



## 8. előadás

## Speciális bináris fák

Tökéletesen kiegyensúlyozott fa, keresőfa, kiegyensúlyozott fa,  
AVL-fa

Adatszerkezetek és algoritmusok előadás  
2011. április 6.

Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

## Bináris keresőfa

### Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott keresőfa

Kósa Márk és Pánovics János  
Debreceni Egyetem  
Informatikai Kar



## Minimális magasságú fa

Azt mondjuk, hogy egy fa **minimális magasságú**, ha adott elemszám mellett a legalsó szint kivételével minden szintjén a lehető legtöbb adatelem helyezkedik el.

## Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa

Azt mondjuk, hogy egy bináris fa **tökéletesen kiegyensúlyozott**, ha bármely elemének bal és jobb oldali részfájában az elemek darabszáma legfeljebb 1-gyel tér el.

## Megjegyzés

Minden tökéletesen kiegyensúlyozott fa minimális magasságú.

Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

## Bináris keresőfa

Kiegészítőszöveg

Kiegyensúlyozott keresőfa

Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

- ## Bináris keresőfa

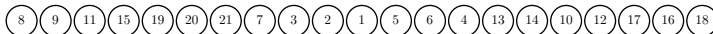
### Kiegyensúlyozott fa

### Kiegyensúlyozott keresőfa

# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

Speciális bináris fák

Kósa Márk  
Pánovics János



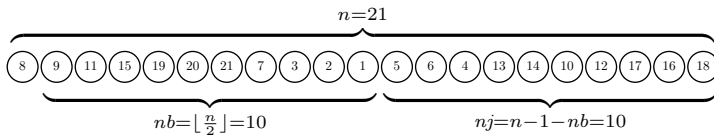
Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése



Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

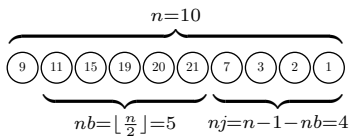


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

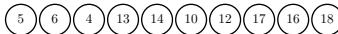
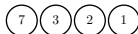


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

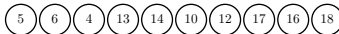
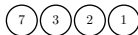
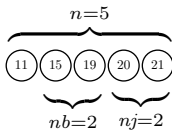
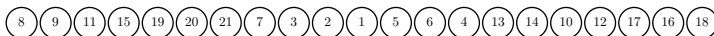


