OPTIKAI HETERODIN DETEKTÁLÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

A hullám fogalma – a fény mint hullám

A fény, mint ismeretes, az elektromágneses tér hullámjelensége. Jellemző rezgési frekvenciája a 10^{14} Hz körüli tartományba esik. Az a fizikai mennyiség, amelynek terjedését egyszerűen fénynek nevezzük, az elektromos és mágneses térerősség. Tehát a fényben az elektromos és a mágneses tér változásai terjednek. Tekintsünk egy, a tárgyalás szempontjából egyszerű, lineárisan polarizált harmonikus síkhullámot. A síkhullám elnevezés onnan ered, hogy az azonos térerősségű pontok egy adott pillanatban egy síkon helyezkednek el. A síkhullám kifejezése:

$$E(\mathbf{r},t) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr}), \tag{1}$$

ahol E_0 az elektromos hullám amplitúdója, **k** a hullámszám vektor, $\omega = 2\pi \cdot f$ az elektromágneses hullám körfrekvenciája, „f” pedig a frekvenciája. Egyszerű megfontolásokból a hullám terjedési sebessége k-val és ω-val kifejezhető:

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}. \tag{2}$$

A „k” helyett a gyakorlatban $\lambda = 2\pi/k$-t szokás használni, amelyet hullámhossznak nevezünk. Így az egyenlet ismertebb alakjában $c = \lambda \cdot f$. Az (1) egyenletből látszik λ szemléletes jelentése is: azt a **k** vektor irányában mért legkisebb távolságot jelenti, amely szerint a térerősség periodikusan változik.

Doppler-effektus

Tegyük fel, hogy az (1) szerinti monokromatikus síkhullámot egy „K” koordinátarendszerben írtuk fel. Ha ezt a síkhullámot a K-hoz képest **v**(t) pillanatnyi sebességgel mozgó K' rendszerből figyeljük, akkor a hullám K-beli frekvenciájától különböző frekvenciájú hullámot fogunk észlelni. Válasszuk úgy a K és K' rendszert, hogy $t = 0$-ban az origók egybe essenek. Ekkor a K-beli koordinátát K'-beli koordinátákkal kifejezhetjük:

$$\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{r}' \tag{3}$$

Ezt beírva az (1) egyenletbe, a hullám K'-beli alakját nyerjük:

$$E(\mathbf{r}',t) = E_0 \cos(\phi(\mathbf{r}',t)) = E_0 \cos\left(\omega t - \mathbf{k} \cdot \int_0^t \mathbf{v}(\tau)\mathrm{d}\tau - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'\right). \tag{4}$$

Definíció szerint a körfrekvencia a fázis (ϕ) idő szerinti parciális deriváltja:

$$\omega'(t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t), \tag{5}$$

tehát a két rendszer relatív sebességétől függően a körfrekvencia megváltozik, mégpedig a két vonatkoztatási rendszer relatív sebességének *pillanatnyi értéke* szerint. (Az egyszerűség kedvéért **v** és ω időfüggését a továbbiakban nem jelöljük.) Ezt a jelenséget felfedezőjéről Doppler-effektusnak nevezik. A jelenség az akusztikában már XIX században ismert és igazolt volt. (A fenti eredmény csak közelítő jellegű, mivel a Galilei-féle relativitás elvének megfelelő transzformáció, amellyel az egyik koordináta rendszerből áttérünk a másikba, csak a fénysebességhez képest kis **v** sebességek esetében igaz. A pontos tárgyalásnál a Galilei-féle relativitást fel kell cserélni az Einstein-féle relativitás elvével és ennek megfelelően a két rendszer transzformációját Lorentz-transzformációval kell leírni, ld. a függeléket. A gyakorlatban szinte mindig teljesül az a feltétel, hogy v << c, ahol „c" a fénysebesség, ezért a kapott eredmények nagyon nagy pontossággal érvényben maradnak.) Felhasználva a

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ és } \omega = 2\pi f \tag{6}$$

egyenleteket, a körfrekvenciáról áttérve frekvenciára kapjuk:

$$f' = f - \frac{|\mathbf{v}|}{\lambda} \cos \vartheta \tag{7}$$

ahol $\cos \vartheta$ a **k** és **v** vektor által bezárt szög koszinusza. Speciálisan, ha **k** és **v** azonos irányú, akkor $\cos \vartheta = 1$, így:

$$f' = f - \frac{|\mathbf{v}|}{\lambda}, \tag{8}$$

és ha ellentétes irányúak, akkor $\cos \vartheta = -1$, melyből:

$$f' = f + \frac{|\mathbf{v}|}{\lambda}. \tag{9}$$

Optikai keverés

Tekintsünk két különböző frekvenciájú (ω_1 és ω_2), és azonos terjedési irányú (x) elektromágneses síkhullámot, ahol az egyik körfrekvencia időfüggő: ω_2 (t). Ebben az esetben az elektromos térerősségek a következőképp írhatók föl:

