

Introduction à la Recherche Opérationnelle

Razafinjatovo Heriniaina

IT University

Problème du loup, de l'agneau et du chou

Un paysan se trouve au bord d'une rivière avec une pirogue et trois éléments à transporter de l'autre côté :

- un **loup** ,
- un **agneau** ,
- un **chou** .

La pirogue ne peut contenir que le paysan et **un seul passager** (animal ou objet) à la fois.

Le paysan ne peut pas laisser ensemble :

- le **loup et l'agneau** sans surveillance (le loup mange l'agneau),
- l'**agneau et le chou** sans surveillance (l'agneau mange le chou).

Objectif : transporter les trois éléments de l'autre côté de la rivière sans qu'aucun ne soit mangé.

Origine du terme « opérationnelle »

- Apparue durant la Seconde Guerre mondiale.
- Objectif : optimiser les décisions militaires (logistique, stratégie).
- Étendue ensuite aux domaines industriels, économiques et logistiques,...
- En anglais : *Operations Research*.

Problème et modélisation

- Un problème se décompose en deux parties : une partie Donnée et une partie Tâche ou Question.
- Si la réponse à la question est "oui" ou "non", alors c'est un problème de décision.
- Si on doit donner la meilleure solution, alors c'est un problème d'optimisation.
- La modélisation consiste à traduire un problème réel en un modèle mathématique, c'est-à-dire en équations, inégalités et fonctions qu'un ordinateur peut traiter.

Problème et modélisation

- Un problème se décompose en deux parties : une partie Donnée et une partie Tâche ou Question.
- Si la réponse à la question est "oui" ou "non", alors c'est un problème de décision.
- Si on doit donner la meilleure solution, alors c'est un problème d'optimisation.
- La modélisation consiste à traduire un problème réel en un modèle mathématique, c'est-à-dire en équations, inégalités et fonctions qu'un ordinateur peut traiter.

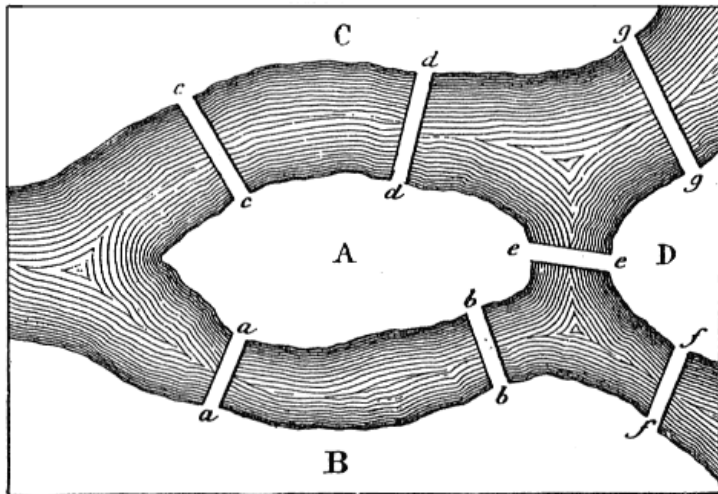
Exemple

Le problème des **sept ponts de Königsberg** est un célèbre problème de mathématiques posé au XVIII^e siècle dans la ville de Königsberg, en Prusse (aujourd'hui Kaliningrad, Russie).

La ville était traversée par la rivière Pregel, entourant deux grandes îles, reliées entre elles et aux berges par sept ponts.

Question posée : Est-il possible de faire une promenade en partant de n'importe quel endroit de la ville, en passant exactement une seule fois par chacun des sept ponts, et en revenant éventuellement au point de départ ?

Fig. 1.



Les ponts de Königsberg en 1759.

Essayez de résoudre le problème en utilisant une feuille et un crayon.

- Problèmes avec une structure mathématique exploitable.
- Peuvent être résolus par des algorithmes spécialisés.
- Exemples :
 - Problèmes de transport : Comment organiser les tournées de livraison pour minimiser le trajet total ?
 - Affectation et planification : Comment affecter des machines à des tâches pour minimiser le coût ?
 - Flots dans les réseaux, . . .

- Formaliser un problème réel sous forme d'un modèle mathématique.
- Objectif : optimiser une fonction (coût, profit, temps, etc.).
- Le mot « programmation » signifie ici **planification**.
- Exemple général :

$$\text{Maximiser } Z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \quad \text{sous} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Grandes subdivisions de la Recherche Opérationnelle

- **Programmation linéaire** : optimisation linéaire sous contraintes linéaires.
- **Programmation entière** : variables discrètes (logistique, production...).
- **Théorie des graphes** : modélisation de réseaux (routiers, informatiques...).
- **Recherche de chemin optimal** (Dijkstra, Bellman-Ford...).
- **Simulation et heuristiques** : approximation pour problèmes complexes.