k-1}}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_k-a_{k-1}}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\end{aligned}$$

定积分定义的另一种表述形式是：设函数 $f(x)$ 在 $a\le x\le b$ 上分段单调连续，如果存在两系列上、下夹逼阶梯函数 $\{g_n(x)\}$, $\{G_n(x)\}$, 使得

$$g_n(x)\le f(x)\le G_n(x),\qquad a\le x\le b$$

并且 $g_n(x)$ 从 a 到 b 的和 s_n 与 $G_n(x)$ 从 a 到 b 的和 S_n 具有相同的极限，这个极限叫做 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

综上所述，在积分符号中，我们只对 $a<b$, 即积分下限小于积分上限的情形给出了定义，若 $a>b$，我们定义

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

此外，由于定积分可以解释为曲边梯形的面积，自然可以定

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

作了这样的规定之后，不论 $a<b$, $a>b$ 或 $a=b$, 定积分都有意义了。

练习

1. 求证 $\displaystyle\int_a^b kx\,\mathrm{d}x = \frac{kb^2}{2}-\frac{ka^2}{2}\quad (a<b)$

2. 求 $\displaystyle\int_{8}^{0}\left(x^{2}-4x\right)\,\mathrm{d}x$

3. 求 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(x^{3}-3x\right)\,\mathrm{d}x$

二、逼近法求曲线形的面积

任意一条曲线围成的图形（图 3.11）常常可以用两组互相垂直的直线把它分成若干部分，每一部分都是一个曲边梯形（图 3.12），在这里并不排除下述情形（图 3.13）：两条平行的边中有一条缩成了一点，因而曲边梯形变成了曲边三角形，这样一来，我们的问题就化成了求曲边梯形面积的问题。

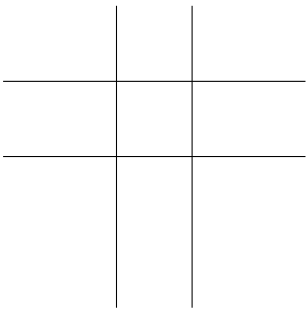


图 3.12

图 3.13

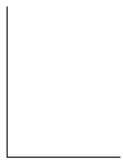


图 3.14

命题

设 $y=f(x)$ 是定义在 $a\leq x\leq b$ 的分段单调连续函数，而且 $f(x)\geq 0$，则区域 $R=\{a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$ 的面积等于

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明： 由 $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义得知，存在两系列阶梯函数 $\{g_n(x)\}$ 和 $\{G_n(x)\}$，满足下面的性质：

$$g_n(x)\leq f(x)\leq G_n(x)$$

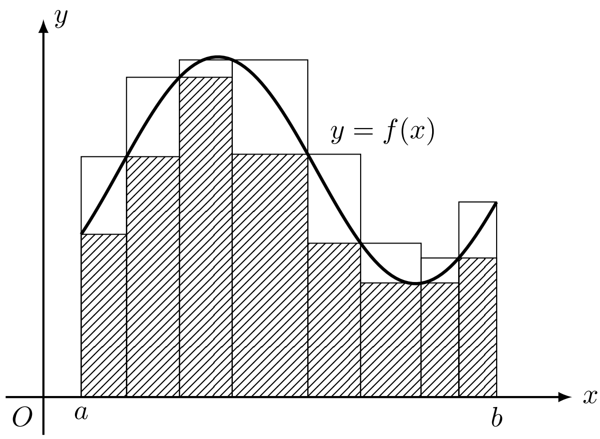


图 3.15

而且 $G_n(x)$ 从 a 到 b 的和与 $g_n(x)$ 从 a 到 b 的和趋于共同的极限 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 令

$$R_n = \{a \le x \le b,\ 0 \le y \le g_n(x)\}$$
$$R'_n = \{a \le x \le b,\ 0 \le y \le G_n(x)\}$$

它们都是由高高低低的狭长方形所组成的区域（图 3.14），则：

$$R_n \subset \text{曲边梯形区域} R \subset R'_n$$

而且

$$R_n\text{的面积} = g_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} s_n, \qquad R'_n\text{的面积} = G_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} S_n$$

即有

$$s_n < \text{曲边梯形区域 } R \text{ 的面积} A < S_n$$

由定积分定义有：

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

又曲边梯形面积 $A = (f,\ [a,b])$ 也是夹逼在 s_n 和 S_n 中间的实数，所以

$$A = (f,\ [a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

练习

1. 求 $\int_{-2}^{1} e^x \,\mathrm{d}x$.

   提示：$\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$.

2. 求在 $x=0$ 与 $x=\pi$ 间正弦曲线 $y=\sin x$ 与 Ox 轴所包的面积。

三、定积分的基本性质

为简单起见，我们约定以下被积函数在积分区间上连续并且可以分段单调，即 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上连续并且只有有限个极大值和极小值的函数。

性质 1

若 $a<b<c$，那么，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明： 因为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，故对于在 $[a,b]$ 上的 $f(x)$，存在一组上、下夹逼函数列 $\{g_n(x)\}$ 和 $\{G_n(x)\}$，使得

$$g_n(x)\le f(x)\le G_n(x),\qquad x\in[a,b]$$

且相应的阶梯函数在 $[a,b]$ 上的和 s_n 与 S_n 适合

$$s_n<\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<S_n,\qquad S_n-s_n\to 0 \tag{3.4}$$

对于在 $[b,c]$ 上的 $f(x)$，同样得到

$$\bar{g}_n(x)\le f(x)\le \bar{G}_n(x),\qquad x\in[b,c]$$

且

$$\bar{s}_n<\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x<\bar{S}_n,\qquad \bar{S}_n-\bar{s}_n\to 0 \tag{3.5}$$

(3.4) + (3.5) 得到

$$s_n+\bar{s}_n<\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x<S_n+\bar{S}_n \tag{3.6}$$

另一方面，对于函数 $f(x)$ $(a \le x \le c)$ 存在下面一组阶梯函数列：

$$\tilde{g}_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & a \le x \le b \\ \max\left(g_n(b), \bar{g}_n(b)\right), & x = b \\ \bar{g}_n(x), & b < x \le c \end{cases}$$

$$\tilde{G}_n(x) = \begin{cases} G_n(x), & a \le x \le b \\ \max\left(G_n(b), \bar{G}_n(b)\right), & x = b \\ \bar{G}_n(x), & b < x \le c \end{cases}$$

由性质 2，阶梯函数列 $\tilde{g}_n(x)$ 与 $\tilde{G}_n(x)$ 的从 a 到 c 的和分别是 $s_n + \bar{s}_n$ 和 $S_n + \bar{S}_n$。因为 $\tilde{g}_n(x)$ 与 $\tilde{G}(x)$ 满足条件：

1. $\tilde{g}_n(x) \le f(x) \le \tilde{G}(x), \quad a \le x \le c$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left[(S_n + \bar{S}_n) - (s_n + \bar{s}_n)\right] &= \lim_{n\to\infty} \left[(S_n - s_n) + (\bar{S}_n - \bar{s}_n)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) + \lim_{n\to\infty} (\bar{S}_n - \bar{s}_n) = 0 \end{aligned}$$

所以根据定积分定义得到

$$\lim_{n\to\infty} (S_n + \bar{S}_n) = \lim_{n\to\infty} (s_n + \bar{s}_n) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

因为 $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 都是被 $s_n + \bar{s}_n$ 与 $S_n + \bar{S}_n$ 所夹逼的唯一实数，所以

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2

若 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$，则：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明： 设 $\{g_n(x)\}$ 与 $\{G_n(x)\}$ 是 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下夹逼阶梯函数列，又 $\{\bar{g}_n(x)\}$ 与 $\{\bar{G}_n(x)\}$ 是 $f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下夹逼阶梯函数列。$s_n, S_n, \bar{s}_n, \bar{S}_n$

是相应的阶梯函数从 a 到 b 的和。于是由 $\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$ 的存在，得：

$$g_n(x) \leq f_1(x) \leq G_n(x), \qquad a \leq x \leq b \tag{3.7}$$

$$\bar{g}_n(x) \leq f_2(x) \leq \bar{G}_n(x), \qquad a \leq x \leq b \tag{3.8}$$

并且

$$s_n < \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x < S_n, \quad 且 S_n - s_n \to 0 \tag{3.9}$$

$$\bar{s}_n < \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x < \bar{S}_n, \quad 且 \bar{S}_n - \bar{s}_n \to 0 \tag{3.10}$$

由 $(3.9) + (3.10)$，得到

$$s_n + \bar{s}_n < \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x < S_n + \bar{S}_n \tag{3.11}$$

另一方面，由 $(3.7) + (3.8)$，得到

$$g_n(x) + \bar{g}_n(x) \leq f_1(x) + f_2(x) \leq G_n(x) + \bar{G}_n(x), \qquad a \leq x \leq b$$

而且，$g_n(x) + \bar{g}_n(x)$ 与 $G_n(x) + \bar{G}_n(x)$ 也是在 $[a, b]$ 上的阶梯函数，我们要说明它们是 $f_1(x) + f_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一组夹逼阶梯函数列。

因为：

$$\begin{aligned} g_n(x) + \bar{g}_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} &= [g_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和}] + [\bar{g}_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和}] \\ &= s_n + \bar{s}_n \\ G_n(x) + \bar{G}_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和} &= [G_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和}] + \big[\bar{G}_n(x)\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的和}\big] \\ &= S_n + \bar{S}_n \end{aligned}$$

而且

$$\big(S_n + \bar{S}_n\big) - (s_n + \bar{s}_n) = (S_n - s_n) + \big(\bar{S}_n - \bar{s}_n\big) \to 0 \tag{3.12}$$

所以，由 $\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x$ 的定义，得到

$$\lim_{n\to\infty} \big(S_n + \bar{S}_n\big) = \lim_{n\to\infty} (s_n + \bar{s}_n) = \int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

由 (3.10) 和 (3.13)，$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$ 是被 $s_n + \bar{s}_n$ 与 $S_n + \bar{S}_n$ 所夹逼的唯一实数，所以

$$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

此法则的证明大致和性质 2 的证明相同，即当 $\{g_n(x)\}$ 和 $\{G_n(x)\}$ 上、下夹逼 $f(x)$ 时，那么在 $k>0$ 的情形，$\{kg_n(x)\}$ 和 $\{kG_n(x)\}$ 上、下夹逼 $kf(x)$; 在 $k<0$ 的情形，$\{kg_n(x)\}$ 和 $\{kG_n(x)\}$ 上、下夹逼 $kf(x)$. 我们把证明的过程留给读者去写。

性质 4

若 $m \le f(x) \le M$, $a \le x \le b$，那么

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

证明： 设 $\{g_n(x)\}$ 与 $\{G_n(x)\}$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的夹逼阶梯函数列，s_n 与 S_n 是相应的阶梯函数在 $[a,b]$ 上的和，根据积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

换言之，任给一个正数 ε，存在自然数 N，使得当 $n<N$ 时，有

$$S_n < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \tag{3.14}$$

成立。

又由于 $G_n(x) \ge f(x) \ge m, \quad x\in[a,b]$，根据性质 1，得到：

$$S_n \ge m(b-a) \tag{3.15}$$

所以，当 $n>N$ 时，由 (3.14) 和 (3.15)，有

$$m(b-a) \le S_n < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

即

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \tag{3.16}$$

成立。

因为这个不等式 (3.16) 对于每个正数 ε 都成立，所以

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

同样证明，得到

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

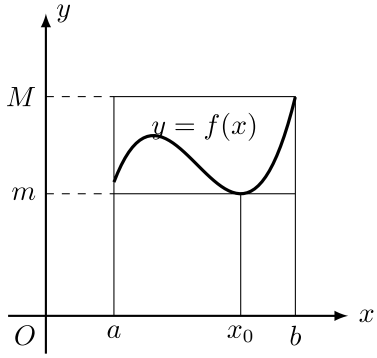


图 3.16

从几何图形来看，以曲线 $y=f(x)$ 为一边而以线段 $[a,b]$ 为底边的曲边梯形界于以 $[a,b]$ 为底边，高分别等于 m 和 M 的两个矩形之内，故曲边梯形的面积 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在两个矩形面积 $m(b-a)$ 和 $M(b-a)$ 之间（图 3.14）。

这个性质是说分段单调的连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分是有界的。

性质 5

如果 $f(x) \leq \varphi(x)$，$a \leq x \leq b$，那么：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

证明： 设 $\{g_n(x)\}$ 与 $\{G_n(x)\}$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的夹逼阶梯函数列，又 $\{\bar{g}_n(x)\}$ 与 $\{\bar{G}_n(x)\}$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的夹逼阶梯函数列，又 $s_n, S_n, \bar{s}_n, \bar{S}_n$ 是相应的

阶梯函数从 a 到 b 的和。于是根据定积分的定义，有：

$$s_n < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < S_n, \qquad \bar{s}_n < \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \bar{S}_n$$

当 $n \to \infty$ 时，得到：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

换言之，任给正数 ε，存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，有

$$s_n > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}$$

当 $n > N_2$ 时，有

$$\bar{s}_n < \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

因为 $\bar{G}_n(x) > \varphi(x) > f(x) > g_n(x), \quad x \in [a,b]$，根据性质 1，得到：$\bar{S}_n = s_n$.