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega_1 t - k_1 x) \tag{10}$$

$$E_2 = E_{20} \cos\left(\int_0^t \omega_2(\tau) d\tau + \int_t^{t - x/c} \omega_2(\tau) d\tau + \varphi \right) = E_{20} \cos\left(\int_0^{t - x/c} \omega_2(\tau) d\tau + \varphi \right), \tag{11}$$

ahol „c" a fénysebesség, φ pedig egy konstans fázistolás. A (11)-ben szereplő összeg első tagja a „t" időpillanatban mérhető fázist, a második tagja az x/c idővel korábbi fázist írja le. Ezen két tag összege adja meg az „x" pozícióban, „t" időpillanatban mérhető fázist. Az eredő elektromágneses tér a kettő összege:

$$E = E_1 + E_2 = E_{10} \cos(\omega_1 t - k_1 x) + E_{20} \cos\left(\int_0^{t - x/c} \omega_2(\tau) d\tau + \varphi \right) \tag{12}$$

Helyezzünk az eredő tér egy adott pontjába (x) fényérzékelőt. Az érzékelő által szolgáltatott áram $i_D \sim P$, ahol „P" a detektorra eső fényteljesítmény. A fényteljesítmény viszont az elektromos térerősség négyzetével arányos:

$$\begin{aligned} P \sim E^2 = E_{10}^2 \cos^2(\omega_1 t - k_1 x) + E_{20}^2 \cos^2\left(\int_0^{t - x/c} \omega_2(\tau) d\tau + \varphi \right) + \\ + 2E_{10} E_{20} \cos(\omega_1 t - k_1 x) \cos\left(\int_0^{t - x/c} \omega_2(\tau) d\tau + \varphi \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Ha ω_2-t ω_1-ből Doppler-eltolással állítjuk elő, és az alkalmazott sebességek nem relativisztikusak akkor ω_2 csak nagyon kicsit tér el a konstans ω_1-től. A továbbiakban egyszerűbb, ha az ω_2 időfüggését egy külön $\Delta\omega(t)$ taggal kezeljük, amely jóval kisebb ω_1-nél.

$$\omega_2(t) = \omega_1 + \Delta\omega(t)\,, \tag{14}$$

$\Delta\omega$ függését a koordinátarendszerek sebességétől lásd a következő fejezetben. Ekkor

$$\int_0^{t-x/c} \omega_2(\tau)d\tau = \omega_1\left(t - x/c\right) + \int_0^{t-x/c} \Delta\omega(\tau)d\tau\,. \tag{15}$$

Behelyettesítve (13)-ba a fenti összefüggést, és felhasználva, hogy

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right), \tag{16}$$

i_D alakja a következő:

$$\begin{aligned} i_D \sim\ & E_{10}^2 \cos^2(\omega_1 t - k_1 x) + E_{20}^2 \cos^2\left(\omega_1 t - k_1 x + \int_0^{t-x/c} \Delta\omega(\tau)d\tau + \varphi\right) + \\ & + E_{10}E_{20}\cos\left[2\omega_1 t - 2k_1 x + \int_0^{t-x/c} \Delta\omega(\tau)d\tau + \varphi\right] + E_{10}E_{20}\cos\left[-\int_0^{t-x/c} \Delta\omega(\tau)d\tau - \varphi\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

A detektor a ráeső teljesítmény időátlagát méri. Mivel fény esetén ω_1 és ω_2 ~10^{15} nagyságrendű, és ezt a frekvenciát a fényérzékelő nem képes követni, az első három tag i_D kifejezésében kiátlagolódik. Felhasználva, hogy:

$$\begin{aligned} &\langle\cos(x)\rangle = 0 \\ &\left\langle\cos^2(x)\right\rangle = \frac{1}{2} \\ &\cos(-x) = \cos(x)\,, \end{aligned} \tag{18}$$

ahol < > az időátlagot jelenti. A detektor jelére azt kapjuk, hogy:

$$\langle i_D\rangle \sim \frac{E_{10}^2}{2} + \frac{E_{20}^2}{2} + E_{10}E_{20}\cos\left(\int_0^{t-x/c} \Delta\omega(\tau)d\tau + \varphi\right). \tag{19}$$

