Travaux Pratiques : Programmation Linéaire

Master

Plan du cours

Cas pratique : sac à dos

Une entreprise dispose d'un sac de capacité 10 kg.

Objet	Valeur	Poids
1	20	5
2	15	3
3	10	2

Quels objets choisir pour maximiser la valeur sans dépasser le poids ?

Modèle PLNE : sac à dos

Variables : $x_i \in \{0, 1\}$ si l'objet i est sélectionné.

$$\max\ 20x_1 + 15x_2 + 10x_3$$
$$\text{s.c. } 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$$

Exemple résolu

- Solution optimale : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$
- Valeur maximale transportée $= 35$

TP 1 - À faire (sac à dos)

- Capacité du sac : 10 kg

Objet	Valeur	Poids
A	40	6
B	30	4
C	20	3
D	10	2

Modéliser et résoudre ce PLNE.

Cas pratique : affectation de tâches

- Trois ouvriers doivent être affectés à trois tâches
- Coûts (en heures) :

	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3
Ouvrier 1	2	4	3
Ouvrier 2	3	2	5
Ouvrier 3	4	3	2

Attribuer chaque ouvrier à une seule tâche pour minimiser le temps total.Quelle est la meilleure affectation et quel est le coût minimum ?

Détail PL : Problème d'affectation

Variables : $x_{ij} = 1$ si l'ouvrier i est affecté à la tâche j, 0 sinon.
Objectif :

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

(c_{ij} = coût associé à l'ouvrier i pour faire la tâche j)
Contraintes :

- Chaque ouvrier fait exactement une tâche : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i$
- Chaque tâche est attribuée à un seul ouvrier : $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ $\forall j$
- Variables binaires : $x_{ij} \in \{0, 1\}$

Interprétation du PL : Affectation

- Optimise une matrice carrée de coûts entre agents et tâches.
- Chaque ligne représente un agent, chaque colonne une tâche.
- On cherche une permutation optimale minimisant la somme des coûts choisis.
- Peut être résolu par méthode hongroise ou solveur de PLNE.

Exemple résolu : affectation

- Ouvrier 1 $\rightarrow$ Tâche 1
- Ouvrier 2 $\rightarrow$ Tâche 2
- Ouvrier 3 $\rightarrow$ Tâche 3

Coût total : $2 + 2 + 2 = 6$

TP 2 - À faire (affectation)

Nouvelle matrice de coût :

	T1	T2	T3
O1	6	4	3
O2	2	6	5
O3	4	3	7

Modéliser le PL et résoudre.

Cas pratique : TSP

- Un représentant doit visiter 4 villes et revenir au point de départ (A).
- Distances entre villes :

	A	B	C	D
A	–	10	15	20
B	10	–	35	25
C	15	35	–	30
D	20	25	30	–

Trouver le plus court circuit qui part de A, passe par toutes les villes une fois, et revient à A. Donner la distance totale du circuit proposé.

Détail PLNE : Voyageur de commerce (TSP)

Variables : $x_{ij} = 1$ si on va de la ville i à j, 0 sinon.
Objectif :

$$\min \sum_{i \neq j} d_{ij} x_{ij}$$

(d_{ij} = distance entre i et j)
Contraintes :

- Chaque ville a une sortie : $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 \quad \forall i$
- Chaque ville a une entrée : $\sum_{i \neq j} x_{ij} = 1 \quad \forall j$
- Élimination des sous-tours : $u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad \forall i \neq j,$ $2 \leq i, j \leq n$
- Variables : $x_{ij} \in \{0, 1\}$; u_i réels pour l'élimination des cycles

Interprétation du PLNE : TSP

- Le TSP cherche le plus court circuit passant une seule fois par chaque ville.
- Contraintes d'entrée/sortie = chemin fermé.
- Contraintes MTZ (Miller-Tucker-Zemlin) pour éviter les cycles partiels.
- Très difficile : problème NP-difficile $\rightarrow$ solveurs, heuristiques ou relaxations.

Exemple résolu : TSP

Chemin optimal : $A \to B \to D \to C \to A$

- Distance : $10 + 25 + 30 + 15 = 80$

TP 3 - À faire (TSP)

5 villes avec matrice de distances :

	A	B	C	D	E
A	–	12	10	19	8
B	12	–	3	7	6
C	10	3	–	2	4
D	19	7	2	–	3
E	8	6	4	3	–

Modéliser et estimer une tournée optimale.