



Többágú fák

B-fa

Keresés

Bővítés

Törlés

10. előadás

Speciális többágú fák

B-fa

Adatszerkezetek és algoritmusok előadás
2011. április 20.

Kósa Márk és Pánovics János
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar



A többágú fák kezelésére nincsenek általános elvek, implementációjuk elsősorban alkalmazásfüggő. A rendezett bináris fáknál bemutatott bejárési algoritmusok közül a **preorder** és a **postorder bejárás** azonban egyszerűen kiterjeszthető a rendezett többágú fák esetére is.

Reprezentációjuk az alábbi módokon történhet:

- A fát **bináris fává** alakítjuk.
- Az adatelemekben a rákövetkezők számára felső korlátot szabunk. Szétszórt reprezentáció esetén ilyenkor az adatrész mellett egy **mutatótömb** jelenik meg.
- Ha nincs felső korlátja a rákövetkezők számának, akkor a rákövetkezőket címző mutatókat felfűzhetjük egy **egyirányban láncolt listába**.

A **B-fa** az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- 10.3



A B-fa definíciója és tulajdonságai (1)

A B-fa olyan keresőfa, amely **lapokból** épül fel. A lapokon **mutatók** és **adatelemek** helyezkednek el. Egy-egy lapon az adatelemek maximális számát a B-fa **rendje** határozza meg. Ha a B-fa rendje **n** , akkor

- a gyökérlap kivételével minden lapon **legalább n** darab adatelemnek kell szerepelnie, és
- minden lapon **legfeljebb $2n$** darab adatelem helyezkedhet el.

Egy-egy lapon az adatelemek **kulcsaik szerint** növekvőleg **rendezettek**.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 p_0 & a_1 & p_1 & a_2 & p_2 & \dots & p_{m-1} & a_m & p_m \\
 k_1 & < & k_2 & < & & & < & & k_m
 \end{array}$$



A B-fa definíciója és tulajdonságai (2)

Tegyük fel, hogy a B-fa egy lapján az adatelemek aktuális száma éppen m ($\leq 2n$). Ekkor a B-fa egy lapja vagy **levéllap**, vagy pontosan $m + 1$ darab **rákövetkezője** van. A levéllapon mindegyik mutató értéke **NIL**.

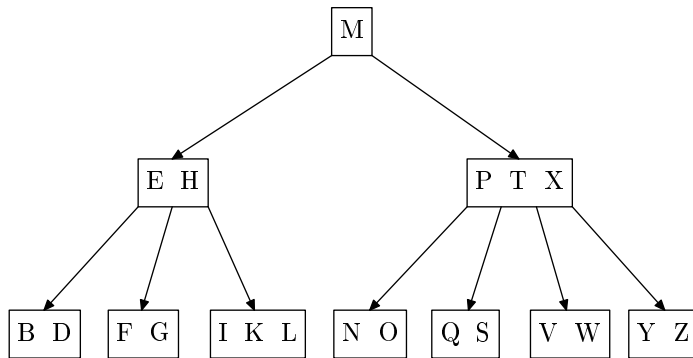
Egy nem levéllap

- p_0 mutatója azt a részfát címzi (arra a részfára mutat), amelyben minden kulcsérték kisebb ezen lap k_1 értékű kulcsánál.
- p_i mutatója ($0 < i < m$) azt a részfát címzi, amelyben minden kulcsérték nagyobb ezen lap k_{i-1} értékű kulcsánál és kisebb a k_i értékű kulcsánál.
- p_m mutatója azt a részfát címzi, amelyben minden kulcsérték nagyobb ezen lap k_m értékű kulcsánál.

A B-fában a levéllapok azonos szinten helyezkednek el.



Egy másodrendű B-fa karakter típusú kulcsokkal:





Keresés B-fában

A B-fában a K kulcsot keressük.

- ① Ha a B-fa **üres**, az algoritmus véget ér, a keresett elem **nincs** a B-fában.
- ② A B-fa gyökérlapján **lineáris keresést** hajtunk végre. Ha a lineáris keresés **sikeres**, **megtaláltuk** a keresett elemet, az algoritmus véget ér.
- ③ Ha a lineáris keresés **sikertelen**, akkor
 - vagy a gyökérlap első olyan eleménél (a_i), melynek kulcsa (k_i) nagyobb, mint K ,
 - vagy a gyökérlap **utolsó eleme után**

áll meg a lineáris keresés. Előbbi esetben a p_{i-1} mutató által mutatott részfában, utóbbi esetben a p_m mutató által mutatott részfában folytatjuk a keresést (rekurzívan).



B-fa bővítése

A B-fát mindig levéllapon bővítjük, ha a bővítendő elem még nem szerepel a B-fában.

- 1 **Megkeressük** azt a **levéllapot**, ahová a bővítendő adatelemet el fogjuk helyezni.
- 2 Ha a levéllapon **$2n$ -nél kevesebb** elem szerepel, akkor a rendezettség figyelembevételével **elhelyezzük** a bővítendő elemet a lapon.
- 3 Ha a levéllapon a bővítést megelőzően **már $2n$ elem** szerepelne (**tele van**), akkor a – bővített elemmel együtt – **$2n + 1$ elem** közül kiválasztjuk a rendezettség szerinti **középsőt**, amit kiemelünk ezen elemek közül, s beszúrunk a **szülőlapra**. A megmaradt elemeket két lapra osztjuk szét: az **első n darab** a kiemelt középső elem bal oldali mutatója által mutatott lapra, az **utolsó n darab elem** pedig a kiemelt középső elem jobb oldali mutatója által mutatott lapra kerül.