Az időátlagolást a fenti kifejezésben a fényhullám periódusidejének néhányszorosára végeztük el (ahogy a detektor is teszi), ezért ha ω_1 és ω_2 elég közel esik egymáshoz, a (17) kifejezés negyedik tagja átlagolás után is megmarad, ugyanis az $\omega_1 - \omega_2$ jóval nagyobb magánál ω_1 és ω_2-nél. Amennyiben a különbségi körfrekvencia olyan kicsi, hogy az ebből eredő változást már a fényérzékelő is képes követni, a detektor kimenő jelében megjelenik egy, a két fény körfrekvencia-különbségével változó jel, melynek amplitúdója a két térerősség amplitúdójának szorzata. Bevezetve az intenzitásokra az $E_{10}^2 = I_1$ és $E_{20}^2 = I_2$ jelölést:

$$\langle i_D\rangle \sim \frac{I_1}{2} + \frac{I_2}{2} + \sqrt{I_1\, I_2}\,\cos\left[\int_0^{t-x/c} \Delta\omega(\tau)d\tau + \varphi\right] \tag{20}$$

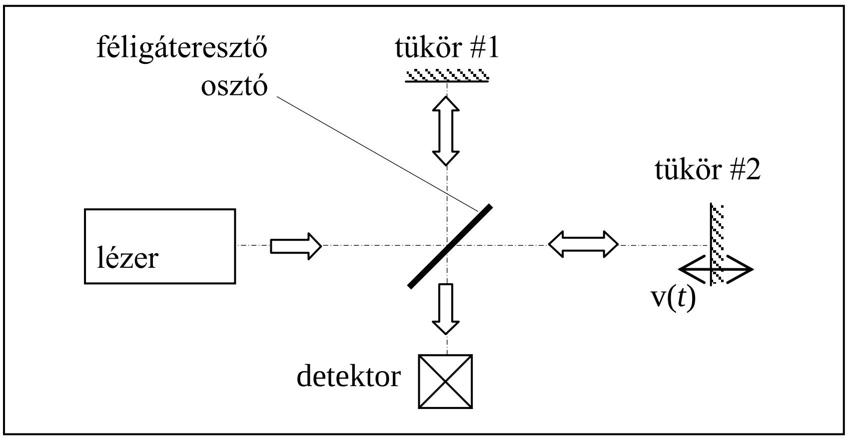
Az így kapott jel egyenáramú komponense a két fényhullám intenzitásának összegével arányos, ami e mérésben nem informatív, ezért elektronikus úton leszűrjük. A mért jel váltóáramú komponensét (i_H) heterodin jelnek, az eljárást pedig heterodin keverésnek nevezzük:

$$i_H \equiv \sqrt{I_1 \, I_2} \, \cos\left[\int_0^{t-x/c} \Delta\omega(\tau) d\tau + \varphi\right]. \tag{21}$$

Az optikai keverésnél az intenzitások közül az egyiket elektromos analógia alapján lokáloszcillátornak nevezik (I_1), a másikat pedig jelintenzitásnak (I_2). Fénydetektálás szempontjából az optikai keverésnek azért van nagy jelentősége, mert a keletkező heterodin jel frekvenciája jól meghatározott értékű, valamint megfelelő nagyságú lokáloszcillátor-intenzitás segítségével a $\sqrt{I_1 I_2}$ szorzat még kis I_2 mellett is megnövelhető. Így az optikai keverés kis fényintenzitások mérésének egyik alkalmas módszereként kínálkozik. Ha például egy detektor érzékenysége 1 mW, és ennél kisebb jelet, mondjuk 10 μW-ot akarunk vele mérni, akkor a 10 μW-os jelet összekeverve egy 1 W-os lokál-oszcillátor jelével, akkor kb. 3 mW-os kevert jel keletkezik, amely már mérhető az adott detektorral. A dolog szépséghibája, hogy a detektoron megjelenik egy nagy, jelen esetben 1 W-os egyenáramú jel is, ami az érzékelőt, vagy az elekronikus erősítőt telítésbe viheti.

Optikai keverés megvalósítása Doppler-effektus felhasználásával

Az optikai keverés megvalósításához egy interferométerre van szükség. Az 1. ábrán látható Michelson-interferométerben a két nyaláb a karokból a féligáteresztő lemezen egyesül úgy, hogy a detektort azonos ponton találja el, és irányuk is pontosan megegyezik (azaz $\mathbf{k_1}$ és $\mathbf{k_2}$ párhuzamos).