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa





# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

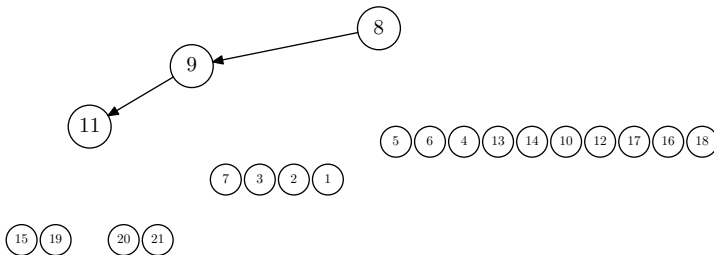


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

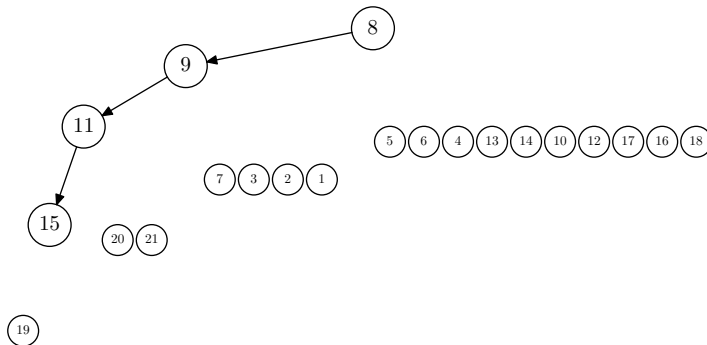


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

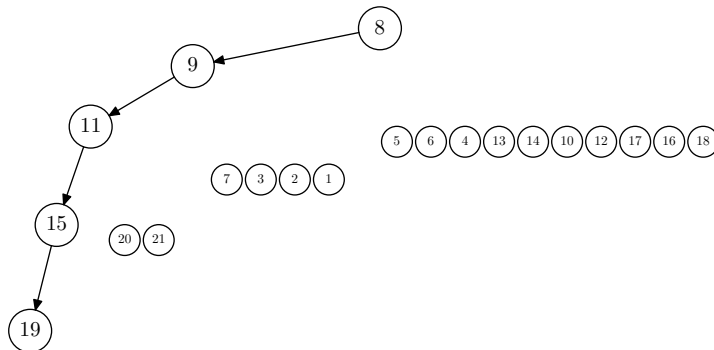


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

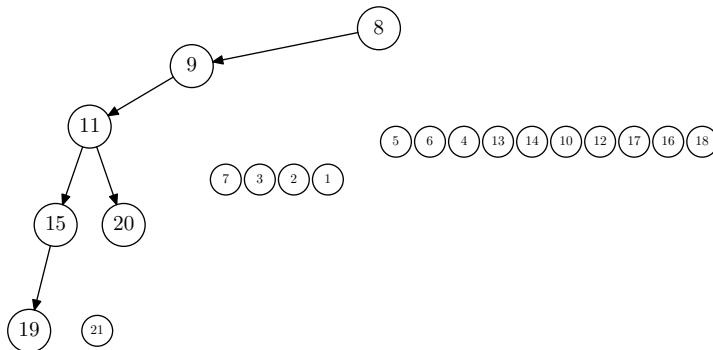


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

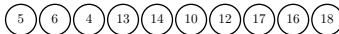
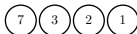
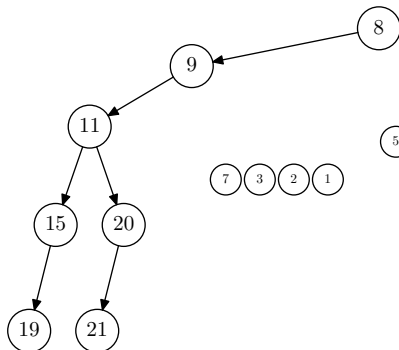
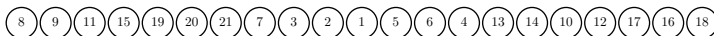


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

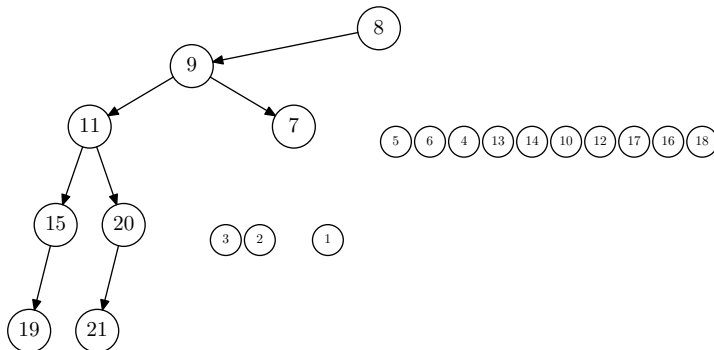


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

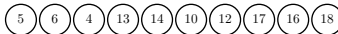
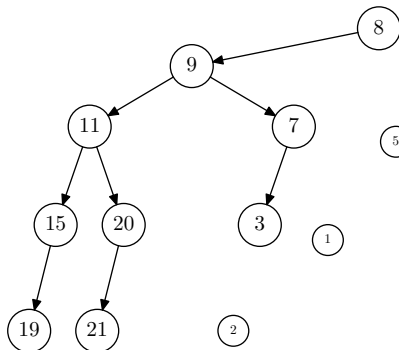


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

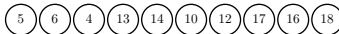
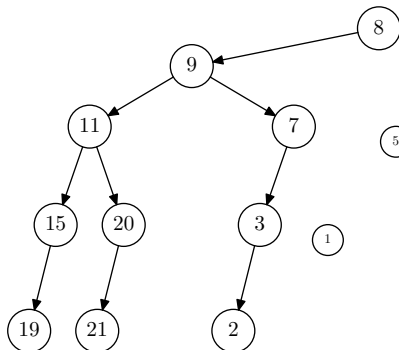
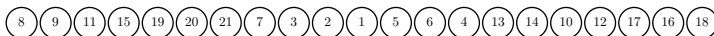


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa





# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

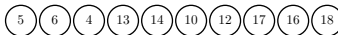
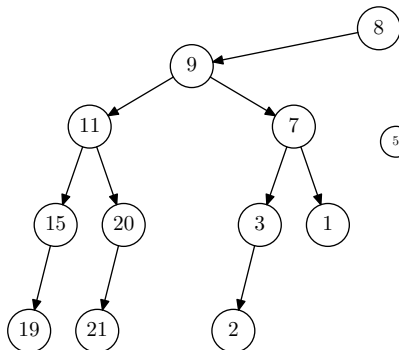