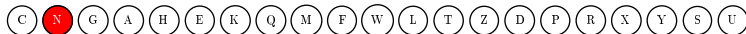
Példa B-fa bővítésére



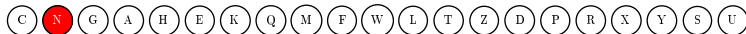
Példa B-fa bővítésére



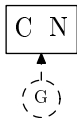
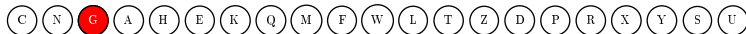
Példa B-fa bővítésére



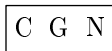
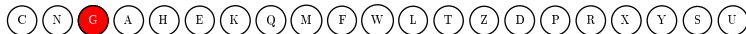
Példa B-fa bővítésére



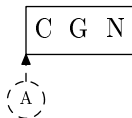
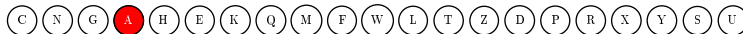
Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére



Többágú fák

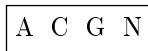
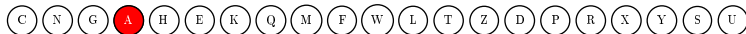
B-fa

Keresés

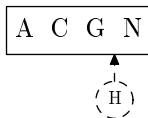
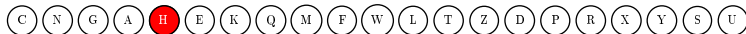
Bővítés

Törlés

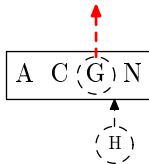
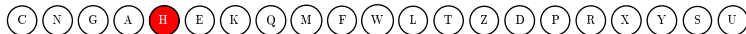
Példa B-fa bővítésére



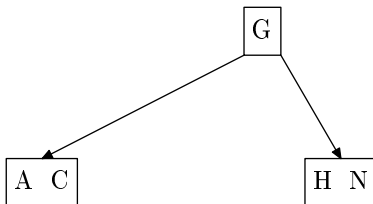
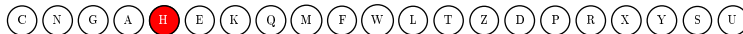
Példa B-fa bővítésére



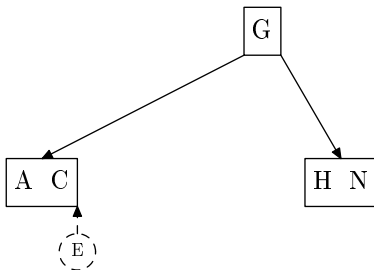
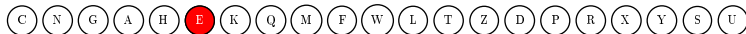
Példa B-fa bővítésére



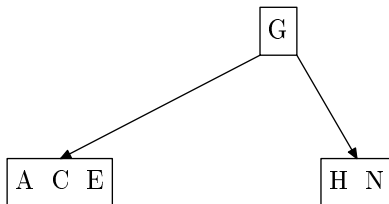
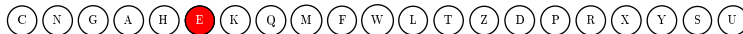
Példa B-fa bővítésére



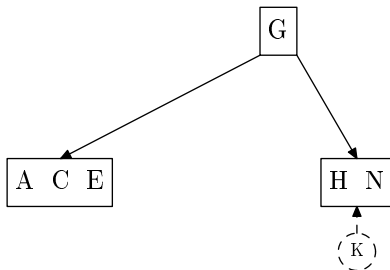
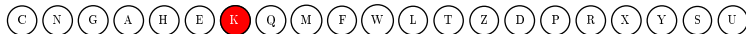
Példa B-fa bővítésére



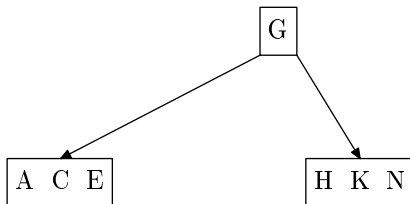
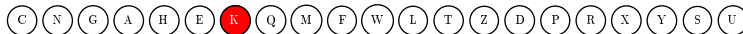
Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére



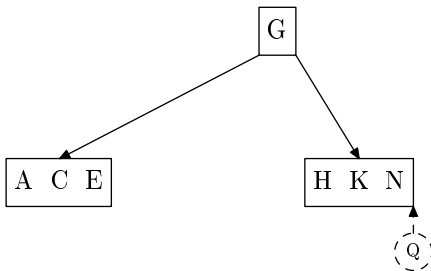
Speciális többágú fák



B-fa

Bővítés

Törlés



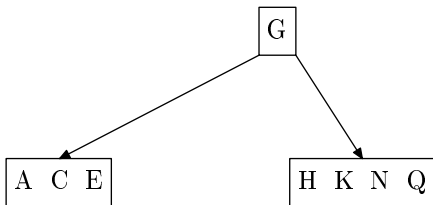
Speciális többágú fák



B-fa

Bővítés

Törlés





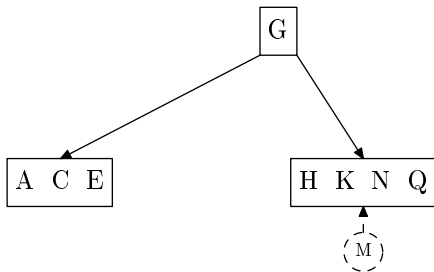
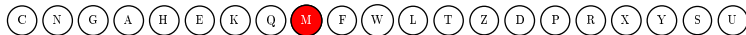
Többágú fák

B-fa

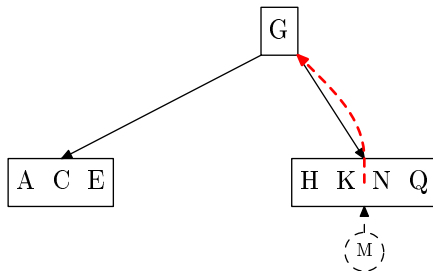
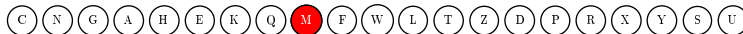
Keresés

