SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5343-54946

Dokazovanie viet v systéme Lean

Diplomová práca

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor: matematika
Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci záverečnej práce: doc. Mgr. Gejza Jenča, PhD.

Bratislava 2021 **Bc. Matúš Behun**

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Stavebná fakulta
Akademický rok: 2020/2021
Evidenčné číslo: SvF-5343-54946

ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študent: **Bc. Matúš Behun**
ID študenta: 54946
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor: matematika
Vedúci práce: doc. Mgr. Gejza Jenča, PhD.

Názov práce: **Dokazovanie viet v systéme Lean**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Lean je systém podpory počítačového dokazovania viet, založený na teórii závislých typov. Najväčším v súčasnosti existujúcim projektom v Leane je kolaboratívny projekt mathlib, ktorého časť Xena project si kladie za cieľ implementovať všetky definície, vety a dôkazy vyučované v odbore matematika na Imperial College v Londýne.

Študent si osvojí prácu v systéme Lean, pochopí relevantné časti projektu mathlib a bude implementovať doteraz neimplementované časti teórie zväzov v tomto systéme, najmä definíciu podzväzu a niektoré s ňou súvisiace tvrdenia.

Zoznam odbornej literatúry:

1. Anne Baanen,Alexander Bentkamp,Jasmin Blanchette,Johannes Hölzl,Jannis Limperg:The Hitchhiker's Guide to Logical Verification, online kniha, 2021 https://github.com/blanchette/logical_verification_2020/blob/master/hitchhikers_guide.pdf
2. Jeremy Avigad, Leonardo de Moura, and Soonho Kong: Theorem proving in Lean, online kniha, 2017 https://leanprover.github.io/theorem_proving_in_lean/

Riešenie zadania práce od: 26. 04. 2021
Dátum odovzdania práce: 13. 05. 2021

Bc. Matúš Behun
študent

Ing. Marek Macák, PhD.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

Poďakovanie

Týmto sa chcem poďakovať doc. Mgr. Gejzovi Jenčovi, PhD. ktorý mi umožnil pracovať na tejto zaujímavej téme a za ochotu a trpezlivosť pri jej vypracovaní.

1 Abstrakt

Práca sa zaoberá dokazovacím asistentom Lean, ktorý je založený na teórii závislostných typov. Opisujeme základnú syntax Lean-u pre tvorbu definícii a štruktúr a prácu s typmi, ktoré reprezentujú matematické tvrdenia a spôsoby ich dokazovania. Podrobne rozoberáme náš príspevok štruktúry podzväzu do projektu mathlib a dôkazu vety o izomorfizme intervalov v rámcii teórie čiastočného usporiadania. Súčasťou práce je aj opis prepojenia logiky a výpočtových modelov známe ako Curry-Howardov izomorfizmus.

Kľúčové slová: Lean, asistent dokazovania, teória čiastočného usporiadania, Curry-Howardov izomorfizmus

This diploma thesis describes proof assistant Lean based on dependent type theory. We describe basic syntax of Lean for creating and working with definitions, structures and types that are representing mathematical propositions and their proofs. In detail we describe our contribution of structure of sublattice to project mathlib as well as theorem of modular lattice isomorphism. Part of the work conisist of connection between logic and computational model known as Curry-Howard isomorphism.

Keywords: Lean, proof assistant, partial order theory, Curry-Howard isomorphism

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Dokazovací asistenti obsahujú interaktívne prostredie, ktoré na základe vstupu používateľa tvorí formálne dôkazy. Táto diplomová práca sa zaoberá dokazovacím asistentom Lean, ktorý je založený na teórii závislostných typov. V úvode práce uvádzame teoreticky nevyhnutnú časť intuicionistickej logiky a jednoduchej teórie typov, aby sme ukázali prepojenie medzi logikou a výpočtovými modelmi, ktoré je známe ako Curry-Howardov izomorfizmus.

Druhá kapitola opisuje prostredie Lean-u, jeho základnú syntax a prácu s typmi, ktoré sú jeho základným prvkom. Poskytujeme pohľad na dva spôsoby dokazovania. Dopredným spôsobom, ktoré je priamym poskytnutím λ-výrazu a spätným v taktickom móde, ktorý naplno využíva interaktívne prostredie. Kapitolu uzatvárame opisom syntaxe využívanej na budovanie štruktúr používanej pri tvorbe tých matematických a ich hierarchie.

V poslednej kapitole rozoberáme našu implementáciu vety o izomorfizme modulárnych zväzov. Opisujeme základné definície a štruktúry týkajúce sa teórie čiastočného usporiadania implementovaných v rámci komunitného projektu mathlib. Na záver podrobne opisujeme náš príspevok štruktúry podzväzu do tejto knižnice aj s jeho atribútmi.

Kapitola 2

Curry-Howardov izomorfizmus

1 Intuicionistická logika

Konštruktivizmus je jeden z filozofických smerov, ktorý hovorí o tom, že vedomosti sú tvorené a mali by byť zahrnuté k doteraz poznanému. Tento filozofický smer mal vplyv aj na matematiku, kde sa na jeho základe vytvorilo viacero "škôl" ako finitizmus, predikativizmus, intuicionizmus. *Intuitionizmus* ako jeden z nich je teda konštruktívny prístup k matematike v duchu učenia *Brouwera*(1881-1966) a *Heytinga*(1898-1980) [9]. Filozofickým základom tohto prístupu je princíp, že matematika je výtvorom mentálnej činnosti a nepozostáva z výsledkov formálnej manipulácie symbolov, ktoré sú iba sekundárne. Jedným z princípov je tak odmietnutie postulátu zákona vylúčenia tretieho z klasickej logiky.

$$p \vee \neg p \tag{2.1}$$

V prípade dôkazu sporom nad výrokom p je možné dokázať existenciu p. Z konštruktívneho pohľadu ide o nezmysel, pretože uvažujeme nad pravdivosťou výroku nezávisle od uvažovaného tvrdenia. Výrok v intuicionistickej logike je teda pravdivý, ak existuje dôkaz o jeho pravdivosti. Nepravdivý je, ak existuje dôkaz, ktorý vedie k sporu. V matematickej logike definujeme dôkaz z nejakých predpokladov ako konečnú postupnosť formúl, pri tvorbe ktorých môžeme v každom kroku spraviť jeden z nasledujúcich úkonov:

- Napísať postulát alebo axióm logiky
- Napísať jeden z predpokladov
- Napísať formulu, ktorú dostaneme aplikáciou dedukčného pravidla na niektorej formuly predchádzajúcej v postupnosti.

Všetky tieto úkony si postupne zavedieme aj s dedukčnými pravidlami. Pre lepšie pochopenie pojmu formuly a premennej uvádzame ich nasledujúcu definíciu:

Definícia 2.1 (Výroková premenná, formula)**.** *Majme spočítateľnú množinu $\mathcal{X}$ výrokových premen-*

ných. Množina premenných alebo formúl $\mathcal{A}$ generujeme nasledovnou gramatikou:

$$A, B ::= X | A \implies B | A \wedge B | A \vee B | \neg A | \top | \bot \tag{2.2}$$

Kde $X \in \mathcal{X}$ reprezentuje výrokovú premennú, a $A, B \in \mathcal{A}$ formulu.

Formulu, ktorú tvorí len výroková premenná nazývame atomickou. V úvode tohto textu sme hovorili o postuláte alebo axióme zákone vylúčenia tretieho, ktorý je formulou. Ďalším príkladom formuly generovanej uvedenou gramatikou je:

$$\neg A \wedge B \wedge C \implies A \vee B$$

V prípade, že by sme chceli predchádzajúcu formulu ohodnotiť je precendencia negácie vyššia ako konjunkcie a disjunkcie a tie ju majú vyššiu ako implikácia. Formula obsahujúca viac za sebou idúcich binárnych operátorov platí asociácia z pravej strany. Pri uvedení jedeného z predpokladov do dôkazu vyberáme z množiny, ktorú nazývame kontextom.

Veta 2.1. *Kontextom alebo systémom predpokladov nazývame zoznam formúl značených*

$$\Gamma = P_1, \ldots, P_n \tag{2.3}$$

Dedukciou nazývame dvojicu pozostávajúcu z kontextu a formuly.

$$\Gamma \vdash A \tag{2.4}$$

Výraz $\Gamma \vdash A$ čítame ako premennú A je možné dokázať zo systému predpokladov Γ. Nad uvedenými predpokladmi a postulátmi potom pomocou dekučných pravidiel prirodzenej intuicionistickej logiky potom odvádzame nové formuly a rozširujeme tak teóriu. Zaužívaná notácia pre dedukčné pravidlá je nasledovná:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \ldots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A} \tag{2.5}$$

Horná časť tvorí množinu dedukcií Γ_i, ktoré nazývame prepokladom a dolnej časti Γ, ktorú nazývame záverom. V prípade, že čítame dedkučné pravidlo alebo dedkučný strom tvorený takýmito pravidlami zhora nadol hovoríme o dedukcii v opačnom smere o indukcii. Prirodzená intuicionistická logika obsahuje nasledujúce pravidlá:

$$\frac{}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash A}\ (\text{ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \implies B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\implies_E) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \implies B}\ (\implies_I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge^l_E)\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge^r_E) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_E) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee^r_I)\ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee^l_I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_E) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_E)$$

Záver pravidiel s dolným indexom E majú v závere výrokové premenné. Pravidlá s dolným indexom I úvadzajú neatomické formuly. Pravidlo ($\Longrightarrow_E$) je známe ako *modus ponens*. Fragmentom logiky nazývame systém, ktorý dostaneme, ak sa obmedzíme len na niektoré z dedkučných pravidiel. My uvedieme implikačný fragment, ktorý je potom použitý v Curry-Howardovom izomorfizme.