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

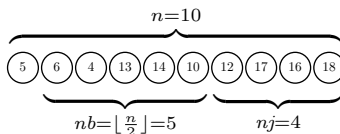
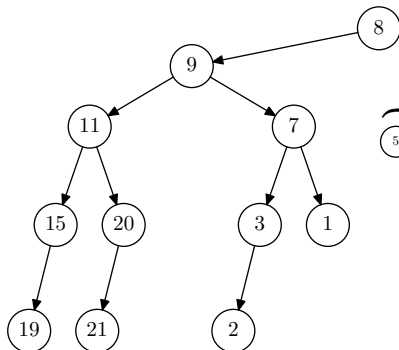


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

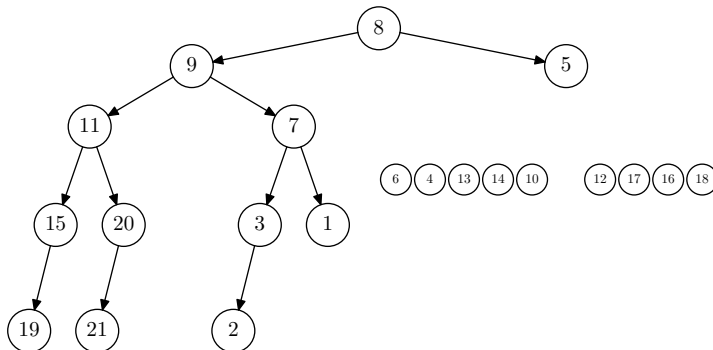


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

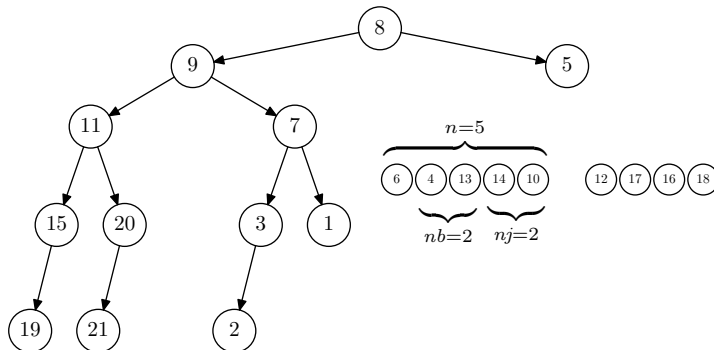


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

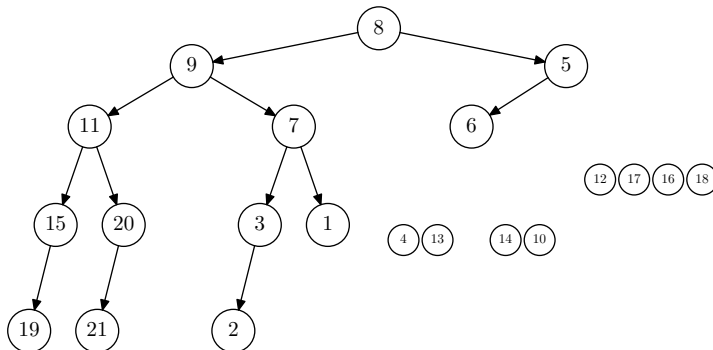


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

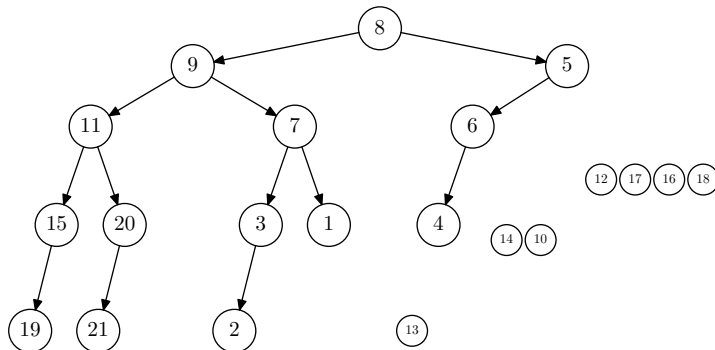


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

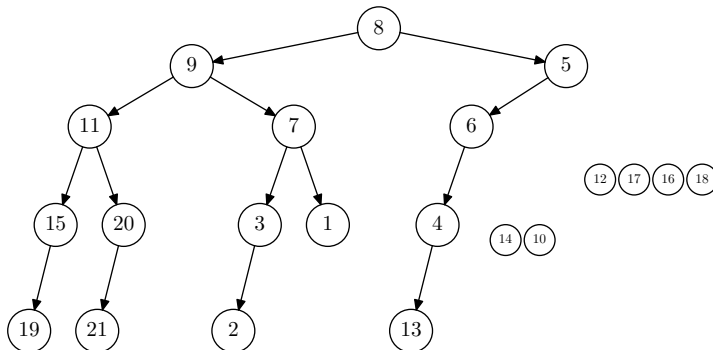


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

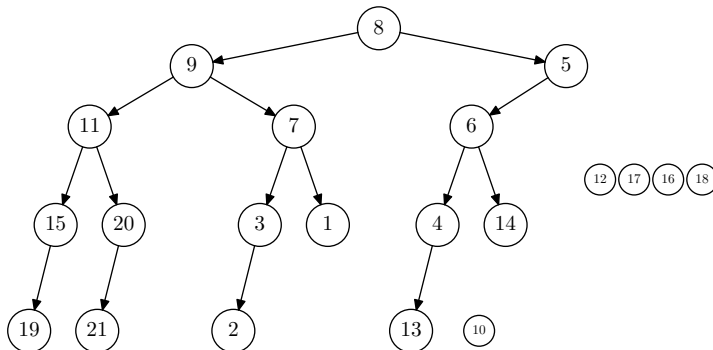


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa





# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

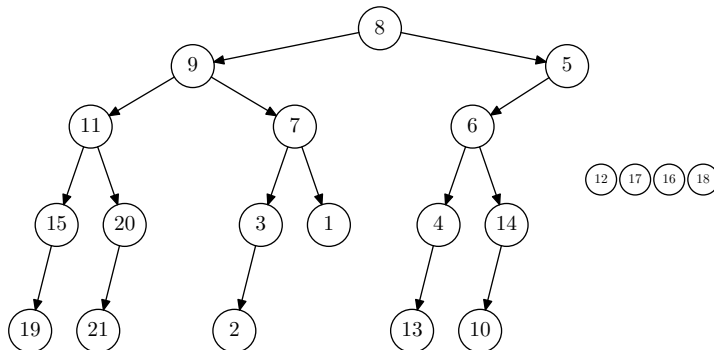


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

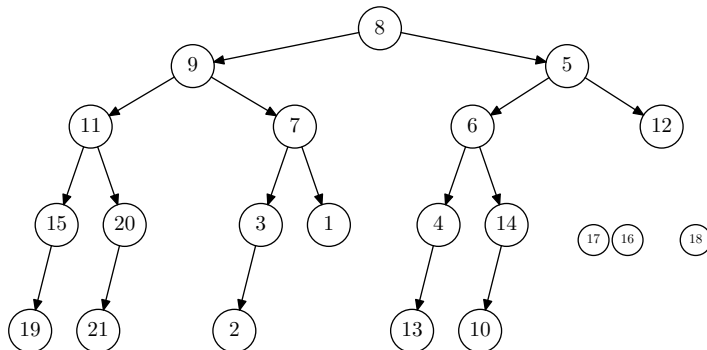


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

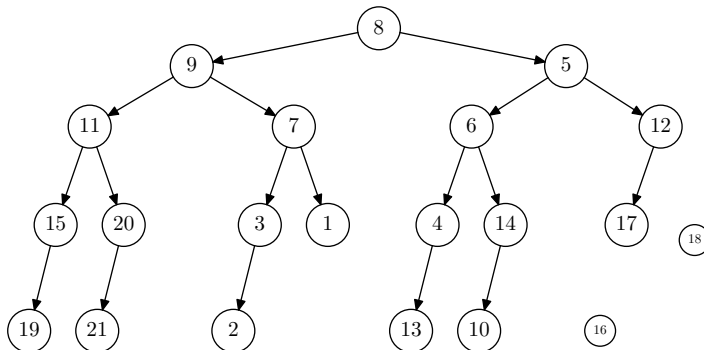


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

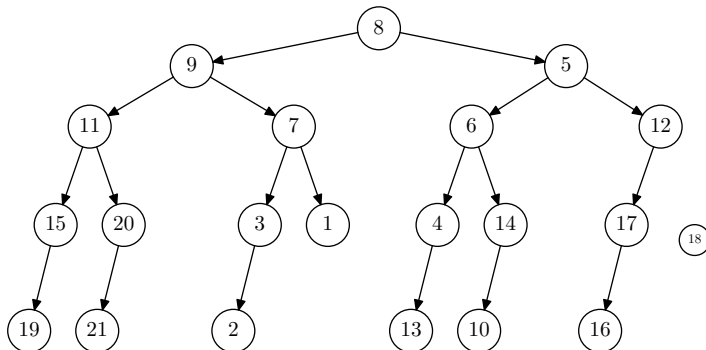


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



# Tökéletesen kiegyensúlyozott bináris fa építése

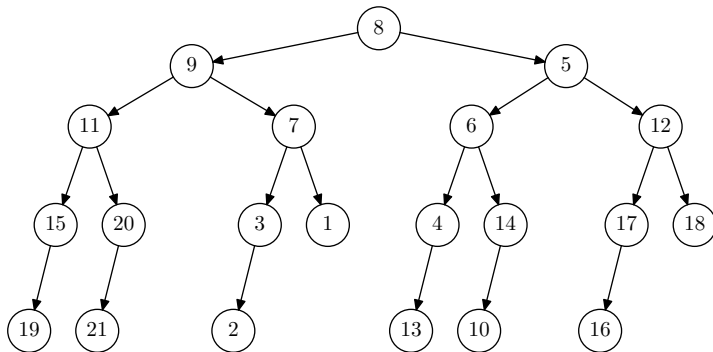


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa





Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