所以，当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时，有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < s_n + \frac{\varepsilon}{2} < \bar{S}_n + \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

因为这个不等式对于每个正数 ε 都成立，所以必然有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 6：定积分中值定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上分段单调连续，又 $m = f(c)$, $M = f(d)$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ, 使得下面的等式成立：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证明： 因为 $m \le f(x) \le M, \quad x \in [a,b]$, 由性质 4, 即得

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

上面不等式的两端各除以 $(b-a)$, 得

$$f(c)=m\leq\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}\leq M=f(d)$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 再由连续函数的中间值定理, 必存在一个 $\xi\in(c,d)$, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

两边再乘以 $(b-a)$，得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

这就是我们所要证明的。

这个公式的几何意义是：以线段 $[a,b]$ 为底边，以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形，它的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积（图 3.15）。因此，$f(\xi)$ 称为曲边梯形的平均高度。

我们也称

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值。

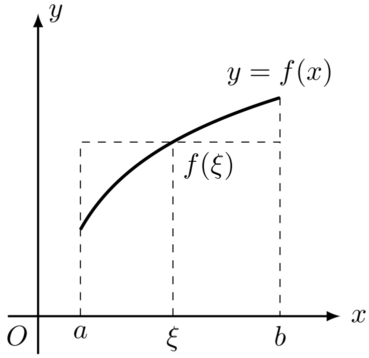


图 3.17

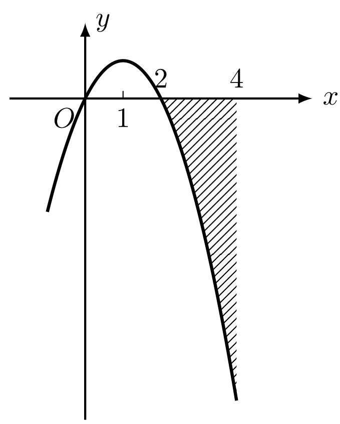


图 3.18

例 3.7　求 $\displaystyle\int_2^4(2x-x^2)\,\mathrm{d}x.$

解： 根据本节的定积分计算法则得：

$$\begin{aligned}\int_2^4 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_2^4 2x\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_2^4 x\,\mathrm{d}x - \int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

利用例 3.4 的计算结果，得

$$\int_2^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{4^2 - 2^2}{2} = 6, \qquad \int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{4^3 - 2^3}{3} = 18\frac{2}{3}$$

因此

$$\int_2^4 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \times 6 - 18\frac{2}{3} = -6\frac{2}{3}$$

它的几何意义是图 3.16 中阴影区域的有号面积。

例 3.8 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的平均值.

解： 由平均值定义，再利用性质 1，有

$$\begin{aligned}f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 1\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + 1\right] = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

练习

1. 利用以前定积分的结果和定积分的性质，计算下列定积分：

(a) $\displaystyle\int_{-1}^3 (2x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x$

(b) 若 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x - 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$，则 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = ?$

(c) 若 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ x-2, & 1<x\le 2 \end{cases}$，则 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=?$

(d) 若 $g(t)=2t^2+|t|-1$，$-1\le t\le 1$，则 $\displaystyle\int_{-1}^1 g(t)\,\mathrm{d}t=?$

2. 将图中阴影部分的面积用定积分表示。

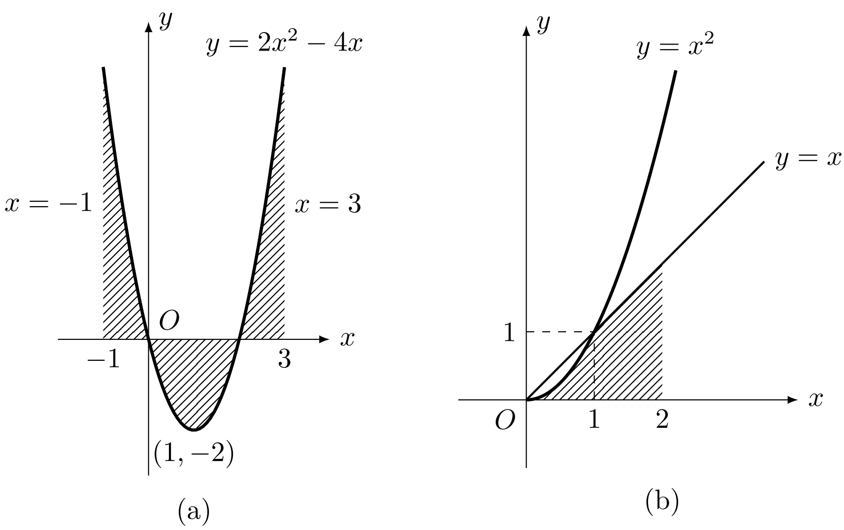
3. 设 $\ell(t)=mt+b$，（m,t 是常数），$t\in[c,d]$，

求证：$\displaystyle\int_c^d (mt+b)\,\mathrm{d}t=\frac{\ell(c)+\ell(d)}{2}(d-c)$

4. 证明：

(a) 若 $0<x<10$，则 $\dfrac{1}{1016}\le\dfrac{1}{x^3+16}\le\dfrac{1}{16}$

(b) $\displaystyle\frac{5}{508}\le\int_0^{10}\frac{1}{x^3+16}\,\mathrm{d}x\le\frac{5}{8}$



第 2 题

习题 3.2

1. 计算下列定积分：

(a) $\displaystyle\int_4^1 |x|\,\mathrm{d}x$　　(b) $\displaystyle\int_4^2 |x|\,\mathrm{d}x$　　(c) $\displaystyle\int_1^4 |x|\,\mathrm{d}x$

2. 求 $\displaystyle\int_a^b |x|\,\mathrm{d}x$.

   提示：分 $a<b<0$, $a<0<b$, $0<a<b$ 三种情况讨论。

3. 证明：

   (a) 若 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，则 $\dfrac{2}{\pi}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

   (b) $\dfrac{1}{2}\le\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 已知作用在作直线运动的质点上的力是 $F=s^2+1$, 试求从距离 1 到 10 之间所作的功.

5. 求 $y=\begin{cases} A\sin\dfrac{2\pi t}{T}, & 0\le t\le\dfrac{T}{2}\\ 0, & \dfrac{T}{2}\le t\le T\end{cases}$ 在 $[0,T]$ 上的平均值。

第四章　微积分学基本定理

在前两章中，我们分别引入了函数的变率（导数），函数的和（定积分）的基本概念，本章将研究函数的导函数与函数的求和函数这两者之间的互逆关系，并说明我们可以用求导函数的逆运算方法来计算定积分。

第一节　微积分学基本定理

一、导函数与求和函数

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的变化率（导数）的定义是

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

显然。$f(x_0)$ 的值与 $f(x)$ 在点 x_0 的值以及在点 x_0 的邻近的函数值有关，当点 x_0 在 (a,b) 内变化时，$f(x_0)$ 也跟着变化，那么 $f(x_0)$ 便是一个新函数称为 $f(x)$ 的导函数。计算一个函数的导函数是一件比较简便的事情。

定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义是把区间 $[a,b]$ 无限细分而得到上下夹逼阶梯函数的和的共同极限，其几何意义是曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a$, $x=b$, 及 $y=0$ 所围成的区域的有号面积。

假如我们考虑 $f(x)$ 在一个变动的区间 $[a,x]$ 上的和，即让区间的左端点固定，右端点变动，则

$$S_f(x) = \text{函数 } f \text{ 从 } a \text{ 到 } x \text{ 的和} = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

可以看作上限变量 x 的函数，在这里，积分符号中的 x 既表示积分变量，又表示积分上限，容易混淆，因此，为了区别起见，我们用字母 t 来代表积分变量，这样上式就写成

$$S_f(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

和函数 $S_f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的值 $S_f(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(t)$, 直线 $t=a$, $t=x_0$, $y=0$ 所围成的区域的有号面积，它是随区域的变动界线 $t=x_0$ 的变动而变动的（图 4.1）。

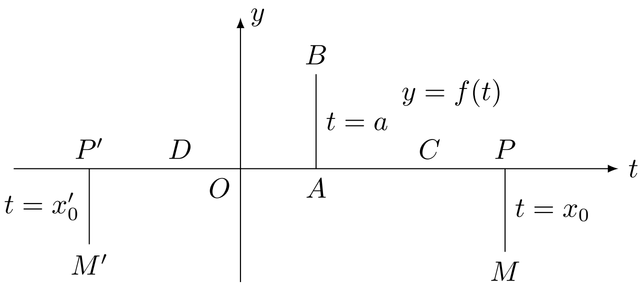


图 4.1

例如，当变动界限（积分上限）在图中的 PM 位置时，则

$$S_f(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = ACB\text{的面积}-CPM\text{的面积}$$

当变动界限在图中的 $P'M'$ 位置时，则

$$\begin{aligned}S_f(x_0')&=\int_a^{x_0'} f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{x_0'}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\\&=-\{-P'DM'\text{的面积}+DAB\text{的面积}\}\\&=P'DM'\text{的面积}-DAB\text{的面积}\end{aligned}$$

例如，折线函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x-1) & x\in[1,2]\\ \dfrac{3}{2}(x-2)+\dfrac{1}{2}(2-1) & x\in[2,3]\\ (x-3)+\dfrac{1}{2}(2-1)+\dfrac{3}{2}(3-2) & x\in[3,4]\end{cases}$$

的导函数（除去在折线段的那些交接点处不作定义外）是阶梯函数

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x\in[1,2)\\ \dfrac{3}{2} & x\in(2,3)\\ 1 & x\in(3,4]\end{cases}$$

反过来，该阶梯函数的和函数，是上述折线函数 $g(x)$, 我们有如下的图解关系：

$$\begin{tikzcd} \{\text{折线函数}\} \arrow[r, bend left, "\text{求导}"] & \{\text{阶梯函数}\} \arrow[l, bend left, "\text{求和}"] \end{tikzcd}$$

上述简明的例子表明“微分”与“积分”（或求函数由 a 到 b 的和）之间的运算关系应该是互逆的。

二、微积分学基本定理

定理 1

设 $f(t)$ 是在 $[a,b]$ 上的分段单调连续函数，又它的和函数是

$$S_f(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x),\qquad a\le x\le b$$

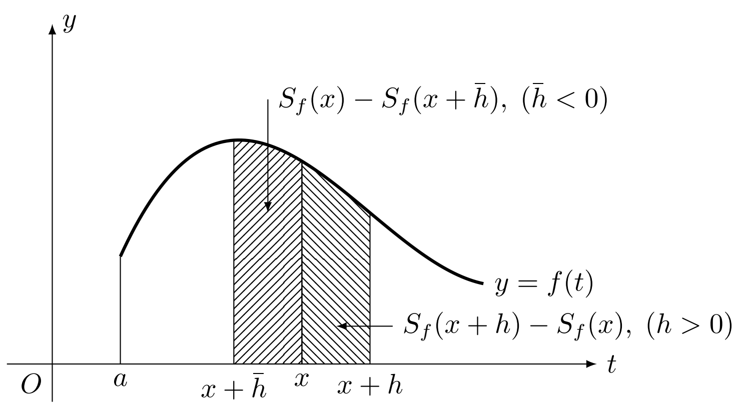


图 4.2

证明： 如图 4.2，设 $h>2$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{S_f(x+h)-S_f(x)}{h} &= \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h}\\
&= \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \qquad (\text{定积分性质 } 1)\\
&= \frac{hf(\xi)}{h} \quad (x<\xi<x+h)\\
&= f(\xi) \qquad (\text{定积分中值定理})
\end{aligned}
$$

于是

$$
\lim_{h\to 0^+}\frac{S_f(x+h)-S_f(x)}{h}=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x) \tag{4.1}
$$

设 $\bar{h}<0$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{S_f(x)-S_f(x+\bar{h})}{\bar{h}} &= \frac{\displaystyle\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x+\bar{h}} f(t)\,\mathrm{d}t}{\bar{h}}\\
&= \frac{\displaystyle\int_{x+\bar{h}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}{\bar{h}} \qquad (\text{定积分性质 } 1)\\
&= \frac{-\bar{h}f(\bar{\xi})}{\bar{h}}=-f(\bar{\xi}) \quad (x+\bar{h}<\bar{\xi}<x)
\end{aligned}
$$

即：

$$
\frac{S_f(x+\bar{h})-S_f(x)}{\bar{h}}=f(\bar{\xi}), \qquad (x+\bar{h}<\bar{\xi}<x)
$$

于是

$$
\lim_{h\to 0^-}\frac{S_f(x+\bar{h})-S_f(x)}{\bar{h}}=\lim_{\bar{\xi}\to x} f(\bar{\xi})=f(x) \tag{4.2}
$$

由 (4.1) 和 (4.2)，得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)
$$

引理

如果两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 满足条件

$$
F'(x)=G'(x), \qquad a\le x\le b
$$

那么

$$G(x)=F(x)+C, \qquad (C\text{是常数})$$

证明： 由 $G'(x)-F'(x)=0$, 得

$$[G(x)-F(x)]'=0$$

根据中值定理（参看第三章）知，对于每一个 $x\in(a,b)$, 恒有

$$G(x)-F(x)=C, \qquad (C\text{是常数})$$

所以

$$G(x)=F(x)+C$$

定义

设 $f(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上给定的函数，如果可微函数 $G(x)$ 满足条件

$$G'(x)=f(x) \qquad (\text{或}\quad \mathrm{d}G(x)=f(x)\,\mathrm{d}x)$$

那么就称 $G(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个**原函数**。

例如，设 $G'(x)=\cos x$, 那么 $G(x)=\sin x$ 就称为 $\cos x$ 的一个原函数。

定理 2

设 $f(x)$ 是给定的分段单调连续函数，如果一个可微函数 $G(x)$ 满足条件

$$G'(x)=f(x) \qquad (\text{或 } \mathrm{d}G(x)=f(x)\,\mathrm{d}x)\ , \quad a\le x\le b \tag{4.3}$$

那么

$$S_f(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=G(x)-G(a)$$

证明： 由定理 1 知，$f(x)$ 的一个原函数存在，就是它的和函数，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)$$

题设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数，故由引理得

$$\int_a^x f(t)dt=G(x)+C \tag{4.4}$$

这里的常数要由条件 $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$ 来确定.

