Programmation Linéaire et Problèmes de Graphes

Master I

Plan du cours

Coloration de graphe

Plus court chemin

Flot maximal

Conclusion

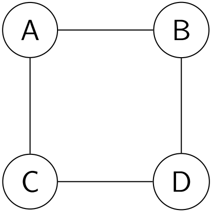
Coloration :Objectif et modèle PLNE

- Objectif : colorier les sommets d'un graphe pour que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur, en utilisant le moins de couleurs possible.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Soit k le nombre max de couleurs.

- Variables :
  - $x_{v,c} = 1$ si le sommet v a la couleur c, 0 sinon
  - $y_c = 1$ si la couleur c est utilisée
- Contraintes :
  - $\sum_{c=1}^{k} x_{v,c} = 1$ pour tout $v \in V$ (chaque sommet a exactement une couleur)
  - $x_{u,c} + x_{v,c} \leq y_c$ pour tout $(u, v) \in E$, $\forall c$ (éviter les conflits)
  - $x_{v,c} \leq y_c$ pour tout v, c (activer y_c si utilisée)
- Objectif : $\min \sum_{c=1}^{k} y_c$

Exemple visuel



PL associé à l'exemple

Variables $x_{v,c} \in \{0,1\}$ pour $v \in \{A,B,C,D\}$, $c \in \{1,2,3\}$.
Objectif : $\min y_1 + y_2 + y_3$

- Contraintes de coloration (exemple) :
  - $x_{A,1} + x_{A,2} + x_{A,3} = 1$
  - $x_{A,1} + x_{B,1} \leq y_1$; $x_{A,2} + x_{C,2} \leq y_2$; etc.
- Contraintes d'activation : $x_{v,c} \leq y_c$ pour chaque v, c

Exercice corrigé : coloration

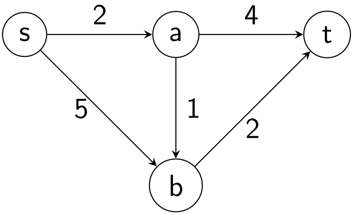
- Solution : A rouge (1), B vert (2), C vert (2), D rouge (1)
- Nombre chromatique $= 2$

Plus court chemin :Modèle linéaire

Soit $G = (V, E)$, c_{uv} le coût de l'arc (u, v). $x_{uv} \in \{0, 1\}$ indique si l'arc est dans le chemin.

- Objectif : $\min \sum c_{uv} x_{uv}$
- Contraintes :
  - $\sum x_{sv} - \sum x_{us} = 1$ (source)
  - $\sum x_{ut} - \sum x_{tv} = 1$ (puits)
  - $\sum x_{uv} = \sum x_{vw}$ pour $v \notin \{s, t\}$ (conservation)

Exemple visuel



PL associé à l'exemple

- Variables : $x_{sa}, x_{sb}, x_{ab}, x_{at}, x_{bt} \in \{0, 1\}$
- Objectif : $\min(2x_{sa} + 5x_{sb} + 1x_{ab} + 4x_{at} + 2x_{bt})$
- Contraintes :
    - $x_{sa} + x_{sb} = 1$
    - $x_{at} + x_{bt} = 1$
    - $x_{sa} = x_{ab} + x_{at}$; $x_{sb} + x_{ab} = x_{bt}$

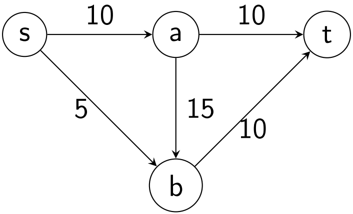
Exercice corrigé : plus court chemin

- Chemin optimal : $s \to a \to b \to t$
- Coût : $2 + 1 + 2 = 5$

Modèle de flot maximal

- Objectif : maximiser le flot de s à t
- Variables : f_{uv}, contraintes $0 \leq f_{uv} \leq c_{uv}$
- Conservation du flot : $\sum f_{uv} = \sum f_{vw}$ pour $v \notin \{s, t\}$

Exemple visuel



PL détaillé pour le flot maximal (exemple)

Variables :

- f_{sa}, f_{sb}, f_{ab}, f_{at}, f_{bt} : flot sur chaque arc

Objectif :

$$\max f_{sa} + f_{sb}$$

(correspond au flot total sortant de la source s)

Contraintes de capacité :

$$0 \leq f_{sa} \leq 10$$
$$0 \leq f_{sb} \leq 5$$
$$0 \leq f_{ab} \leq 15$$
$$0 \leq f_{at} \leq 10$$
$$0 \leq f_{bt} \leq 10$$

Contraintes de conservation du flot :

$$\text{En } a: \quad f_{sa} = f_{ab} + f_{at}$$
$$\text{En } b: \quad f_{sb} + f_{ab} = f_{bt}$$

Variables réelles positives : $f_{uv} \geq 0$ pour tous les arcs

Interprétation du PL

- On maximise le flot quittant la source.
- Chaque arc a une capacité maximale : le flot ne peut pas la dépasser.
- Chaque nœud (hors source/puits) respecte la conservation du flot : entrée = sortie.
- La solution optimale donne les valeurs de f_{uv} maximisant l'envoi de flot de s vers t.

Exercice corrigé : flot maximal

- Flot max $= 15$
- Répartition : 10 via $s \to a \to t$, 5 via $s \to b \to t$

Synthèse

- Chaque problème de graphe a son équivalent en PL ou PLNE
- Intérêt de modéliser pour utiliser des solveurs
- Relier structure de graphe et contraintes linéaires