Bövítés

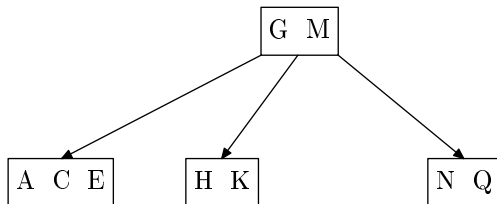
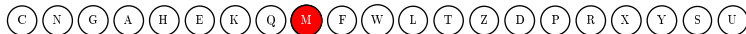
Törlés



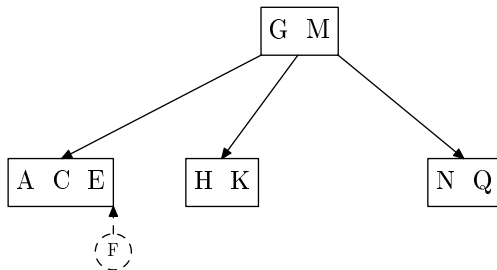
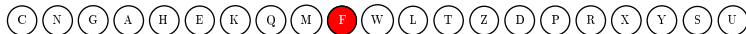
Példa B-fa bővítésére



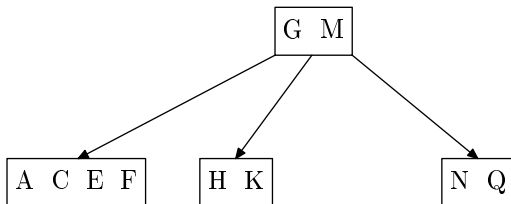
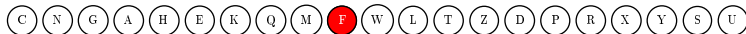
Példa B-fa bővítésére



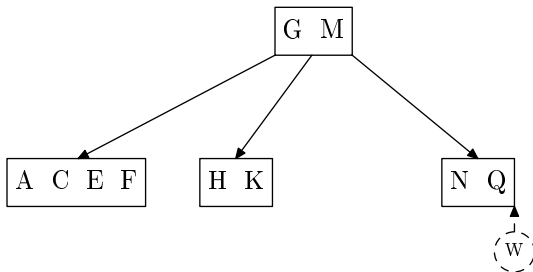
Példa B-fa bővítésére



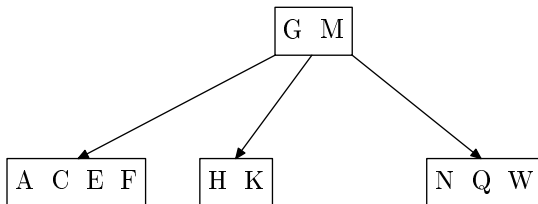
Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére



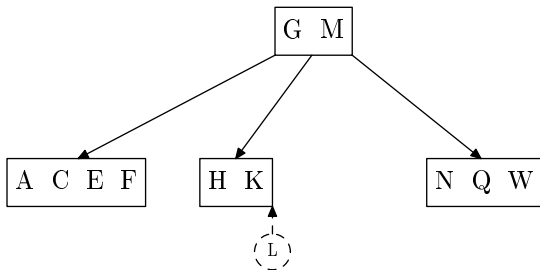
Speciális többágú fák



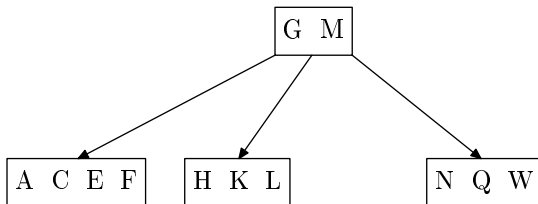
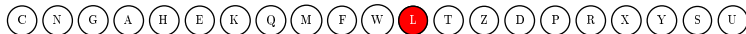
B-fa

Bővítés

Törlés



Példa B-fa bővítésére



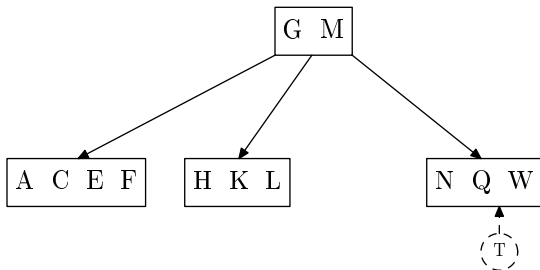
Speciális többágú fák



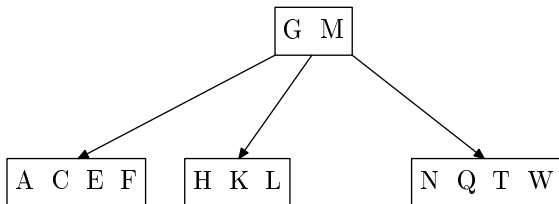
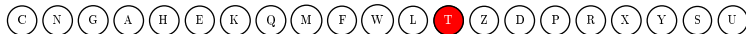
B-fa

Bővítés

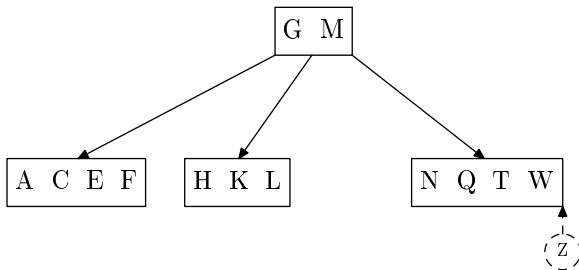
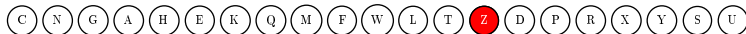
Törlés



