

## Capítulo 2

# Fundamentos

**Autor: Walter Gustavo Fano**

### Biografía



Se recibió de ingeniero electrónico y de Dr. Ing. ambos en la Universidad de Buenos Aires, Argentina. Actualmente es profesor e investigador y dirige el Laboratorio de Radiación Electromagnética de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires. Fué profesor de la UNPSJB, del ITBA y de la EST. Escribió tres libros, y siete capítulos de libros, y publicó numerosos trabajos en revistas y conferencias técnicas. Es senior member de IEEE, fué fundador y presidente del capítulo conjunto de EMC, Antenna and Propagation de IEEE de Argentina, vicepresidente del capítulo de Broadcasting Technology de IEEE Argentina. Coordinador de la región 9 de IEEE EMC. Chair de IEEE GEMCCOM 2016, presidente del congreso IEEE AP EMC 2013, y chair of Advances in Antenna Test and Measurement IEEE 2011 y organizó numerosas conferencias. Dirigió proyectos de investigación en temas de propagación electromagnética de VLF, y actualmente dirige el proyecto: *Interacción de ondas electromagnéticas con distintos suelos, para estudiar sus propiedades eléctricas y la exploración por debajo de la superficie.*

## Resumen

Es importante aclarar que el lector tendría que haber tomado un curso de electromagnetismo para ingeniería eléctrica, ingeniería electrónica, o ciencias, que le permita tener conocimientos básicos de la teoría electromagnética que se van a usar en este texto. En este capítulo se revisan las leyes de electricidad y magnetismo originalmente expresadas en forma integral, se comienza con la ley de Coulomb donde las cargas se consideran discretas desde el punto de vista macroscópico. Continuando con electrostática se expresa la ley de Gauss. Luego para el caso de Magnetoestática se trata la ley de Biot-Savart, la ley de Ampère, a continuación la ley de Faraday, y finalmente las ecuaciones de Maxwell que son las ecuaciones de la teoría electromagnética. Los conceptos de capacidad, inductancia, resistencia se tratan con ejemplos útiles empleados en la práctica, como los capacitores e inductores con pérdidas, con su modelo eléctrico equivalente. Las propiedades de los medios como la permitividad eléctrica, y permeabilidad magnética, son fundamentales para poder estudiar y mitigar los distintos efectos como el acoplamiento eléctrico y magnético y otros problemas de la compatibilidad electromagnética. Se enuncia en este capítulo la teoría electromagnética, con especial énfasis en los materiales que se emplean en los temas de compatibilidad electromagnética a tratar en los siguientes capítulos.

## 2.1. Fundamentos de electromagnetismo

En este capítulo se tratarán los tópicos fundamentales de electromagnetismo que son necesarios para poder entender los distintos fenómenos que ocurren en la compatibilidad electromagnética.

Los conceptos básicos de electromagnetismo en resumen son las principales leyes de electricidad y magnetismo, como la ley de Coulomb, la ley de Gauss, la ley de Biot-Savart, la ley de Ampère, la ley de Faraday, y las Ecuaciones de Maxwell. Los conceptos de capacidad, inductancia, resistencia y las propiedades de los medios como la permitividad eléctrica, y permeabilidad magnética, son fundamentales para poder estudiar y mitigar los distintos efectos como el acoplamiento eléctrico y magnético entre líneas de transmisión. Se enunciarán en este capítulo las leyes y principios, y no se tratan las demostraciones pues estos temas se encuentran tratados ampliamente en la bibliografía de Electromagnetismo e Ingeniería Electromagnética, donde el lector puede encontrar todos los conceptos de electromagnetismo básicos que permiten comprender la problemática de compatibilidad electromagnética. Los conceptos de electromagnetismo básicos, son los que aparecen recurrentemente en el tema que se abordarán en el libro. En el Apéndice A.1 del libro se encuentran las constantes físicas más empleadas.

En electromagnetismo se considera la siguiente clasificación:

- Electroestática: los campos no varían con el tiempo.

Por ejemplo: un generador de corriente continua, y un circuito conectados a una batería.

- Electrodinámica: los campos varían con el tiempo

Por ejemplo: un generador de corriente alterna, y un circuito conectado a un generador de corriente alterna.

## 2.2. Ley de Coulomb

En el año 1771 Cavendish comenzó sus experimentos en electroestática, y luego Coulomb en 1785 publicó su trabajo, y de esa manera marcó el comienzo de la investigación de electricidad y magnetismo [26]. La ley de atracción eléctrica que es inversa con el cuadrado de la distancia que separa las cargas, es conocida como la ley de Coulomb [26]. Luego Maxwell, Plimpton y Lawton repitieron las experiencias.

La ley de Coulomb, expresa la fuerza que existe entre dos pequeños cuerpos cargados separados, entonces la fuerza que aparece varía con la magnitud de cada carga eléctrica  $q_1$  y  $q_2$ , y es inversamente proporcional a la distancia que las separa, y está dirigida a lo largo de una línea que une las cargas y además la fuerza es atractiva si los cuerpos tienen cargas opuestas, y repulsiva si tienen el mismo tipo de cargas. Si se consideran cargas puntuales en las posiciones  $\vec{r}'$  y  $\vec{r}$ , que se encuentra a una determinada distancia  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ :

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2 (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.1)$$

En el Sistema Internacional de unidades (SI), la constante de proporcionalidad es:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.2)$$

donde  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F/m$  es la permitividad eléctrica de vacío

En el Sistema Internacional de unidades la carga se expresa en Coulomb  $[C]$ , la distancia en  $[m]$ , y el campo eléctrico en  $[V/m]$ . Es importante destacar que la ley de Coulomb responde a la ley inversa con el cuadrado de la distancia, que es análoga a la ley de gravitación universal de Newton también inversa con el cuadrado de la distancia.

## 2.3. Campo eléctrico

Se puede definir el campo eléctrico  $\vec{E}$  como la fuerza por unidad de carga eléctrica en un punto dado  $P$ , considerando a  $q_2$  como una carga de prueba

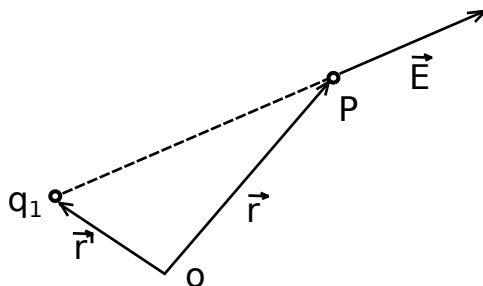


Figura 2.1: Campo eléctrico producido por una carga de prueba en el punto P

puntual, el campo eléctrico se expresa como:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} \quad (2.3)$$

La razón de que la carga de prueba se considera lo mas pequeña posible es para que su presencia no afecte a las líneas de campo eléctrico, y siendo las cargas discretas y macroscópicas no es posible aplicar el límite matemático en la definición del campo eléctrico.

Reemplazando  $\vec{F}$  de la ecuación (2.1) se obtiene el campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{q_1(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.4)$$

Experimentalmente se verifica que hay una superposición lineal de fuerzas debido a varias cargas eléctricas, y significa que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} \quad (2.5)$$

Si las cargas son muy pequeñas y numerosas pueden ser descritas como una densidad de carga  $\rho(\vec{r}')$  en el punto  $\vec{r}'$ :

$$\Delta q = \rho(x')\Delta x\Delta y\Delta z \quad (2.6)$$

Por eso la expresión (2.5) se puede escribir mediante una integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(r') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (2.7)$$

donde la distribución de cargas se considera con las variables primadas, y el resto del espacio con las variables sin prima.

## 2.4. Ley de Gauss

Habitualmente la manera de calcular el campo eléctrico es mediante la ley de Gauss.