在 (4.4) 中，令 $x=a$，得

$$0=G(a)+C$$

所以：$C=-G(a)$，代入 (4.4)，得

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=G(x)-G(a)$$

在上面等式中，令 $x=b$, 便得到下面著名的莱布尼兹-牛顿公式：

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=G(b)-G(a)$$

这个公式告诉我们，求分段单调连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分可以化简为去求 $f(x)$ 的一个原函数 $G(x)$, 而函数值的差 $G(b)-G(a)$ 就是定积分的值。

例 4.1 设 $f(x)=k$（常数函数），则 $G(x)=kx$ 是一个满足 $G'(x)=k=f(x)$ 的原函数，所以

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}x=kb-ka=k(b-a)$$

以后我们引用一个符号：

$$G(x)\Big|_a^b=G(b)-G(a)$$

例 4.2 设 $f(x)=kx^n$, $(n\in\mathbb{N})$，则

$$G(x)=k\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

是满足 $G'(x)=kx^n$ 的一个原函数，所以

$$\int_a^b kx^n\,\mathrm{d}x=k\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b=\frac{k}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$$

例 4.3 设 $f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ $(x\neq 0,\ n\in\mathbb{N})$，则

$$G(x)=\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$$

是满足 $G'(x) = x^{-n}$ 的一个原函数。要特别注意定理 2 中 $f(x)$ 是连续的条件，在任何包含 0 的区间上，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ 无界，即有第二类间断点，如果 a, b 异号，则定积分 $\displaystyle\int_a^b x^{-n}\,\mathrm{d}x$ 无意义，但若 a, b 同时为正或同时为负，则

$$\int_a^b x^{-n}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right|_a^b = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}$$

当然，又有 $n \neq -1$ 时，上式才能成立。

如果 $n = -1$，依复合函数求导法则，得

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot |x|'$$

若 $x > 0$，则

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

若 $x < 0$，则

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

总之

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_a^b &= \ln|b| - \ln|a| \\ &= \ln\left|\frac{b}{a}\right| = \ln\frac{b}{a} \quad (x \neq 0,\ ab > 0)\end{aligned}$$

例 4.4 求 $\displaystyle\int_1^3 |x-2|\,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}\int_1^3 |x-2|\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 -(x-2)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\right|_1^2 + \left.\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\right|_2^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

例 4.5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n} i^p}{n^{p+1}}\quad (p\in\mathbb{N})$

解：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

练习

1. 用求原函数的方法，计算下列定积分：

   (a) $\displaystyle\int_2^3 \left(x^3+6x^2+4x+1\right)\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{v^2+2}{v^4}\,\mathrm{d}v$

   (c) $\displaystyle\int_{-3}^{-2}\left(x+\frac{2}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_1^{10}\left(x+\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_a^b |x-1|\,\mathrm{d}x$

2. 求曲线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴之间的面积.

3. 设 $y=x(x-1)(x-2)$，求 $\displaystyle\int_0^1 y\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^2 y\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^2 y\,\mathrm{d}x$, 并说明所得结果的几何意义。

4. 求直线 $y=2x$ 和曲线 $y=x^2$ 之间的面积。

5. 求由曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$, $x=4$ 所围成的曲边梯形的面积。

6. 求抛物线方程使它具有以下的性质：

   (a) 抛物线通过 $(0,0)$, $(1,2)$ 两点，

   (b) 它的对称轴平行 y 轴，且向上凸，

   (c) 它与 x 轴所围的面积最小。

7. 求正数 a, 使 $\displaystyle\int_0^1 |x^2-a^2|\,\mathrm{d}x$ 最小。

8. 求下列函数的导数：

   (a) $F(x)=\displaystyle\int_a^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t$

   (b) $F(x)=\displaystyle\int_a^{x^2} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$

第二节　不定积分

由上节的微积分基本定理得知，在 $[a,b]$ 上的两个可微函数 $G_1(x)$ 和 $G_2(x)$ 均以 $f(x)$ 为其导数，则 $G_1(x)$ 与 $G_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上只差一个常数 C. 由此可见，如果 $G'(x)=f(x)$, 且 C 为任意常数，那么 $[G(x)+C]'=G'(x)=f(x)$. 这就是说：如果函数 $f(x)$ 有一个原函数 $G(x)$, 那么就有无穷多个原函数，并且所有原函数刚好组成函数族

$$\{G(x)+C \mid C\text{是任意常数}\}$$

定义

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的原函数全体叫做 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么由不定积分的定义得到

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=G(x)+C$$

其中 C 是任意常数。

关于不定积分，易见有如下性质：

性质 1

积分与微分互为逆运算，即：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x\\ \displaystyle\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C\end{cases}$$

事实上，因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)$，所以

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C \qquad \text{（基本定理 1 和不定积分定义）}$$

于是

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x)$$

从而

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

又

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t + C_1 \\ = f(x) - f(a) + C_1 \quad （基本定理） \\ = f(x) + C\end{aligned}$$

这里 $C = -f(a) + C_1$.

从性质 1 看出，若不要不定积分等式中的任意常数项，则当符号 $\int$ 与 d 紧接着时，无论哪个在前，哪个在后，都可以消掉。

因为微分,积分是两种互逆的运算,所以它们的运算法则是互相对应的,现将它们相对应的法则叙述如下:

性质 2

$$\begin{cases}\mathrm{d}[f(x)+g(x)] = \mathrm{d}f(x) + \mathrm{d}g(x) \\ \int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x + C\end{cases}$$

上面不定积分公式的正确性不难证明，只要求出两边的微商，由于所得到的微商恒等，就可以知道它们只差一个常数项，因为，由性质 1

$$\left(\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) + g(x)$$

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) + g(x)$$

所以 $f(x)+g(x)$ 的两个原函数相差一个常数项，即:

$$\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x + C$$

同理可得:

性质 3

$$\begin{cases}\mathrm{d}[af(x)] = a\,\mathrm{d}f(x) \\ \int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x\end{cases} \qquad (a \neq 0)$$

一、基本积分表

由基本微商公式表，倒转顺序，就可以得到下面这个表：

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C=0,\qquad \int 0\,\mathrm{d}x=C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\mu}=\mu x^{\mu-1},\qquad \int x^{\mu}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$ （μ 是不等于 -1 的实数）
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|=\frac{1}{x},\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C\quad (x\neq 0)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x}=e^{x},\qquad \int e^{x}\,\mathrm{d}x=e^{x}+C$

还因为 $a^x=e^{x\ln a}$，由复合函数求导法则，得：

$$(a^x)'=e^{x\ln a}(x\ln a)'=\ln a\cdot e^{x\ln a}=\ln a\cdot a^x$$

所以：

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^{x}=\ln a\cdot a^{x},\qquad \int a^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x=\cos x,\qquad \int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C.$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x=-\sin x,\qquad \int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C.$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\sec^2 x,\qquad \int\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x+C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x=-\csc^2 x,\qquad \int\csc^2 x\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \int\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=-\arccos x+C'$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x=\frac{1}{x^2+1},\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\arctan x+C$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arccot} x=\frac{-1}{x^2+1},\qquad \int\frac{-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=-\operatorname{arccot} x+C'$

现在来看不定积分的几何意义。

由不定积分的定义知道，求函数 $f(x)=3x^2$ 的原函数全体，就是求不定积分 $\int 3x^2\,\mathrm{d}x$, 也就是求满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2 \tag{4.5}$$

的所有的原函数。

显然，$y=x^3$ 就是微分方程 (4.5) 的一个原函数，它的图象上各点切线的斜率由 (4.5) 确定。我们称曲线 $y=x^3$ 为微分方程 (4.5) 的积分曲线，把它沿 y 轴上下平移任意一段距离，便得到曲线族

$$y=x^3+C \tag{4.6}$$

并且 (4.6) 中任意一条曲线与曲线 $y=x^3$ 在横坐标相同的点的切线平行，其斜率都等于 $3x^2$, 因此，曲线族 (4.6) 是满足微分方程 (4.5) 的所有积分曲线，也就是不定积分 $\int 3x^2\,\mathrm{d}x=x^3+C$ 的几何表示（图 4.3）。

为要确定 (4.5) 的某条积分曲线的位置，应当给出这条积分曲线必须经过的一点，例如它经过点 $P(1,3)$. 我们说这条件也是微分方程 (4.5) 的一个相应的原函数要满足的初值条件 $y\big|_{x=1}=3$ 把它们代入 (4.6), 得到

$$3=1^3+C \quad\Rightarrow\quad C=2$$

因此，满足微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2$ 和初值条 $y\big|_{x=1}=3$ 的原函数或相应的积分曲线是

$$y=x^3+2$$

通常把满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x) \tag{4.7}$$

的所有解叫做给定函数 $f(x)$ 的不定积分，即

$$y=\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

把函数 $f(x)$ 的一个原函数 $y=G(x)$ 的图象叫做微分方程 (4.7) 的一条**积分曲线**，这样，不定积分

$$y=\int f(x)\,\mathrm{d}x=G(x)+C \quad（C\ 为任意常数）$$

的几何意义就表示与 $y=G(x)$ 在各点有相同斜率 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$ 的积分曲线族（图 4.3）.

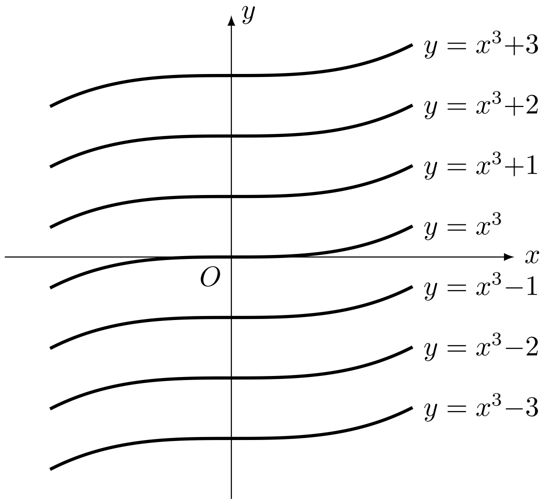


图 4.3

由微积分基本定理 2 知道，如果 $y=G(x)$ 满足下面两个条件：

$$G'(x)=f(x) \quad 且 \quad G(a)=0$$

那么，$y=G(x)$ 就是 $f(x)$ 的求和函数 $G(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$.

例 4.6　求 $\int \sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos(kx)\,\mathrm{d}x, \quad \int e^{kx}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$

解： 因为

$$(\cos kx)'=-k\sin kx$$
$$(\sin kx)'=k\cos kx$$
$$(e^{kx})'=ke^{kx}$$
$$\left(\arctan\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)'=\frac{a}{x^2+a^2}$$

所以

$$\int \sin(kx)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}\cos kx+C$$
$$\int \cos(kx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k}\sin kx+C$$
$$\int e^{kx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k}e^{kx}+C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例 4.7 证明：若 $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C$，则

$$\int f(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx)+C$$

证明： 只须证明 $f(kx)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{k}F(kx)$ 即可。我们求 $\frac{1}{k}F(kx)$ 对 x 的导数，于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{k}F(kx)\right] = \frac{1}{k}F'(kx)\cdot(kx)' = F'(kx)$$

由题设知 $F'(t)=f(t)$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{k}F(kx)\right] = F'(kx) = f(kx)$$

因此

$$\int f(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx)+C$$

例 4.8 求 $\int \sin kx \sin \ell x\,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}\int \sin kx \sin \ell x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}[\cos(k-\ell)x - \cos(k+\ell)x]\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \cos(k-\ell)x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos(k+\ell)x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sin(k-\ell)x}{2(k-\ell)} - \frac{\sin(k+\ell)x}{2(k+\ell)} + C\end{aligned}$$

这里 $k\neq\pm\ell$。(如果 $k=\pm\ell$，则另当考虑)

例 4.9 求 $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 2xc^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 2xc^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}x &= 2a\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - b\int x^{-2}\,\mathrm{d}x + 3c\int x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x\\ &= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}} + C\end{aligned}$$

例 4.10 求 $\int \frac{3x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 3\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 3\int \mathrm{d}x - 3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\
&= 3x - 3\arctan x + C
\end{aligned}
$$

以上各例都是利用不定积分的性质 2、3, 同时配合使用三角恒等式或设法将被积函数拆成几项，从而把一个比较复杂的积分化成若干个可以查基本积分表的积分。

练习

1. 计算下列不定积分:

(a) $\int (x^3+3x+5)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int (x+2)^4\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \left(x^{-2}+x^{-1}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3\,\mathrm{d}x$

(e) $\int \left(\frac{1}{x}+e^x\right)\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,\mathrm{d}x$

(h) $\int \frac{2+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1+x^2\right)}$

(j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(a^2+x^2\right)}$

(k) $\int 3^x e^x\,\mathrm{d}x$

2. 利用三角恒等式, 计算下列不定积分:

(a) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

(e) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \cos kx\cos \ell x\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \sin 2x\cos 5x\,\mathrm{d}x$

(h) $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t\cos^2 t}$

(i) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

(j) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

3. 若 $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$, 求证

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

4. 若 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x - 6$, 且当 $x = 0$ 时，$y = 9$, 求 y 的极小值。

5. 若 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ax + b$, 求原函数 $y = f(x)$ 使其满足下列条件:

   (a) 当 $x = 0$ 时，$y = 5$;

   (b) 积分曲线向下凸且曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上截得的弦长等于 4;

   (c) 曲线 $y = f(x)$ 上纵坐标的最小值等于 -4.

