汽车动力学　2018秋　作业1

肖飞宇　2018210441

1 PROBLEM

某轮胎额定载荷$F_z = 8000N$, 在此载荷系数下附着系数为 $\mu_y = 0.8$,侧偏刚度为$K = 81000N/rad$, 转折系数$E_y = 0.1$. 该轮胎半径为$R = 0.36m$,接地印记长度为$l = 0.3m$，载荷在印记上的分布为抛物线($P = a + bx^2, \frac{l}{2} \le x \le \frac{l}{2}$),沿宽度分布为常数。设侧向力-侧偏角的关系为：

$$F_y = \mu_y \times F_z \times \left[1 - e^{-(\psi + E_y \times \psi^3)}\right]$$

其中，$\psi = \frac{K \times tg\partial}{\mu_y \times F_z}$，$\partial$为侧偏角
忽略轮胎侧向变形所产生的附加回正力矩的情况下，求：

1. 回正力矩-侧偏角特性的解析解和数值解，并绘制曲线
2. 设轮胎的滚动阻力系数为$f = 0.01$, 粗事故垂直压力沿印记方向的分布为 $P = a + bx^2 - c\sin(\frac{2\pi x}{l})$,求解此时的回正力矩-侧偏角特性的数值解，并绘制曲线。

1.1 (1)

首先求解垂直力的分布，首先由

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} P dx = F_z \tag{1.1}$$

得

$$F_z = al + \frac{b}{12} l^3 \tag{1.2}$$

同时，在边缘处应该为力的零值边界条件，有

$$P(-\frac{l}{2}) = P(\frac{l}{2}) = a + \frac{b}{4}l^2 = 0 \tag{1.3}$$

联立方程1.2和方程1.3可得

$$a = \frac{3F_z}{2l}$$
$$b = -\frac{6F_z}{l^3}$$

那么载荷的垂直分布为

$$P = \frac{3F_z}{2l} - \frac{6F_z}{l^3}x^2$$

同时注意到，最大侧向力轮廓为：

$$F_y = \mu_y P = \mu_y \frac{3F_z}{2l} - \mu_y \frac{6F_z}{l^3}x^2$$

为了求解侧向力的分布，假设其为简单的线性分布，即假设其方程为

$$f_y = k_y(x - \frac{l}{2}) \tag{1.4}$$

接下来就是求出这一分布和最大侧向力轮廓的交点（显然，从这一交点往印记后方，侧向李将会沿着最大侧向力轮廓分布），不妨设交点的横坐标为x_0，有

$$k_y(x_0 - \frac{l}{2}) = \mu_y \frac{3F_z}{2l} - \mu_y \frac{6F_z}{l^3}x_0^2 \tag{1.5}$$

容易求得

$$k_y = \mu_y \frac{F_z(3l^2 - 12x_0^2)}{l^3(2x_0 - l)} \tag{1.6}$$

从而可以得到侧向力的分布

$$f_y(x) = \begin{cases} k_y(x - \frac{l}{2}) & x_0 \le x \le \frac{l}{2} \\ \mu_y \frac{3F_z}{2l} - \mu_y \frac{6F_z}{l^3}x^2 & -\frac{l}{2} \le x \le x_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

对侧向力的分布进行积分，可以得到总的侧向力

$$F_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f_y dx \tag{1.8}$$

代入求得

$$F_y = -\frac{k_y}{2}(x_0 - \frac{l}{2})^2 + \frac{\mu_y F_z}{2l^3}(l^3 + 3l^2 x_0 - 4x_0^3) \tag{1.9}$$

而题干中已知

$$F_y = \mu_y \times F_z \times \left[1 - e^{-(\psi + E_y \times \psi^3)}\right] \tag{1.10}$$

得到一元三次方程

$$8x_0^3-12lx_0^2+6l^2x_0+l^3(8e^{-(\psi+E_y\times\psi^3)}-1)=0 \tag{1.11}$$

注意到

$$\psi=\frac{K\times tg\partial}{\mu_y\times F_z} \tag{1.12}$$

结合方程1.11和1.28，可以将x_0表示为只和侧偏角∂相关的函数，不妨记为$x_0=\Psi(\partial)$ 需要特别指出的是，之所以此处求出x_0和侧偏角∂之间的关系，是为了后面绘制回正力矩和侧偏角之间的关系。

基于之前求得的侧向力公式1.23，可以求出回正力矩为

$$M_z=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}f_y dx=\frac{u_yF_z}{2l^3}\left(x_0^4-10lx_0^3-\frac{9}{2}x_0^2+\frac{5}{2}l^3x_0+\frac{17}{16}l^4\right) \tag{1.13}$$