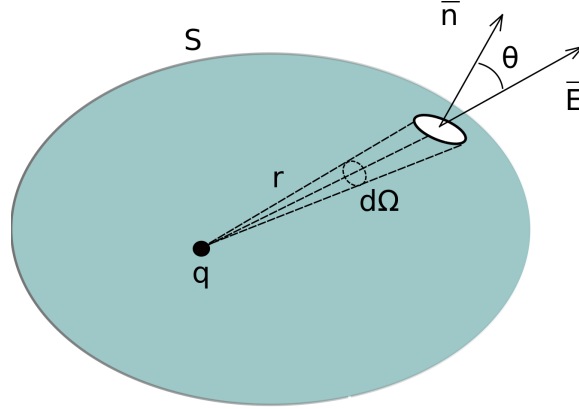


Figura 2.2: Superficie cerrada que contiene a una carga  $q$

Considere una carga eléctrica puntual en una superficie cerrada  $S$  y la distancia  $r$  entre la carga y un punto de la superficie como se ve en la Figura 2.2. El vector  $\hat{n}$  es el vector normal a la superficie en el punto y  $da$  es un elemento de superficie. A partir de la ec.(2.7) se obtiene:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} da \quad (2.8)$$

Considerando que  $\cos\theta da = r^2 d\Omega$ , donde  $d\Omega$  es el elemento de ángulo sólido, se obtiene:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (2.9)$$

Integrando ambos miembros la ecuación anterior se obtiene:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.10)$$

Este es el resultado de la ley de Gauss para una carga eléctrica puntual, y si se tienen cargas eléctricas discretas:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (2.11)$$

Para una densidad de cargas continuas la ley de Gauss se expresa como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(r) dV \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) es una de las ecuaciones básicas de electrostática. Aplicando el teorema de la divergencia se llega fácilmente a la expresión de la ley de Gauss en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.13)$$

El campo eléctrico no está completamente definido solo por su divergencia, sino que debe especificarse el rotor también en cualquier parte del espacio.

Reescribiendo la (2.7)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(r') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (2.14)$$

como:

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.15)$$

Se tiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \rho(r') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (2.16)$$

Aplicando el rotor a la expresión anterior:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (2.17)$$

Porque el rotor de un gradiente de una función es cero.

De (2.16), se puede definir la función potencial escalar eléctrico  $\phi$  como:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.18)$$

La función del potencial escalar eléctrico es función de la densidad de carga eléctrica. A partir de las expresiones (2.16) y (2.18) se ve que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (2.19)$$

La interpretación física del potencial escalar eléctrico se puede ver a partir de la fuerza eléctrica sobre una carga "q":

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.20)$$

El trabajo realizado en mover la carga desde a a b como se ilustra en la Figura 2.3, se calcula como:

$$W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.21)$$

El signo menos se debe a que se está calculando el trabajo en contra de la acción del campo eléctrico, reemplazando la expresión (2.18):

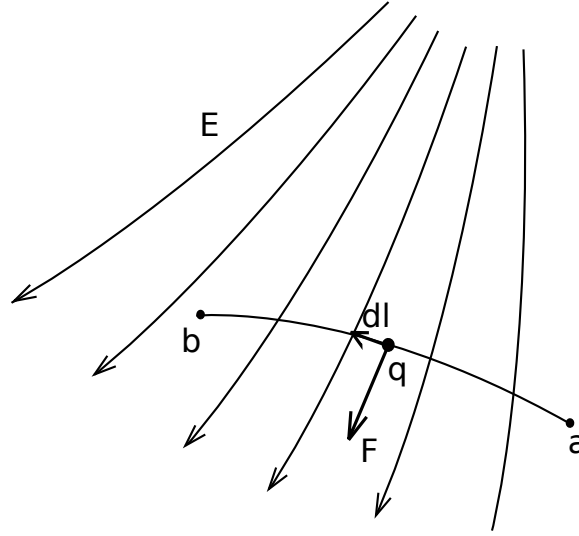


Figura 2.3: Carga eléctrica que se lleva desde el punto a hasta el punto b donde existe un campo eléctrico

$$W = q \int_a^b \nabla \phi \cdot d\vec{l} = q \int_a^b d\phi = q(\phi_B - \phi_A) \quad (2.22)$$

Lo cual muestra que  $q\phi$  puede ser interpretado como energía potencial de una carga de prueba en un campo electrostático.

Las integrales de línea no dependerán del camino. Habitualmente el potencial eléctrico en ingeniería se le denomina  $V$ , por lo tanto:

$$W = q(\phi_B - \phi_A) = qV_{ab} \quad (2.23)$$

El potencial eléctrico se mide en Volts [ $V$ ] y es el trabajo por unidad de carga eléctrica.

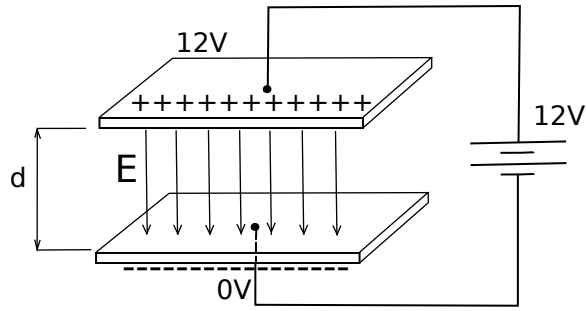
## 2.5. Capacidad

Considerando un capacitor de placas planas paralelas que se puede observar en la Figura 2.4, la Capacidad se define como la carga acumulada en un capacitor dividido la diferencia de potencial entre los bornes:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_s \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s}}{V} \quad (2.24)$$

### Ejemplo de Capacitor de aire

La carga total  $Q$  se puede calcular a partir de la densidad de carga superficial  $\rho$  en cada placa  $s$  puede calcular como:



Area entre placas  $A=1\text{cm}^2$   
 Separacion entre placas  $d=.1\text{cm}$

Figura 2.4: Capacitor de placas planas paralelas

$$Q = \rho_{su} \text{Area} \quad (2.25)$$

La densidad superficial de cargas se calcula a partir de la diferencia de potencial  $V$ , la separación  $d$  y la permitividad dieléctrica del material entre las placas, se obtiene  $\rho_{su}$  [27]:

$$\rho_{su} = \frac{\epsilon V}{d} \quad (2.26)$$

La Capacidad se calcula entonces como:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_{su} \text{Area}}{V} = \frac{\frac{\epsilon V}{d} \text{Area}}{V} \quad (2.27)$$

Resulta:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon A}{d} \quad (2.28)$$

Reemplazando los valores del ejemplo de la Figura 2.4, se obtiene la Capacidad del capacitor:

$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} (F/m) 10^{-4} m^2}{10^{-2} m} \cong 0,09 pF \quad (2.29)$$

En las Figuras 2.5 se puede observar un capacitor real de varias capas de dieléctrico de plástico. En la Figura 2.6 se ilustra un capacitor multicapa con dieléctrico de papel.

### 2.5.1. Ejemplo Campo eléctrico en un conductor cargado

Calcular el campo eléctrico en un conductor cargado, cuya densidad eléctrica de carga es  $\rho_L$



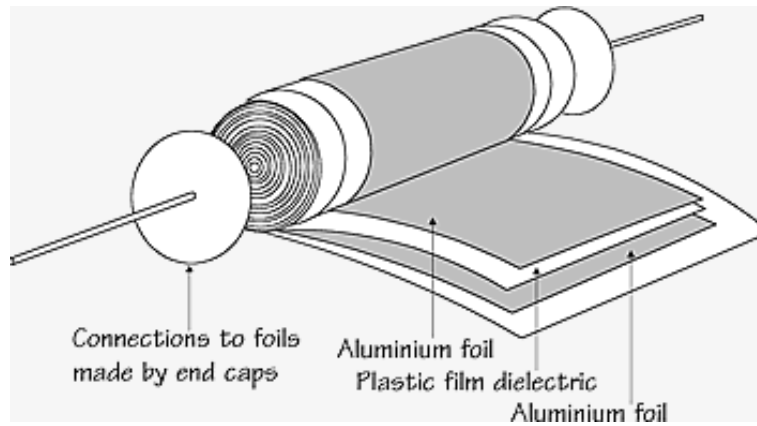


Figura 2.5: Imagen de un capacitor real con dieléctrico de plástico. Referencia: <https://www.matrixtsl.com>