6. 试求一个次数最低的多项式，使之当 $x = 1$ 时，有最大值 6，而当 $x = 3$ 时，有最小值 2.

7. 求下列各式的极限:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^4} + \cdots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n}$

第三节 不定积分的计算方法

从上一节看到，虽然利用积分运算法则及基本积分表可以求出不少函数的原函数，但是实际遇到的积分仅凭这一些方法还不能完全解决，本节将介绍几种典型的方法，利用这些方法，我们就可以计算更多的不定积分，此外，我们还制作了较为详细的积分表，可供使用时查阅。

一、第一换元法

有一些不定积分，将积分变量进行某种变映后就能由基本积分公式求出，例如求 $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x$, 在基本积分公式中只有 $\int e^x\,\mathrm{d}x$, 没有直接求出它的公式，我们看到所求积分的被积函数 e^{2x} 是 $y = e^u$ 和 $u = 2x$ 的复合函数，如果在积分表达式 $e^{2x}\,\mathrm{d}x$ 中，把被积函数看成中间变量 u 的函数，即设 $u = 2x$ 则 $e^{2x} = e^u$, 从而 $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$, 由此可见只要再给微分 $\mathrm{d}x$ 凑上一个常数因子 2, 就

得到中间变量 u 的微分 $\mathrm{d}u$, 于是

$$\int e^{2x}\,\mathrm{d}x=\int e^{2x}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int e^{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

然后再代回原来的积分变量，得

$$\int e^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

例 4.11 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$

解： 因为被积函数 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{1}{a\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}}$ 是 $y=\dfrac{1}{a\sqrt{1-u^2}}$ 和 $u=\dfrac{x}{a}$ 的复合函数，且 $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}x$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\\ \text{令}u=\frac{x}{a}\to&=\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\ \text{查表}\to&=\arcsin u+C\\ u=\frac{x}{a}\to&=\arcsin\frac{x}{a}+C\end{aligned}$$

例 4.12 求 $\displaystyle\int\tan x\,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}\int\tan x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x&=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}\\ u=\cos x\to&=-\int\frac{\mathrm{d}u}{u}\\ &=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C\end{aligned}$$

从上述两例看到，在求不定积分时，首先要与已知的基本积分公式相对比，并利用简单的变量代换, 把要求的积分凑成公式所具有的形式, 求出以后, 再把原来的变量代回。以上变量代换中关键的一步是把原来的被积函数 $f(x)$ 的某部分 $\varphi(x)$ 换成中间变量 u, 那么原来的被积表达式 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 就拆成了 $g[\varphi(x)]=g(u)$ 和 $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ 这两部分的乘积，即

$$f(x)\,\mathrm{d}x=g[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=g(u)\,\mathrm{d}u$$

于是：若 $\int g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$，那么

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C$$

上述换元法叫做第一换元法。

例 4.13 求 $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

解： 设 $u = \cos x$，$\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$，于是

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x &= \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x\\ u=\cos x \to &= -\int (1-u^2)\,\mathrm{d}u\\ &= -u + \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C\end{aligned}$$

对换元积分法较熟练以后，所设换元变量 u 可以不写出。

例 4.14 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}}$

解：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(ax+b)}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$$

例 4.15 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2a}\left[-\int \frac{\mathrm{d}(a-x)}{a-x} + \int \frac{\mathrm{d}(a+x)}{a+x}\right]\\ &= \frac{1}{2a}\left[-\ln|a-x| + \ln|a+x|\right] = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\end{aligned}$$

例 4.16 求 $\int \sec x\,\mathrm{d}x$

解：

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

利用上题结果，得：

$$\begin{aligned}\int \sec x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} + C\\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

例 4.17　求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(\tan^2 x + 3)\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

练习

求下列不定积分：

1. $\displaystyle\int (3x+5)^{100}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \pi e^{-\frac{\pi}{4}x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$
8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$

15. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{b-\sin ax}\,\mathrm{d}x \quad (a \neq 0)$

16. $\displaystyle\int x\sqrt{ax^2+c}\ \mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-6}$

22. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{3x^2+x+2}$

23. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+x+2}$

24. $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x$

25. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

26. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

二、第二换元积分法

有些积分不能很容易地凑出微分，而是一开始就要作代换，把要求的积分化简，然后再求积分。

例 4.18 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

解： 这个积分的表达式不容易拆成中间变量 $u=\varphi(x)$ 的函数 $g(\varphi(x))=g(u)$ 和中间变量的微分 $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ 的乘积，因此前面的第一换元法对此题用起来不便。这时我们设法作一个代换，以便把被积函数中的根号去掉，化成新变量的有理式。

令 $x=u^2$, 即作代换 $\sqrt{x}=u$, 于是

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1+u}$$

$$\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$$

从而

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+u} 2u\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int \frac{(1+u)-1}{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\left[\int \mathrm{d}u - \int \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u\right] \\
&= 2\left[u - \ln|1+u|\right] + C \\
&= 2\left[\sqrt{x} - \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right] + C
\end{aligned}
$$

这里由于把积分变量 x 换成了 u 的函数 $x=u^2$, 因此在最后结果中，用变量 u 表出的函数，还要还原成 x 的函数，这就要求从所作的代换 $x=u^2$ 中解出反函数 $u=\sqrt{x}$ 来.

我们把第二换元积分法用定理形式叙述如下:

定理

设 $x=\varphi(u)$ 是可微函数，且 $\varphi'(u)\neq 0$，若

$$
\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+C \tag{4.8}
$$

那么

$$
\int f(x)\,\mathrm{d}x = F\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C \tag{4.9}
$$

证明： 只须证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F[\varphi^{-1}(x)] = f(x)$ 即可。

因为 $\varphi'(u)\neq 0$，故 $x=\varphi(u)$ 的反函数 $u=\varphi^{-1}(x)$ 存在，于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F[\varphi^{-1}(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F[\varphi^{-1}(x)]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^{-1}(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F(u)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi(u)} \\
&= F'(u)\cdot\frac{1}{\varphi'(u)} \\
&= \{f[\varphi(u)]\varphi'(u)\}\cdot\frac{1}{\varphi'(u)} \\
&= f[\varphi(u)]
\end{aligned}
$$

$$
x=\varphi(u) \to = f(x)
$$

例 4.19 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+\left(\sqrt[6]{x}\right)^2}$$

设 $x=u^6$, $u>0$, 则可化去被积函数中的根号, 于是

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{u^3+u^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 6u^5\,\mathrm{d}u$$

从而

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{6u^3}{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 6\int \left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= 6\left\{\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln|u+1|\right\}+C \\
&= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C
\end{aligned}$$

例 4.20 求 $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解: 设 $3x+1=t^3$, 即 $x=\dfrac{1}{2}(t^3-1)$, 于是: $\mathrm{d}x=t^2\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{3}(t^3-1)+1}{t}t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int (t^4+2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}t^5+t^2\right)+C = \frac{1}{15}(3x+1)^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C \\
&= \frac{1}{5}(x+2)(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C
\end{aligned}$$

上面所介绍的两种变量代换法的基本思想是一致的。第一种是把被积函数中的一个小部分看作一个变量, 即 “化繁为简”; 第二种则把积分变量代以一个新变量的函数, 表面上看来是 “化简为繁”, 但实际上克服了求积分的困难。应当注意, 在使用第二种变量代换法时, 要保证变换是可微的和一对一的, 否则会出现错误.

下面介绍当被积函数含有二次根式 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ 时, 怎样作代换。

例 4.21　求 $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解： 因为

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

所以可作正弦代换

$$\frac{x}{a}=\sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin t$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续且递增，有反函数 $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$，$-1\leq x\leq 1$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x= {}&\mathrm{d}(a\sin t)=a\cos t\,\mathrm{d}t\\ \sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}&=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t\end{aligned}$$

从而：

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int a\cos t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left[\int\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,\mathrm{d}(2t)\right]\\&=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C\\&=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C\right]\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C\end{aligned}$$

例 4.22　求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad (a>0)$.

解： 因为 $\sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$，设 $\dfrac{x}{a}=\tan t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则存在反函数

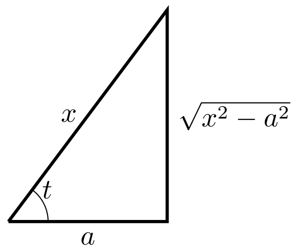
$$t=\arctan\frac{x}{a}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

又 $\sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{1+\tan^2 t}=a\sec t$ ，从而：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{a\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{a\sec t}&=\int\sec t\,\mathrm{d}t\\&=\ln|\sec t+\tan t|+C_1\\&=\ln\left|\frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{x}{a}\right|+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|-\ln a+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C\qquad(C=C_1-\ln a)\end{aligned}$$

例 4.23 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad(a>0)$

解：



作正割代换。设 $x=a\sec t\ \left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，此函数在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 点间断，在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上由 a 递增到 $+\infty$，而在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上由 $-\infty$ 递增到 $-a$。因此，$x=a\sec t$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数是

$$t=\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\qquad\left(1<\frac{x}{a}<\infty,\ \text{即}x>a\right)$$

于是，当 $x>a$ 时，有

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}&=\sqrt{a^2(\sec^2 t-1)}\\&=a\sqrt{\tan^2 t}=a|\tan t|\\&=a\tan t\quad\left(0\le t<\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(a\sec t)=a\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

从而:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a\tan t}\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t+\tan t| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1 - \ln a = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C
\end{aligned}
$$

其中 $C = C_1 - \ln a$.

又函数 $x = a\sec t$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的反函数是

$$t = \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} \qquad \left(-\infty < \frac{x}{a} < -1,\ \text{即} x < -a\right)$$

于是，当 $x < -a$ 时，有

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{\tan^2 t} = a|\tan t| = -a\tan t \qquad \left(\frac{\pi}{2} < t \leq \pi\right)$$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(a\sec t) = a\frac{\sin t}{\cos^2 t}\cdot\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x &= \int -\frac{1}{a\tan t}\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\ln|\sec t+\tan t| + C_2 \\
&= -\ln\left|\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_2 \\
&= -\ln\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_2 + \ln a \\
&= \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right| + C' \qquad (C' = C + \ln a) \\
&= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right| + C' = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C' - \ln a^2 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C'' \qquad (C'' = C' - \ln a^2)
\end{aligned}
$$

因此，不论 $x > a$ 或 $x < -a$，都有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

到现在为止，我们又得到四个重要的不定积分公式:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \tag{4.10}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \tag{4.11}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C \tag{4.12}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C \tag{4.13}$$

利用这些公式可以进一步求出许多不定积分。

类型 A

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

如果被积函数的分母可以分解因式，则把被积函数分解成部分分式，就很容易分项求出不定积分。

如分母不能分解因式，那么将它配方得

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

于是

- 当 $4ac>b^2$ 时，上面不定积分归结到 (4.10);
- 当 $4ac<b^2$ 时，上面不定积分归结到 (4.11).

例 4.24 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+x-1}$.

解:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+x-1} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{13}{36}} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{\frac{13}{36}}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}}{x+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}}\right|+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{6x+1-\sqrt{13}}{6x+1+\sqrt{13}}\right|+C
\end{aligned}$$

类型 B

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

注意到 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax^2+bx+c)=2ax+b$，被积函数的分子可以写成

$$px+q=\frac{p}{2a}(2ax+b)+q-\frac{pb}{2a}$$

于是

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x+\left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

等式右端第一项是 $\dfrac{p}{2a}\ln(ax^2+bx+c)$，第二项可归结到类型 A.

例 4.25　求 $\displaystyle\int \frac{5x-1}{3x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-1}{3x^2+x+2}\,\mathrm{d}x &= \frac{5}{6}\int \frac{6x+1}{3x^2+x+2}\,\mathrm{d}x-\frac{11}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+x+2}\\
&= \frac{5}{6}\ln\left(3x^2+x+2\right)-\frac{11}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{23}{36}}\\
&= \frac{5}{6}\ln\left(3x^2+x+2\right)-\frac{11}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{23}}\arctan\frac{6x+1}{\sqrt{23}}+C\\
&= \frac{5}{6}\ln\left(3x^2+x+2\right)-\frac{11}{3\sqrt{23}}\arctan\frac{6x+1}{\sqrt{23}}+C
\end{aligned}$$

类型 C

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

- 若 $a>0$，则被积函数的根底式经配方后，所求积分可归结到积分公式 (4.13)；
- 若 $a<0$，则此积分可归结到积分公式 (4.12).