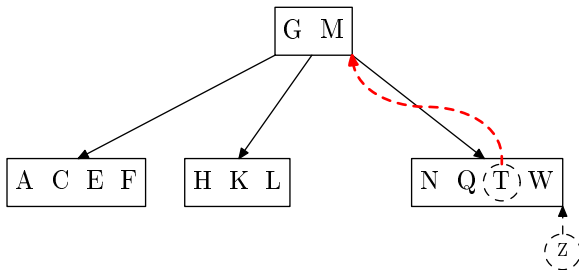
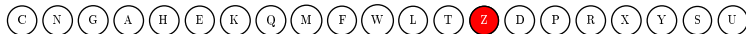
Példa B-fa bővítésére



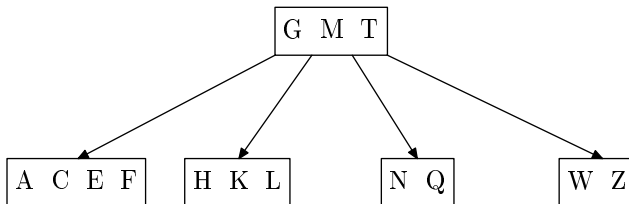
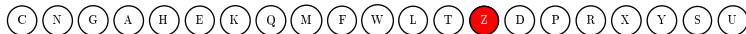
Példa B-fa bővítésére



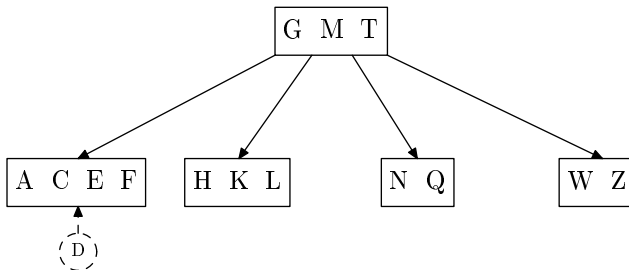
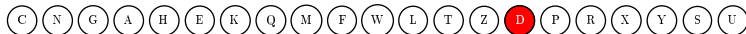
Példa B-fa bővítésére



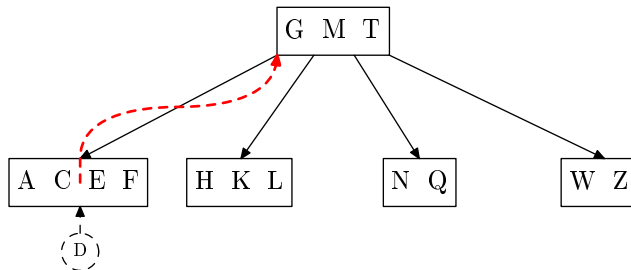
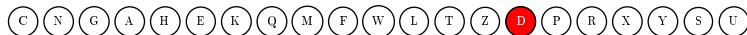
Példa B-fa bővítésére



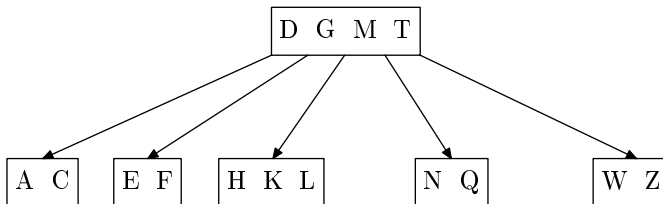
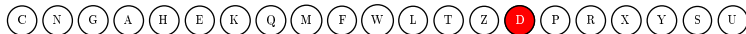
Példa B-fa bővítésére



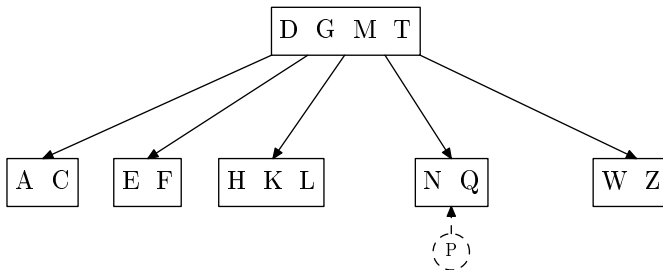
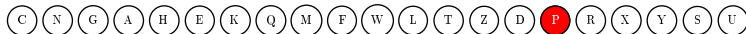
Példa B-fa bővítésére



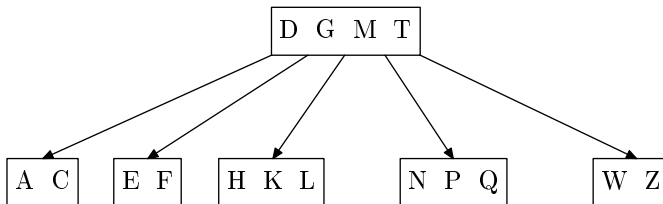
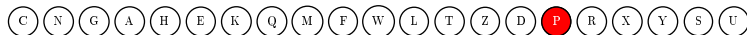
Példa B-fa bővítésére



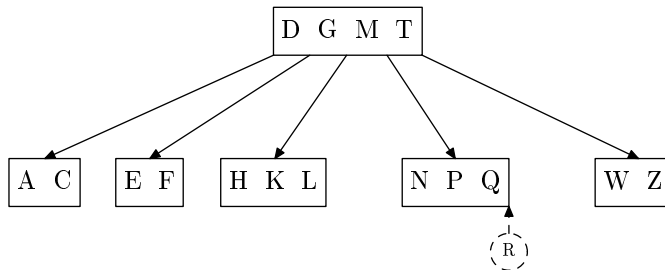
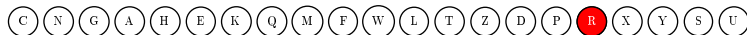
Példa B-fa bővítésére