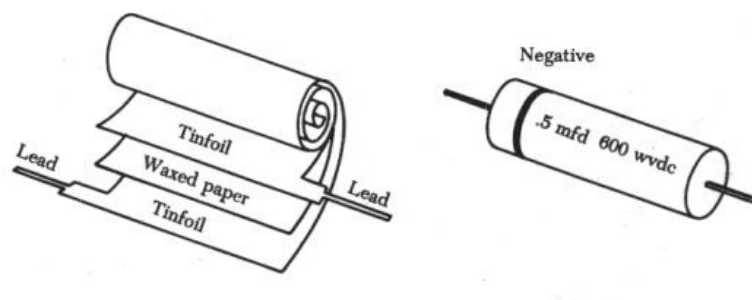


Figura 2.6: Imagen de un capacitor real con dieléctrico de papel. Referencia: <http://avstop.com/ac/apgeneral>

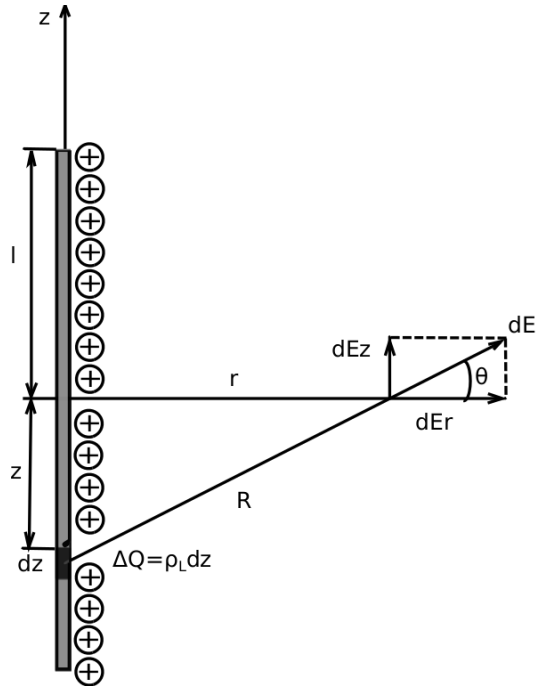


Figura 2.7: Campo eléctrico en un conductor cilíndrico de longitud  $2l$

Se debe calcular primero el campo eléctrico radial de un conductor cilíndrico que posee una carga positiva como se ilustra en la Figura 2.7. La densidad de carga lineal se puede calcular como el cociente entre la carga  $Q$  dividida la longitud  $2l$ :

$$\rho_L = \frac{Q}{2l} \quad (2.30)$$

El campo eléctrico se puede calcular de la ec. 2.4:

$$\Delta E_r = \frac{\Delta Q \cos \theta}{4\pi\epsilon R^2} = \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon(r^2 + z^2)} \cos \theta = \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon(r^2 + z^2)} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \quad (2.31)$$

Resulta:

$$E_r = \int_{-l}^{+l} \frac{\rho_L r dz}{4\pi\epsilon(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L l}{2\pi\epsilon r(r^2 + l^2)^{1/2}} \quad (2.32)$$

Como el conductor es muy extenso, idealmente  $\infty$ , haciendo  $l \rightarrow \infty$ :

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon r} \quad (2.33)$$

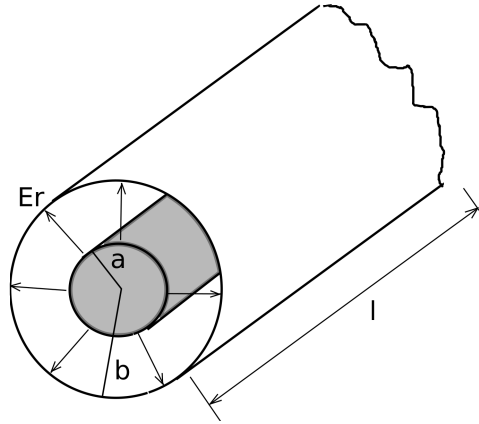


Figura 2.8: Línea de transmisión coaxil

### 2.5.2. Ejemplo Capacidad de un coaxil

Calcular la capacidad de una línea de transmisión coaxil de radios interno  $a$  y radio externo  $b$ .

Una línea de transmisión coaxil consiste en dos conductores cilíndricos concéntricos de radios  $a$  y  $b$  como se ilustra en la Figura 2.8. En la práctica se aplica una diferencia de potencial  $V_a - V_b$  entre el conductor interior y exterior, como resultado fluye una corriente sobre el conductor central y en el exterior en sentidos contrarios. Por lo tanto existirá una carga  $\rho_L$  [C/m] en el conductor central y una densidad de carga igual y opuesta en el conductor externo. Esta carga se distribuirá por igual en el exterior del conductor interno y en el interior del conductor externo de ,manera que:

$$\epsilon E_r = \rho_s \quad (2.34)$$

donde  $E_r$  es el campo radial como se observa en la Figura 2.8, y  $\rho_s$  es la carga superficial.

Para deducir la capacidad de la línea de transmisión coaxil se observa en la Figura 2.8 que son superficies equipotenciales, y la diferencia de potencial entre dos puntos  $a$  y  $b$ , donde el signo negativo se define para que una carga positiva llevada en contra del campo haya que entregar un trabajo positivo [28]:

$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.35)$$

Por lo tanto:

$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{\rho_L dr}{2\pi\epsilon r} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \quad (2.36)$$

Por lo tanto para el caso de la línea coaxil, la diferencia de potencial entre los dos conductores será:

$$V_a - V_b = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \quad (2.37)$$

Si tomamos  $\rho_L$  para representar la carga por unidad de longitud  $l$ , en cada una de las superficies cilíndricas de la línea de transmisión coaxil, la capacidad se obtiene de la ec. (2.28):

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\rho_L l}{V_a - V_b} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.38)$$

Resulta la capacidad por unidad de longitud como una función de la permitividad eléctrica del material y de la relación entre radios del conductor [28]:

$$\frac{C}{l} = \epsilon_r \frac{55,6}{\ln \frac{b}{a}} [pF/m] \quad (2.39)$$

### 2.5.3. Ejemplo: Potencial y capacidad en una línea de transmisión de dos conductores paralelos

Una línea de transmisión de dos conductores, al conectarse a un generador hace circular una corriente en un sentido en un conductor y en sentido inverso en el otro conductor. El problema reside en encontrar la distribución de potencial y campo eléctrico que posee una carga superficial. La distribución de carga en cada cilindro no será uniforme como se ilustra en la Figura 2.9.

Cada cilindro se puede representar por una carga lineal  $\rho_L$  y  $-\rho_L$  y hay que calcular el potencial eléctrico, a partir de allí el campo eléctrico y luego la capacidad de la línea bifilar. La diferencia de potencial se ha calculado en el caso de la línea coaxil en la ec. (2.37).

$$V_{OP}^+ = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{s}{r_2} \quad (2.40)$$

$$V_{OP}^- = \frac{-\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{s}{r_1} \quad (2.41)$$

Aplicando superposición, se suman los potenciales, por lo tanto la diferencia de potencial entre  $O$  y  $P$  resulta

$$V_{OP} = V_{OP}^+ + V_{OP}^- = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{s}{r_2} - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{s}{r_1} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left[ \ln \frac{s}{r_2} - \ln \frac{s}{r_1} \right] = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (2.42)$$

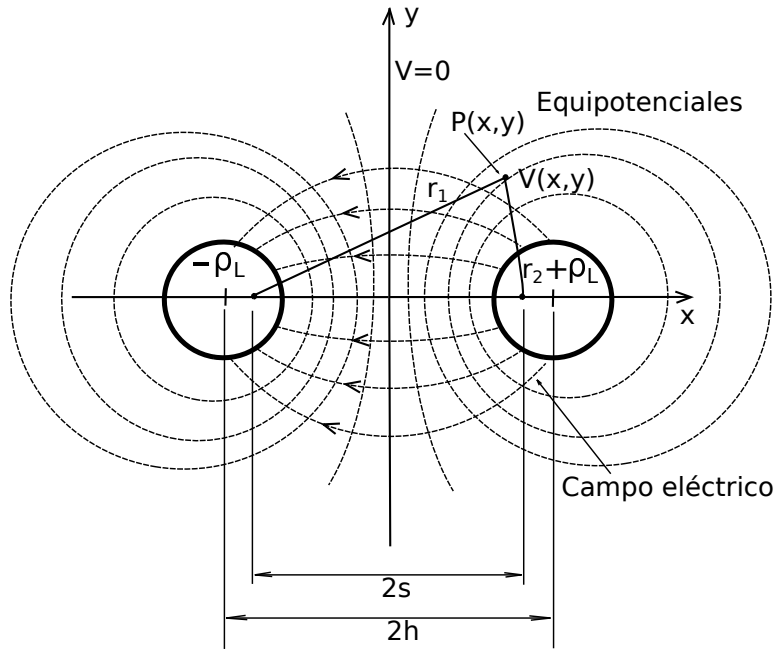


Figura 2.9: Distribución de potencial y campo eléctrico de una línea de transmisión de dos conductores con densidades de carga lineales  $\rho_L$  y  $-\rho_L$ , los cilindros de radio  $a$ , y separados por  $2h$ .