Veta 2.2. *Implikačný fragment intuionistickej logiky dostaneme v prípade, ak formuly budú tvorené gramatikou*

$$A, B ::= X | A \Longrightarrow B \tag{2.6}$$

a pravidlami (ax), ($\Longrightarrow_E$), ($\Longrightarrow_I$).

Aj keď tento fragment tvorí len jedna logická spojka a výrokové premenné je možné pomocou nich odvodiť väčšinu logicky ekvivalentných formúl tvorených gramatikou uvedenou na začiatku. Nasledujúci príklad tvorí dedukčný strom jednoduche formuly:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash A}\ (ax)}{\Gamma, A \vdash B \Longrightarrow A}\ (\Longrightarrow_I)}{\Gamma \vdash A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)}\ (\Longrightarrow_I)$$

2 λ-kalkulus

λ-kalkulus je výpočtový model, ktorý sa v informatike využíva pre svoju jednoduchosť a výpočtovú schopnosť. Napriek tomu, že formálne tento model tvoria len tri výrazy je jeho výpočtová schopnosť rovná *Turingovmu stroju*. To znamená, že v ňom dokážeme naprogramovať všetky algoritmy, ktoré dokáže spracovať klasický počítač. Pre tieto vlastnosti je využívaný aj ako základ pre všetky funkcionálne programovacie jazyky. V tejto sekcii si ho formálne uvedieme aj s príkladmi, ktoré ukazujú ako je v ňom možné zakódovať jednoduché algoritmy.

Veta 2.3. *Množinu Λ tvoria λ-výrazy, ktoré sú generované nasledovnou gramatikou:*

$$t, u ::= x | tu | \lambda x.t \tag{2.7}$$

Kde prvý výraz x patrí do nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{X} = x, y, z, \ldots$ premenných.

Jednotlivé výrazy majú nasledovný význam:

x - je premennou

tu - je aplikáciou výrazu t s argumentom u

$\lambda x.t$ - je abstrakciou t nad x

Premenná x sa vo výraze $\lambda x.t$ viaže na výraz t. O premennej potom x hovoríme, že je viazaná, inak je voľná.

$$VP(x) = x$$
$$VP(\lambda x.t) = VP(t) \setminus \{x\}$$
$$VP(tv) = VP(t) \cup VP(v)$$

Aplikácia λ-výrazov je implicitne aplikovaná zľava. Precedencia aplikácie je vyššia ako pri abstrakcii.

$$\lambda x.tx = \lambda x.(tx)$$

Abstrakciu viacerých argumentov je možné prepísať do tvaru po sebe idúcich abstrakcií s jednotlivými argumentami.

$$\lambda xyz.t = \lambda x.\lambda y.\lambda z.t$$

Príkladmi λ-výrazov môžu byť:

$$tx$$
$$(\lambda y.\lambda x.ty))$$
$$(\lambda y.yx)(\lambda x.x)$$

Veta 2.4. *O substutícii hovoríme pri nahradení jednej premennej druhou.*

$$t[y/x] \tag{2.8}$$

Z doteraz uvedených výrazov nám výpočet čiastočne pripomínala len aplikácia na jednoduchý výraz. Ak za výraz dosadíme jednoduchú abstrakciu, aplikáciu tvorí nahradenie viazanej premennej vo výraze abstrakcie za aplikovanú premennú. Tento úkon nám zjednodušuje výraz na jednoduchú aplikáciu. Toto zjednodušovanie sa volá β-redukciou. Od komplikovanejších výrazov sa tak dostávame k jednoduchším predstavujúcimi výsledky výpočtu. β-redukciu tvorí postupnosť, v ktorej aplikujeme pravidlá aplikácii. Formálne je β-redukcia definovaná aplikovaním týchto pravidiel:

$$\frac{}{(\lambda x.t)u \to_\beta t[u/x]}\ (\beta_s) \qquad \frac{t \to_\beta t'}{(\lambda x.t)u \to_\beta t[u/x]}\ (\beta_\lambda)$$

$$\frac{t \to_\beta t'}{tu \to_\beta t'u}\ (\beta_l) \qquad \frac{u \to_\beta u'}{tu \to_\beta tu'}\ (\beta_r)$$

Pre lepšiu predstavu uvádzame komplikovanejšie príklady, ktorými je napríklad možné zakódovať prirodzené čísla a jednoduchú podmienku z programovania.

Veta 2.5. *Rekurzívne volanie funkcie definujme nasledovne:*

$$f^0 x = x$$
$$f^n x = f(f^{n-1} x)$$

Potom Churchove číslo c_n je λ-výraz

$$c_n = \lambda s.\lambda z.s^n(z)$$

Prirodzené čísla je potom možné definovať

$$0 = \lambda fx.x$$
$$1 = \lambda fx.fx$$
$$1 = \lambda fx.f(fx)$$
$$2 = \lambda fx.f(f(fx))$$

$$\begin{aligned} nasledovnik(n) &= (\lambda nfx.f(nfx))(\lambda fx.f^n x) \\ &\to_\beta \lambda fx.f((\lambda fx.f^n x)fx) \\ &\to_\beta \lambda fx.f((\lambda x.f^n x)x) \\ &\to_\beta \lambda fx.f(f^n x) \\ &= \lambda fx.f^{n+1} x \\ &= n+1 \end{aligned}$$

Operáciu sčítania je potom možné vykonať pomocou nasledujúceho výrazu

$$f_+ = \lambda x.\lambda y.\lambda s.\lambda z.xs(ysz)$$

Pred vytvorením výrazu, ktorý predstavuje podmienku si potrebujeme zakódovať booleovské hodnoty:

$$True = \lambda xy.x$$
$$False = \lambda xy.y$$

Podmienku potom predstavuje nasledujúci výraz, na ktorý potom aplikujeme λ-výraz predstavujúci logickú podmienku.

$$if = \lambda bxy.bxy$$

Jednotlivé vetvy výpočtu potom predstavujú ďalšie dva výrazy aplikované na celý výraz podmienky a logického výrazu. Po aplikácii výrazov t, u cez β-redukcie dostávame na konci výraz t v prípade pravdivého vyhodnotenia a u respektíve t v prípade nepravdivého.

$$
\begin{aligned}
if \text{ True } tu = (\lambda bxy.bxy)(\lambda xy.x)tu &\rightarrow_\beta (\lambda xy.(\lambda xy.x)xy)tu \\
&\rightarrow_\beta (\lambda y.(\lambda xy.x)ty)u \\
&\rightarrow_\beta (\lambda xy.x)tu \\
&\rightarrow_\beta (\lambda y.t)u \\
&\rightarrow_\beta t
\end{aligned}
$$

3 Typovo jednoduchý λ-kalkulus

Typovo jednoduchý λ-kalkulus je rozšírením λ-kalkulu o jednoduché typy ktoré priraďujeme λ-výrazom. Výraz $t : T$ tak môžeme interpretovať spôsobom "t patrí množine T" alebo z výpočtového "výsledkom výrazu t je typ T". Z praktického hľadiska sa s typmi stretávame v staticky typovaných programovacích jazykoch.

Veta 2.6. *Majme spočítateľnú množinu U obsahujúcu typové premenné. Jednoduché typy sú potom generované gramatikou*

$$A, B ::= U | (A \rightarrow B)$$

Teda okrem jednoduchých typov sú typmi aj funkcie medzi nimi. Precedencia zloženia funkcií typov je zľava $A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Množinu tvoriacu premenné, ktorým sú priradené typy nazývame kontextom.

Veta 2.7. *Kontextom je:*

$$x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n$$

kde $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \Pi$ a $x_1, \ldots, x_n \in$ Obor kontextu je množina obsahujúca:

$$domain(\Gamma) = x_1, \ldots, x_n$$

Koobor kontextu je množina obsahujúca:

$$range(\Gamma) = \tau \in \Pi | (x : \tau) \in \Gamma$$

Príklady jednoduchých typov generované gramatikou.