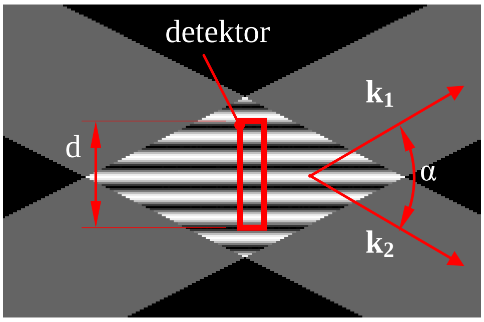


1. ábra. Optikai keverés megvalósítása Michelson-interferométerrel.

Ha ugyanis $\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2}$-nek van a terjedési irányra merőleges komponense ($\alpha \neq 0$, ld. 2. ábra), a detektor síkjában egy interferencia csíkrendszer alakul ki, ami miatt a heterodin jel kiátlagolódhat. Azért, hogy ezt elkerüljük, a detektor méretének (d) kisebbnek kell lennie a kialakuló interferencia kép fél periódusánál:

$$d < \frac{2\pi}{4 \cdot k_1 \sin\left(\alpha/2\right)}, \quad \text{ha } \alpha \approx 0 \quad \rightarrow \quad \alpha <\approx \frac{\lambda}{2d} [\text{rad}] \,, \tag{22}$$

ahol felhasználtuk, hogy $k_1 \approx k_2$. Mivel a detektor mérete általában adott, az előző kifejezés a nyalábok egymáshoz viszonyított irányának beállítására ad egy erős kényszert: ha a detektor mérete d = 1 mm, λ = 633 nm, akkor α < 0,02°, ami 3 m-en 1 mm távolságnak felel meg!



2. ábra. Az optikai keverésnél fellépő interferencia kép és a detektor méretének (d) viszonya, abban az esetben, ha a két nyaláb (**k₁** és **k₂**) nem párhuzamos (α ≠ 0).

Az optikai keveréshez szükséges kismértékű frekvencia eltérést a Doppler-effektus révén érhetjük el: az interferométer egyik karjában lévő tükör (#2, ld. 1. ábra) önmagával párhuzamos, nyalábra merőleges, „v" sebességgel történő mozgatása esetén a tükörre eső fény frekvenciája a doppler effektus miatt megváltozik. A mozgó tükör az álló forrásból érkező „f" frekvenciájú lézernyalábot f'-nek érzékeli:

$$f' = f - \frac{v}{\lambda}, \tag{23}$$

ahol a sebesség előjeles mennyiség (v > 0, ha a tükör a forrástól távolodik). A tükör ilyen frekvenciájú fényt ver vissza, azonban a detektor egy másik frekvenciát (f ") érzékel, ugyanis a tükör hozzá képest egy mozgó forrás. A mozgó tükör karjából érkező fény frekvenciája a detektornál tehát:

$$f'' = f' - \frac{v}{\lambda} = f - \frac{2v}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_2 = \omega_1 - k_1 \cdot 2v, \tag{24}$$

A frekvenciák közötti különbség tehát

$$\Delta\omega = -2k_1 v\ , \tag{25}$$

ahol $\omega_1 = 2\pi f$ és $\omega_2 = 2\pi f''$. Ebből a heterodin frekvencia:

$$\boxed{f_H \equiv f' - f'' = \frac{2v(t)}{\lambda}}. \tag{26}$$

A másik nyalábnak a frekvenciája változatlan, így a keletkező heterodin jel (21) szerint:

$$i_H \equiv \sqrt{I_1\, I_2}\ \cos\left[\int_0^{t-x/c} k_1 \cdot 2v(\tau)d\tau - \varphi\right]. \tag{27}$$

A sebesség időfüggése szempontjából két speciális esetet érdemes megvizsgálni. Az egyik az egyenes vonalú egyenletes sebességű mozgás. Ekkor v(t) = v = const., azaz (27) egyenletből az integrálás elvégzése után a következő marad:

$$\boxed{i_H \equiv \sqrt{I_1\, I_2}\ \cos\left[k_1 \cdot 2v \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) - \varphi\right] = \sqrt{I_1\, I_2}\ \cos[(\omega_1 - \omega_2)\cdot t - (k_1 - k_2)\cdot x - \varphi]}, \tag{28}$$

ahol felhasználtuk (24)-et. Egy lebegésszerű jelenséget tapasztalunk: a heterodin jel a körfekvenciák különbségének megfelelő frekvenciával harmonikusan változik. A másik jellemző sebességfüggést, a szinuszos rezgőmozgást végző tükröt, a következő alfejezetben tárgyaljuk.