编写**Python**程序（见附录2.1）求解出临界侧向滑移点位置和回正力矩分别和侧偏角的关系如图1.1和图1.2所示

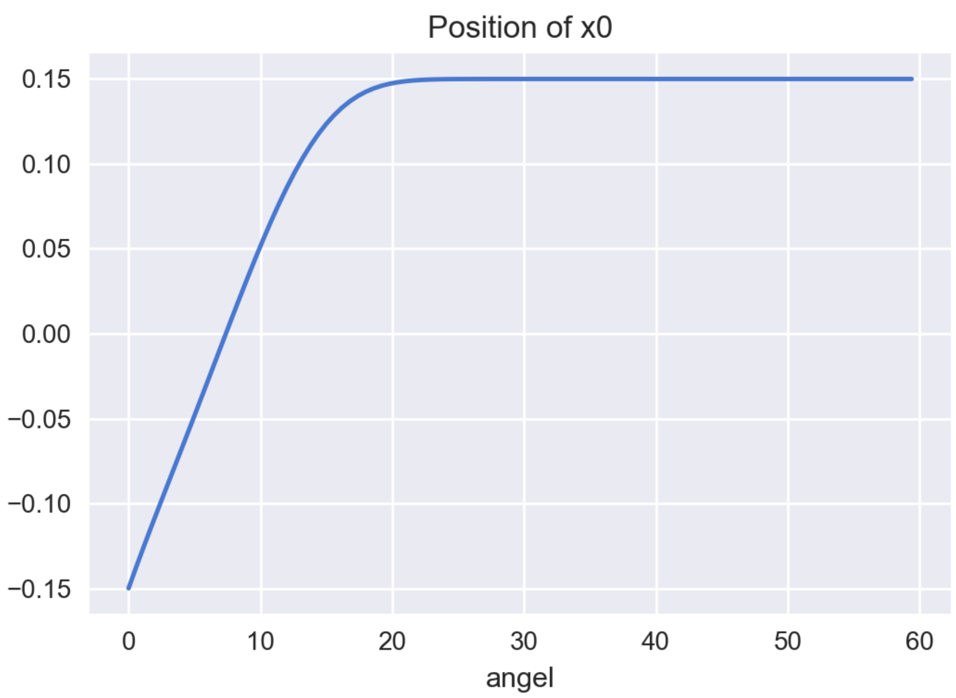

Figure 1.1: 临界侧向滑移点位置和侧偏角关系

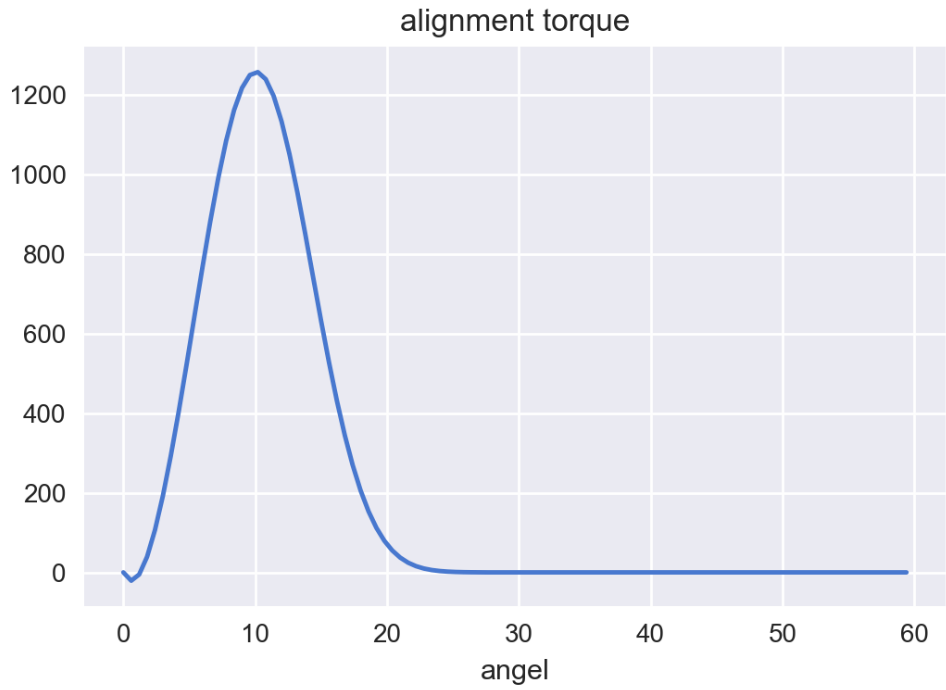

Figure 1.2: 回正力矩和侧偏角关系

1.2 (2)