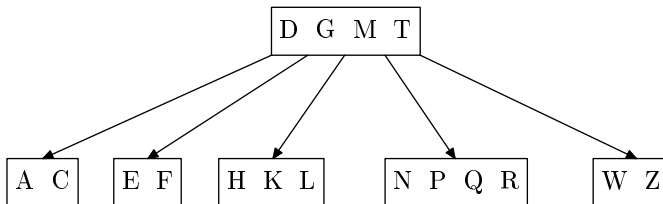
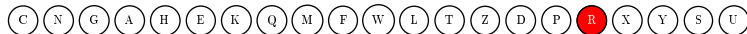
Példa B-fa bővítésére



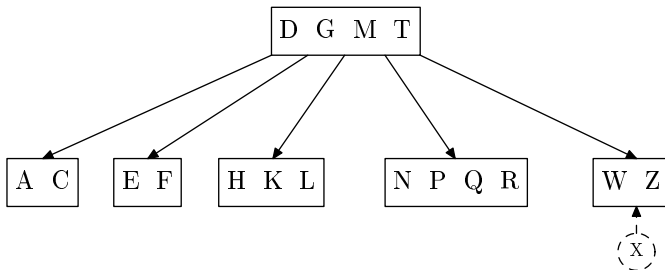
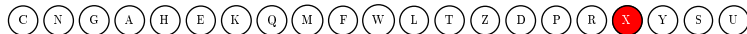
Példa B-fa bővítésére



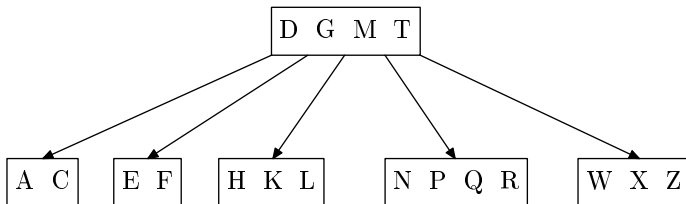
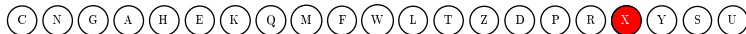
Példa B-fa bővítésére



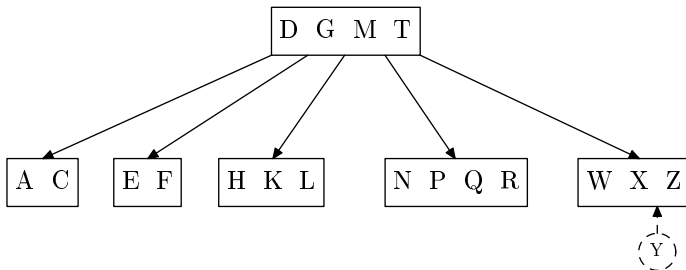
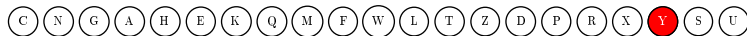
Példa B-fa bővítésére



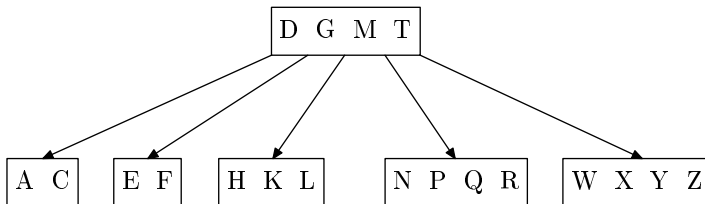
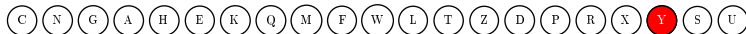
Példa B-fa bővítésére



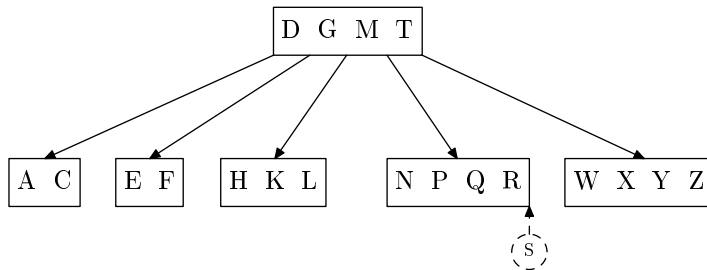
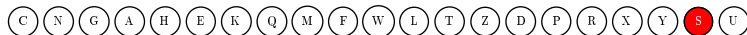
Példa B-fa bővítésére



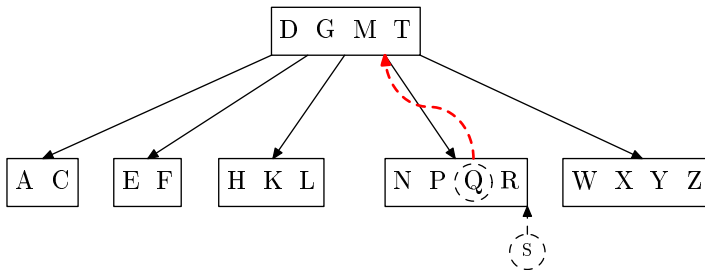
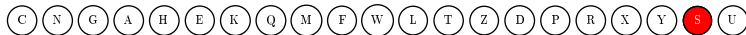
Példa B-fa bővítésére