- $\vdash \lambda x.x : \sigma \rightarrow \sigma$
- $\vdash \lambda x.\lambda y.x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$
- $\vdash \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz) : (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\rho \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$

Výraz t je typu A ak v kontexte Γ je derivovateľná pomocou postupnosti nasledujúcich pravidiel:

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \Gamma(x)} \ (ax)$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \rightarrow B} \ (\overset{I}{\rightarrow}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash tu : B} \ (\overset{E}{\rightarrow})$$

Ktoré je možné interpretovať nasledovne:

- (ax): v kontexte x je typu A
- $(\overset{I}{\rightarrow})$: ak je x typu A, t je typu B, potom funkcia $\lambda x.t$ ktorá asociuje x t je typu $A \rightarrow B$
- $(\overset{E}{\rightarrow})$: daná je funkcia t je typu $A \rightarrow B$ a argument u je typu A, vysledok aplikácia tu je typu B

Uvádzame príklad derivačného stromu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, x : A, y : B \vdash t : A}{\Gamma x : A \vdash \lambda y.t : B \rightarrow A}\ (\overset{I}{\rightarrow})}{\Gamma \vdash \lambda x.\lambda y.t : A \rightarrow (B \rightarrow A)}\ (\overset{I}{\rightarrow})$$

Pre potreby vety Curry-Howardovho izomorfizmu zavedieme aj množinu pseudo-výrazov.

Definícia 2.2. *Množina Λ_Π pseudo výrazov je definovaná nasledovnou gramatikou:*

$$\Lambda_\Pi ::= V | (\lambda x : \Pi \Lambda_\Pi) | (\Lambda_\Pi \Lambda_\Pi)$$

kde V je množina λ-výrazov premenných a Π is je množina jednoduchých typov.

4 Curry-Howardov izomorfizmus

V úvode kapitoly sme popisovali konštruktivistický prístup, ktorý hovoril o nutnosti skonštruovať objekt pre dôkaz existencie. Teda, ak chceme dokázať nejaké tvrdenie potom ho musíme zostrojiť z množiny predpokladov a axióm. *Curry* s *Howardom* si všimli, že zostrojovanie dôkazu pripomína výpočet [7]. Pre dôkaz implikácie $a \implies b$ musíme ukázať na základe predpokladu a dôsledok b v konštruktivizme zostrojiť objekt b z objektu a a z výpočtového hľadiska zostrojiť funkciu s výstupom b na základe vstupu a.

Pri predstavení jednoduchých typov sme vraveli o možnosti interpretácie výrazu $t : T$ ako t patrí do nejakej množiny T. Z konštruktívneho pohľadu sme o logických tvrdeniach hovorili ako o objektoch, ktoré majú svoje vymedzenie z logického hľadiska. V tomto zmysle z množinového hľadiska prepojenie medzi typovým λ-kalkulom a logikou prepojenie znázornené v nasledujúcej tabuľke.

Logika	Typovo jednoduchý λ kalkulus
tvrdenia	typy
dôkaz tvrdenia T	λ-výraz t typu T
$T \implies P$	typ $T \rightarrow P$
$T \wedge P$	typ $T \times P$

Posledný príklad tvorí kosúčinový typ, ktorý je usporiadanou dvojicou dvoch typov.

V sekcii o intuicionistickej logike sme zaviedli gramatiku implikačného fragmetnu intucionistickej logiky s troma dedkučnými pravidlami ($\implies_E$), ($\implies_I$), (ax). V teórii jednoduchých typov sme zase ukončili pravidlami, ktoré odvádzajú typ pomocou pravidiel $(\overset{I}{\rightarrow})$, $(\overset{E}{\rightarrow})$ a (ax). Ak dáme do rovnosti množinu propozičných premenných s množinou typových premenných.

Nasledujúca veta je prevzatá z publikácie [2].

Veta 2.8. *Curry-Howard izomorfizmus*

1. *Ak* $\Gamma \vdash M : \varphi$ *potom* $|\Gamma| \vdash \varphi$.

2. *Ak* $\Gamma \vdash \varphi$ *potom existuje* $M \in \Lambda_{\Pi}$ *také že* $\Delta \vdash M : \varphi,$ *kde* $\Delta = \{(x_{\varphi} : \varphi) | \varphi \in \Gamma\}$

Kapitola 3

Lean dokazovací asistent

Lean je dokazovací asistent, ktorý bol vytvorený ako otvorený softvérový projekt Leonardom de Mourom v Microsoft Reasearch v roku 2013. Jazyk sa neustále vyvíja a momentálne sa nachádza vo štvrtej iterácii [4]. Implementácia Lean-u je v jazyku C++ a jeho jadro má len 8000 riadkov. Prostredie je dostupné pre operačné systémy Linux, Windows a MacOS. Interaktívne prostredie pre dokazovanie je podporované pre editory *Emacs* a *Visual Studio Code*.

Lean podobne ako iný dokazovací asistent *Coq* je založený kalkuluse konštrukcií, ktorý je zovšeobecnením teórie jednoduchých typov a teórie závislostných typov.

V úvode tejto kapitoly popisujeme interaktívne prostredie a komunitný projekt *mathlib*. Opisujeme základnú syntax, ktorá korenšponduje s jednoduchou teóriou typov a príkazmi potrebné pre prácu s nimi. Syntax potom rozširujeme o možnosť tvorby definícii a prácu s nimi a priestorom mien pre vytváranie hierachie z pohľadu organizácie kódu. Pokračujeme opisom spôsobu tvorby dôkazu priamym poskytnutím λ-výrazu a interaktívnou verziou v taktickom móde. Kapitola je uzatvorená opisom syntaxe popisujúcom induktívne a jednoduché štruktúry, ktoré tvoria tie matematické a ich hierarchické rozširovanie a priradenie do tried.

1 Mathlib

Mathlib je komunitný projekt [5] ktorého cieľom je centralizovať matematickú teóriu implementovanú v Lean-e. Do projektu je možné jednoducho prispievať po udelení privilégií niektorým zo správcov repozitára a odobrením požiadavky na začlenenie kódu. Väčšina obsahu mathlibu obsahuje matematiku na vysokoškolskej úrovni. V dobe písania práce je najvyššia súborová hierarchia teórie v repozitári nasledovná:

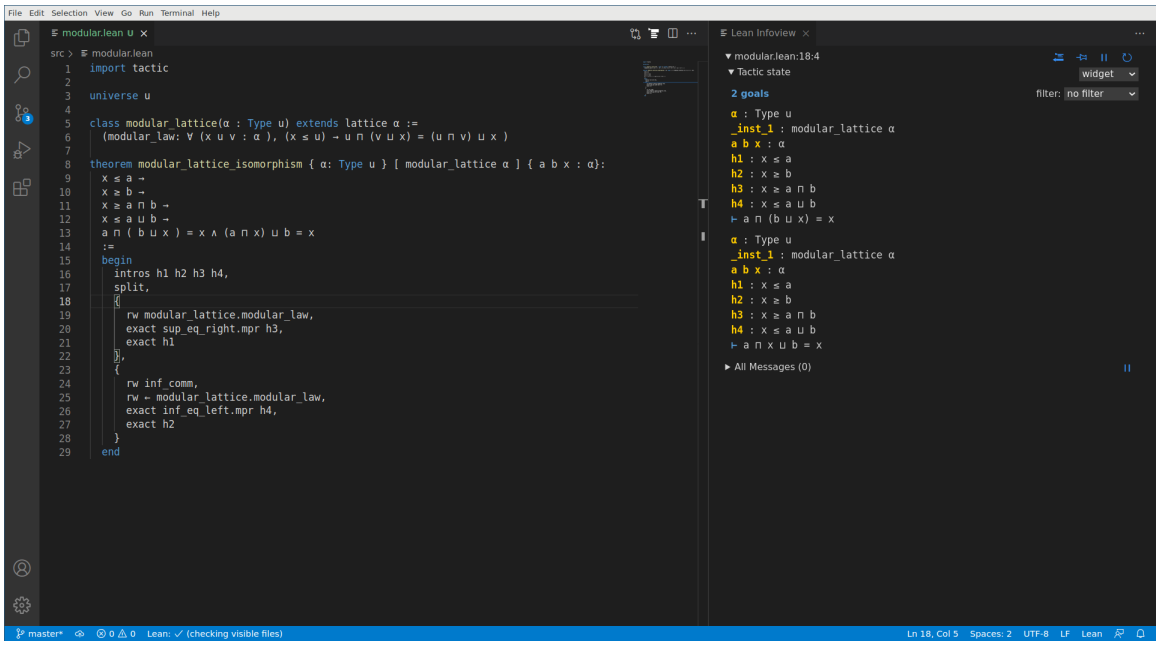
```
algebra/
category_theory/
data/
geometry/
measure_theory/
probability_theory/
algebraic_geometry/
combinatorics/
group_theory/
```

```
representation_theory/
algebraic_topology/
computability/
dynamics/
linear_algebra/
number_theory/
ring_theory/
analysis/
control/
field_theory/
logic/
order/
set_theory/
topology/
```

V kontraste s inými modernými dokazovacími asistentami má mathlib množstvo prispievateľov akademické vzdelanie v čistej matematike [6], čo ovplyvnilo aj jeho obsah.

2 Vývojové prostredie

V našom prípade sme pracovali vo vývojovom prostredí *Visual studio code* v kombinácií s jeho leanovským rozšírením, ktoré je možné nainštalovať cez *marketplace*. Prostredie sa skladá z editora podporujúceho UTF-8 znaky a okno s interaktívnym výstupom reagujúce na polohu kurzora editora a kurzora počítačovej myši.