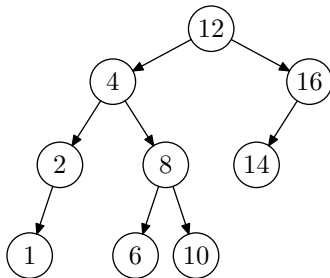
Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

## Bináris keresőfa

A bináris keresőfa olyan rendezett bináris fa, melyben az adatalemek mindegyike rendelkezik egy kulccsal, és minden adatalemre igaz az, hogy az adatalem bal oldali részfájában lévő elemek kulcsai kisebbek, a jobb oldali részfájában lévő elemek kulcsai pedig nagyobbak az elem kulcsánál.

Példa bináris keresőfára:



- 1 Ha üres a fa, akkor a beszúrandó elem lesz a fa egyetlen eleme (levéleleme), és ezzel az algoritmus sikeresen véget ér.
- 2 Összehasonlítjuk a gyökérelem értékét a beszúrandó elemmel.
  - a) Ha a két elem egyenlő, akkor a beszúrandó elemet nem helyezhetjük el a fában (mert nem szerepelhet benne két azonos értékű elem), és ezzel az algoritmus sikertelenül véget ér.
  - b) Ha a beszúrandó elem kisebb a gyökérelemnél, akkor a gyökérelem bal oldali részfáját bővítjük a beszúrandó elemmel.
  - c) Egyébként a gyökérelem jobb oldali részfáját bővítjük a beszúrandó elemmel.



## Bináris keresőfa bővítése iteratíván

- ❶ Aktuális részfának a teljes fát tekintjük.
- ❷ Ha üres az aktuális részfa, akkor a beszúrandó elem lesz az aktuális részfa egyetlen eleme (levéleleme), és ezzel az algoritmus sikeresen véget ér.
- ❸ Összehasonlítjuk az aktuális részfa gyökérelemének értékét a beszúrandó elemmel.
  - a) Ha a két elem egyenlő, akkor a beszúrandó elemet nem helyezhetjük el a fában (mert nem szerepelhet benne két azonos értékű elem), és ezzel az algoritmus sikertelenül véget ér.