De esta expresión se ve que  $V_{OP} = 0$  a lo largo del eje  $y$  y debido a que  $r_1/r_2 = 1$ , las líneas equipotenciales se pueden observar en la Figura 2.9. Las curvas equipotenciales se obtienen haciendo:

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{constante} = k \quad (2.43)$$

Expresando  $r_1$  y  $r_2$  en función de  $x$  e  $y$ :

$$r_1 = [(s+x)^2 + y^2]^{1/2} \quad (2.44)$$

$$r_2 = [(s-x)^2 + y^2]^{1/2} \quad (2.45)$$

Por lo tanto:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{[(s+x)^2 + y^2]^{1/2}}{[(s-x)^2 + y^2]^{1/2}} = k \quad (2.46)$$

Operando:

$$[(s+x)^2 + y^2] = k^2[(s-x)^2 + y^2] \quad (2.47)$$

Agrupando términos:

$$x^2 - 2sx \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} + y^2 + s^2 + y^2 = 0 \quad (2.48)$$

Sumando ambos miembros  $s^2 \left[ \frac{(k^2+1)}{(k^2-1)} \right]^2$  resulta:

$$\left( x - s \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{2ks}{k^2 - 1} \right)^2 \quad (2.49)$$

Es la ecuación de una circunferencia, que se representa en la Figura 2.9:

$$(x - h)^2 + y^2 = a^2 \quad (2.50)$$

donde los radios son:  $a = \frac{2ks}{k^2-1}$ , y los centros son:  $h = s \frac{k^2+1}{k^2-1}$

La diferencia de potencial entre dos conductores será el doble que la de la ec. (2.42):

$$V_{PP'} = \frac{\rho_L}{\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (2.51)$$

De las ecs. de los radios y centros, se elimina  $s$ , queda:

$$a = \frac{2ks}{k^2-1}, \text{ y los centros son: } h = s \frac{k^2+1}{k^2-1}$$

$$a = \frac{2ks}{k^2-1} \frac{h(k^2-1)}{k^2+1} = \frac{2kh}{k^2+1} \quad (2.52)$$

$$ak^2 - 2kh + a = 0 \quad (2.53)$$

De aquí se obtiene:

$$k = \frac{h}{a} \pm \sqrt{\left( \frac{h}{a} \right)^2 - 1} \quad (2.54)$$

Por lo tanto la tensión entre los dos conductores:

$$V_{PP'} = \frac{\rho_L}{\pi\epsilon} \ln \left[ \frac{h}{a} \pm \sqrt{\left( \frac{h}{a} \right)^2 - 1} \right] \quad (2.55)$$

La capacidad por unidad de longitud  $l$  entre conductores será:

$$\frac{C}{l} = \frac{\rho_L}{V_{PP'}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \left[ \frac{h}{a} + \sqrt{\left( \frac{h}{a} \right)^2 - 1} \right]} \quad (2.56)$$

En la práctica las líneas de transmisión tienen una relación  $h/a \ll 1$ :

$$\frac{C}{l} \cong \frac{27,8\epsilon_r}{\ln \frac{2h}{a}} \quad [pF/m] \quad (2.57)$$

Nótese que en la línea de transmisión coaxial se llega a un resultado mucho más rápido porque se aplicó la ley de Gauss aprovechando la simetría del problema [28].

## 2.6. Fuerza magnética

Considere una carga eléctrica  $q$  que tiene una velocidad  $\vec{v}$ , bajo la acción de un campo magnético que posee una densidad de flujo magnético  $\vec{B}$ , la fuerza de Lorentz es la fuerza que aparece sobre la carga eléctrica:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.58)$$

La fuerza que se producirá será perpendicular al plano que contiene a los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , como se puede ver en la Figura 2.10

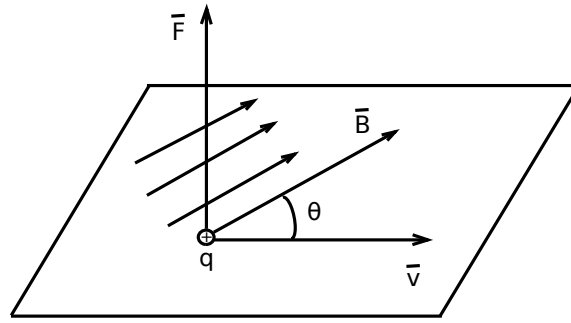


Figura 2.10: Fuerza de Lorentz producida en una carga  $q$  con velocidad  $\vec{v}$

La fuerza magnética es muy diferente a la fuerza eléctrica. La fuerza eléctrica tiene la misma dirección del campo eléctrico, y no depende de la velocidad de la carga. Por otro lado la fuerza magnética depende de la componente perpendicular al campo magnético de la velocidad que será la que contribuya.

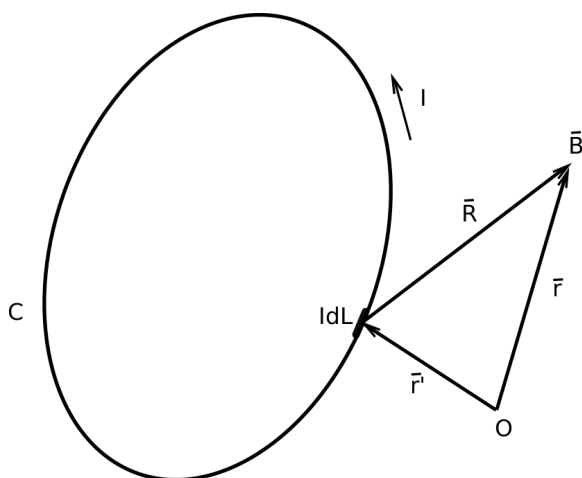
## 2.7. Ley de Biot y Savart

Si se considera un elemento de corriente  $I d\vec{l}$  que es parte de un circuito, donde circula una corriente de intensidad  $I$  por el conductor, como se ilustra en la Figura 2.11. Esta corriente produce un campo magnético  $d\vec{H}$  cuya densidad de flujo magnético es  $d\vec{B}$  [28]:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{l} \times \hat{R}}{R^2} \quad (2.59)$$

donde  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ,  $\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R}$  y  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$  es la permeabilidad magnética del vacío

El campo  $\vec{B}$  obtenido por la ley de Biot y Savart es semejante a la ley de Coulomb en electrostática.

Figura 2.11: Campo generado por un elemento de corriente  $d\vec{l}$ 

## 2.8. Ley de Ampère

La ley de Ampère se obtiene de la ecuación de Maxwell para el caso de campos estáticos  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ , y en la práctica sirve para obtener la distribución de campo magnético en el caso de problemas simétricos. Considere un conductor cilíndrico como se muestra en la Figura 2.12, si se calcula la circulación del vector  $\vec{H}$ , la integral curvilínea del campo magnético en cualquier camino cerrado L, es igual a la corriente que encierra ese camino, esto se conoce como la ley de Ampère. Esta ley también se deriva de la ley de Biot y Savart [27] y se expresa como:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (2.60)$$

Donde el primer término de la ecuación anterior (2.60), se denomina fuerza magnetomotriz (Fmm), análogamente a la fuerza electromotriz. Si el camino recorrido no encierra corriente eléctrica, entonces la integral se iguala a cero.