Obr. 3.1: Vývojové prostredie

V pravom okne *Lean infoview* je možné vidieť premenné s ich prislúchajúcimi typmi a v prípade dôkazu aj formulu, ktorú je potrebné dokázať za znakom ⊢. Okrem toho poskytuje okno aj výstup zo zabudovaných príkazov prostredia ako *print* alebo *reduce* ktoré rozoberieme neskôr. V prípade že

sa nachádzame v taktickom móde okrem zavedenia nových predpokladov alebo transformácie existujúcich je možné vidieť aj zmenu cieľa a podcieľov, napríklad v prípade, že sme sa dostali k dôkazu vymenovaním prípadov.

3 λ-kalkulus

Pred predstavením techník dokazovania je nutné sa oboznámiť s prvkami funkcionionálneho programovania v Leane. V predchádzajúcej kapitole uvedený výpočtový model λ-kalkulu je z programovacích paradigiem najbližšie práve funkcionálnemu spôsobu programovania. V nasledujúcej časti predstavujeme základy funkcionálneho programovania spolu s typmi a nástrojmi Lean-u na vývoj a menežment priestoru mien.

3.1 Konštanty, aplikácie

Deklarácia konštanty zavádza do systému novú deklaráciu bez definície. Z tohto dôvodu sa ich pri rozvoji teórie snažíme vyhýbať. V nasledujúcich príkladov budeme pracovať s prirodzenými a celými číslami ktorých štruktúry sú súčasťou kontextu bez nutnosti ich importovať.

```
constant m : nat
```

Hovorí o deklarovaní konštanty m ktorej typ je *nat*. Alternatívny zápis pre prirodzené číslo je pomocou sekvencie *\nat* alebo *\N* ktorú skonvertuje leanovské rozšírenie na znak $\mathbb{N}$. Vstavaný príkaz, ktorý poskytuje typ výrazu zadaného na argumente je *#check*:

```
#check m
```

Mriežka na začiatku príkazu značí zabudovaný príkaz. V prípade kontroly typu nami zadefinovanej konštanty n, je výstup v súlade s našou definíciou.

```
m : ℕ
```

Pre zadefinovanie viacerých konštánt jedným príkazom existuje plurálna verzia príkazu *constants*. Definícia konštanty typu funkcie medzi prirodzenými číslami vyzerá nasledovne:

```
constant f : ℕ → ℕ
constant h : ℕ -> ℕ -> ℕ
```

Zavolanie funkcie sa notačne podobá aplikácii v λ-kalkule, kde argument jednoducho pripíšeme za funkciu:

```
#constants m n : ℕ

#check f m
#check h m
#check h m n
```

Zatiaľ čo v prvom prípade dostaneme typ $\mathbb{N}$ v druhom prípade $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a v treťom vidíme aplikáciu na funkciu, kde bude výsledným typom znova jednoduchý typ $\mathbb{N}$. Aplikácia je asociatívna z ľavej strany a preto je nasledujúci výraz potrebné uzátvorkovať napravo, inak dostávame typovú chybu pre funkciu g, ktorá očakáva celé číslo a nie typ funkcie f.

```
constant f : ℕ → ℤ
constant g : ℤ → ℕ
constant a : ℕ

#check g (f a)
```

Číselné konštanty majú v leane typ ℕ.

```
#check 5
#check (-5 : ℤ)
```

Pri deklarácii záporného čísla je tak nutné už explicitne uviesť typ. Nasledujúce príklady ilustrujú okrem funkcie znamienka $'+'$ aj implicitnú konverziu medzi typmi.

```
#constants (m : ℕ) (n : ℤ)

#check 1 + 2
#check m + 1
#check n + 1
#check n + m
#check m + n
```

V prípade prvého príkladu dostávame typ ℕ pre nespracovaný výraz, pre ktorý by sme mohli očakávať výsledok 3. Pre druhý a tretí výraz dostávame typy definovaných konštánt. Pri treťom výraze je vhodné si uvedomiť už implicitnú konverziu prirodzeného čísla na celé. Konverzia je ešte viac zrejmá pri štvrtom výraze kde výsledným typom je ℤ. Prekvapivo z piateho výrazu dostávame v informačnom okne chybový výstup. Za neschopnosťou Lean-u dedukovať typ stojí nedefinovaná konverzia z celých do prirodzených čísel. Za vysvetlením stojí spôsob akým pracuje preťaženie infixového operátora $'+'$ podobným spôsobom ako pre triedy v jazyku $c++$ alebo *python*. Štvrtý a piaty výraz je tak možné prepísať aj do tvaru:

```
#check n.add(m)
#check m.add(n)
```

Pretože znak $'+'$ je preťažením funkcie *add* nad štruktúrou množín čísel.

3.2 Funkcie

V predchádzajúcej sekcii sme si ukázali explicitne definovaný typ funkcie medzi prirodzenými číslami, ktorý bol typu $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ alebo $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. V Lean-e definujeme anonymnú funkciu alebo λ-výraz nasledovne.

```
#check λ x, x + x
```

Typ argumentu x je odvodený z výrazu, ktorý na funkciu aplikujeme. Pre korektnú aplikáciu musí mať typ aj definovanú funkciu sčítania. Ak by sme chceli obmedziť argument len na konkrétny typ robíme to podobne ako pri definovaní konštanty. Potom aplikácia

```
#check (λ (x : ℕ), x + x) (m : ℤ)
```

je už typovou chybou, pri ktorej nám informačné okno hlási

```
type mismatch at application
  (λ (x : ℕ), x + x) m
term
  m
has type
```

```
  ℤ
but is expected to have type
  ℕ
```

Uvedieme si zopár príkladov výpočtovo ekvivalentných funkcii obvodu obdĺžnika typu $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

```
#check λ (x : ℕ) (y : ℕ), (x + x) + (y + y)
#check λ (x y : ℕ), (x + x) + (y + y)
#check λ (x : ℕ), λ (y : ℕ), (x + x) + (y + y)
```

Všetky tri príklady sú ekvivalentné z pohľadu typov a predstavujú iný spôsob zápisu. Funkcia v ktorej neuvedieme typ argumentu je polymorfnou.

```
#check λ x y, x + x + y + y
```

V prípade, že by sme chceli získať hodnotu z výrazu použijeme príkaz *#eval*, alebo *#reduce*. *Reduce* na rozdiel od *eval* pri vykonávaní používa jadro na získanie typu a je tak menej efektívnym.

```
#eval (λ (x y : ℕ), (x + x) + (y + y)) 2 3
```

Aplikácia nám dáva výsledok 10, ktorý je očakávanou hodnotou.

Pre pomenovanie alebo zadefinovanie takejto funkcie používame príkaz *def* ktorej tvar v najjednoduchšej podobe má tvar:

```
def meno_definicie (argument_1 : typ) (argument_n : typ) :
    typ_navratovej_hodnoty
:=
    telo funkcie
```

V prípade definície štvorca aj s jeho výpočtom

```
def obvod_stvorca (x : ℕ) (y : ℕ) : ℕ := x + x + y + y

#eval obsah_stvorca 3 5
```

Lean pre kľúčové slovo *def* obsahuje aj aliasy *theorem* a *lemma*. V prípade že chceme uviesť definíciu bez mena je možné využiť *example*.

3.3 Typy

Doteraz sme uvažovali len s typmi množiny prirodzených a celých čísel, ktoré predstavujú na pozadí Leanu konkrétne definovanú štruktúru. Typovanie v Lean-e ale podporuje zavedenie nového abstraktného typu ktorý patrí univerzu(universe). Zavedenie týchto univerz je motivované problémom analogickým s Russelovým paradoxom, a teda či množina všetkých množín obsahuje samú seba. V teórii typov sa jedná o Girardov paradox. Hierarchia týchto univerz je usporiadaná od 0 čo je univerzum tvoriace najjednoduchšie typy takže *Type* alebo aj *Type 0* je potom typom *Type 1*, ktorý je typom *Type 2*.

Špeciálne postavenie v typoch majú tvrdenia označujeme *Prop*, ktorého typom sú všetky dôkazy. Sú postavené v hierachii oddelené na najnižšej úrovni a teda *Prop* je typu *Type*. Univerzum, do ktorého patrí *Prop* označujeme *Sort* čo je len alias. Platí vzťah *Sort u + 1 = Type u*.

V tejto práci a ani vo väčšine práce s Leanom nie je potrebné využívať hierachiu typov sofistikovanejším ako prezentovaným spôsobom.

```
universe u v

constant (a : Type u) (b : Type v)
```

Druhou možnosťou je využiť substitučnú syntax, kde *'*'* znamená pre ľubovoľné univerzum a v prípade _ necháme doplniť typ automaticky Lean-om.

```
constant f : Type _ → Type _
constant g : Type

#check f g
```

Kontrola typu aplikácie nám vypíše typ *Type u_1* čo je spôsob Lean-u označovať ešte neurčený typ bez konkrétneho univerza.