例 4.26 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-3x^2}}$

解:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-3x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{25}{36}-\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x-1}{5} + C
\end{aligned}
$$

类型 D

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

被积函数的分子可写成

$$px+q=\frac{p}{2a}(2ax+b)+q-\frac{pb}{2a}$$

所以

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x=\frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

等式右端第一个积分等于被积函数的分母的 2 倍，即 $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, 第二个是类型 C 的积分.

例 4.27 求 $\displaystyle\int \frac{5x-1}{\sqrt{3x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x$.

解：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{5x-1}{\sqrt{3x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{5}{6}\int \frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x - \frac{11}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2+x+2}} \\
&= \frac{5}{6}\cdot 2\sqrt{3x^2+x+2} \\
&\quad - \frac{11}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left[x+\frac{1}{6}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}}\right]+C \\
&= \frac{5}{3}\sqrt{3x^2+x+2} - \frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left[x+\frac{1}{6}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}}\right]+C
\end{aligned}
$$

类型 E

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}
$$

作变量代换 $x=\dfrac{1}{y}$，所求积分可化为类型 C。因为 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}y$，并且

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{-\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}y}{\dfrac{1}{y}\sqrt{\dfrac{a}{y^2}+\dfrac{b}{y}+c}} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a+by+cy^2}}
$$

例 4.28 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

解：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= -\int \frac{-\dfrac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y}{\dfrac{1}{y}\sqrt{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}+1}} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+y+1}} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}} \\
&= -\ln\left[y+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]+C \\
&= -\ln\left[y+\frac{1}{2}+\sqrt{y^2+y+1}\right]+C \\
&= -\ln\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right]+C \\
&= -\ln\frac{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}+C
\end{aligned}
$$

练习

1. 求下列不定积分：

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

2. 求下列不定积分：

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+6x}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+6x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4x}}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$

三、有理函数的积分

如果 $P(x), Q(x)$ 是两个多项式，则 $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ 可以化归为下列类型的积分：

$$\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{x-a} \qquad \int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-a)^n}$$
$$\int \frac{px+q}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{px+q}{(x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x$$

对这些积分，我们是有办法的。下面我们通过举例来说明求这些积分的大概的方法。

如果有理分式的分子次数高于分母的次数时，则只要作一次除法就可以把它写成一个多项式与一个真分式的和，而前者是容易求积的。所以我们只须注意真分式的积分如何求。

例 4.29 求 $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2}{2} + \arctan x + C\end{aligned}$$

例 4.30 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$

解： $\because \quad x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$\therefore \quad \dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

把等式右端通分，再比较两端系数，于是等式

$$A(x^2+1)(x+1)+B(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)(x^2-1)=1$$

的左边多项式的 x^3, x^2, x 的系数应为零，常数项应为 1, 从而得到

$$\begin{cases} A+B+C=0 & (4.14) \\ A-B+D=0 & (4.15) \\ A+B-C=0 & (4.16) \\ A-B-D=1 & (4.17) \end{cases}$$

由 (4.14) + (4.16) 和 (4.15) + (4.17) 得到:

$$A+B=0, \qquad A-B=\frac{1}{2}$$

解得:

$$A=\frac{1}{4}, \quad B=-\frac{1}{4}, \quad C=0, \quad D=-\frac{1}{2}$$

即:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}$$

从而

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C \end{aligned}$$

例 4.31 求 $\displaystyle\int \frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}\,\mathrm{d}x$

解: 设 $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\dfrac{A}{1-2x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$，则

$$3x^2+x-2=A(x-2)^2+B(1-2x)(x-2)+C(1-2x)$$

令 $1-2x=0$，则 $A=-\dfrac{1}{3}$；令 $x-2=0$，则 $C=-4$. 比较等式两端 x^2 的系数，得

$$3=A-2B \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{5}{3}$$

所以

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=-\frac{1}{3(1-2x)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}$$

从而

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\dfrac{1}{2}} - \frac{5}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}\\ &= \frac{1}{6}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| - \frac{5}{3}\ln|x-2| + \frac{4}{x-2} + C\end{aligned}$$

三角函数有理式的积分

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$$

恒可用“半角变换”法，即设 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ 或 $x=2\arctan t$ 化为 t 的有理函数的积分。

事实上，由 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 知

$$\sin x = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2-\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

又由 $x=2\arctan t$, 知

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

于是

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}x$$

上式右端是 t 的有理函数.

例 4.32 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$.

解： 令 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$，则：$\theta=2\arctan t,\quad \mathrm{d}\theta=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$，从而：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} &= \int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \ln|t|+C = \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|+C\end{aligned}$$

又 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\csc\theta-\cot\theta$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|+C=\ln|\csc\theta-\cot\theta|+C$$

例 4.33 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\theta}{3+2\cos\theta}$

解： 令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，则： $\mathrm{d}\theta=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{3+2\cos\theta}&=\int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{5+t^2}\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{t}{\sqrt{5}}+C\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tan\frac{\theta}{2}\right)+C\end{aligned}$$

练习

1. 求下列不定积分:

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x+3}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$

2. 求下列不定积分:

(a) $\displaystyle\int\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$

(b) $\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{4\cos x+3\sin x+5}$

(d) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

四、分部积分法

分部积分法是从两个函数乘积的微分公式得到的求积分方法。

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 是两个可微函数，乘积 $u\cdot v$ 的微分法则是

$$\mathrm{d}(u\cdot v)=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u$$

移项，得 $u\,\mathrm{d}v=\ \mathrm{d}(w\cdot v)-v\,\mathrm{d}u$，两边积分得

$$\int u\,\mathrm{d}v=u\cdot v-\int v\,\mathrm{d}u \tag{4.18}$$

公式 (4.18) 表示如果积分 $\int u\,\mathrm{d}v=\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ 不可能直接求出，就改为求积分 $\int v\,\mathrm{d}u=\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$, 设 $F(x)$ 是 $v(x)\cdot u'(x)$ 的一个原函数，那么 $u(x)\cdot v(x)-F(x)$ 是 $u(x)v'(x)$ 的一个原函数，用公式 (4.18) 求不定积分的方法叫做**分部积分法**，公式 (4.18) 叫做**分部积分公式**.

例 4.34 求 $\int x\sin 3x\,\mathrm{d}x$.

解:被积函数 $x\sin 3x$ 不能由前面的基本积分表求出它的原函数,我们把 $x\sin 3x$ 分成两部分，设 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin 3x$, 于是

$$\int v'(x)\,\mathrm{d}x=\int \sin 3x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos 3x}{3}+C$$

即 $v(x)=-\dfrac{\cos 3x}{3}$ 是 $v'(x)=\sin 3x$ 的一个原函数，根据公式 (4.18)，有

$$\begin{aligned}\int x\sin 3x\,\mathrm{d}x&=\int x\,\mathrm{d}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)\\&=x\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)-\int\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{1}{3}\int\cos 3x\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9}+C\end{aligned}$$

运用公式 (4.18) 时，应首先将被积表达式分成函数 $u(x)$ 和微分 $\mathrm{d}v=v'(x)\,\mathrm{d}x$ 两部分，选取 $u(x)$ 和 $v'(x)\,\mathrm{d}x$ 的原则是:

- 充当微分部分的 $v'(x)\,\mathrm{d}x$, 其 $v'(x)$ 的原函数能够比较容易地求出；
- 充当 $u(x)$ 的部分经求微商后要化简，以便使积分 $\int v\,\mathrm{d}u$ 较 $\int u\,\mathrm{d}v$ 简单，容易求出结果。

在应用分部积分法求不定积分时，往往要连续使用这个方法多次才能求出最后结果。

我们把能够应用分部积分法求积分的例题分为以下几类：

类型 A

被积函数是 $x^n e^{ax}$，$x^n \sin ax$，$x^n \cos ax$，其中 x 的方幂因子经求微商后降次，而非 x 的方幂因子的原函数是容易求得的。

例 4.35 求 $\int x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

解：

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) &= \frac{x^2e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}(x^2) \\
&= \frac{x^2e^{2x}}{2} - \int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2e^{2x}}{2} - \left(\frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{e^{2x}}{4} + C \\
&= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C
\end{aligned}
$$

类型 B

被积函数是 $x^n \sin^{-1} x$，$x^n \tan^{-1} x$，$x^n \ln x$，其中乘积中的因子 $\tan^{-1} x$，$\ln x$ 的导数是 x 的有理函数，$\sin^{-1} x$ 的导数是 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，它们的积分可求，而 x^n 的原函数是 $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

例 4.36 求 $\int x \arctan x\,\mathrm{d}x$.

解：

$$
\begin{aligned}
\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) &= \frac{x^2\arctan x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\arctan x) \\
&= \frac{x^2\arctan x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2\arctan x}{2} - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2\arctan x}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C
\end{aligned}
$$

例 4.37 求 $\int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x$.

解:

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x = \int \ln x \, \mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \mathrm{d}(\ln x) \\
&= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C
\end{aligned}
$$

类型 C

被积函数是 $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\ln x$, 这里没有乘积的形式，不妨设 $v'(x) = 1$.

例 4.38 求 $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

解:

$$
\begin{aligned}
\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \arcsin x - \int x \, \mathrm{d}(\arcsin x) &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

另解：设 $y = \arcsin x$，$-1 \le x \le 1$，则 $\sin y = x$，$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \arcsin x - \int x \, \mathrm{d}(\arcsin x) &= y \sin y - \int \sin y \, \mathrm{d}y \\
&= y \sin y + \cos y + C \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1 - \sin^2 y} + C \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

例 4.39 求 $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$.

解：

$$
\begin{aligned}
\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - \int x \,\mathrm{d}(\ln^2 x) &= x(\ln x)^2 - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x \,\mathrm{d}x \\
&= x(\ln x)^2 - 2\left[x\ln x - \int x(\ln x)\right] \\
&= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int \,\mathrm{d}x \\
&= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C
\end{aligned}
$$

类型 D

被积函数是 $e^{ax}\sin bx$, $\sec^3 x$, $\sqrt{a^2+x^2}$. 对于这类例题，两次使用这个方法可以得到含有这个积分作未知元的一次方程。

例 4.40 求 $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
I = \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \int \sin bx \,\mathrm{d}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) &= \sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\,\mathrm{d}(\sin bx) \\
&= \sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} b\cos bx\,\mathrm{d}x \\
&= \sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \frac{b}{a}\int \cos bx\,\mathrm{d}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) \\
&= \sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \frac{b}{a}\left[\cos bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\,\mathrm{d}\,(\cos bx)\right] \\
&= \sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \frac{b}{a^2}\cos bx \cdot e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x \\
&= \sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \frac{b}{a^2}\cos bx \cdot e^{ax} - \frac{b^2}{a^2} I
\end{aligned}
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
I\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) &= \frac{1}{a}\sin bx \cdot e^{ax} - \frac{b}{a^2}\cos bx \cdot e^{ax} \\
I &= \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C
\end{aligned}
$$

例 4.41 求 $\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解:

$$
\begin{aligned}
I=\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{a^2+x^2}-\int x\,\mathrm{d}\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)\\
&= x\sqrt{a^2+x^2}-\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= x\sqrt{a^2+x^2}-\int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x+\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= x\sqrt{a^2+x^2}-I+a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
I=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)
$$

应用分部积分公式 (4.18) 还能导出一些求积分的递归公式。所谓求积分的递归公式就是建立一个被积函数含有正整数 n 的积分与被积函数含有非负整数 $n-1$ 或 $n-2$ 的积分的关系式。每次要求 $n=k$ 时的积分，重复利用这个关系式总能回到当 $n=0,1,2$ 时的起始积分，于是所求积分总能用 n 的起始值 $n=0,1,2$ 中的一个已知积分表示出来。这也就是递归的意思。

例 4.42 求 $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

解: 当 $n=0$ 时，$I_0=\int(\sin x)^0\,\mathrm{d}x=\int\,\mathrm{d}x=x+C$

又:

$$
\begin{aligned}
I_n=\int \sin^n x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(-\cos x)\\
&= -\cos x\sin^{n-1}x+\int \cos x\,\mathrm{d}\left(\sin^{n-1}x\right)\\
&= -\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \cos x\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\\
&= -\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

所以

$$
I_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n
$$

即

$$
nI_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2} \tag{4.19}
$$

现在我们用递归关系 (4.19) 来求 $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$. 设 $I_4 = \int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$, 于是

$$4I_4 = -\cos x \sin^3 x + 3I_2 \tag{4.20}$$

$$2I_2 = -\cos x \sin x + I_0 \tag{4.21}$$

将 (4.21) 代入 (4.20) 得:

$$\begin{aligned} 4I_4 &= -\cos x \sin^3 x + 3\left(-\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} I_0\right) \\ &= -\cos x \sin^3 x - \frac{3}{2}\cos x \sin x + \frac{3}{2} x + C \end{aligned}$$