Amplitúdó mérés heterodin méréstechnikával

Az előző fejezetben tárgyaltuk, hogy az interferométer egyik tükrének állandó, a tükörre merőleges sebességgel történő mozgatásának hatására milyen heterodin jel keletkezik és ez hogyan használható a sebesség nagyságának meghatározására. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk milyen a heterodin jel alakja, ha mozgás ugyan merőleges a tükörre, de a sebesség nagysága időben változó: a példa kedvéért harmonikus rezgőmozgás. A rezgés kitérése:

$$x_r = x_0 \cos(\omega_r t + \varphi_r)\ , \tag{29}$$

ahol x_0 az amplitúdó ω_r a rezgés körfrekvenciája φ_r pedig a kezdőfázis. Ez alapján a pillanatnyi sebesség:

$$v(t) = \dot{x}_r = -x_0 \omega_r \sin(\omega_r t + \varphi_r). \tag{30}$$

A heterodin frekvencia pedig:

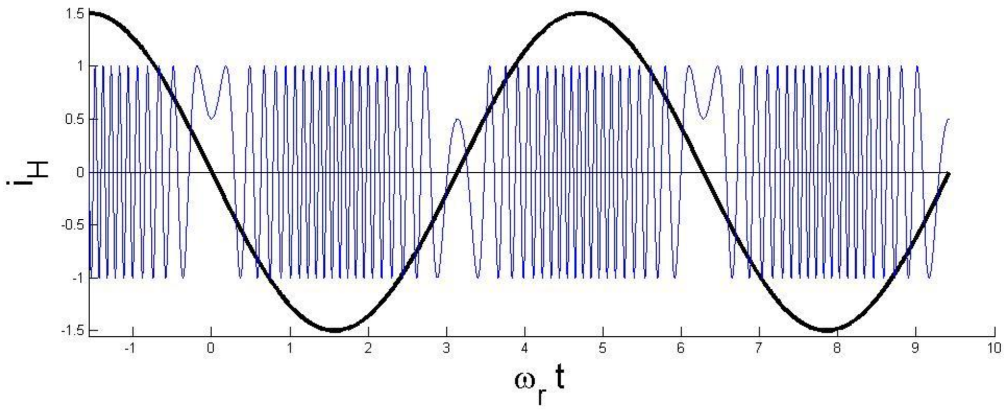
$$f_H = \frac{2v}{\lambda} = -\frac{2x_0\omega_r \sin(\omega_r t + \varphi_r)}{\lambda}. \tag{31}$$

Itt „v" a tükör #2 sebessége az interferométerben, λ az alkalmazott fény hullámhossza. A heterodin jel alakja a harmonikusan rezgő tükör esetén (27) és (30) alapján:

$$i_H \equiv \sqrt{I_1\ I_2}\ \cos\left[\int_0^{t-x/c} k_1 \cdot 2v(\tau)d\tau - \varphi\right] = \sqrt{I_1\ I_2}\ \cos\left[k_1 \cdot 2x_0 \cos\left(\omega_r \cdot \left(t - x/c\right) + \varphi_r\right) - \varphi\right], \tag{32}$$

ahol φ-be a t = 0 miatt újonnan keletkezett konstans fázistolást is belevettük. Ha φ_r-be szintén beleértjük az x/c-ből eredő konstans fázistolást, akkor a heterodin jel alakja a következő:

$$\boxed{i_H \equiv \sqrt{I_1\ I_2}\ \cos\left[k_1 \cdot 2x_0 \cos(\omega_r t + \varphi_r) - \varphi\right]}\ . \tag{33}$$



3. ábra. A heterodin jel (vékony kék vonal) és a tükör sebessége (vastag fekete vonal) az idő függvényében. A heterodin jel egy frekvenciamodulált jel: amikor nagy a sebesség akkor sűrűbb, 0 körüli sebességnél a frekvencia is 0 körüli. φ_r határozza meg a görbék együttes mozgását az időskálán, φ pedig a heterodin jel (kék görbe) kezdőfázisát adja meg a tükör sebességét leíró (fekete) görbéhez képest.