首先求解垂直力的分布，和（1）类似首先由

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} P dx = F_z \tag{1.14}$$

得

$$F_z = al + \frac{b}{12} l^3 - c\sin(\frac{2\pi x}{l}) \tag{1.15}$$

同时，在边缘处应该为力的零值边界条件，有

$$P(-\frac{l}{2}) = P(\frac{l}{2}) = 0 \tag{1.16}$$

联立方程1.15和方程1.16可得

$$a = \frac{3F_z}{2l}$$
$$b = -\frac{6F_z}{l^3}$$

那么载荷的垂直分布为

$$P = \frac{3F_z}{2l} - \frac{6F_z}{l^3} x^2 - c\sin(\frac{2\pi x}{l})$$

有滚动阻力特性

$$M_y = fRF_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} Pxdx \tag{1.17}$$

将方程1.17代入方程1.2中可以求出

$$c = -\frac{2\pi fRF_z}{l^2} \tag{1.18}$$

那么载荷的垂直分布求得

$$P = \frac{F_z}{2l^3}(3l^2 - 12x^2) + \frac{2\pi fRF_z}{l^2} sin(\frac{2\pi x}{l}) \tag{1.19}$$

为了求解侧向力的分布，假设其为简单的线性分布，即假设其方程为

$$f_y = k_y(x - \frac{l}{2}) \tag{1.20}$$

接下来就是求出这一分布和最大侧向力轮廓的交点（显然，从这一交点往印记后方，侧向李将会沿着最大侧向力轮廓分布），不妨设交点的横坐标为x_0，有

$$k_y(x_0 - \frac{l}{2}) = \mu_y \left(\frac{3F_z}{2l} - y\frac{6F_z}{l^3}x_0^2 + \frac{2\pi fRF_z}{l^2} sin(\frac{2\pi x}{l}) \right) \tag{1.21}$$

容易求得

$$k_y = \frac{\mu_y}{x_0 + l/2} \left(\frac{F_z}{2l^3}(3l^2 - 12x_0^2) + \frac{2\pi fRF_z}{l^2} sin(\frac{2\pi x}{l}) \right) \tag{1.22}$$

从而可以得到侧向力的分布

$$f_y(x) = \begin{cases} k_y(x - \frac{l}{2}) & x_0 \le x \le \frac{l}{2} \\ \mu_y P & -\frac{l}{2} \le x \le x_0 \end{cases} \tag{1.23}$$

对侧向力的分布进行积分，可以得到总的侧向力

$$F_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f_y dx \tag{1.24}$$

代入求得

$$\begin{aligned} F_y = -\frac{k_y}{2}(x_0 - \frac{l}{2})^2 + \frac{\mu_y F_z}{2l^3}(l^3 + 3l^2 x_0 - 4x_0^3) \\ -\frac{\mu_y fRF_z}{l}\left(1 + \cos(\frac{2\pi x_0}{l})\right) \\ -\frac{F_z \mu_y \pi fRl}{2l^3}(2x_0 - l) sin(\frac{2\pi x_0}{l}) \end{aligned} \tag{1.25}$$

而题干中已知

$$F_y = \mu_y \times F_z \times \left[1 - e^{-(\psi + E_y \times \psi^3)}\right] \tag{1.26}$$

得到方程

$$
\begin{aligned}
8x_0^3-12lx_0^2+6l^2x_0+l^3(8e^{-(\psi+E_y\times\psi^3)}-1)\\
-8fRl^2\left(1+\cos(\frac{2\pi x_0}{l})\right)\\
-4\pi fRl(2x_0-l)sin(\frac{2\pi x_0}{l})=0
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

注意到

$$
\psi=\frac{K\times tg\partial}{\mu_y\times F_z}
\tag{1.28}
$$

结合方程1.11和1.28，可以将x_0表示为只和侧偏角∂相关的函数，不妨记为$x_0=\Psi(\partial)$
基于之前求得的侧向力公式1.23，可以求出回正力矩为

$$
\begin{aligned}
M_z=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}f_ydx=\frac{u_yF_z}{2l^3}\left(x_0^4-10lx_0^3-\frac{9}{2}x_0^2+\frac{5}{2}l^3x_0+\frac{17}{16}l^4\right)\\
+\frac{\mu_yfRF_z}{l}\left(-\frac{l}{2}+\frac{l}{2\pi}sin(\frac{2\pi x_0}{l})+x_0cos(\frac{2\pi x_0}{l})\right)\\
-\frac{\mu_y\pi fF_zR}{12l^2}(8x_0^2-2lx_0-l^2)sin(\frac{2\pi x_0}{l})
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