所以

$$I_4 = \int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x - \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C$$

练习

1. 求下列不定积分:

(a) $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$

(b) $\int x \cos 3x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int x \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int (x-1)e^x\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \left(x^2+x\right) e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$

(h) $\int x \arcsin x\,\mathrm{d}x$

(i) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(j) $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(k) $\int x^2 e^{3x}\,\mathrm{d}x$

(l) $\int e^{ax} \sin^2 bx\,\mathrm{d}x$

(m) $\int \sin x \cdot \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$

(n) $\int x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x$

(o) $\int \frac{x^2 e^x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}$

(p) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

2. 求下列不定积分:

(a) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$　　(d) $\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$　　(e) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$　　(f) $\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

第四节　定积分的计算与应用

一、定积分的计算

由微积分的基本定理得知，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算归结为不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算，由后者计算得到 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

于是计算不定积分的各种方法也可移植过来求定积分。

(一) 定积分的换元积分法

第一换元法：设 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)$, $u=\varphi(x)$ 可微，那么

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= F(u)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F[\varphi(b)]-F[\varphi(a)]\end{aligned}$$

例 4.43　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解： 因为

$$\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\,\mathrm{d}(\sin x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\sin^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left[\sin^4\frac{\pi}{4}-0\right] = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

定理 1（第二种变量代换法）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，作代换 $x=\varphi(t)$，其中 $\varphi(t)$ 在某一闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数 $\varphi'(t)$，当 $\alpha\leq t\leq\beta$ 时，$a\leq\varphi(t)\leq b$，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

证明： 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $G(x)$，即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x)=f(x)$$

于是由微积分基本定理得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=G(x)\Big|_a^b=G(b)-G(a) \tag{4.22}$$

根据复合函数求导法则，知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G[\varphi(t)]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)\\&=f(x)\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\end{aligned}$$

所以 $G[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数，从而

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t&=G[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta\\&=G[\varphi(\beta)]-G[\varphi(\alpha)]=G(b)-G(a)\end{aligned} \tag{4.23}$$

因为 (4.22)(4.23) 两个积分相等，所以

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

这个公式与不定积分的换元公式很类似，所不同的是，后者最后需要将变量还原，而现在只须把积分限作相应的改变。

例 4.44 求 $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

解： 作代换 $x=a\sin t$，当 x 从 0 变到 a 时，相应地 t 自 0 变到 $\dfrac{\pi}{2}$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t\\=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

例 4.45 求 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

解： 设 $x=u^2$，于是

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1+u},\qquad \mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$$

定限：当 $x=0$ 时，从变换 $\sqrt{x}=u$ 中解出 $u=0$；当 $x=4$ 时，解出 $u=2$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{1}{1+u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u\\ =2\left[u-\ln(1+u)\right]\Big|_0^2=2(2-\ln 3)\end{aligned}$$

例 4.46 求证：$\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$

证明： 设 $x=a-t$，则 $\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t$，且当 $x=0$ 时，$t=a$；当 $x=a$ 时，$t=0$. 于是：

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^0 f(a-t)(-\,\mathrm{d}t)=-\int_a^0 f(a-t)\,\mathrm{d}t\\ =\int_0^a f(a-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

我们在第三节曾指出，使用第二种变量代换时，要注意条件是否满足，否则会出现矛盾，这里举一反例。

求 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 时，如作变换 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

于是 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=0$，这当然不对，问题在于，代换 $x=\dfrac{1}{t}$ 在 $[-1,1]$ 上并不是连续变化的。

（二）定积分的分部积分法

定理 2

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数 $u'(x)$, $v'(x)$, 则有分部积分公式

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

证明: 由牛顿-莱布尼兹公式，显然有

$$\begin{aligned} u(x)v(x)\Big|_a^b &= \int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

移项，得

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}[v(x)] = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}[u(x)]$$

这个公式与不定积分的分部积分公式很相似，但是，这里每一项都带着积分限。

例 4.47 求 $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\arctan x|\,\mathrm{d}x$

解: 因为 $|\arctan x|$ 是偶函数，所以

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\arctan x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{3}} |\arctan x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\,\mathrm{d}x$$

设 $u(x)=\arctan x$, $v'(x)=1$, 则 $v(x)=x$，利用分部积分公式，得到:

$$\begin{aligned} I = 2\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\,\mathrm{d}x &= 2\left[x\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{d}(\arctan x)\right] \\ &= 2\left[\sqrt{3}\arctan\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= 2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - \ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 4 \end{aligned}$$

例 4.48 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$.

解： 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, \mathrm{d}\theta$，利用例 4.42 的结果，得到：

$$nI_n = \left[-\cos\theta \sin^{n-1}\theta\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)I_{n-2}$$

因为方括号的式子对于积分上，下限的值等于零，所以上面等式化简为

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

分别考虑 n 是偶数和奇数两种情况：

1. 若 n 是偶数，那么

$$\begin{aligned} I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &= \cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} I_0 \end{aligned}$$

此处 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$，所以

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n(n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2. 若 n 是奇数，由于

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

所以

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{n(n-2)\cdots 5 \cdot 3}$$

练习

1. 求下列定积分：

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin x}$

(g) $\displaystyle\int_0^{2n} [\sin\omega t-\sin(\omega t+\varphi)]^2\,\mathrm{d}t$

(h) $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{(4-x)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta\,\mathrm{d}\theta$

(l) $\displaystyle\int_1^0 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x$

2. 证明：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

（提示：用变量代换 $x=\dfrac{\pi}{2}-y$.）

3. (a) 求常数 A,B,C,D 使等式

$$\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)^2}=A+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{(1+x)^2}+\frac{D}{1+x}$$

成立，并计算

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+2x^3}{(1-x)(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

(b) 求常数 a，使 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-a}{(x+1)(3x+1)}\,\mathrm{d}x=0$

4. 求极限：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

5. 求一三次多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 使它满足下列条件：

(a) $f(-1)=f(1)=0$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=6$

6. (a) 在同一个坐标系内，作 $y=(x-1)(x-2)$ 和 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)\,\mathrm{d}t$ 的函数图象.
   (b) 求函数 $\int_0^x (t-1)(t-2)\,\mathrm{d}t$ 在闭区间 $[0,3]$ 上的最大值和最小值;
   (c) 求在曲线 $y=(x-1)(x-2)$, x 轴和纵坐标 $x=0$, $x=3$ 之间的区域的面积.
7. (a) 若 $f(2a-x)=-f(x)$, 求证 $\int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$;
   (b) 若 $f(2a-x)=f(x)$, 求证 $\int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) 试计算 $\int_0^\pi \sin^6 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^\pi \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.
8. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta$
9. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^3\cos 2x\,\mathrm{d}x$
10. 求 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

二、平面图形的面积

我们已经证明过在曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴，$x=a$, $x=b$ 之间的曲边梯形的有号面积等于

$$\int_a^b y\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

对于任意的平面图形。我们总可以取适当的直角坐标系，使得它的边界为两条曲线

$$y=f(x),\qquad y=g(x),\quad x\in[a,b]$$

所描述，现在我们来求这样的区域 R 的面积（图 4.4）。

定理

若 f 和 g 是在区间 $[a,b]$ 上的连续函数，而且 $f(x) \geq g(x)$, 那么在曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 和 $x=a$, $x=b$ 之间的区域 R 的面积等于

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$$

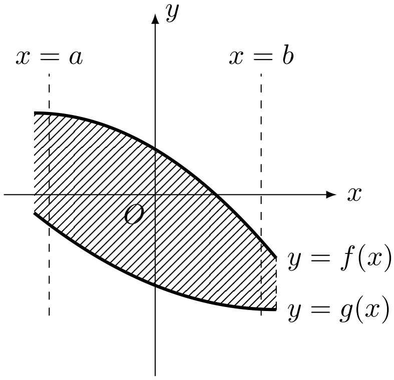


图 4.4

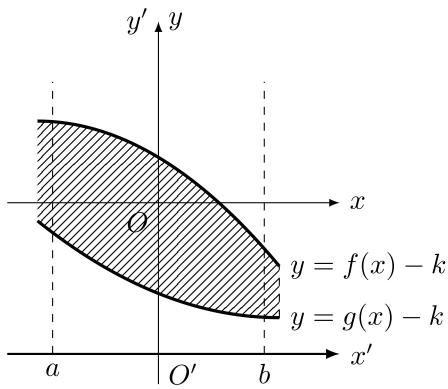


图 4.5

证明： 让我们选择一个常数 k 使其小于函数 g 在区间 $[a,b]$ 上的最小值，则对于每一个 $x \in [a,b]$, $g(x)-k \geq 0$.

又因为 $f(x) \geq g(x)$, 因此对于每一个 $x \in [a,b]$, 也有 $f(x)-k \geq 0$. 将坐标系 x,y 平行于 y 轴平移到新坐标系 x',y', 使新原点在原来坐标系中的坐标为 $(0,k)$ (图 4.5), 这个坐标系的平移由变换

$$\begin{cases} x=x' \\ y=y'+k \end{cases}$$

实现，于是原来的函数图象在新坐标的方程是

$$f_1(x)=f(x)-k, \qquad g_1(x)=g(x)-k$$

函数 f_1 和 g_1 在区间 $[a,b]$ 上仍连续且取非负值，显然在函数 f_1 和 g_1 之间的区域 $R=\{a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq f_1(x)\}$ 就是原来的区域 $R=\{a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$, 但是，$R'$ 的区域的面积等于

$$A=\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g_1(x)\,\mathrm{d}x$$

根据定积分的性质进一步得到

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \Big\{\big[f(x) - k\big] - \big[g(x) - k\big]\Big\}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

例 4.49　求直线 $y = x - 2$ 和抛物线 $y = 2x - x^2$ 所围成的图形的面积 A.

解: 直线与抛物线交于 $(2, 0)$, $(-1, -3)$ 两点，作出它的草图（图 4.6）. 依本节定理，得到

$$\begin{aligned} A = \int_1^2 [(2x - x^2) - (x - 2)]\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 (-x^2 + x + 2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]\Bigg|_1^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

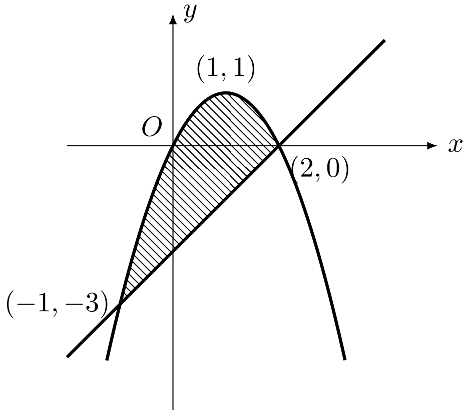


图 4.6

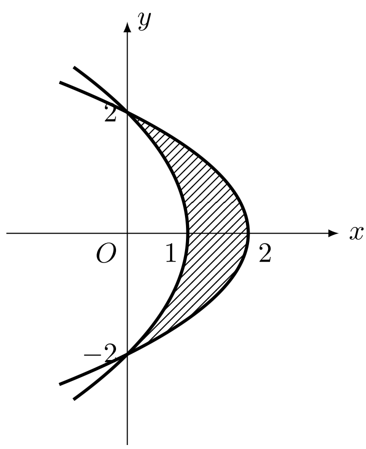


图 4.7

例 4.50　求抛物线 $y^2 = -4(x - 1)$, $y^2 = -2(x - 2)$ 所围成的图形的面积。

解: 先作出它们的草图（图 4.7），且解得它的两个交点 $(0, 2)$ 和 $(0, -2)$. 于是

$$\begin{aligned} A = \int_{-2}^2 \left[\left(2 - \frac{1}{2}y^2\right) - \left(1 - \frac{1}{4}y^2\right)\right]\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{4}\int_{-2}^2 (4 - y^2)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4}\left[4y - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_{-2}^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

例 4.51 求半径等于 r, 中心角等于 α, $\left(0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的扇形的面积。

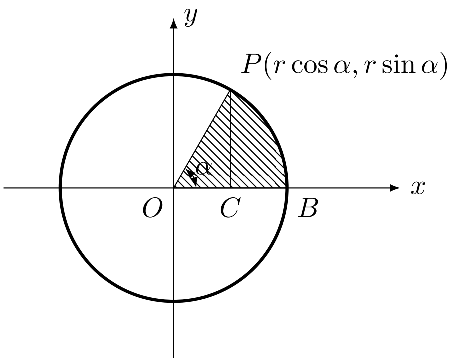


图 4.8

解: 如图 4.8, 扇形 OBP 的区域划分为 $\triangle OCP$ 的区域与曲边三角形 CBP 的区域的和，因此

$$A(OBP) = A(OCP) + A(CBP)$$

因为 P 点坐标是 $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$，所以

$$A(OCP) = \frac{1}{2}(r\cos\alpha)\cdot(r\sin\alpha) = \frac{r^2}{4}\sin 2\alpha$$

又扇形的圆方程是 $x^2+y^2=r^2$，所以

$$A(CBP) = \int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

从而

$$A(OBP) = \frac{r^2}{4}\sin 2\alpha + \int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

令 $x = r\sin\theta$, $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，则

$$\theta = \arcsin\frac{x}{r}, \qquad \mathrm{d}x = r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

且当 $x = r\cos\alpha$ 时，

$$\theta = \arcsin(\cos\alpha) = \arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = \frac{\pi}{2}-\alpha$$

当 $x = r$ 时，$\theta = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$

所以

$$\begin{aligned}A(OBP)&=\frac{r^2}{4}\sin 2\alpha+\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta)(r\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{r^2}{4}\sin 2\alpha+r^2\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{r^2}{4}\sin 2\alpha+r^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{r^2}{2}\alpha\end{aligned}$$

当 $\alpha=2\pi$ 时，由上面公式就得到圆面积 πr^2.