3.4 Premenné

V prípade, že sa snažíme definovať viacero funkcií s rovnakými argumentami alebo používať objekt, ktorého typ je vyjadrený komplikovanejším zápisom je vhodné si zápis zjednodušiť premennými. Z inak na pohľad komplikovaného zápisu:

```
universes u v

def kompozicia (α : Type u) (β : Type v) (f : α → β) (g : β → γ) (x : α) :
    α
:=
    g (f x)
```

Po zavedení premenných dostávame čitateľnejší zápis:

```
universes u v z

variable α : Type u
variable β : Type v
variable γ : Type z

def kompozicia (x : α) (f : α → β) (g : β → γ) : α := g (f x)
```

Definované premenné vstupujú do predpokladov definícii len ak sú použité v tele danej funkcie.

Vstupné argumenty dokonca môžeme vynechať úplne, v niektorých prípadoch to ale môže byť kontraproduktívne z dôvodu orientácie pri rozsiahlych zápisoch v editore.

```
variables (f : α → β)
          (g : β → γ)

def kompozicia : α := g (f x)
```

Pre doplnenie dodávame že nie je nutné ani definovať návratový typ α respektíve β, explicitné určenie návratového typu je ale vhodné nie len pre čitateľa, ale aj pre overenie správnosti výsledného typu.

3.5 Kontext, priestor mien

Pre ovládanie menného priestoru a kontextu existujú v Lean-e rôzne mechanizmy, z ktorých si popíšeme len tie najdôležitejšie. Najjednoduchším je súbor, ktorého definície, konštanty a premenné vstupujú do kontextu pri deklarácii a na konci súboru zaniknú. Import obsahu iných súborov sa robí jednoduchým príkazom *import*, ktorý musí byť deklarovaný na začiatku súboru. V súborovej hierachii sa potom od najvyššej úrovne v jednej z vyhľadávaných ciest vnoríme cez bodku.

```
import order.lattice
```

Príkaz sa pokúsi nájsť priečinok *order* so súborom *lattice.lean*. Zoznam prehľadávaných ciest sa dá zistiť prepínačom *path*, ktorý ide na vstup priamo programu *lean*.

Deklarácie premenných definované v argumetnoch definície prepisujú vonkajší kontext. V prípade, že by sme chceli rozdeliť kontext súboru na menšie sekcie jednoduchým nástrojom je dvojica *'section nazov_ sekcie'*, *'end nazov_ sekcie'*.

```
section prirodzene_cisla
  variable α : ℕ
end prirodzene_cisla

section cele_cisla
  variable α : ℤ
end cele_cisla
```

Používanejším je priestor mien s kľúčovým slovom *namespace*, ktorý po zadefinovaní ponúka možnosť opätovného zavedenia kontextu a vnorenie podobne ako rovnomenný mechanizmus v jazyku C++.

```
universe u

namespace skryty

  variable (α : Type u)
  namespace priestor
    def identita (a : α) : α := a
  end priestor
end skryty

#check skryty.priestor.identita

open skryty.priestor

#check identita
```

4 Dokazovanie

K dokazovaniu v Leane je možné pristupovať viacerými spôsobmi. Po poskytnutí dôkazu už vnútorne Lean-u nezáleží na spôsobe akým bolo tvrdenie dokázané. Prvým spôsobom je priamočiara konštrukcia typu pomocou funkcií. Druhým spôsobom je spätné dokazovanie, ktoré využíva taktický mód za pomoci sady príkazov upravujúcich cieľ a s pomocou poloautomatizácie. V leanovskej komunite je preferovaný práve druhý spôsob hoci pre jednoducho dokázateľné tvrdenia stačí a je využívaná aj dopredná verzia.

4.1 Dopredné dokazovanie

Dôkaz zostavený len z λ-funkcií, ktoré transformujú argumenty na výsledný typ je pri zložitejších dôkazoch ťažko čitateľný. Pre lepšiu čitateľnosť poskytuje Lean nástroje, ktoré sa snažia konštruovať dôkazy tak, aby boli čitateľné ako tie klasické.

```
variables p d : Prop

def plati_predpoklad : p → d → p := λ hp : p, λ hd : d, hp
```

Predchádzajúci príklad je možné prepísať do čitateľnejšej verzie

```
def plati_predpoklad : p → d → p :=
  assume hp : p,
  assume hd : d,
  show p, from hp
```

Pre lepšiu predstavu toho, čo sa deje na pozadí Lean poskytuje výstup:

```
pq: Prop
hp: p
hq: q
⊢ p
```

Funkcie sú asociatívne zprava $p \to (d \to p)$. Tvrdenie hovorí "ak platí p, potom z d vyplýva p".

- Predpokladajme hp,
- a predpokladajme hd,
- potom vieme ukázať že platí p z predpokladu hp.

O čosi zložitejším príkladom je tvrdenie, ak platí p konjunkcia q, tak potom platí q konjunkcia p.

```
def symetria_konjunkcie : p ∧ q → q ∧ p :=
  assume hpq : p ∧ q,
    have hp  : p     := and.left  hpq,
    have hq  : q     := and.right hpq,
    have hqp : q ∧ p := and.intro hq hp,
  show q ∧ p, from hqp
```

Konjunkciu v editore je možné napísať cez *\and*. Ak sa pozrieme na typ konjunkcie a funkcií, ktoré sme dostali cez príkaz *check* dostaneme výstup:

```
and : Prop → Prop → Prop
and.left : ?M_1 ∧ ?M_2 → ?M_1
and.right : ?M_1 ∧ ?M_2 → ?M_2
and.intro : ?M_1 → ?M_2 → ?M_1 ∧ ?M_2
```

Toto intuitívne korenšponduje s tým, čo od týchto funkcií očakávame. Tento dôkaz je rozšírený o príkaz *have*, ktorý vytvára predpoklad z existujúcich. V poslednej fáze dôkazu je interaktívny výstup:

```
pq: Prop
hpq: p ∧ q
hp: p
hq: q
hqp: q ∧ p
⊢ q ∧ p
```

4.2 Spätné dokazovanie

V doprednom dokazovaní sme sa snažili transformovať predpoklady, tak aby na konci bol výsledkom dôsledok. Ako evokuje názov v spätnom dokazovaní sa snažíme transformovať cieľ, tak aby sme sa dostali k jednému z predpokladov. Pre tento účel existuje v Lean-e špeciálny spôsob dokazovania, ktorý nazývame taktický mód. Na rozdiel od dopredného dokazovania je nutné ovládať väčšiu sadu príkazov ktoré priamo transformujú cieľ. Dokazovanie je tak užšie prepojené s interaktívnym prostredím a pripomína tak hru. Ďalšou výhodou tohto dokazovania je možnosť využitie umelej inteligencie pri vyhľadaní dôkazu. Takýto prístup je obzvlášť užitočný napríklad v prípade, že musíme dokázať

identitu ktorej dôkaz je pracný, a tvorí ho veľa za sebou nasledujúcich využití iných identít ako napríklad využitie komutativity, asociativity alebo identít. Užšie prepojenie s prostredím a automatizácia vyhľadania dôkazu tohto módu, ale ide na úkor priamej čitateľnosti. Pre úplnosť dopĺňame, že v taktickom móde nie je nutné transformovať cieľ a je možné využiť aj konštrukcie dopredného dôkazu.

Pre dokazovanie v taktickom móde používame konštrukciu, ktorá je ohraničená kľúčovými slovami *begin* a *end*.

```
def symetria_konjunkcie : p ∧ q → q ∧ p :=
  begin
    intro h,
    cases h with p q,
    split,
    exact q,
    exact p
  end
```

Dôkaz začína zavedením predpokladu z implikácie príkazom *intro* a rozdelením konjunkcie príkazom *cases* s argumentom zavedenej konjunkcie a ich explicitným pomenovaním. Po zadaných príkazov informačným výstupom je:

```
pq: Prop
p: p
q: q
⊢ q ∧ p
```

Príkazom *split* potom rozdelíme cieľ na podciele, kde sa snažíme dokázať ľavú a pravú stranu, ktorú vidíme v informačnom okne ako:

```
2 goals
pq: Prop
h_left: p
h_right: q
⊢ q
pq: Prop
h_left: p
h_right: q
⊢ p
```

Dôkaz potom uzatvoríme príkazom *exact*, ktorý ukáže na jeden z predpokladov s rovnakým typom ako cieľ.

5 Abstraktné štruktúry v Lean-e

V matematike, a tak isto aj v programovaní, sa často vyskytujú objekty, nad ktorými je možné vykonávať operácie bez ohľadu na ich obsah pri splnení určitých podmienok. V matematike hovoríme o štruktúrach, ktoré majú striktnú definíciu, v programovaní sa dá voľne hovoriť o triedach. Matematické štruktúry v Lean-e su navrhované práve pomocou mechanizmu tried, pričom definícii triedy zodpovedá štruktúra spĺňajúca z definíce vyplývajúce podmienky. Potom inštanciou triedy môže byť znova štruktúra, ktorá je definovaná na užšej množine znova spĺňajúcej podmienky, príkladom je vzťah

grupy a podgrupy alebo priestoru a podpriestoru. Hierarchiu potom tvorí možnosť rozširovania tried, pri ktorých spĺňa okrem podmienok pôvodnej štruktúry aj ďalšie, ktoré ju obohacujú. Príkladom využitia môže byť pologrupa, ktorá je množinou s asociatívnou operáciou a monoidom, čo je pologrupa s jednotkou.