A 3. ábrán jól láthatóak a heterodin jel nullhelyei. Célunk az, hogy összefüggést találjunk az adott idő alatt mérhető nullátmenetek és a rezgés amplitúdója között. Vizsgáljuk meg mi a feltétele annak, hogy a heterodin jel értéke 0 legyen. Ha bevezetjük a heterodin jel fázisára a

$$\Phi \equiv k_1 \cdot 2x_0 \cos(\omega_r t + \varphi_r) - \varphi \tag{34}$$

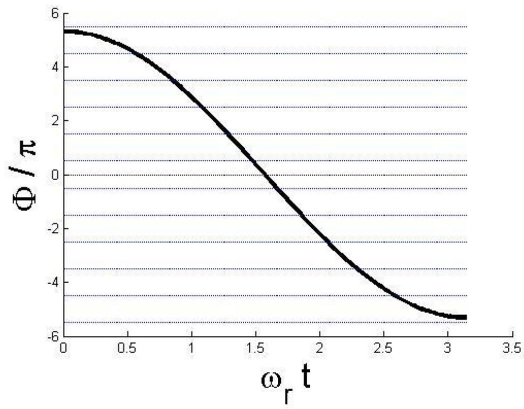
jelölést, akkor a zérus helyek feltétele:

$$\cos(\Phi) = 0 \Rightarrow \Phi = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in Z. \tag{35}$$

Ebből a következő adódik:

$$\Phi = \frac{4\pi\, x_0}{\lambda}\cos(\omega_r t + \varphi_r) - \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}. \tag{36}$$

Vegyük a $\varphi_r = 0$ és $\varphi = 0$ esetet, és vizsgáljuk meg hány nullahelye van a heterodin jelnek a rezgés egy félperiódusa alatt, azaz $\omega_r t \in [0; \pi]$ intervallumon? A 4. ábra mutatja a π-vel normált fázist az idő függvényében; azt keressük, ez a görbe hol veszi fel a (36)-ban meghatározott értékeket (ld. vízszintes rácsozat).



4. ábra. A fenti görbe a π-vel normált fázist mutatja az idő függvényében. A vízszintes rácsozat a 0,5 1,5; 2,5; 3,5 stb. értékeket mutatják, azt ahol a heterodin jel értéke zérus lesz.

Az ábra vízszintes rácsozata és a görbe metszéspontjai határozzák meg a heterodin jel nullátmeneteinek időpontjait. Egy fél periódus alatt a (36) függvény $\pm\ 4\pi x_0/\lambda$ közötti értékeket vehet föl, a nullahelyek száma tehát:

$$N = 2 \cdot Round\left(\frac{4x_0}{\lambda}\right), \tag{37}$$

ahol Round(E) az „E” értékének matematikai szabályok szerinti kerekítése. Hogyha a $\varphi_r \neq 0$ vagy $\varphi \neq 0$, akkor ezek és x_0 pontos értékétől függően a nullhelyek értéke eltérhet a képlettől $\pm$ 2-vel. Általános esetben tehát, ha a kezdőfázisok ismeretlenek:

$$\boxed{N = 2 \cdot Round\left(\frac{4x_0}{\lambda}\right) \pm 2}. \tag{38}$$

A fázisok hatásának megértéséhez a nullhelyeket meghatározó (36) képletet átrendezzük:

$$\frac{4\pi\, x_0}{\lambda}\cos(\omega_r t + \varphi_r) = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \varphi\ . \tag{39}$$

Ez alapján úgy lehet képzelni, mintha φ a 4. ábrán szereplő rácsozatot függőlegesen, φ_r pedig az egész görbét vízszintesen tologatná. A kísérlet során a harmonikus rezgést egy hangfrekvenciás elektromos generátorral hozzuk létre és a nullahelyeket ezen gerjesztő jel félperiódusa alatt számoljuk meg, azonban a valódi rezgés ehhez képest φ_r fázissal el van tolódva, ami az elektromos (kábelhossz, eszközök frekvencia átvitele) és a mechanikai fáziseltolódás összege. A mechanikai fázistolás a teljes heterodin jel időfüggő eltolódását okozza, az elektronikai rendszer fázistolása pedig a gerjesztő feszültséghez képest tolja el a rezgő tükör sebesség-idő függvényét. A φ az optikai elemek fázistolásának, és mechanikai pozíciójának eredménye (hatására a heterodin jel kezdőfázisa változik meg a sebesség-időfüggvényhez képest), így az optikai elemek nagyon kicsi elmozdulásaira is igen nagyot változik: a rendszer a mechanikai rezgésekre igen érzékeny lesz.