La densidad de flujo magnético  $\vec{B}$  se relaciona con el campo magnético:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.61)$$

### 2.8.1. Ejemplo: Campo magnético en un conductor

Calcular el campo magnético en un conductor macizo cilíndrico de radio a por el que circula una intensidad de corriente  $I$  en corriente continua.

La densidad de corriente en la sección circular del conductor, estará distribuida en forma uniforme, por lo tanto se obtiene:



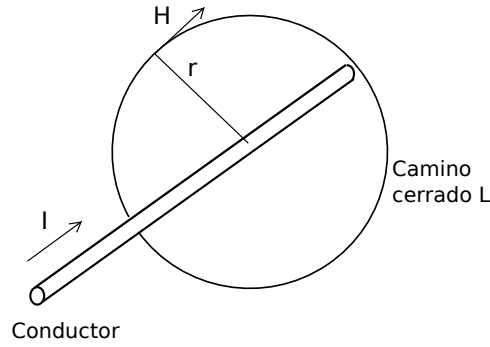


Figura 2.12: Ejemplo de ley de Ampère

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \quad (2.62)$$

Aplicando la ley de Ampère para  $r > a$ :

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (2.63)$$

Como el campo magnético será constante en cada punto del camino, y colineal a  $d\vec{l}$ :

$$H \int_L dl = I \quad (2.64)$$

Por lo tanto:

$$H 2\pi r = I \quad (2.65)$$

Resulta:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad r > a \quad (2.66)$$

Dentro del cilindro  $r < a$ , la ley de Ampère será:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (2.67)$$

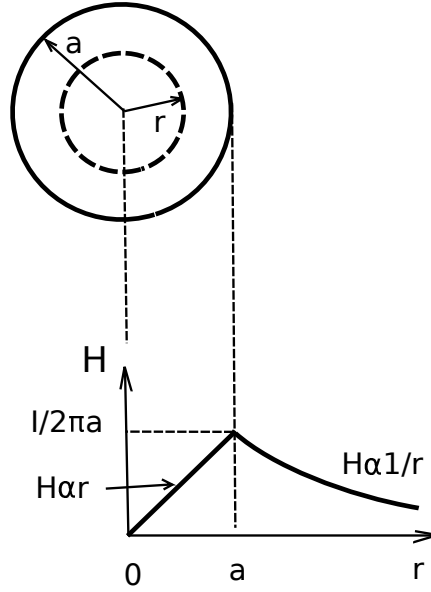
Teniendo en cuenta que los vectores  $\vec{J}$  y  $d\vec{s}$  son colineales:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S J \cdot ds = J \int_S ds = J \pi r^2 \quad (2.68)$$

Resolviendo el primer termino se obtiene:

$$H 2\pi r = J \pi r^2 \quad (2.69)$$

Resulta:

Figura 2.13: Campo magnético en un conductor de radio  $a$ 

$$H = \frac{Jr}{2} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \quad r < a \quad (2.70)$$

Se puede observar en la Figura 2.13 la distribución obtenida del campo magnético en el conductor. La parte interna del conductor cilíndrico el campo magnético posee una variación creciente, desde cero que es proporcional al radio  $r$ . En la parte externa el campo magnético será decreciente al aumento de  $r$ , con una variación inversamente proporcional a  $r$ .

## 2.9. Ley de Faraday

El trabajo de Michael Faraday en 1831, demostró que la variación del campo magnético que enlaza una espira de alambre, induce una fuerza electromotriz (FEM) en dicha espira. La FEM inducida es proporcional a la variación del flujo magnético con el tiempo [28].

Considere la espira que se encuentra en la Figura 2.14 donde se aplica un campo magnético que varía con el tiempo, y el flujo magnético que pasa por la espira variará con el tiempo, entonces se generará una fuerza electromotriz inducida (FEM inducida) en los bornes de la espira:

$$FEM = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2.71)$$

La FEM inducida se calcula como la diferencia de potencial [27]

$$FEM = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.72)$$

Además el flujo magnético se puede calcular como:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.73)$$

Por lo tanto introduciendo las ecuaciones (2.72) y (2.73) en (2.71), la ley de Faraday se puede expresar de la siguiente manera:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.74)$$

Como aplicacion de la ley de Faraday, considere la espira circular conductora que se encuentra en la Figura 2.14, en donde se aplica un campo magnético perpendicular a la misma variable con el tiempo. Por la espira circulará una corriente  $I$ , inducida, y la fuerza electromotriz inducida será la que se mida en los bornes de dicha espira con un voltímetro.

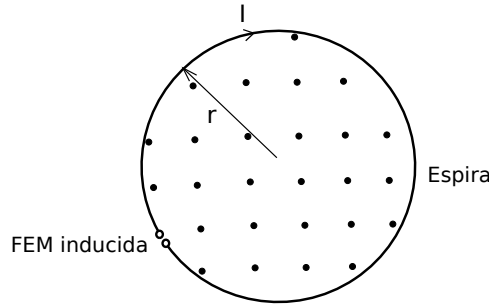


Figura 2.14: Espira de radio  $r$

## 2.10. Inductancia

### 2.10.1. Autoinductancia e inductancia mutua

Se define la inductancia de una espira de núcleo de aire como el flujo magnético producido por esta espira, dividido la corriente que circula por la espira.

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}}{I} \quad (2.75)$$

Si existen dos espiras que interactúan entre sí, se puede definir la Autoinductancia de la espira 1 que será la propia de la espira 1 ( $L_{11}$ ), y la inductancia mutua entre las espiras 1 y 2 ( $L_{12}$ ).

$$L_{11} = \frac{\phi_{11}}{I_1} = \frac{\int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1}{I_1} \quad (2.76)$$

$$L_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_1} = \frac{\int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2}{I_1} \quad (2.77)$$

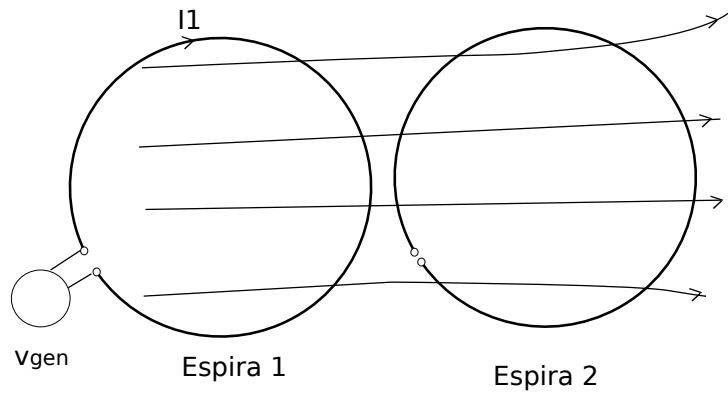


Figura 2.15: Autoinductancia  $L_{11}$  e inductancia mutua  $L_{12}$

En la Figura 2.16 se puede observar la imagen de un inductor toroidal con núcleo de ferrita muy utilizado en la práctica para fuentes de switching de computadoras.