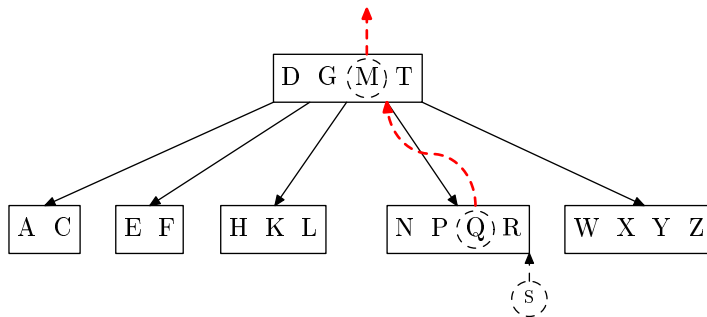
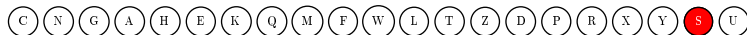
Példa B-fa bővítésére



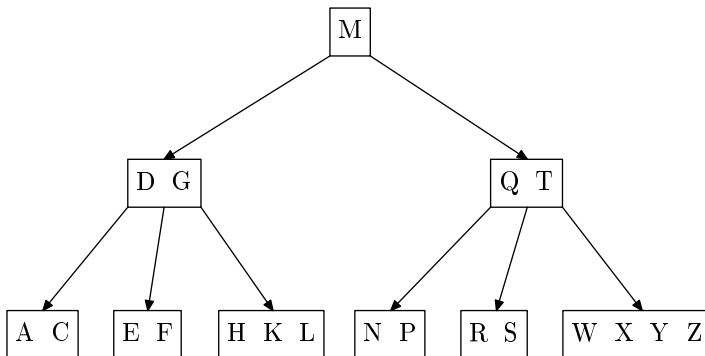
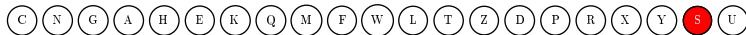
Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére





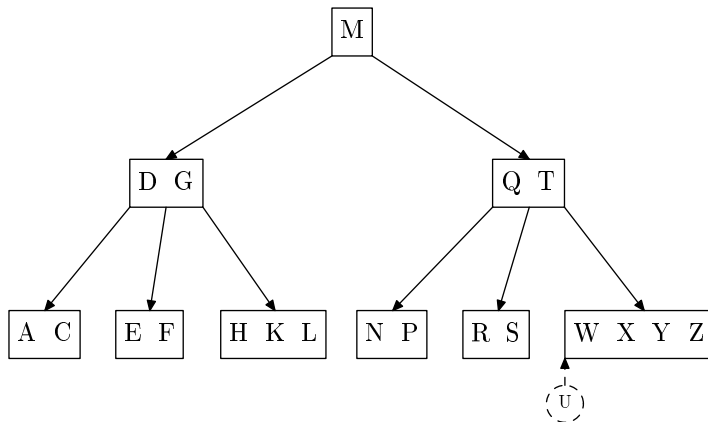
Többágú fák

B-fa

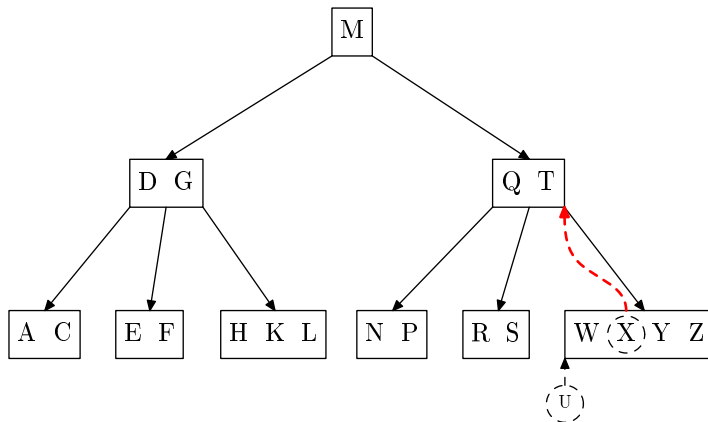
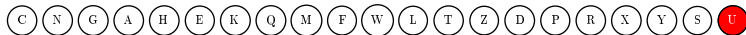
Keresés

Bővítés

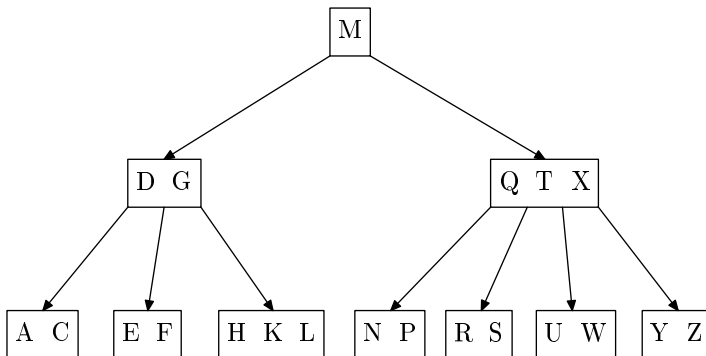
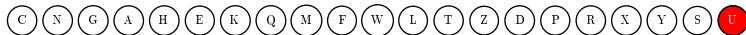
Törlés



Példa B-fa bővítésére



Példa B-fa bővítésére



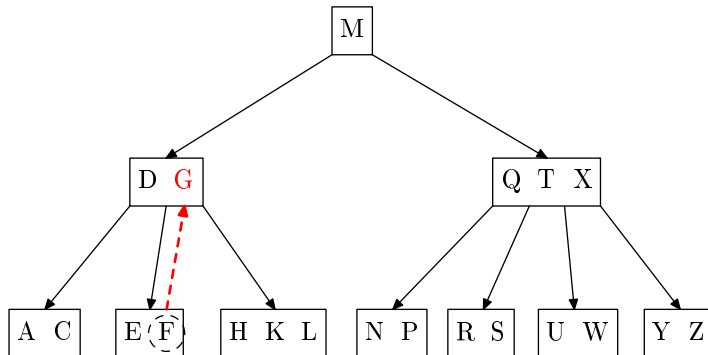


Ha a törlendő elem nem levéllapon van, akkor felülírjuk azzal a levéllapon lévő elemmel, amelyik a törlendő elem inorder módon megelőzője (vagy rákövetkezője). Fizikailag tehát minden esetben levéllapról törünk.