编写**Python**程序（见附录2.2），特别地，采用牛顿迭代法进行方程求解，求解出临界侧向滑移点位置和回正力矩分别和侧偏角的关系如图1.3和图1.4所示

2 APPENDIXS

2.1 APPENDIXA

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: feiyuxiao
"""
from sympy.solvers import solve
from sympy import Symbol
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

sns.set(style="darkgrid", palette="muted", color_codes=True)

x=Symbol('x')
```

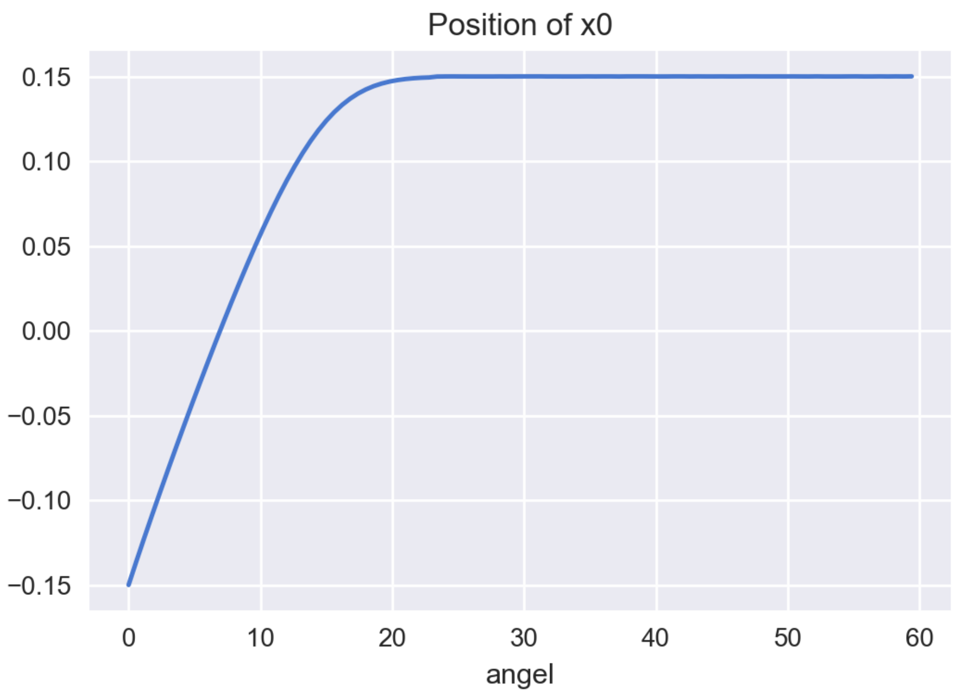

Figure 1.3: 临界侧向滑移点位置和侧偏角关系

```
k = 81000/(0.8*8000)
Ey = 0.1
l = 0.3
def g(rad):
    theta = k * math.tan(rad)
    return math.exp(-(theta+Ey*theta**3))

size = 100

kk = 0.8*8000/(2*l**3)
def M(x):
    return kk*(x**4 - 10*l*x**3 -4.5*l**2*x**2 + 2.5*l**3*x + 17*l**4/16)