Figura 2.16: Inductor con núcleo magnético de ferrita

### 2.10.2. Ejemplo: Campo magnético en un solenoide

Calcular el campo magnético en un solenoide de  $n$  vueltas por unidad de longitud  $n = \frac{N}{l}$ , para un solenoide muy largo comparado con el diámetro del núcleo como se ilustra en la Figura 2.17. Calcular la autoinductancia. Considere núcleo de permeabilidad  $\mu$

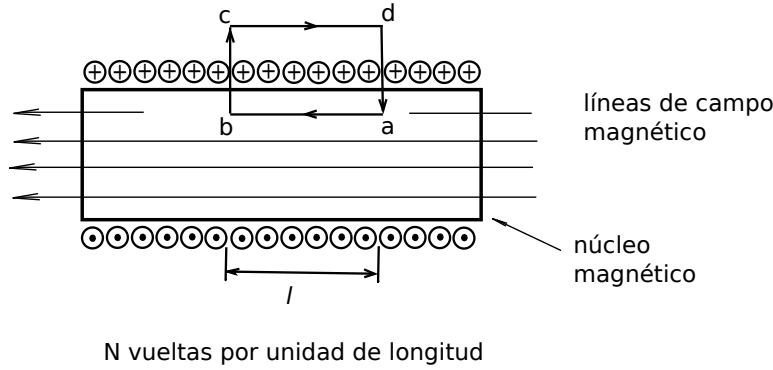


Figura 2.17: Sección de un solenoide de  $N$  vueltas por unidad de longitud y diámetro  $D$

El campo magnético en el interior será paralelo al eje del solenoide, si se cumple que su largo es mucho mayor a su diámetro. El campo magnético en el exterior del solenoide será despreciable, comparado con el campo interior.

Hay que aplicar la ley de Ampère en el camino abcd que se muestra en la Figura 2.17, de la siguiente manera:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (2.78)$$

Considerando el término izquierdo de la integral de la ecuación (2.78) de la ley de Ampère, donde el campo en los segmentos  $bc$  y  $da$  son perpendiculares al campo magnético por lo tanto no contribuyen. Como se dijo anteriormente en la parte exterior del solenoide el campo es prácticamente despreciable, por lo tanto tampoco va a contribuir. El único segmento que contribuye será el  $ab$ .

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl \quad (2.79)$$

Por lo tanto:

$$Hl = NI \quad (2.80)$$

Se obtiene el campo magnético como:

$$H = \frac{NI}{l} \quad (2.81)$$

Este resultado es una muy buena aproximación al caso de un solenoide muy largo. Se observa que el diámetro  $D$  del solenoide no afecta al cálculo, y que  $H$  es constante en cualquier punto de la sección del núcleo del solenoide.

Para calcular la autinductancia hay que calcular el flujo

$$\Phi = N\phi = N \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \cong NBA \quad (2.82)$$

La autoinductancia será:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{NBA}{I} = \frac{N\mu HA}{I} = \frac{N\mu \frac{NI}{l} A}{I} = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad (2.83)$$

donde  $A$  es la sección y  $l$  es la longitud del solenoide

Se puede observar que la inductancia va a ser directamente proporcional con la permeabilidad magnética del núcleo magnético  $\mu$ , que es una propiedad del material que se use, y es dependiente de la geometría, como la sección del núcleo  $A$ , longitud  $l$ , y el número de vueltas de alambre al cuadrado que tiene el arrollamiento. Obsérvese que uno puede aumentar la inductancia mediante aumentar la sección, el número de vueltas y también la permeabilidad, dependiendo de las aplicaciones y las necesidades de estas aplicaciones que se tengan.

### 2.10.3. Ejemplo: Campo magnético en un toroide

Calcular el campo magnético de un toroide que se ilustra en la Figura 2.18, donde circula una corriente  $I$ . Calcular la inductancia del Toroide.

Para obtener el campo magnético se puede aplicar la ley de Ampère. Para  $r < a$  se tiene:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.84)$$

Ya que no hay corriente encerrada en un camino para  $r < a$ . Por lo tanto se obtiene que el campo magnético será nulo  $H = 0$  Para valores del radio dentro del núcleo  $a < r < b$ :

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (2.85)$$

Debido a la simetría, el campo magnético será constante para un valor de radio.

$$H2\pi r = NI \quad (2.86)$$

Por lo tanto

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad a < r < b \quad (2.87)$$

Para el caso de  $r > b$  aplicando la ley de Ampère se obtiene:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.88)$$

Por lo tanto el campo será no nulo solo en el interior del toroide. En resumen:

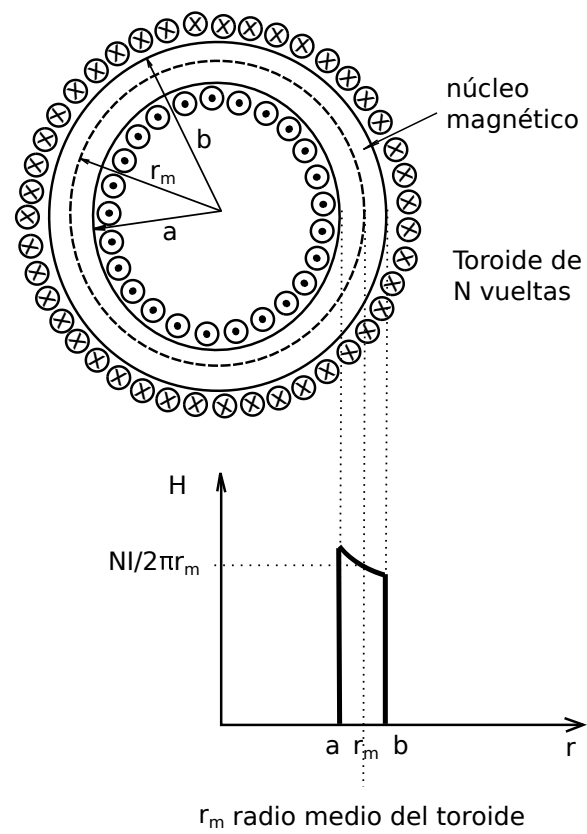


Figura 2.18: Campo magnético  $H$  en función de  $r$  de un toroide de  $N$  vueltas de arrollamiento con núcleo magnético

$$\begin{aligned}
H &= 0 \quad r < a \\
H &= \frac{NI}{2\pi r} \quad a < r < b \\
H &= 0 \quad r > b
\end{aligned} \tag{2.89}$$

La representación gráfica del campo magnético en función de  $r$  se ilustra en la Figura 2.18.

La inductancia se calcula como:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{NBA}{I} = \frac{N\mu HA}{I} = \frac{N\mu \frac{NI}{2\pi r_m} A}{I} = \frac{N^2 \mu A}{2\pi r_m} \tag{2.90}$$

donde  $A$  es la sección y  $r_m$  es el radio medio del toroide

Se ha considerado que el flujo magnético solo existirá en el núcleo del toroide porque el núcleo es cerrado a diferencia del solenoide que es abierto, y en el caso del toroide es de esperar que haya menos pérdidas de flujo magnético que para el solenoide.

Aquí se ha despreciado la variación del campo magnético dentro del núcleo magnético y se ha considerado que el campo magnético tiene un valor fijo para el radio medio del toroide, si esto no es suficientemente preciso, se deja como ejercicio al lector que calcule el flujo magnético mediante integración, y así la inductancia.

#### 2.10.4. Ejemplo: Inductancia de una línea de transmisión

Calcular la inductancia de una línea de transmisión coaxial por el que circula una corriente  $I$  en el conductor central y que genera un campo magnético como se ilustra en la Figura 2.19. En la Sección 2.8.1 se obtuvo el campo magnético en un conductor cilíndrico:

$$H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad a < r < b \tag{2.91}$$

El flujo magnético total en la línea de transmisión de longitud  $l$  se obtiene:

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = l \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 l I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \tag{2.92}$$

La inductancia por unidad de longitud será:

$$\frac{L}{l} = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad [H/m] \tag{2.93}$$

Se ha despreciado la contribución dentro del conductor del campo magnético, porque el conductor central es pequeño y no contribuirá. En el caso de altas frecuencias prácticamente el campo magnético estará en la superficie, haciendo la contribución de  $L$  dentro del conductor sea despreciable. Por



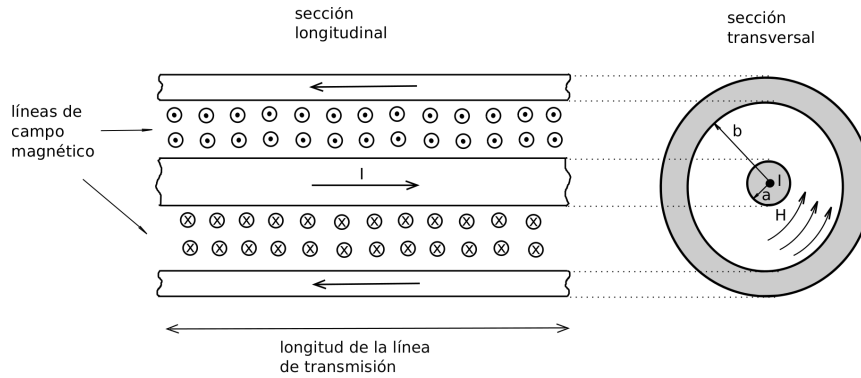


Figura 2.19: Sección transversal y longitudinal de una línea de transmisión coaxil

lo tanto  $L \cong L_{ext}$ . El lector interesado puede calcular la  $L$  interna en el conductor a modo de realizar la verificación.