5.1 Induktívne štruktúry

Induktívne štruktúry predstavujú notačne silný nástroj pre definíciu objektov, medzi ktorými je jednoduchá asocioácia. Jednoduchým príkladom je zoznam, kde asociáciou medzi prvkami tvorí vzťah usporiadania. Komplikovanejší klasický príklad tvoria stromové štruktúry tvoriace uzly s viacerými nasledovníkmi. V matematike sa s indukciou stretávame pri definícii prirodzených čísel cez Peanove axiómy. Dve z týchto axióm hovoria:

- 0 je číslo
- Ak a je číslo potom nasledovník a je tiež číslo.

Prvé pravidlo hovorí o základnom prípade, v prípade zoznamu alebo stromu prázdny zoznam respektíve strom. Implementácia prirodzených čísel pomocou indukčnej štruktúry by mohla vyzerať nasledovne:

```
inductive prirodzene : Type
  | nula        : prirodzene
  | nasledovnik : prirodzene → prirodzene
```

Za kľúčovým slovom inductive nasleduje názov a sada konštruktorov s návratovými typmi. Už z názvu vyplýva súvislosť s dôkazom s matematickou indukciou, kde platnosť nejakého tvrdenia $P(n)$ pre všetky prirodzené čísla sa dokazuje pre

- $P(0)$, t.j. základný prípad
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1)$, predstavujúci indukčný krok

Pre tento typ dôkazu existuje v Leane v taktickom móde príkaz *induction*.

```
example : 5 * n = 4 * n + n :=
    begin
      induction n with d hd,
      ...
    end
```

Po príkaze induction sa informačnom nachádzajú dva ciele pre obe konštruktory prirodzených čísel *nat.zero* a *nat.succ*, podobne ako v našej uvedenej štruktúre a základnému prípadu a tvrdeniam matematickej indukcie dokazujúcej platnosť P.

```
case nat.zero
⊢ 5 * 0 = 4 * 0 + 0

case nat.succ
d: ℕ
hd: 5 * d = 4 * d + d
⊢ 5 * d.succ = 4 * d.succ + d.succ
```

V príklade, ktorý sme uviedli sú znamienka $'+'$ a $'*'$, ktoré používame v operáciach nad typom našej induktívnej štruktúry. Výsledkom oboch binárnych operácii je znova prirodzené číslo. Podľa predpokladov typ, ktorý prislúcha ich definícii je *prirodzene* → *prirodzene* → *prirodzene*. Jednou z výhod indkučne definovaných štruktúr je jednoduchosť definovania rekurzívnych funkcií, ktoré operujú nad týmito štruktúrami.

```
variables (a b: prirodzene)

open prirodzene

def sucet : prirodzene → prirodzene → prirodzene
  | a    nula          := a
  | a (nasledovnik b) := nasledovnik (sucet a b)
```

V tomto prípade znamená notácia $'|'$ prípad, v ktorom sa snažíme nájsť zhodu s poskytnutým argumentom a návratový typ. V druhom prípade ide o rekurzívne pravidlo, ktoré z argumentu b vytvorí jedo predchodcu. Celé pravidlo potom vráti nasledovníka zo súčtu prvého argumentu a predchodcu druhého. Rekurzia tak prenáša vlastnosť nasledovania z prvého na druhý argument až sa argumenty nezhodujú s prvým pravidlom, a teda argument už nemá predchodcu. Pre úplnosť dodávame aj technický detail definovania znamienka $'+'$ ako volania funkcie súčtu:

```
local infix ` + ` := sucet
```

5.2 Jednoduché štruktúry

V prípade, že by jeden z konštruktorov neobsahoval typ, ktorý poskytuje funkciu medzi typmi samotnej štruktúry, ide o obyčajnú štruktúru. Ich využitie je najmä pri definovaní tých matematických a v lean-e majú špeciálnu syntax. V príklade uvádzame ekvivalentné spôsoby definovania štruktúr.

```
structure vector :=
  mk :: (x y: ℝ)

structure vector₂ :=
  (x : ℝ)
  (y : ℝ)
```

Vytváranie objektov danej štruktúry má explicitné priradzovanie prvkom podľa názvov v prípade jednoduchých štruktúr je vhodnejšie priradzovanie na základe poriadia z definície šturktúry.

```
def v₂ : vector₂ :=
  {
    x := 10.5,
    y := 13.7,
  }

#check (⟨10.5, 13.7⟩ : vector)
```

K jednotlivým prvkom štruktúry pristupujeme cez bodku:

```
#eval v.x
```

tak vracia hodnotu 10.5. Pre modelovanie hierarchie, kde jedna štruktúra rozširuje druhú používame kľúčové slovo *extends*. Rozšírenie našej štruktúry o ďalšiu dimenziu vyzerá nasledovne:

```
structure vector₃ extends vector₂ :=
  (z : ℤ)
```

```
def v31 : vector3 :=
  { x := 1, y := 2, z := 3}
```

V prípade, že chceme vytvoriť objekt z rozšírenej štruktúry a máme k dispozícii jeho podkladový je často využívaná notácia.

```
def v32 : vector3 :=
{
    z := 10, ..v2
}
```

Závislostné typy predstavujú mechanizmus parametrizácie štruktúr a definícii na základe poskytnutého typu. V prípade nášho vektora by sme túto vlastnosť mohli využiť, ak by sme chceli zúžiť množinu z ktorej pochádza náš vektora len na celé čísla.

```
structure vector { α : Type u } :=
  (x : α)
  (y : α)
  (z : α)

def v1 := (⟨10, 13, 3⟩ : vector)
def v2 := (⟨(-10 : ℤ), 13, 3⟩ : vector)

#check v1.z
#check v2.z
```

Pri prvej kontrole sme dostali typ $\mathbb{N}$. V druhom prípade je ale z-tová zložka vektora v_2 typu $\mathbb{Z}$. Nedostatkom uvedeného príkladu je, že množina $\mathbb{Z}$ obsahuje množinu $\mathbb{N}$. Príkladom, ktorý lepšie ilustruje možnosti využitia sú matematické štruktúry, ktoré sú definované na množinách, ktoré môžu obsahovať objekty ľubovoľného typu.

```
variables { T : Type* } ( A : šútruktra1 T ) ( B : šútruktra2 T)
```

Takáto definícia premenných A a B zase zaručuje, že množina, na ktorých sú štruktúry definované je rovnakého typu. V prípade, že by sme výraz uzátvorkovali do obyčajných zátvoriek použili v definícii:

```
lemma ( T : Type* ) ( A : šútruktra1 T ) ( B : šútruktra2 T) : Type :=
begin
    ...
end
```

Musíme pri použiti alebo zavolaní poskytnúť aj prvý argument. Z tohto dôvodu sa tejto konštrukcii hovorí aj implicitný argument.

```
lemma { T : Type* } ( A : šútruktra1 T ) ( B : šútruktra2 T) : Type :=
begin
    ...
end
```

Typy na ktorých sú definované argumenty závisia od implictného.

5.3 Typové triedy

Typové triedy poskytujú mechanizmus pomocou ktorého zlučujeme rozdielne štruktúry s rovnakou vlastnosťou do tried. Príkladom môžu byť mať vlastnosť usporiadania, mať reprezentanta alebo byť grupou. Po zadefinovaní triedy potom štruktúru priradíme do tried inštancovaním. Inštancovanie

pre štruktúry potom býva odlišné v závislosti definície štruktúry. Vykonávanie dôkazov nad typovou triedou potom umožňuje zredukovať množstvo definícii. Nad našimi definíciami vektorov môžeme definovať dĺžku.

```
class norm (α : Type u) :=
  (length : α → ℝ)
```

Potom k definíciam štruktúr pridáme inštancie.

```
instance vector₂_norma : norma vector₂ :=
 { length := λ (v : vector₂), sqrt(v.x * v.x + v.y * v.y) }

instance vecotr₃_norma : norma vector₃ :=
 { length := λ (v : vector₃), sqrt(v.x * v.x + v.y * v.y + v.z * v.z) }
```

Triedu potom využívame v definíciach uvedením do hranatých zátvoriek aj s argumentom.

```
variables { T : Type* } ( a : šútruktra₁ T ) ( b : šútruktra₂  T ) [ norma T ]
```

Tento už komplikovanejší zápis hovorí o premenných a a b, ktoré sú definované na rovnakom type, ktorý má definovanú alebo je inštancovaný dĺžkou.

Kapitola 4

Teória čiastočného usporiadania

V tejto kapitole sa budeme snažiť ukázať možnosti Lean-u a využitie už existujúcich definícii v mathlibe pre definovanie pojmov dokázanie viet týkajúcich sa teórie čiastočného usporiadania. Usporiadanie je jednoducho intuitívne pochopiteľná vlastnosť bez matematických predispozícii. V každodennom živote porovnávame svoju výšku, čas, ktorý trval na vybehnutie do kopca alebo aj číselne neohodnotené, subjektívne merateľné objekty ako ktorý album od skupiny preferujem. Na otázky si potom vieme odpovedať "ja som vyšší", "zabehol si pomalšie" alebo tieto "albumy sú neporovnateľné". Teória usporiadania sa snaží tieto vlastnosti formálne definovať a rozvíjať ďalej otázkami ako:

- Aké je horné ohraničenie celej množiny objektov?
- Existuje ohraničenie horné alebo dolné pre ľubovoľnú podmnožinu objektov?
- Ako vyzerá zobrazenie zachovávajúce usporiadanie?