A mérést az 1. ábra szerinti interferométerrel végezzük el, amelyben természetesen csak akkor kapunk eredményt, ha x_0 elég nagy. Amennyiben $x_0 < \lambda/8$, akkor nullahelyek nem lépnek fel, így ez az eljárás nem alkalmazható. (Ekkor csak a heterodin jel spektrális vizsgálata adhat információt az amplitudóról.) Ezért a heterodin jel nullátmeneteinek számlálásával az alkalmazott lézerfény hullámhosszánál ($\lambda_{He\text{-}Ne}$ = 633 nm) nagyobb amplitúdójú rezgéseket lehet csupán vizsgálni. Ha a nullátmenetek között eltelt idők reciprokát képezzük, akkor ezek úgy tekinthetők, mint a t_i és t_{i+1} időpontok közötti pillanatnyi frekvencia, így ezen időközök ($\Delta\tau_i = t_{i+1} - t_i$) mérésével a pillanatnyi sebesség abszolút értéke is meghatározható az alábbi összefüggés alapján (de az előjele nem):

$$\frac{1}{2\Delta\tau_i} = |f_i| \approx \frac{2|v|}{\lambda} \quad . \tag{40}$$

Mérési feladatok

1. feladat

Egy kis hangszóró membránjára erősített sík üveglap mozgását vizsgáljuk. Szinuszos jellel meghajtva a hangszórót határozzuk meg a lapka sebességét az idő függvényében. Az 1. ábra szerinti interferométer elrendezést használjuk, ahol a tükör #2 szerepét a sík üveglap játssza. A hangszórót úgy kell beállítani, hogy a ráragasztott sík üveglap merőleges legyen a megvilágító lézernyaláb irányára. A hangszórót meghajtó generátor jele amplitúdóban és frekvenciában változtatható, így különböző meghajtási körülmények mellett vizsgálható a mozgás. A membránon levő üveglap sebességét a detektor kimenetén levő frekvencia modulált jel pillanatnyi frekvenciájából határozzuk meg. Ezt egy adott időpillanat utáni, a jel két egymást követő nullátmenete közötti idő mérésére vezetjük vissza. A mérés oszcilloszkóppal hajtjuk végre. A jelet a hangfrekvenciás generátorról triggereljük, kimerevítjük és a markerek segítségével megmérjük egy periódus alatt a nullhelyek időbeli távolságát. A (40) egyenlőségből f(t), és $\lambda = 632{,}8\ \mathrm{nm}$ ismeretében a pillanatnyi sebesség v(t) is kiszámítható.

A mérés menete:

- Kapcsoljuk be a lézer tápegységet, az oszcilloszkópot, a jelgenerátort, és a detektort!
- A jelgenerátort állítsuk harmonikus jelalakra, frekvenciáját állítsuk be 100 Hz-re a FREQUENCY gombbal. A triggereléshez a jelet osszuk meg egy T dugóval és ezt csatlakoztassuk az oszcilloszkóp 1-es bemenetére. A másik BNC kábelt kössük a hangszóró bemenetére. Amplitúdóját az AMPLITUDE. gombbal állítsuk 30mV peak to peak értékre.
- A hangszórót és tükör #1-et úgy állítsuk be, hogy a visszavert fénynyalábok a távoltérben (azaz a falon), és a detektoron is fedjék egymást (1. ábra). Így biztosítjuk az irányok párhuzamosságát és az azonos térbeli pozíciót. Ügyeljünk rá, hogy a lézerbe ne lőjünk vissza, mert a rezonátor veszteségeinek elhangolásával a kimenő teljesítmény zajos lesz.
- A detektor kimeneti jelét bevezetjük az oszcilloszkóp 2 csatornájára. Az oszcilloszkópon megjelenő jelet figyelve a tükör #1, a detektor és a hangszórótartó finombeállító csavarjaival maximalizáljuk a detektorjelet. Ez legalább 1 V csúcsérték legyen.

- Merevítsük ki a jelet a run/stop gombbal és határozzuk meg a szomszédos nullahelyek távolságát a rezgés egy periódusa alatt (cursors funkció), és ezeket használjuk a pillanatnyi frekvencia és a sebesség időfüggésénbek meghatározására.
- A nulla sebességű időkhöz rendeljünk extrapolációval a nulla sebességet! A mérésből a sebesség előjele nem határozható meg, csak annak abszolút értéke.

2. feladat

Mérjük meg a hangszóró membránjának amplitúdóját a frekvencia függvényében 100 Hz és 2000 Hz között, az előző feladatban beállított amplitúdót használva:

- 100 és 200 Hz között 20 Hz-ként,
- 200 és 500 Hz között 50 Hz-ként,
- 500 és 2000 Hz között 100 Hz-ként.

A detektor jelében a nullátmenetek száma alapján meghatározható egy rezgő rendszer amplitúdója. Ábrázoljuk a membrán amplitúdóját a frekvencia függvényében! Használjuk ismét az oszcilloszkóp run/stop és cursors funkcióját, ha szükséges! Milyen jellegzetességet mutat a kapott görbe?