例 4.52　P 点是位于曲线 $y=x^2$ 上的动点，从原点 O 向点 $A(1,1)$ 移动，过二点 O,P 引直线，它与曲线 $y=x^2$ 及直线 $x=1$ 所围图形的面积为图 4.9 中阴影部分所示，求使这部分面积最小时 P 点的坐标。

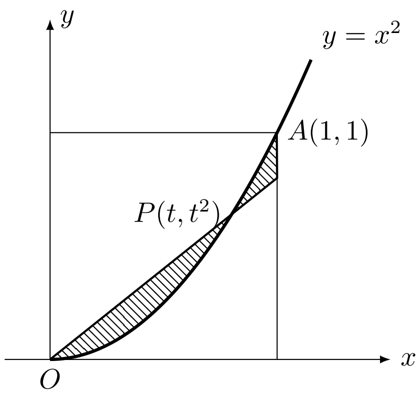


图 4.9

解： 设 P 点的坐标是 (t,t^2), $(0\le t\le 1)$. 直线 OP 的方程是 $y=tx$，设阴影部分的面积为 S，则

$$\begin{aligned}S&=\int_0^t(tx-x^2)\,\mathrm{d}x+\int_t^1(x^2-tx)\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{t}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]\Bigg|_t^1\\&=\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$S' = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

由 S' 符号的变化，当 $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，S 极小也就是最小，故所求点的坐标是 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

例 4.53 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 的面积 A（图 4.10）.

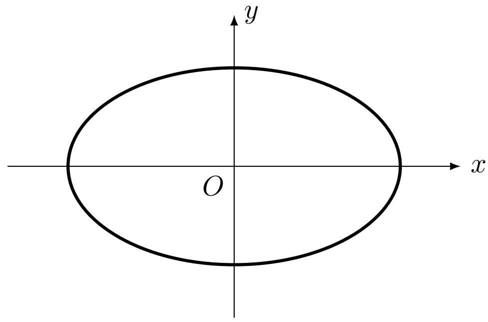


图 4.10

解： 由于图形的对称性，只要求出椭圆在第一象限内的面积，再乘以 4 就是该椭圆的面积，所以

$$\frac{A}{4} = \int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

这里将椭圆用参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ 表出，当 $x = a$ 时，$t = \arccos 1 = 0$; 当 $x = 0$ 时，$t = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{A}{4} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,\mathrm{d}(a\cos t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (b\sin t)(-a\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}ab\pi\end{aligned}$$

所以：$A = \pi ab$.

练习

1. 求在曲线 $y=\sin 2x$, $y=0$, $x\in[0,2\pi]$ 之间的面积.

2. 求下列曲线所围图形的面积:

   (a) $y=8-\dfrac{1}{2}x^2$ 和 $y=3.2$

   (b) $y=x^2-5x+7$ 和 $y=-2x^2+10x-5$

   (c) $y=\sin x$ 和 $y=\dfrac{2}{\pi}x$, $x\geq 0$

3. 求以曲线 $y=\sin x$ $\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}\right)$; $y=\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 和 $y=0$ 为边界的区域的面积.

4. (a) 证明点 $x=t^2-1$, $y=t(t^2-1)$ 在曲线 $y^2=x^2(x+1)$ 上;

   (b) 当 t 由 $t=-2$ 变化到 $t=2$ 时，作出曲线 $\begin{cases}x=t^2-1\\x=t(t^2-1)\end{cases}$ 的图象;

   (c) 求由曲线的环路所围区域的面积.

5. 在曲线 $y=x^2-2x+2$ 与过点 $(2,3)$ 的直线所围的图形中，求图形面积最小时的直线方程。

6. 求抛物线 $y=x^2$ 及过此抛物线上点 $(2,4)$ 的切线和 x 轴所围图形的面积。

7. 已知曲线 C: $y=x^2-7x+10$ $(x>0)$ 与点 $A(0,1)$, 回答下列问题:

   (a) 求过点 A 所引曲线 C 的切线方程以及切点 T 的坐标。

   (b) 设 S 是直线 $x=1$ 与曲线 C 的交点. 若曲线 C 上的动点 P 从 S 点运动到 T 点时，将线段 AP 所在的区域用阴影表示出来，并求出这个区域的面积。

8. 求通过 $(0,0)$, $(1,2)$ 两点的抛物线，要求它具有以下的性质:

   (a) 它的对称轴平行于 y 轴，且凸向上，

   (b) 它与 x 轴所围区域的面积最小.

9. 对称轴平行 y 轴的抛物线与圆 $x^2+y^2=4$ 切于 $A(0,2)$ 点并通过 $B(-2,0)$ 点，计算抛物线与圆所围区域的面积.

三、利用横断面算体积法

对于空间的一个立体，我们取一条直线作为坐标轴，取直线上一点作为原点（图 4.11），假定这立体紧夹于在 $x=a$ 与 $x=b$ 两点所作的 x 轴的垂直平面之间，又如果在离原点 x 处作这轴的一个垂直平面，并且该垂直平面截得立体的截面的面积是 x 的连续函数 $A(x)$，$a \le x \le b$, 那么立体的体积可由定积分来计算：

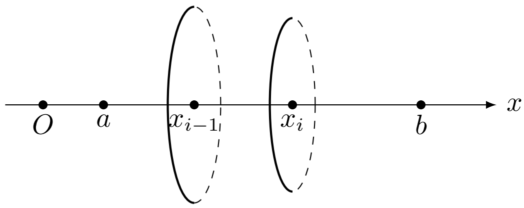


图 4.11

1. 分 $[a,b]$ 为 n 份，其分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

记 $\|P_n\| = \max(x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

以平面 $x = x_i$，$i = 0, 1, 2, \ldots, n$ 截此立体为 n 个小单元，于是整个体积被看作这 n 个小单元的和。

2. 求阶梯函数的总和作为所求立体体积的近似和. 考虑这样一个单元，它介于两个截面 $x = x_{i-1}, x = x_i$ 之间，于是以 $(x_i - x_{i-1})$ 为高，以 $A(x_{i-1})$ 作为底面积的直棱柱的体积是

$$A(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

于是，我们得到所求的体积 V 的近似表达式

$$\sum_{i=1}^{n} A(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

3. 对和取极限：当断面无限增加，$\|P_n\| \to 0$ 时，有

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

现在将上面的讨论总结为下面的定理。

定理

如果已知一个给定的立体的垂直于一定方向所有的横断面的面积，取这些横断面的垂直方向作为 x 轴的方向，则这立体的体积由公式

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

表达。其中 $A(x)$ 是横坐标为 x 的横断面的面积，a、b 为这立体的两端断面的横坐标。

例 4.54 求底边长为 a, 高为 h 的正四棱锥的体积。

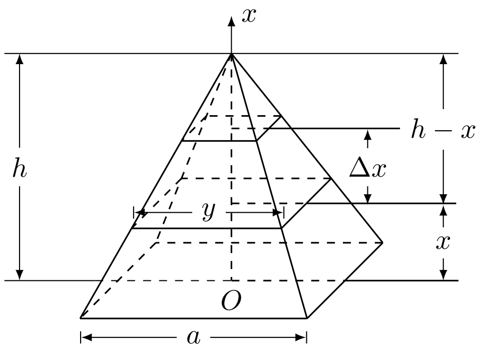


图 4.12

解： 设 x 为从底面到截面的距离，y 为截面正方形的边长（图 4.12），于是

$$\frac{h-x}{h}=\frac{y}{a}$$

即：$y=\dfrac{a}{h}(h-x)$.

截面面积

$$A(x)=\frac{a^2}{h^2}(h-x)^2$$

所以

$$\begin{aligned}V&=\int_0^h\left(\frac{a}{h}\right)^2(h-x)^2\,\mathrm{d}x\\&=-\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{(h-x)^3}{3}\bigg|_0^h=\frac{1}{3}a^2h\end{aligned}$$

如果立体是一个旋转体，即先给出一条平面曲线 $y=f(x)$, 绕 x 轴旋转所得出的立体，我们的横断面就是以 y 为半径的圆，所以这立体的体积就等于

$$V=\pi\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x$$

如果 $c\le y\le d$，$x=g(y)$ 绕 y 轴旋转，则

$$V=\pi\int_c^d x^2\,\mathrm{d}y$$

例 4.55 若球的半径是 a, 球缺的高是 h, 求球缺的体积。

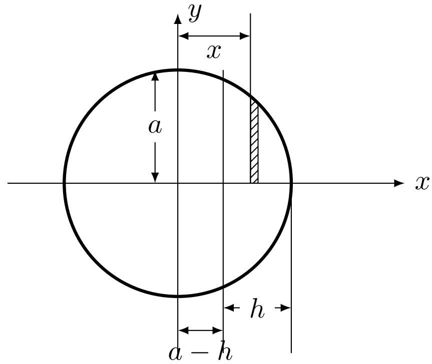


图 4.13

解: 球是由圆 $x^2+y^2=a^2$ 绕 x 轴旋转所得到的立体, 且球心到球缺底面的距离为 $a-h$, 设球心到截面的距离为 x, 则截面圆的面积 $A(x)=\pi y^2=\pi(a^2-x^2)$. (图 4.13)

所以

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{a-h}^{a}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]\Big|_{a-h}^{a}\\&=\frac{\pi h^2}{3}(3a-h)\end{aligned}$$

例 4.56 计算底面半径分别为 r 和 R, 高为 h 的圆台体积 V.

解: 此圆台可看作 xy 平面上的直线段

$$y=\frac{R-r}{h}x+r,\ (0\le x\le h),\quad x=0,\quad x=h,\quad y=0$$

所围成的直角梯形绕 x 轴旋转所得到的立体，从而

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2\,\mathrm{d}x\\&=\pi\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2\frac{x^3}{3}+2r\cdot\frac{R-r}{h}\cdot\frac{x^2}{2}+r^2x\right]\Bigg|_0^h\\&=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)\end{aligned}$$

例 4.57 在第一象限中，由 $y=\dfrac{x}{1-x}$ $(x\neq 1)$, $y=1$, $y=0$ 和 $x=1$ 所围成的图形绕着直线 $x=1$ 旋转，求所生成的旋转体的体积（图 4.14)。

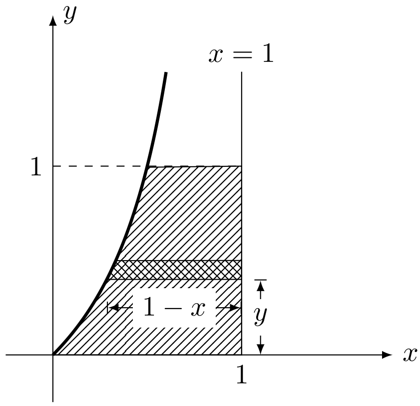


图 4.14

解： y 轴垂直于旋转体的横断面，设原点到横断面的距离为 y, 则该横断面的面积

$$A(y)=\pi(1-x)^2$$

由于函数 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 是单射的，故反函数存在，由它解出

$$x=\frac{y}{1+y},\qquad 1-x=\frac{1}{1+y}$$

于是

$$A(y)=\frac{\pi}{(1+y)^2}$$

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 A(y)\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}\\&=-\pi\left(\frac{1}{1+y}\right)\Bigg|_0^1=-\pi\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

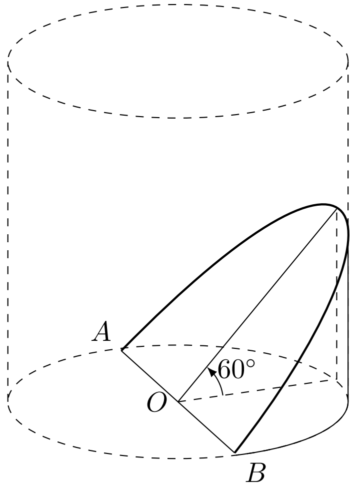


图 4.15

练习

1. 底面半径为 a 的直圆柱，用通过底面一条直径并与底面成 60° 角的平面去截，得到图 4.15 的立体，求其体积.