  - b) Ha a beszúrandó elem kisebb az aktuális elemnél, akkor aktuális részfának tekintjük az aktuális részfa gyökérelemének bal oldali részfáját.
  - c) Egyébként aktuális részfának tekintjük az aktuális részfa gyökérelemének jobb oldali részfáját.
- ❹ Folytassuk az algoritmust a 2. lépéssel.





## Törlés bináris keresőfából rekurzívan

- ❶ Ha üres a fa, akkor nem tudunk törölni, és ezzel az algoritmus sikertelenül véget ér.
- ❷ Összehasonlítjuk a gyökérelem értékét a törlendő elemmel.
  - a) Ha a törlendő elem kisebb a gyökérelemnél, akkor a gyökérelem bal oldali részfájából töröljük a törlendő elemet.
  - b) Ha a törlendő elem nagyobb a gyökérelemnél, akkor a gyökérelem jobb oldali részfájából töröljük a törlendő elemet.
  - c) Ha a két elem egyenlő, akkor megnézzük, hogy a gyökérelemnek hány rákövetkezője van.
    - i) Ha a gyökérelemnek egy rákövetkezője sincs (azaz levélelem), akkor egyszerűen törölhető.
    - ii) Ha a gyökérelemnek egy rákövetkezője van, akkor felülírjuk a gyökérelemet azzal a rákövetkező elemmel (azaz egy szinttel feljebb csúsztatjuk a gyökérelem nem üres részfáját).
    - iii) Ha a gyökérelemnek két rákövetkezője van, akkor a gyökérelem értékét felülírjuk a gyökérelem bal oldali részfája legjobboldalibb elemének az értékével, majd a gyökérelem bal oldali részfájából töröljük ezt a legjobboldalibb elemet.