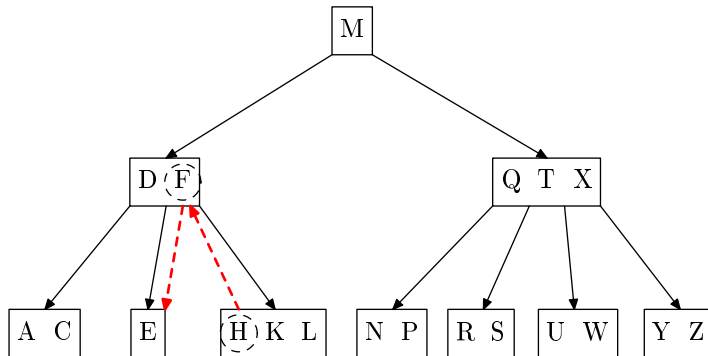
A törlés után előfordulhat, hogy a levéllapon $n - 1$ elem marad. Ekkor két eset lehetséges:

- 1 Ha valamelyik szomszédos testvérlap legalább $n + 1$ elemet tartalmaz, akkor a közös szülőlapjukon keresztül átveszünk tőle egy elemet. Ez azt jelenti, hogy a testvérlap legszélső eleme a szülőlapra kerül a megfelelő helyre, az eredetileg ott lévő elem pedig lekerül az $n - 1$ elemet tartalmazó gyermeklapra. Ezzel egyidejűleg a testvérlapon lévő legszélső mutató (és így az onnan kiinduló részfa) is átkerül a „csonka” lapra. Ez a művelet tehát hasonló az AVL-fa forgatás műveletéhez.
- 2 Ha mindkét szomszédos testvérlap n elemet tartalmaz (vagy csak egy szomszédos testvérlap van, és az n elemet tartalmaz), akkor valamelyikükkel **lapösszevonást** kell végrehajtani. Ez azt jelenti, hogy ebből a két lapból, valamint a szülőlapon a két lap közötti elemből egy $2n$ elemet tartalmazó lapot képzünk. Ezáltal a szülőlapon eggyel csökken az elemek száma, így előfordulhat, hogy ott is $n - 1$ elem marad. A fenti lépéseket tehát iterálni kell. Legrosszabb esetben a lapösszevonás egészen a gyökerlapig felgyűrűzhet, ilyenkor eggyel csökken a fa magassága.