3. feladat

Határozzuk meg egy lassú, egyenletesen mozgó tükör sebességét. A mozgási sebesség itt már olyan kicsi, hogy a heterodin frekvencia a hangfrekvenciás tartományba esik. Erről meg is lehet győződni, ha a detektor kimenetét a hangszóróra csatlakoztatjuk, így az úgynevezett Doppler-fütty hallhatóvá tehető. A tükör lassú, egyenletes mozgását egy motorral meghajtott lineáris mozgatóval hozzuk létre. A motor táplálásával különböző sebességeket lehet beállítani, és ennek megfelelően más-más heterodin frekvencia áll elő. Mivel a mozgás „egyenletes”, ezért a heterodin jel frekvenciája állandó, a mozgás folyamán nem változik. Ezért itt nem pillanatnyi frekvenciát kell meghatározni, hanem egy meghatározott frekvenciát, melynek mérését oszcilloszkóppal végezzük amiből kiszámolható a sebesség.

A mérés menete:

- Helyezzük be a lineáris mozgatót a hangszórót tartó mechanika helyére úgy, hogy a beeső és a tükörről visszaverődő nyaláb párhuzamos legyen! Ezt a tükörtartón levő állító mechanikával lehet elérni. A tükörmozgató síneket tegyük minél közelebb az osztótükörhoz, hogy az úthosszkülönbséget minimalizájuk.
- Kapcsoljuk be a motor tápegységét, és addig növeljük a feszültséget, amíg a motor egyenletesen nem forog. A motor feszültsége ne legyen nagyobb 3V-nál! Véghelyzethez közeledve változtassuk meg a polaritást és ezzel a sebesség irányát.
- A detektor kimenetét az oszcilloszkóp 1 bemenetére csatlakoztatva a tükörállítókkal maximalizáljuk a jelet.
- Mérjük meg az oszcilloszkóppal a heterodin jel frekvenciáját! A mérési eredményt 10 frekvencia értékéből átlagolja (mivel a sebesség kissé ingadozik).
- Ismételjük meg a mérést három másik motor meghajtásnál, azaz másik feszültségnél is! Minden motor feszültség esetén határozza meg a sebességet a vonalzó és óra segítségével.
- A detektor kimenetét csatlakoztassa a hangszóróra és állítson elő Doppler-füttyöt!
- Számítsa ki a két sebességértéket a (26) egyenlet segítségével!

Függelék – a Doppler effektus relativisztikus tárgyalása

Az elektromágneses sugárzás esetén is tapasztalható a doppler effektus, ami azt jelenti, hogy ha a forrás és a megfigyelő egymáshoz képest mozog, akkor az érzékelt frekvencia eltér a kibocsátott sugárzás frekvenciájától. Tekintsük K és K' koordináta rendszereket, amelyek „x" tengelyük irányában egymáshoz képest v sebességgel mozognak; y és z tengely iránya egyezzen meg, valamint t = t '= 0 időpillanatban origójuk essen egybe. Ezen feltételek érvényessége mellett a két rendszer közti koordináta-transzformáció a következő alakú:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases},$$

ahol

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

és „c" a fénysebesség, „v" a két koordináta rendszer közti sebesség. Haladjon az „x" tengely mentén egy fénynyaláb. Ennek körfrekvenciája és hullámszáma a K rendszerben ω és k, a K' rendszerben ω' és k'. A fázis egy invariáns skalár, mindkét rendszerből nézve állandó:

$$\varphi = \omega t - kx = \omega' t' - k' x'.$$

Ez egy x^+ irányba haladó elektromágneses hullám fázisa. Az egyenlet jobb oldalába behelyettesítve a koordináta-transzformációt, a következőt kapjuk:

$$\varphi = \omega' \gamma \cdot t + k' \gamma v \cdot t - k' \gamma \cdot x - \omega' \gamma \frac{v}{c^2} \cdot x.$$

A körfrekvencia definíció szerint a fázis idő szerinti parciális deriváltja így:

$$\omega \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega' \gamma + k' \gamma v.$$

Felhasználva, hogy

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda'} \text{ és } \omega' = 2\pi f',$$

a frekvenciákra a következő összefüggés teljesül:

$$f = \gamma \cdot f' + \gamma \cdot \frac{v}{\lambda'}.$$

Mivel azonban a relatív sebesség igen kicsi $\left(\dfrac{v}{c} << 1\right)$ ezért $\gamma \cong 1$ és így jó közelítéssel:

$$f = f' + \frac{v}{\lambda}.$$

A képletből leolvasható, hogy távolodó forrás és megfigyelő esetén a frekvencia csökken közeledő forrás és megfigyelő esetén a frekvencia nő.