Ezzel az algoritmus sikeresen véget ér.

# Kiegyensúlyozott fa

## Kiegyensúlyozott bináris fa

Azt mondjuk, hogy egy bináris fa **kiegyensúlyozott**, ha bármely elemére igaz, hogy az elem bal oldali és jobb oldali részfájának magasságkülönbsége legfeljebb 1.

## Megjegyzés

Minden tökéletesen kiegyensúlyozott fa egyben kiegyensúlyozott is.

## Kiegyensúlyozott keresőfa (AVL-fa)

Akkor nevezünk egy bináris fát **kiegyensúlyozott keresőfának** vagy **AVL-fának**, ha kiegyensúlyozott is és keresőfa is egyben.

## Megjegyzés

Az AVL-fa elnevezés Georgij Makszimovics Adelszon-Velszkij és Jevgenyij Mihajlovics Landisz nevéből származik. Az AVL-fáról először egy 1962-es cikkükben írtak.





Egy AVL-fát úgy bővítünk, mint egy keresőfát: mindig levélelemmel. A levélelemmel történő bővítést követően a következő esetek fordulhatnak elő:

- 1 A fa továbbra is kiegyensúlyozott. Ekkor nincs teendők, készen vagyunk.
- 2 A fa elveszti kiegyensúlyozottságát. Ekkor egy vagy két **forгатással** újra kiegyensúlyozottá kell tennünk a fát.

Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

# Amikor elromlik a kiegyensúlyozottság: LL és LR bővítés



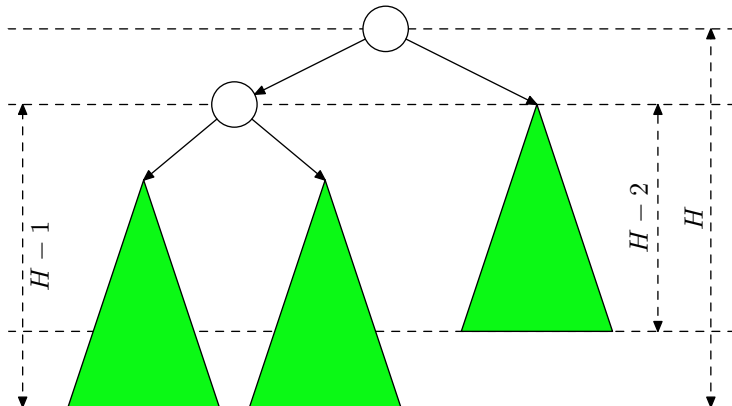
Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

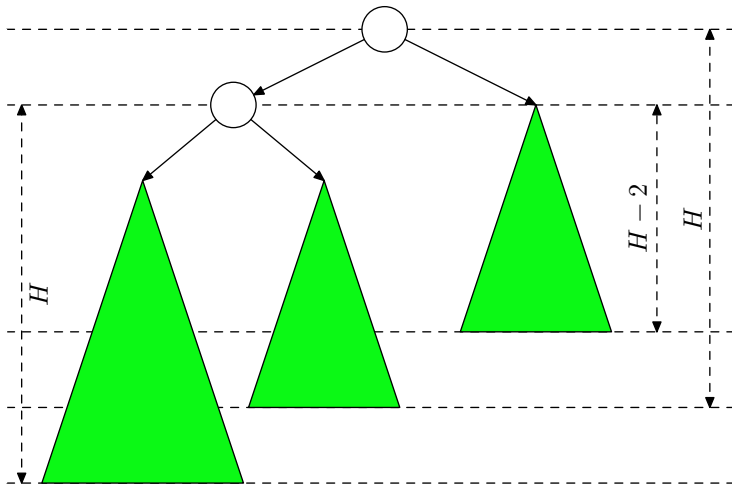
**Alaphelyzet:** a gyökérelem bal oldali részfája egy szinttel magasabb, mint a jobb oldali részfája - a fa még **kiegyensúlyozott**.



## Amikor elromlik a kiegyensúlyozottság: LL és LR bővítés



**LL bővítés:** a gyökérelem bal oldali részfájának bal oldali részfájába kerül az új elem - a fa **elveszti kiegyensúlyozottságát**.



Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Kiegyensúlyozott fa

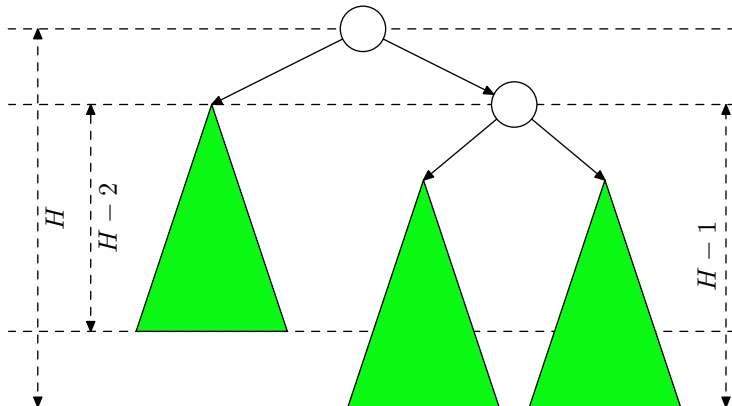
Kiegyensúlyozott keresőfa



## Amikor elromlik a kiegyensúlyozottság: RL és RR bővítés



**Alaphelyzet:** a gyökérelem bal oldali részfája egy szinttel alacsonyabb, mint a jobb oldali részfája - a fa **kiegyensúlyozott**.



Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

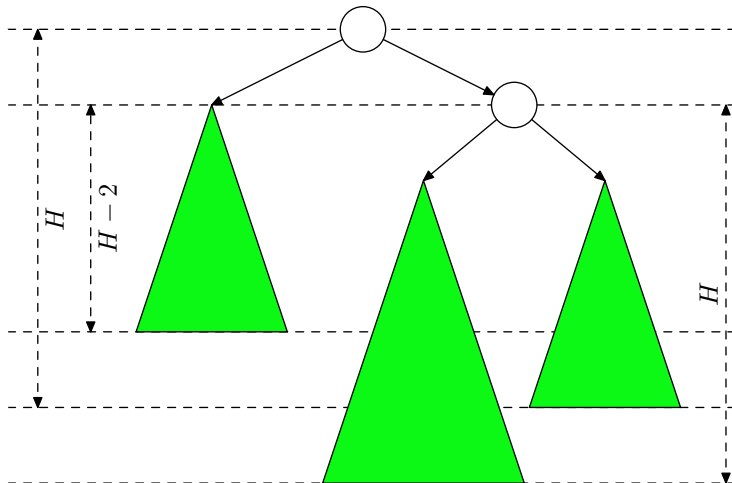
Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

## Amikor elromlik a kiegyensúlyozottság: RL és RR bővítés



**RL bővítés:** a gyökérelem jobb oldali részfájának bal oldali részfájába kerül az új elem - a fa **elveszti kiegyensúlyozottságát**.



Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



## Amikor elromlik a kiegyensúlyozottság: RL és RR bővítés



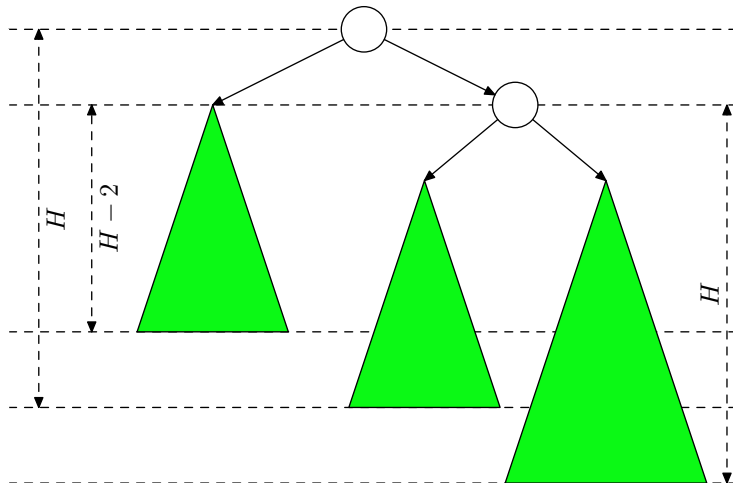
Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

**RR bővítés:** a gyökérelem jobb oldali részfájának jobb oldali részfájába kerül az új elem - a fa **elveszti kiegyensúlyozottságát**.