2. 由抛物线 $y^2 = 4ax$ 和直线 $x = h$ 所围成的区域绕 x 轴旋转一周，求所生成旋转体的体积。

3. 求底面半径为 r, 高为 h 的圆锥体的体积。

4. 设由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的区域绕 x 轴旋转，求此旋转椭圆体的体积。

5. 由曲线 $y = \dfrac{\ln x}{x}$, x 轴和通过曲线的最高点的纵坐标所围成的区域绕 x 轴旋转，求该旋转体的体积。

6. 两条抛物线有公共的顶点和公共的对称轴，但位于两个互相垂直的平面内，一个运动着的椭圆，其中心在两抛物线的公共轴上，它的平面与公共轴垂直，它的顶点位于两条抛物线上，如果椭圆从公共顶点开始，移动一段距离 h, 求由此椭圆所生成的体积。

7. 求 $y = 4 - x^2$ 与 x 轴之间的区域绕直线 $y = -1$ 一周所生成的体积。

8. 求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a<b)$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积。

第五节　简单初值问题——不定积分的简单应用

在本章第 2 节，我们曾说过，一个函数的原函数有无穷多个，它们彼此之间相差一个常数。但是，在许多问题中，我们感兴趣的往往并不是这无穷多个原函数的全体（不定积分），而是某一个特定的原函数，在几何上，就是一条特定的积分曲线。为了求得这条积分曲线，必须知道它所经过的一个点，也就是说，要知道初始条件，在实际问题中，求满足一定初始条件的原函数问题是很多的，下面举一些简单的实例。

例 4.58 已知一质点 m 作具有匀加速度 a 的直线运动，设它的初速度为 u, 求质点在 t 秒后所经过的距离。

解： 由于 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a$，所以

$$v=at+C \tag{4.24}$$

因为，当 $t=0$ 时，$v=u$，代入 (4.24) 得：$C=u$，所以

$$v=at+u \tag{4.25}$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=u+at$，分离变量，把它写成

$$\mathrm{d}s=(u+at)\,\mathrm{d}t$$

两边求不定积分，得

$$\int\mathrm{d}s=\int(u+at)\,\mathrm{d}t$$

$$s=ut+\frac{1}{2}at^2+C' \tag{4.26}$$

由初始条件：当 $t=0$ 时，$s=0$，代入 (4.26)，得：$C'=0$，所以

$$s=ut+\frac{1}{2}at^2 \tag{4.27}$$

为所求。(4.25) 和 (4.27) 就是我们常见的运动学公式.

例 4.59 假设在原点处斜抛一质点 m, 它的初速度 v_0 与水平 x 轴成 α 角，又作用在质点 m 上的力只有向下的重力，求质点 m 的轨迹方程。

解： 设质点 m 的坐标是 (x,y), 它的质量为 M 克，于是沿着 x 轴和 y 轴的速度分量分别是

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\qquad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

而沿着 x 轴和 y 轴的加速度分量分别是

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

根据牛顿第二定律，得到

$$\begin{cases} M\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0 \\ M\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-Mg \end{cases}\tag{4.28}$$

即:

$$\begin{cases} \mathrm{d}v_x=0 \\ \mathrm{d}v_y=-g\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} v_x=C_1 \\ v_y=-gt+C_2 \end{cases}\tag{4.29}$$

常数 C_1 和 C_2 由初始条件决定，所以

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\cos\alpha \\ v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-gt+v_0\sin\alpha \end{cases}\tag{4.30}$$

即:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=v_0\cos\alpha\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y=(-gt+v_0\sin\alpha)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

再求不定积分得

$$\begin{cases} x=(v_0\cos\alpha)t+C_3 \\ y=-\dfrac{gt^2}{2}+(v_0\sin\alpha)t+C_4 \end{cases}$$

由于，当 $t=0$ 时，$x=y=0$，因此:

$$C_3=C_4=0$$

于是得到质点 m 以时间 t 为参变数的轨迹方程

$$\begin{cases} x=(v_0\cos\alpha)t \\ y=-\dfrac{gt^2}{2}+(v_0\sin\alpha)t \end{cases} \tag{4.31}$$

消去 t，得:

$$y=\frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha$$

化为标准式，得

$$\left(x-\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2=-\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\left(y-\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$$

这是顶点在 $\left(\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g},\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$ 处的抛物线方程（如图 4.16），且从顶点到焦点的方向是 y 轴的负方向，又焦点到准线的距离是 $\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$，因此，从顶点到它的上方的准线距离等于 $\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g}$，而准线到 x 轴的距离就等于

$$\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g}+\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{v_0^2}{2g}$$

故准线的位置仅依赖于初速度的大小，而与抛射角的大小无关。

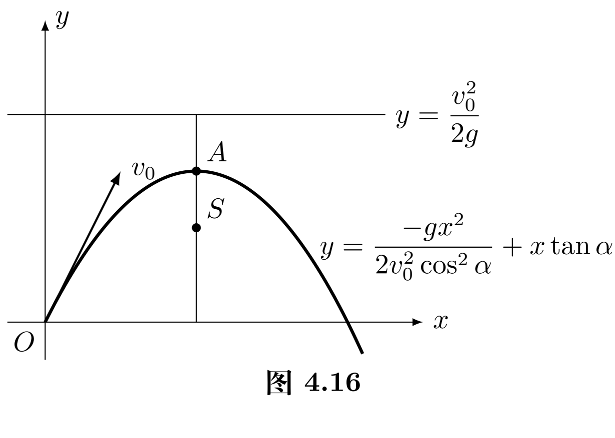


图 4.16

下面我们来讨论人口的增长与放射性元素蜕变的问题。

在很多单纯的自然现象中，一个随着时间而变化的量 $y(t)$ 的变化率常常和 $y(t)$ 当时的值成正比例，用数学式表达，即存在一个随该现象而定的常数 k（与 t 无关），使得

$$y'(t)=ky(t)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = ky(t) \tag{4.32}$$

人口的增长与放射性元素的蜕变就是这样的两个例子。

假如人口按某一固定的“增长率” k 增长，譬如时间单位是“年”，增长率 2%, 则 $k = 2\%$. 设人口随时间变化的函数是 $y(t)$, 本来 $y(t)$ 是整数，但由于数量很大，我们可以把它看作一个平滑函数，$y(t)$ 满足下面的条件:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = ky(t) \cdot \Delta t$$

换言之, 人口增加数量与这段时间开始的人口数, 以及这段时间间隔成比例, 也即

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = ky(t)$$

令 $\Delta t \to 0$, 由上式得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = ky(t)$$

也就是说，人口在时刻 t 的瞬时变率与当时的值 $y(x)$ 成正比例。为求出函数 $y(t)$, 我们来解具有初始条件的微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = ky(t) & (4.33) \\ y(0) = A & (4.34) \end{cases}$$

将 (4.33) 改写成

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{y(t)} = k\,\mathrm{d}t$$

即：$\ln[y(t)] = kt + C$，由初始条件确定常数 C 的值，得:

$$\ln A = C$$

所以：$\ln[y(t)] = kt + \ln A$，移项，得:

$$\ln\frac{y(t)}{A} = kt$$

由此得:

$$\frac{y(t)}{A} = e^{kt}$$

所以：$y(t) = Ae^{kt}$ 为所求。

总结上面的讨论，得到以下命题:

命题

设 $y'(t)=ky(t)$，$y(0)=A$，则:

$$y(t)=Ae^{kt}$$

例 4.60　若某城市现有人口 10 万，按照每年 3% 的比率增长，问几年后人口是现有人口的 2 倍?

解: 设 t_1 年后人口加倍，于是依题意有

$$10e^{3\%t_1}=2\times 10$$

即：$e^{0.03t_1}=2$, 两边取常用对数，得

$$\begin{aligned}0.03t_1\lg e&=\lg 2\\ t_1&=\frac{100\lg 2}{3\lg e}\approx\frac{100}{3}\cdot\frac{0.3010}{0.4343}\\ &\approx\frac{100}{3}\cdot 0.6931\approx 23.\end{aligned}$$

答：约 23 年后，人口会加倍.

从问题的解法看出，人口的加倍期仅与增长率有关，即 $t_1=\dfrac{\ln 2}{k}$, 下面是二者之间的对照表。

增长率 k	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
加倍期 t_1	约 14 年	约 17 年	约 23 年	约 34.5 年	约 39 年

同样地可把上述命题应用于放射性元素蜕变问题。

例 4.61　放射性元素的数量随时间 t 变化的函数是 $N(t)$, $A=N(0)$ 是起算时的数量，k 是蜕变率，且知放射性元素经过 Δt 这段时间的蜕变，它减少的数量 $\Delta N(t)=N(t+\Delta t)-N(t)$ 与在时刻 t 的数量 $N(t)$ 及这段蜕变时间 Δt 成比例，即

$$\Delta N(t)=-kN(t)\cdot\Delta t$$

因为放射性元素不断减少，所以 ΔN 是负数，问经过多少年放射性元素剩下了一半?

解: 依题意，有

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-kN(t)$$

根据本节命题，得到

$$N(t) = Ae^{-kt}$$

设经过 t_1 年，放射性元素减少了一半，通常称 t_1 为放射性元素的半衰期，于是

$$t_1 = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{0.6931}{k}$$

下面是一些放射性元素的半衰期的简表。

元素	氩 Ar^{39}	碳 C^{14}	氢 H^3
半衰期	269 年	5730 年	12.3 年
元素	碘 I^{129}	铀 U^{238}	铀 U^{235}
半衰期	16×10^6 年	4.5×10^9 年	0.71×10^9 年

我们可以把岩石或化石中所含的各种微量的放射性元素，当作天然的计时仪表，因为各种放射性元素的微量都可以测量十分准确，所以我们可以通过对残留微量的测定，用半衰期去推算岩石或化石的“年龄”，甚至于我们所居住的地球的“年龄”。

练习

1. 求下列积分曲线：

(a) $\begin{cases} y' = 2x \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \\ y|_{x=0} = 4 \end{cases}$

2. 在 20.2°C, 细菌受到 5% 的消毒溶液消毒，每小时细菌死亡的比率为 11%, 假如开始时有 1000 个细菌，那么在 24 小时后还剩下多少?

3. 化学反应速度 v 和温度 t 的增加是按照有机体生长的规律进行的，当 $t = 0$ 时，$v = 30$; 当 $t = 9.90$ 时，$v = 60$, 求反应率以及当 $t = 20$ 时，v 的值.

4. 若函数 $y = f(x)$ 的变率 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与当时的函数值的平方成正比例，且

当 $x=0$ 时，$y=f(0)=2$; 当 $x=1$ 时，$y=f(1)=4$, 求函数 $y=f(x)$.

习题 4.5

1. 计算下列不定积分：

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-3x^2}$

(b) $\displaystyle\int \frac{1-\sin^{-3}x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$

(d) $\displaystyle\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int xe^{2x+1}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x$

2. 求下列定积分：

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+10}$

(b) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{(2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+5+6e^{-x}}$

(e) $\displaystyle\int_{1}^{\frac{7}{5}} \frac{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{9}{4}}-x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2-x+x^2}{(1+x)(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\ln x\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x$　(此处 m,n 是整数且 $m\pm n\neq 0$)

(i) $\displaystyle\int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

3. 求下列极限：

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

4. 利用求 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定积分，证明

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$$

5. 设 $0<a\leq 1$，求证：

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}<\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

6. 设 $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}$，利用不等式 $0\leq\sin x\leq x$ 证明：

$$\frac{\pi}{4}<\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\sin x}}<2-\sqrt{4-\pi}$$

7. 若 m,n 是正整数，求证：

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

8. 求证：$\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

9. 若 $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n\theta\,\mathrm{d}\theta\quad(n\geq 2)$. 试求 I_n 和 I_{n-2} 的关系式。

10. 若 $I_n=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$，求证：

$$2na^2I_{n+1}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n$$

11. 设 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$n$ 为正整数。

$$T_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$$

求证：

(a) $S_n\geq\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=0$

(c) $S_{n+1}-1\leq T_n\leq S_n$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=1$

12. 设 $f(x)=(ax+b)e^{x/2}$, 求 a,b 的值，使得等式

$$f(x)=e^{x/2}-1+\frac{1}{2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

对于任何 x 的值都成立。

13. 求由曲线 $y=\dfrac{4}{x^2}$, $y=x-1$, $x=1$ 所围区域的面积.

14. 求在曲线 $x^2+y^2=9$ 和 $y=\dfrac{1}{3}(-x^2+1)$ 之间位于第二象限那部分的面积。

15. 求积分 $I(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}|x-a|e^x\,\mathrm{d}x$ 在 $|a|\le 1$ 时的最大值。

16. 设 $0<t<\pi$，考察 x 的函数 $f(x)=2\sin x\sin(t-x)$

   (a) 画出 $f(x)$ 在区间 $0\le x\le\pi$ 上的图象，再设

$$F(t)=\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

   根据所作的图象说明 $F(t)$ 所表示的是什么?

   (b) 用关于 t 的式子写出 $F(t)$, 并求出使 $F(t)$ 取最小值时 t 的值。

17. 设 T_1 是由抛物线 $y=4x^2$ 和直线 $x=a$, $x=1$, $y=0$ 所围成的区域，T_2 是抛物线 $y=4x^2$ 和二直线 $x=a$, $y=0$ 围成的区域，但是 $0<a<1$，试求：

   (a) T_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1;

   (b) T_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

   (c) 使 V_1+V_2 为最大时 a 的值。

18. 设 $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$，曲线 $y=\sin x$ 与三条直线 $x=t$, $x=2t$, $y=0$ 围成部分绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 $V(t)$。当 $t=\alpha$ 时 $V(t)$ 最大，试求 $\cos\alpha$ 的值。

19. 设曲线 $y=f(x)$ 通过点 $P(3,4)$, 并满足微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}$，求此积分曲线。

20. 若 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos(x+y)$，求不定积分。(提示：设 $z=x+y$)