angle = np.zeros(size)
angle_theta = np.zeros(size)
x0 = np.zeros(size)
M0 = np.zeros(size)
```

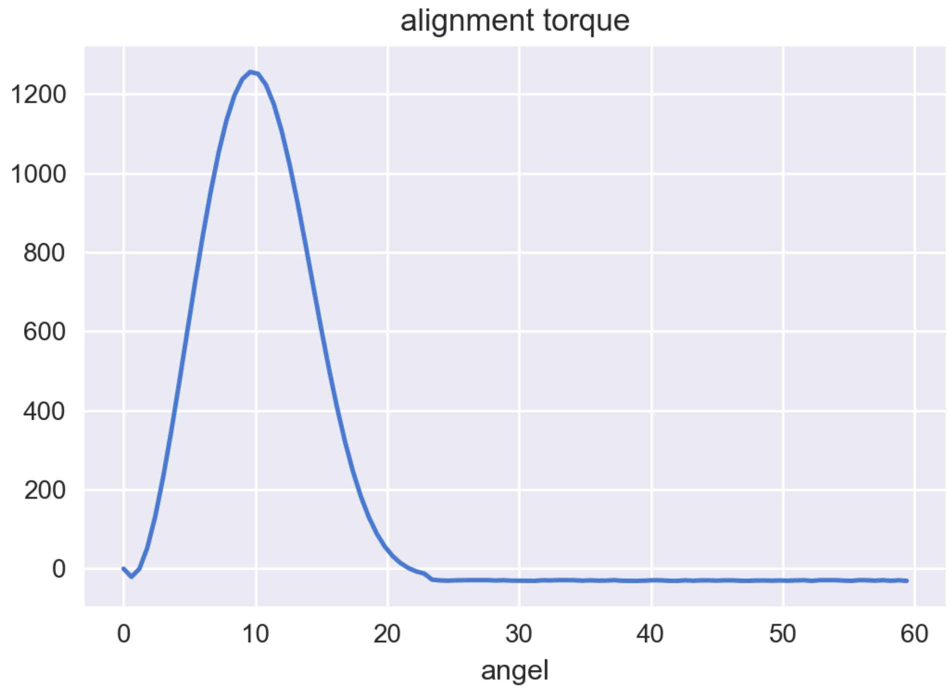

Figure 1.4: 回正力矩和侧偏角关系

```
for i in range(size):
    angle[i] = i*(math.pi/(3*size))
    angle_theta[i] = 60*i/size

for i in range(size):
    f = 8 * x**3 - 12*l*x**2 + 6*l*l*x + l*l*l*(g(angle[i])-1)
    s=solve(f, x)
    x0[i] = s[0]
    M0[i] = M(x0[i])

plt.figure()
plt.plot(angle_theta,x0)
plt.xlabel("angel")
plt.title("Position of x0")
plt.savefig("1-1.png",dpi=200)

plt.figure()
plt.plot(angle_theta,M0)
plt.xlabel("angel(rad)")
```

```
plt.title("alignment torque")
plt.savefig("1-2.png",dpi=200)
```

2.2 AppendixB

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: feiyuxiao
"""
import sympy
from sympy import Symbol
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import random

pi = 3.1416
sns.set(style="darkgrid", palette="muted", color_codes=True)

x=Symbol('x')


k = 81000/(0.8*8000)
Ey = 0.1
l = 0.3
def g(rad):
    theta = k * math.tan(rad)
    return math.exp(-(theta+Ey*theta**3))

size = 100

kk1 = 0.8*8000/(2*l**3)
kk2 = 0.8*0.01*0.36*8000/0.3
kk3 = -0.8*pi*0.01*8000*0.36/(12*l*l)
def M(x):
    return kk1*(x**4 - 10*l*x**3 -4.5*l**2*x**2 + 2.5*l**3*x + 17*l**4/16) \
+ kk2*(-0.5*l + l*math.sin(2*pi*x/l)/(2*pi)+x*math.cos(2*pi*x/l)) \
+kk3*(8*x**2 -2*l*x -l*l)*math.sin(2*pi*x/l)
```

```python
angle = np.zeros(size)
angle_theta = np.zeros(size)
x0 = np.zeros(size)
M0 = np.zeros(size)

for i in range(size):
    angle[i] = i*(pi/(3*size))
    angle_theta[i] = 60*i/size

F1 = -8*0.01*0.36*l*l
F2 = -4*pi*0.01*0.36*l
F0 = 2*pi/l


for i in range(size):
    f = 8 * x**3 - 12*l*x**2 + 6*l*l*x + l*l*l*(8*g(angle[i])-1) \
    + F1*(1+sympy.cos(F0*x)) + F2*(2*x-l)*sympy.sin(F0*x)
    ffunc = sympy.diff(f, x)

    begin = 1
    end = 2

    MAXSTEP = 100

    step_count = 0

    xx0 = random.uniform(begin, end)
    temp = f.subs(x, xx0)

    while step_count < MAXSTEP and abs(temp) > 1e-10:
        xx0 = xx0 - (temp / (ffunc.subs(x, xx0)))
        temp = f.subs(x, xx0)
        step_count += 1
    x0[i] = xx0
    #print(step_count)
    M0[i] = M(x0[i])

plt.figure()
plt.plot(angle_theta,x0)
plt.xlabel("angel")
plt.title("Position of x0")
plt.savefig("2-1.png",dpi=200)
```

```
plt.figure()
plt.plot(angle_theta,M0)
plt.xlabel("angel")
plt.title("alignment torque")
plt.savefig("2-2.png",dpi=200)
```