### 2.10.5. Ejemplo: Inductancia en una línea de dos conductores

Calcular la inductancia de dos conductores cilindricos paralelos que se ilustra en la Figura 2.20.

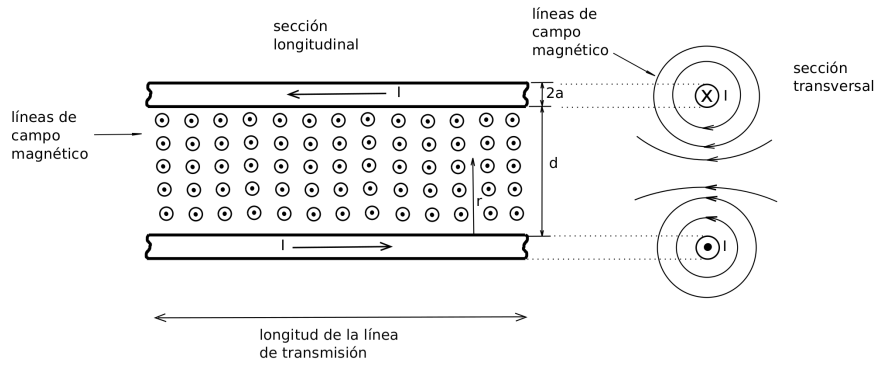


Figura 2.20: Línea de transmisión de dos conductores

La línea bifilar de dos conductores de  $300\Omega$  se usaba para conectar la antena con el receptor de TV.

El campo magnético en un conductor cilíndrico ya se ha calculado en la ec. (2.8.1)

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad r > a \quad (2.94)$$

El flujo magnético total será el doble que el que produce un conductor:

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2l \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \cong \frac{l\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (2.95)$$

La inductancia por unidad de longitud será:

$$\frac{L}{l} = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a} \quad [H/m] \quad (2.96)$$

## 2.11. Corrientes de conducción y desplazamiento

La densidad de corriente de conducción  $J$  es la que se encuentra en un material conductor y es directamente proporcional al campo eléctrico, mediante la conductividad eléctrica del conductor:

$$\vec{J}_C = \sigma \vec{E} \quad (2.97)$$

La densidad de corriente de desplazamiento es la que se encuentra en un material dieléctrico y es la que propuso Maxwell :

$$\vec{J} = \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (2.98)$$

La densidad total de corriente ( $A/m^2$ ) será la suma de las contribuciones de la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento:

$$\vec{J}_T = \vec{J}_C + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (2.99)$$

La intensidad de corriente (A) se puede calcular en función de la densidad de corriente ( $A/m^2$ ):

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (2.100)$$

Por lo tanto la Intensidad de Corriente de conducción ( $I_c$ ) y de desplazamiento ( $I_d$ ) se pueden calcular como:

$$I_c = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{s} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.101)$$

$$I_d = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{s} \quad (2.102)$$

## 2.12. Ecuaciones de Maxwell. Forma diferencial

Las ecuaciones que relacionan el comportamiento de los campos eléctrico  $E$  y magnético  $H$ , se basan en la teoría electromagnética formulada por James Clerk Maxwell en 1864, y cuya vigencia ha permitido extraordinarios avances en la radioelectricidad, electrónica y en el estudio de los materiales. La teoría de Maxwell es ampliamente conocida, y sus ecuaciones expresadas en el Sistema Internacional de unidades (SI), también denominado sistema MKSA (metro, kilogramo, segundo, Ampère).

Las leyes vistas anteriormente en este capítulo, se expresan en forma diferencial, y se denominan ecuaciones de Maxwell. La primera ecuación es la ley de Faraday expresada en forma diferencial, la segunda es la ley de Ampère modificada por Maxwell en forma diferencial, la tercera y cuarta son las leyes de Gauss eléctrica y magnética expresadas en forma diferencial [26], [29]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.103)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.104)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.105)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.106)$$

**Fuentes de campos eléctrico y magnético** Las fuentes del campo eléctrico será la densidad de carga / carga  $\rho$ , y la variación del campo magnético

Las fuentes del Campo magnético será la corriente de conducción  $J_c$ , y la variación del campo eléctrico

Para el caso de una zona que se encuentra libre de cargas y corrientes  $\rho = 0$  y  $J_c = 0$  también se podrá tener una generación de campos:

Se generará campo eléctrico  $E$  mediante la variación del campo magnético  $H$  respecto al tiempo:  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Se generará el campo magnético  $H$  mediante la variación del campo eléctrico respecto al tiempo  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

## 2.13. Relaciones constitutivas

Las relaciones constitutivas, son las que vinculan el campo magnético  $\vec{H}$  con la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$ , mediante la permeabilidad magnética del material  $\mu$ . Las relaciones entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y la densidad de flujo

eléctrico  $\vec{D}$  mediante la permitividad eléctrica del material  $\epsilon$ . Cuando los medios son lineales, isótropos y homogéneos que muchas veces se denominan medios simples, que son los medios que en mayor medida se utilizan en las aplicaciones tecnológicas en Compatibilidad Electromagnética, se expresan:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.107)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.108)$$

Además la corriente de conducción será proporcional al campo eléctrico mediante la conductividad eléctrica del material  $\sigma$ :

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E} \quad (2.109)$$

Si el medio es el vacío, se tiene:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F/m$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} H/m$$

$$\sigma = 0 S/m$$

## 2.14. Permitividad eléctrica

### 2.14.1. Capacitor con pérdidas

Los materiales dieléctricos se utilizan en muchas aplicaciones eléctricas y electrónicas normalmente como aisladores eléctricos.

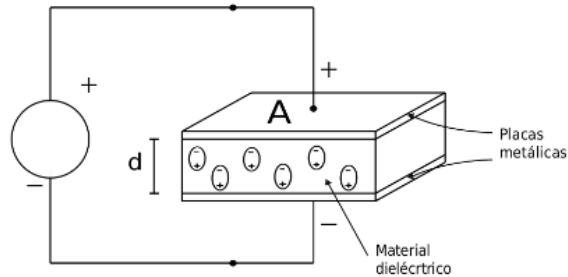


Figura 2.21: Capacitor de placas planas paralelas con dieléctrico dentro [30]

Un material es clasificado como dieléctrico cuando es capaz de almacenar energía frente a un campo externo continuo aplicado. La carga almacenada es mayor si entre los conductores que forman el capacitor hay algún material dieléctrico que no es el vacío. Este material dieléctrico incrementa la capacidad de almacenar carga del capacitor neutralizando la carga en los electrodos con cargas de polaridad inversa. La Figura 2.21 muestra la situación comentada.