# Az LL bővítés megoldása

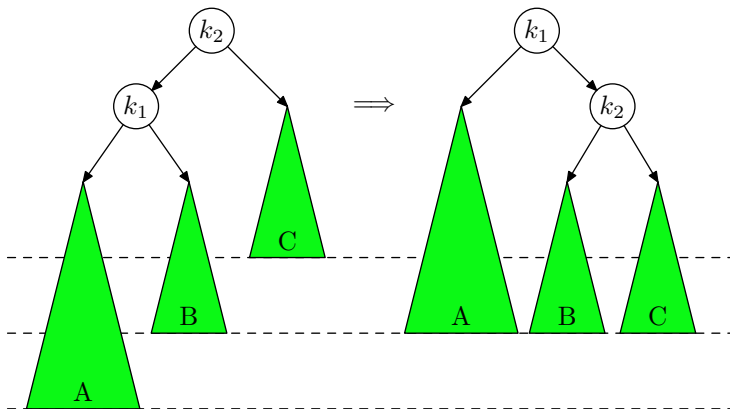


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

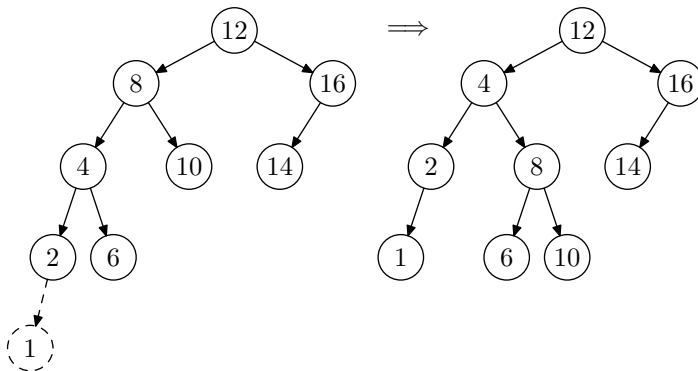
Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa



## Példa LL bővítésre



Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa

Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

## Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

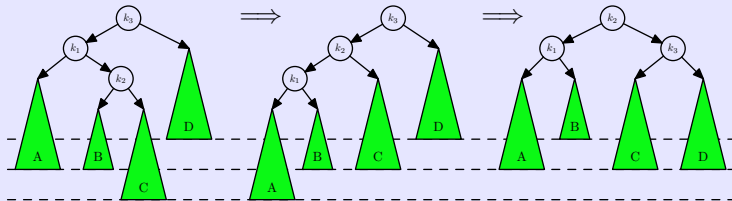
Kiegyensúlyozott keresőfa



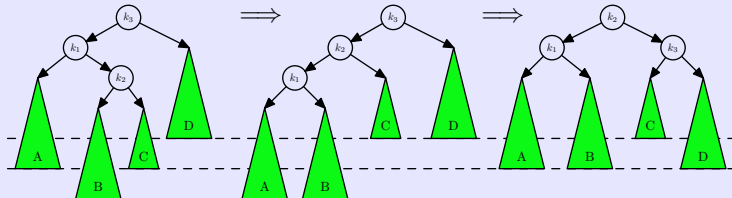
# Az LR bővítés megoldása

A megoldás: két forgatás!

## Az egyik eset



## A másik eset



## Példa LR bővítésre

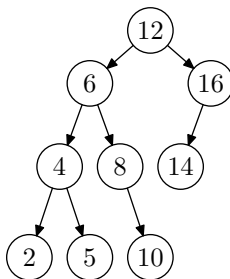
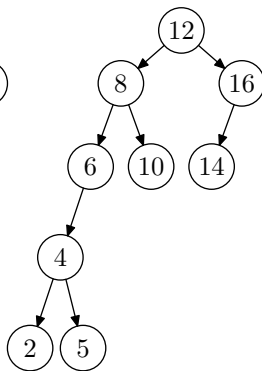
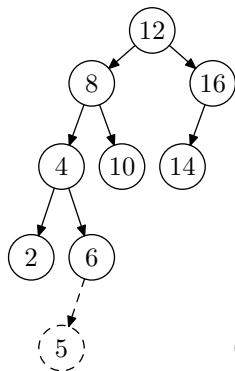


Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa





Egy AVL-fából ugyanúgy törölünk, mint egy keresőfából. A törlést követően a következő esetek fordulhatnak elő:

- 1 A fa továbbra is kiegyensúlyozott. Ekkor nincs teendőnk, készen vagyunk.
- 2 A fa elveszti kiegyensúlyozottságát. Ekkor a törlés helyétől a gyökér felé haladva megkeressük az első olyan elemet, amelyhez mint gyökérelemhez tartozó részfa már nem kiegyensúlyozott, és a bővítésnél ismertetett négy eset közül a megfelelőt alkalmazva kiegyensúlyozzuk ezt a részfát. Ezt a lépést a gyökér felé haladva addig ismételjük, amíg a teljes fa kiegyensúlyozott nem lesz.

Tökéletesen  
kiegyensúlyozott  
bináris fa

Bináris keresőfa

Kiegyensúlyozott fa

Kiegyensúlyozott  
keresőfa