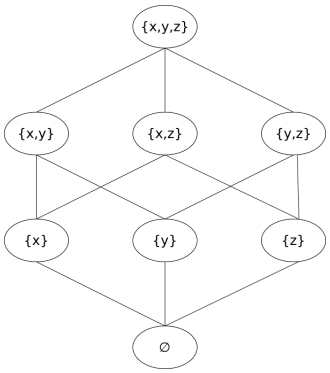
Pre stručnosť sa v rámci definícii obmedzíme len na definíciu relácie usporiadania, čiže podmnožinu karteziánskeho súčinu dvoch množín.

Definícia 4.1. *Majme množinu P, potom usporiadanie alebo čiastočné usporiadanie na množine P je binárna relácia $\leq$ taká že, pre všetky $x, y, z \in P$*

- $x \leq x$ *reflexivita*
- $x \leq y$ *a* $y \leq x$ *implikuje* $x = y$ *antisymetria*
- $x \leq y$ *a* $y \leq z$ *impikuje* $x \leq z$ *tranzitivita*

Ideálnym nástrojom pre uvažovanie nad usporiadaním sú *Hasseho* diagramy. Ako príklad uvádzame diagram "kocky". Na obrázku je usporiadanie všetkých podmnožín trojprvkovej množiny $\{a, b, c\}$ vzhľadom na vlastnosť byť podmnožinou. Za porovnateľné považujeme len tie prvky, ktoré sú "pokryté" jednosmernou cestou cez orientované hrany grafu.

V Leane je usporiadanie definované ako rozšírenie triedy predusporiadania.



Obr. 4.1: Usporiadania $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$

```
class has_le       (α : Type u) := (le : α → α → Prop)
class has_lt       (α : Type u) := (lt : α → α → Prop)

class preorder (α : Type u) extends has_le α, has_lt α :=
(le_refl : ∀ a : α, a ≤ a)
(le_trans : ∀ a b c : α, a ≤ b → b ≤ c → a ≤ c)
(lt := λ a b, a ≤ b ∧ ¬ b ≤ a)
(lt_iff_le_not_le : ∀ a b : α, a < b ↔ (a ≤ b ∧ ¬ b ≤ a) . order_laws_tac)
```

Čiastočné usporiadanie je potom rozšírením predusporiadania o vlastnosť antysymetrie.

```
class partial_order (α : Type u) extends preorder α :=
(le_antisymm : ∀ a b : α, a ≤ b → b ≤ a → a = b)
```

1 Zväz

Zväz je čiastočne usporiadaná množina, pre ktorú navyše platí, že pre každé 2 prvky a, b vieme nájsť prvok c, ktorý je ich jedinečným najmenším horným, respektíve(*supremum*) najväčším dolným ohraničením(*infimum*). V prípade intervalu reálnych čísel je toto ohraničenie jednoducho predstaviteľné ako bod ohraničujúce množinu na číselnej osi. Ak ide o čiastočné usporiadanie, názov je pre tieto ohraničenia prvkov motivovaný zobrazením na grafe. *Spojenie* $\sqcup, \vee$ pre supremum, respektíve *priesek* $\sqcap, \wedge$ pre infimum. Popisnejším názvom pre zväz je preklad anglicky používaného názvu *lattice* "mriežka" tak isto motivovaná zobrazením takého usporiadania na grafe. Pri dokazovaní viet o zväzoch je často využívaná vlastnosť duality najmenšieho horného a duálne najväčšieho dolného ohraničenie pre druhú polovicu dôkazu.

```
class has_sup (α : Type u) := (sup : α → α → α)
class has_inf (α : Type u) := (inf : α → α → α)

infix ⊔ := has_sup.sup
infix ⊓ := has_inf.inf

class semilattice_sup (α : Type u) extends has_sup α, partial_order α :=
(le_sup_left : ∀ a b : α, a ≤ a ⊔ b)
(le_sup_right : ∀ a b : α, b ≤ a ⊔ b)
(sup_le : ∀ a b c : α, a ≤ c → b ≤ c → a ⊔ b ≤ c)

class semilattice_inf (α : Type u) extends has_inf α, partial_order α :=
(inf_le_left : ∀ a b : α, a ⊓ b ≤ a)
(inf_le_right : ∀ a b : α, a ⊓ b ≤ b)
```

```
(le_inf : ∀ a b c : α, a ≤ b → a ≤ c → a ≤ b ⊓ c)

class lattice (α : Type u) extends semilattice_sup α, semilattice_inf α
```

2 Modulárne zväzy

V nasledujúcom úseku si ukážeme vetu týkajúcu sa špeciálneho typu zväzu s vlastnosťou modularity a ukážeme si formálny dôkaz a jej implementáciu v Leane, ktorú si podrobne rozoberieme. O zväze L hovoríme, že je modulárny, v prípade, že má nasledujúcu vlastnosť.

$$(\forall x, y, z \in L) x \geq y \implies x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$$

V Leane definovaný ako rozšírenie zväzu:

```
class modular_lattice(α : Type u) extends lattice α :=
  (modular_law: ∀ (x u v : α ), (x ≤ u) → u ⊓ (v ⊔ x) = (u ⊓ v) ⊔ x )
```

Dôkaz aj z vetou bol čerpaný z publikácie [8].

Veta 4.1. Veta o izomorfizme pre modulárne zväzy *Nech L je modulárnym zväzom a $a, b \in L$. Potom*

$$\varphi_b : x \mapsto x \wedge b, x \in [a, a \vee b], \tag{4.1}$$

Je izomorfizmom medzi intervalmi $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$. Inverzným izomorfizmom je

$$\psi_a : y \mapsto y \vee a, y \in [a \wedge b, b]. \tag{4.2}$$

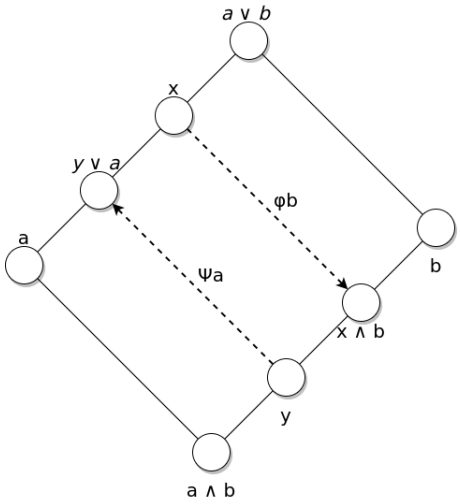
Dôkaz. Stačí ukázať, že $\varphi_b \psi_a(y) = y$ pre všetky $y \in [a \wedge b, b]$. Z duality potom vyplýva, že $\psi_a \varphi_b(x) = x$ pre všetky $x \in [a, a \vee b]$, Nech $y \in [a \wedge b, b]$, potom $\varphi_b \psi_b = (y \vee b) \wedge a$, a ak platí nerovnosť $b \geq y$, tak potom z modularity

$$\varphi_b \psi_a(y) = (y \vee b) \wedge a = y \vee (b \wedge a) = y \tag{4.3}$$

pretože

$$y \geq a \wedge b. \qquad \square$$

Horeuvedený dôkaz je znázornený na nasledujúcom obrázku.



Obr. 4.2: Izomorfizmus modulárneho zväzu

V prípade formálneho dôkazu sme sa mohli v časti dôkazu odkázať na dualitu. Pri návrhu dôkazu v Leane musíme ukázať dôkaz z "oboch" strán. Najskôr uvedieme hotový dôkaz vety:

```
theorem modular_lattice_isomorphism { α: Type u } [ modular_lattice α ] { a b x : α
    }:
  x ≤ a →
  x ≥ b →
  x ≥ a ⊓ b →
  x ≤ a ⊔ b →
  a ⊓ ( b ⊔ x ) = x ∧ (a ⊓ x) ⊔ b = x
  :=
  begin
    intros h1 h2 h3 h4,
    split,
    {
      rw modular_lattice.modular_law,
      exact sup_eq_right.mpr h3,
      exact h1
    },
    {
      rw inf_comm,
      rw ← modular_lattice.modular_law,
      exact inf_eq_left.mpr h4,
      exact h2
    }
  end
```

Začíname v taktickom móde, ktorý je interaktívnou verziou dokazovania v Leane. Po zadaní prázdnej konštrukcie *begin* a *end* vyzerá interaktívne prostredie nasledovne:

```
α: Type u
_inst_1: modular_lattice α
abx: α
⊢ x ≤ a → x ≥ b → x ≥ a ⊓ b → x ≤ a ⊔ b → a ⊓ (b ⊔ x) = x ∧ a ⊓ x ⊔ b = x
```