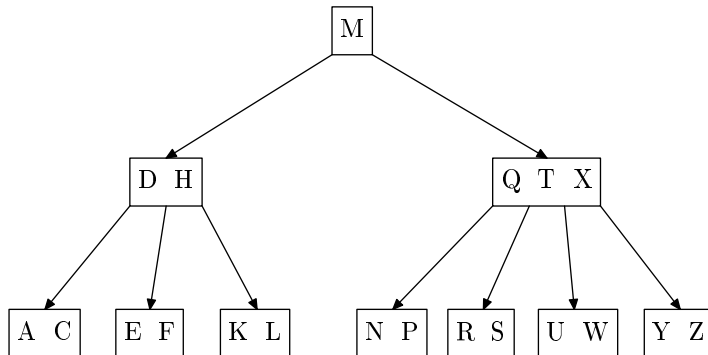
Példa B-fából való törlésre



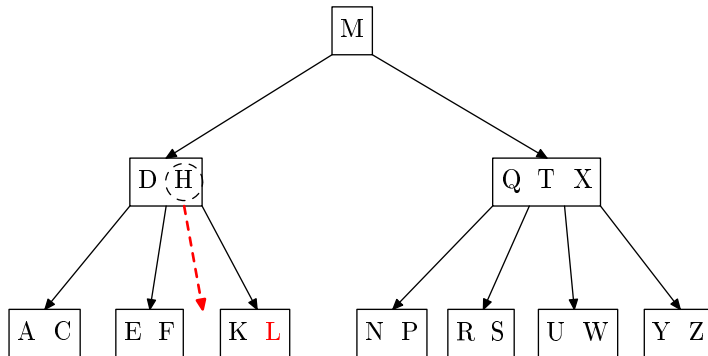
Példa B-fából való törlésre



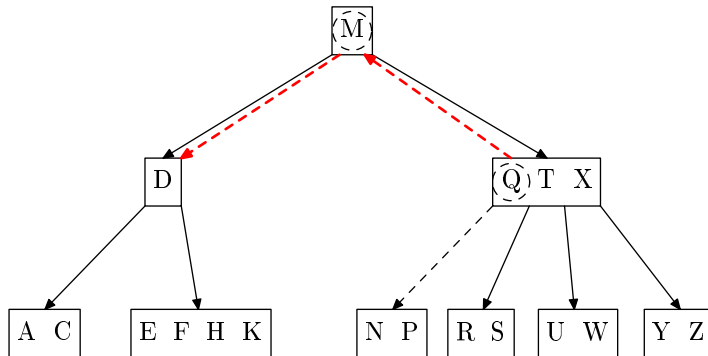
Példa B-fából való törlésre



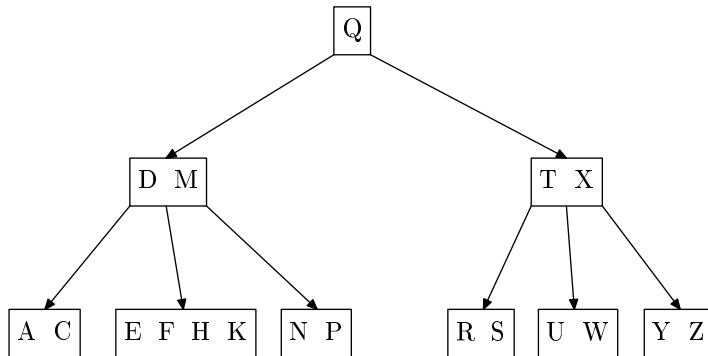
Példa B-fából való törlésre



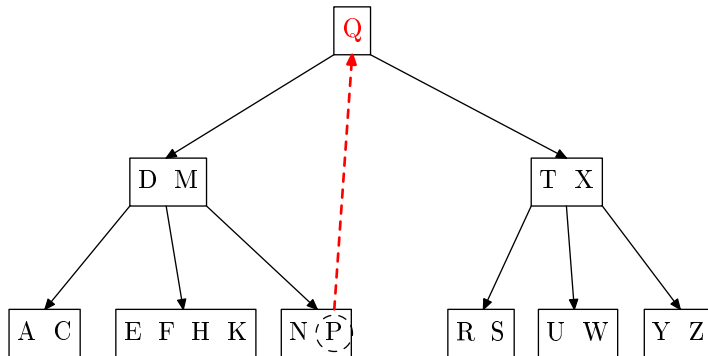
Példa B-fából való törlésre



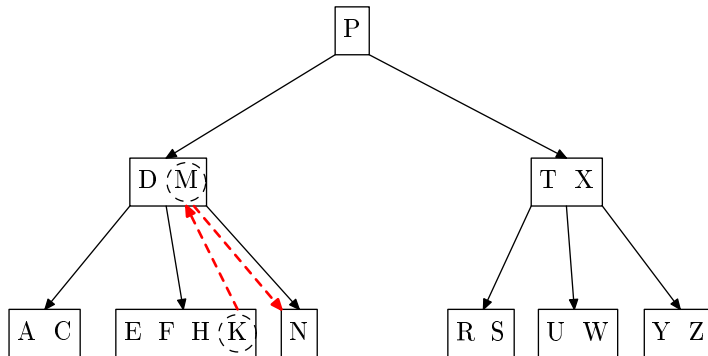
Példa B-fából való törlésre



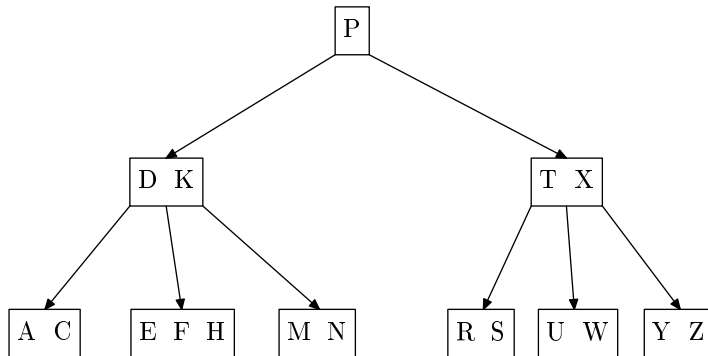
Példa B-fából való törlésre



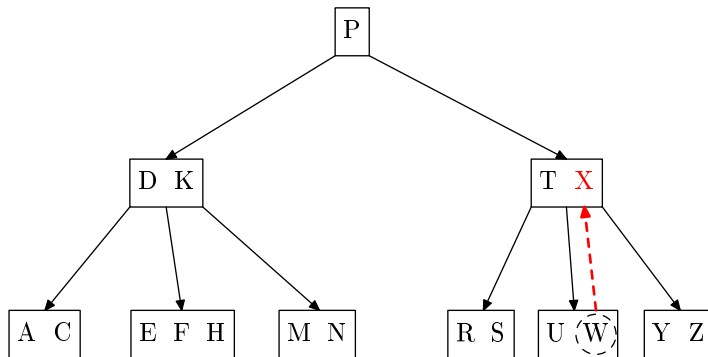
Példa B-fából való törlésre



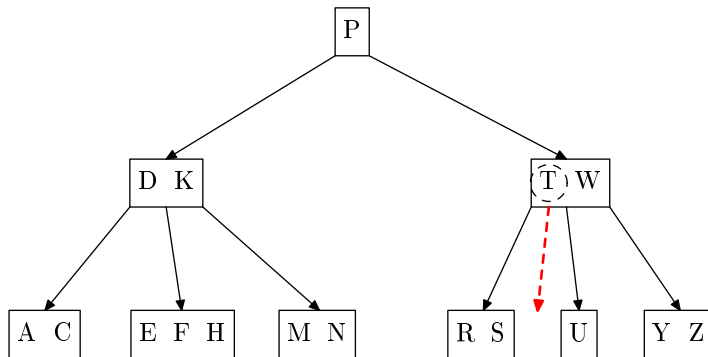
Példa B-fából való törlésre



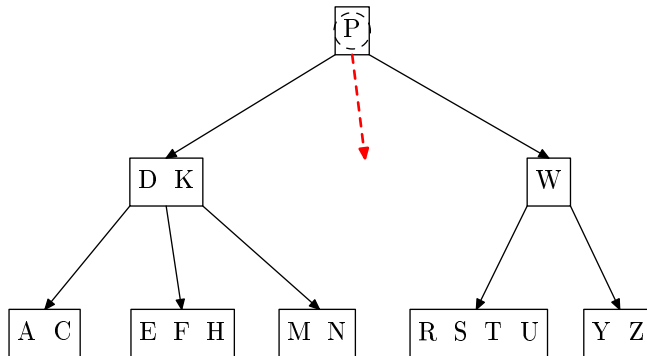
Példa B-fából való törlésre



Példa B-fából való törlésre



Példa B-fából való törlésre



Példa B-fából való törlésre