Prvým krokom dôkazu je presunutie predpokladov zo sledu implikácii do prostredia pre ďalšiu prácu s nimi s označením $h1, h2, h3, h4$.

```
α: Type u
_inst_1: modular_lattice α
abx: α
```

```
h1: x ≤ a
h2: x ≥ b
h3: x ≥ a ⊓ b
h4: x ≤ a ⊔ b
⊢ a ⊓ (b ⊔ x) = x ∧ a ⊓ x ⊔ b = x
```

Cieľ potom pozostáva z konjunkcie, kde v druhej časti máme výraz implicitne ozátvorkovaný zľava. Výraz rozdelíme do dvoch podcieľov príkazom *split*, pre lepšiu čitateľnosť ozátvorkujeme množinovými zátvorkami. Nachádzame sa v stave:

```
begin
  intros h1 h2 h3 h4,
  split,
  {
  },
  {
  }
end
```

v ktorom nám lean ukazuje prostredie, kde musíme dokázať ľavú časť konjunkcie.

```
⊢ a ⊓ (b ⊔ x) = x
```

Na cieľ použijeme z definície modulárneho zväzu vlastnosť modularity:

```
(modular_law: ∀ (x u v : α ), (x ≤ u) → u ⊓ (v ⊔ x) = (u ⊓ v) ⊔ x )
```

Prepíšeme cieľ cez príkaz:

```
rw modular_lattice.modular_law,
```

Do nasledujúceho, kde má $u \sqcap v$ vyššiu precedenciu:

```
⊢ u ⊓ v ⊔ x = x
```

Nasledujúca transformácia vyžaduje znalosť už dokázaných definícií, ktoré boli dokázané pre podkladové štruktúry. Použijeme nasledujúcu definíciu, ktorá vychádza z kontextu *semilattice_sup*.

```
@[simp] theorem sup_eq_right : a ⊔ b = b ↔ a ≤ b :=
le_antisymm_iff.trans $ by simp [ le_refl ]
```

Zaujímavosťou je, že si Lean dokáže substiuovať výraz $u \sqcap v$ za a z uvedeného výrazu. Pri použití vety dostávame ekvivalenciu, ktorá je definovaná ako štruktúra.

```
structure iff (a b : Prop) : Prop :=
    intro :: (mp : a → b)
             (mpr : b → a)
```

Z tejto štruktúry použijeme implikáciu smerujúca doľava nasledovne:

```
exact sup_eq_right.mpr h3,
```

Cieľ je teda transformovaný na:

```
⊢ x ≤ a
```

čo je už uvedený predpoklad $h1$. Týmto sme dokázali jeden z podcieľov. V tejto chvíli by sme sa v literatúre mohli odvolať na dualitu výrazov. V Leane musíme poskytnúť dôkaz aj o druhom cieli. Snažíme sa ukázať že platí:

```
⊢ a ⊓ x ⊔ b = x
```

V tejto chvíli chceme znova použiť modularitu. Leanu je ale potrebné explicitne zadať, že chceme prepísať výraz nachádzajúci na pravej strane rovnosti pomocou symbolu ľavej šípky.

```
rw ← modular_lattice.modular_law,
```

Použijeme duálnu vetu duálnu k *sup_ eq_ right*.

```
@[simp] theorem inf_eq_left : a ⊓ b = a ↔ a ≤ b
```

a využijeme opačné predpoklady k predchádzajúcim $h2, h4$.

```
{
    rw ← modular_lattice.modular_law,
    exact inf_eq_left.mpr h4,
    exact h2
}
```

Po dokázaní druhého cieľa sme dokázali celú vetu. □

3 Podzväz

V rámci príspevku do knižnice *mathlib* sme implementovali štruktúru reprezentujúcu podzväz. Štruktúra s jej atribútmi boli implementované podľa zaužívaných zvyklostí projektu. Jej predlohu tvorila štruktúra *submonoidu*.

Formálne je definovaný:

Veta 4.2. *Nech L je zväz. Množina $K \subseteq L$ je* podzväz *L ak pre všetky $a, b \in K$ platí, že, $a \wedge b \in K$, $a \vee b \in K$.*

Jeho stručná implementácia vyzerá nasledovne:

```
import order.lattice

structure sublattice ( L : Type* ) [ lattice L ] :=
  ( carrier : set L)
  ( inf_mem′  {a b : L} : a ∈ carrier → b ∈ carrier → a ⊓ b ∈ carrier )
  ( sup_mem′  {a b : L} : a ∈ carrier → b ∈ carrier → a ⊔ b ∈ carrier )
```

Pre definíciu podzväzu je nutné zaviesť priestor mien pre zväzy, ktorý sa v knižnici *mathlib* v súbore *"src/order/lattice.lean"*. Z tohto priestoru používame typovú triedu zväzu. V prípade, že chceme vytvoriť typ *sublattice* je nutné poskytnúť typ, ktorý má inštancovanú typovú triedu zväzu. Prvky štruktúry potom tvorí *carrier* v preklade nosič, ktorého typ *set* je $L \to Prop$ a prvky inf_mem a *sup_mem* zaručujúce uzavretosť suprema a infima. Nasledujúce definície a inštancie sú definované v priestore mien *sublattice* Pre použitie tejto štruktúry sme štruktúru inštancovali pre triedu *set_ like* ktorá poskytuje možnosť konverzie typu na jednoduchšie štruktúry.

```
instance : set_like (sublattice L) L :=
  ⟨sublattice.carrier, λ p q h, by cases p; cases q; congr′⟩
```

Definície označené značkou *simp* slúžia na zjednodušovanie výrazov pomocou príkazu *simp* v taktickom módu.

```
@[simp]
lemma mem_carrier {SL : sublattice L} {x : L} : x ∈ SL.carrier ↔ x ∈ SL := iff.rfl
```

V tomto prípade hovorí ide o ekvivalenciu tvrdení že prvok patriaci nosiču štruktúry je ekvivalentný tvrdeniu že patrí štruktúre.

Definície označené značkami *ext* potom označujú definície, ktoré používa príkaz exact. Vo všeobecnosti ide o definície, ktoré hovoria o tom kedy sú 2 typy rovnaké.

```
@[ext]
theorem ext {A B : sublattice L}
  (h : ∀ x, x ∈ A ↔ x ∈ B) : A = B := set_like.ext h
```

Nasledujúce definície sa týkajú vytvorenia nového objektu kopírovaním, vytvorením kópie cez pretypovanie a tvrdením a definíciou, ktorá vráti typ tvrdenia o rovnosti kópie so štruktúrou podzväzu.

```
def copy (SL : sublattice L) (S : set L) (hs : S = SL) : sublattice L :=
{ carrier := S,
  inf_mem' := hs.symm ▸ SL.inf_mem',
  sup_mem' := hs.symm ▸ SL.sup_mem' }

variables { SL : sublattice L }

lemma coe_copy {B : sublattice L} {A : set L} (hs : A = SL) :
  (SL.copy A hs : set L) = A := rfl

lemma copy_eq {s : set L} (hs : s = SL) : SL.copy s hs = SL :=
  set_like.coe_injective hs
```

V prípade, že by sme chceli pristúpiť k definícii typu infima alebo superma našej štruktúry boli zavedené definície, ktoré vracajú ich typ.

```
theorem inf_mem {a b : L} : a ∈ SL → b ∈ SL → a ⊓ b ∈ SL :=
  sublattice.inf_mem' SL

theorem sup_mem {a b : L} : a ∈ SL → b ∈ SL → a ⊔ b ∈ SL :=
  sublattice.sup_mem' SL
```

Kapitola 5

Záver

V našej práci sme teoreticky opísali typy, ktoré stoja za teoretickým pozadím Lean-u a prirodzenú dedukciu pomocou ktorej tvoríme dôkazy. Opísali sme prepojenie medzi nimi zvané Curry-Howardov izomorfizmus. Predstavili sme Lean ako jeden z asistentov dokazovania. Zaviedli sme jeho kľúčovú syntax pre vytváranie tvrdení ich dôkazov a matematických štruktúr. Uviedli sme dva spôsoby dokazovania a pomocou jedného z nich v takzvanom taktickom móde dokázali vetu o izomorfizme modulárnych zväzov. Podrobne sme opísali príspevok do projektu mathlib ktorý tvorila definícia podzväzu aj so súvisiacimi formálnymi definíciami a ich implementáciami v mathlibe v časti týkajúcej sa teórie čiastočného usporiadania.

Literatúra

[1] Samuel Mimram, Program = Proof, Indenpendently published(July 3, 2020), ISBN-13: 979-8615591839

[2] Morten Heine B. Sørensen, Pawel Urzyczyn, Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Elsevier Science (April 4, 2013), ISBN-13 : 978-0444545961

[3] https://github.com/leanprover/lean

[4] https://github.com/leanprover/lean4

[5] https://github.com/leanprover-community/mathlib

[6] https://leanprover-community.github.io/papers/mathlib-paper.pdf

[7] Types and Programming Languages, ISBN 0-262-16209-1, Benjamin C. Pierce publikované v 2002

[8] Lattice Theory: Foundation, 978-3-0348-0018-1, George Grätzer, 2011

[9] Constructivism in Mathematics, Vol 1, Volume 121 1st Edition, A.S. Troelstra D. van Dalen, eBook ISBN 978-0-0805-7088-, publikované v 1988