Se ha definido la capacidad de un capacitor de placas planas paralelas, con dieléctrico entre placas de vacío de la expresión 2.28, como:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{D} \quad (2.110)$$

La capacidad del capacitor con el material dieléctrico dentro será directamente proporcional a la capacidad del capacitor con dieléctrico de aire:

$$C = k' C_0 \quad (2.111)$$

La constante de proporcionalidad  $k'$  se denomina constante dieléctrica del material, habitualmente denominada permitividad eléctrica relativa:

$$k' = \epsilon'_r = \frac{C}{C_0} \quad (2.112)$$

La permitividad eléctrica cuando el dieléctrico tenga pérdidas es una magnitud compleja

Al aplicarse un campo variable con el tiempo, circulará una corriente resultante, suma de dos corrientes denominadas corriente de carga  $i_c(t)$  y corriente de pérdidas  $i_l(t)$ , las cuales se encuentran relacionada con la constante dieléctrica. Las pérdidas dieléctricas en un material pueden ser representadas como una conductancia  $G$  en paralelo con un capacitor ideal  $C$ , como se ve en la Figura 2.22. En el diagrama fasorial de la Figura 2.22 en a) se ilustra el capacitor conectado al generador. En b) se observa el circuito eléctrico equivalente del capacitor con pérdidas conectado a un generador real, y en c) se ilustra el diagrama fasorial de las corrientes, donde las pérdidas dieléctricas hacen que el fasor de la corriente total se incline y la fase entre  $V$  e  $I$  será menor a  $\pi/2$ . Para el caso que el capacitor se pueda considerar sin pérdidas el ángulo entre  $V$  e  $I$  será igual  $\pi/2$ .

La corriente  $i(t)$  que ingresa al capacitor con dieléctrico puede desarrollarse como sigue:

$$i(t) = i_c(t) + i_g(t) \quad (2.113)$$

Escribiendo la corriente en forma fasorial:

$$I(\omega) = I_C(\omega) + I_G(\omega) \quad (2.114)$$

Además se tiene que la corriente total de la malla se puede expresar en términos de la tensión aplicada y la impedancia total como:

$$I(\omega) = \frac{V(\omega)}{Z(\omega)} = V(\omega)Y(\omega) \quad (2.115)$$

El concepto de capacidad se puede generalizar para un capacitor con pérdidas como:

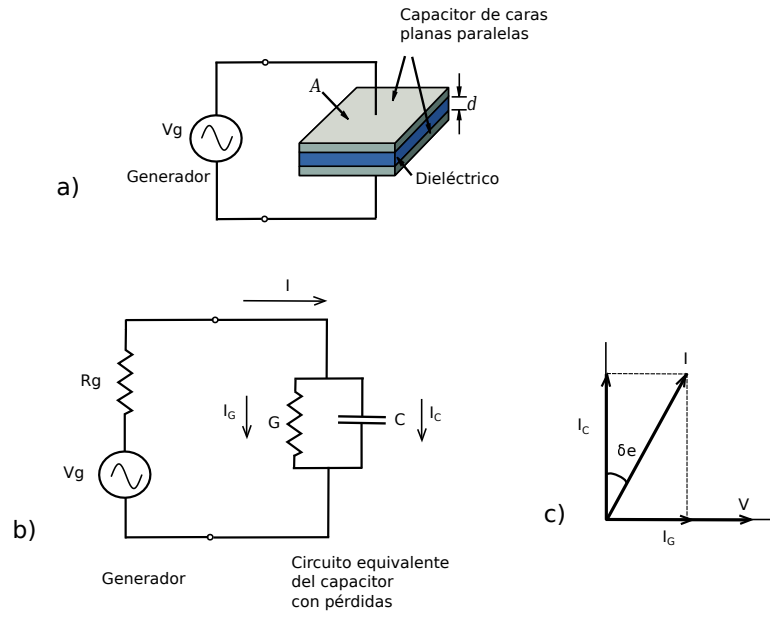


Figura 2.22: a) Capacitor conectado a un generador de corriente alterna, b) Circuito eléctrico equivalente del generador y el capacitor con pérdidas, c) Diagrama fasorial de las tensiones y corrientes.

$$I(\omega) = V(\omega)j\omega C^* \quad (2.116)$$

donde  $C^*$  es la capacidad compleja del capacitor y  $\omega = 2\pi f$  es la pulsación angular, y  $f$  es la frecuencia.

La corriente se puede escribir en función de  $G$  y de  $C$ :

$$I(\omega) = V(\omega)Y(\omega) = V(\omega)(j\omega C + G) \quad (2.117)$$

De la ecs. (2.116) y (2.117):

$$j\omega C^* = j\omega C + G \quad (2.118)$$

De la definición de capacidad se puede escribir que:

$$C = \epsilon' \frac{A}{d} = \epsilon'_r C_0 \quad (2.119)$$

$$C^* = \epsilon^* \frac{A}{d} = \epsilon_r^* C_0 = (\epsilon'_r - j\epsilon''_r) C_0 \quad (2.120)$$

Reemplazando  $C^*$  y  $C$  en la ec (2.118):

$$j\omega(\epsilon'_r - j\epsilon''_r)C_0 = j\omega\epsilon'_r C_0 + G \quad (2.121)$$

Por lo tanto:

$$G = \omega C_0 \epsilon''_r \quad (2.122)$$

Quiere decir que la Conductancia  $G$  se relaciona con las pérdidas del material, representadas por la parte imaginaria de la permitividad eléctrica relativa  $\epsilon''$

Finalmente la expresión de la corriente será:

$$I(\omega) = V(\omega) j\omega C_0 (\epsilon'_r - j\epsilon''_r) \quad (2.123)$$

La permitividad dieléctrica relativa, consta de una parte real  $\epsilon'_r$  la cual representa el almacenamiento en el capacitor ideal  $C$  (energía almacenada), y una parte imaginaria  $\epsilon''_r$  que representa las pérdidas en el dieléctrico:

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon'_r(\omega) - j\epsilon''_r(\omega) \quad (2.124)$$

### 2.14.2. Conductividad eléctrica

Se ha comentado antes que la ecuación de Maxwell del rotor es:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.125)$$

La corriente de conducción es proporcional al campo eléctrico, y asumiendo variación armónica se tiene:

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon' \vec{E} = \vec{J}_T \quad (2.126)$$

donde  $\vec{J}_T$  es la densidad de corriente total

Por lo tanto:

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega \epsilon') \vec{E} \quad (2.127)$$

Se puede pensar en que la permitividad será compleja se encuentran las pérdidas  $\epsilon^* = \epsilon' - j\epsilon''$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'') \vec{E} \quad (2.128)$$

Por lo tanto igualando las expresiones (2.127) y (2.128):

$$(\sigma + j\omega \epsilon') = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'') \quad (2.129)$$

Se obtiene la relación entre la conductividad eléctrica y la parte imaginaria de la permitividad:

$$\sigma = \epsilon'' \omega \quad (2.130)$$

### 2.14.3. Respuesta en frecuencia

En la Figura 2.23 se representan las curvas de la parte real e imaginaria de la permitividad eléctrica en función de la frecuencia, y sus respectivos mecanismos de polarización. Observe que la parte real de la permitividad dieléctrica es prácticamente constante hasta algunos centenares de MHz, de ahí que históricamente se la conozca con el nombre de constante dieléctrica. Pero luego cambia el mecanismo de polarización de dipolar y  $\epsilon'_r$  comienza a decrecer. La función será monotonamente decreciente en los dieléctricos reales.

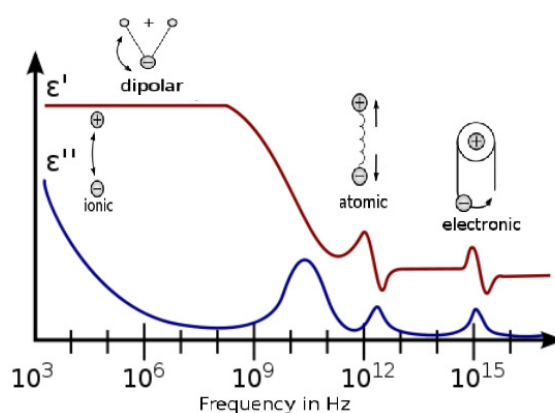


Figura 2.23: Fuente: intechopen <https://www.intechopen.com/books/dielectric-material/polymer-dielectric-materials>

La permitividad de un dieléctrico resulta importante para aplicaciones como la construcción de un capacitor, porque si el capacitor es de dieléctrico de aire y luego se le coloca un material dieléctrico entre sus placas, la capacidad aumentará proporcionalmente con la permitividad eléctrica  $\epsilon$ .

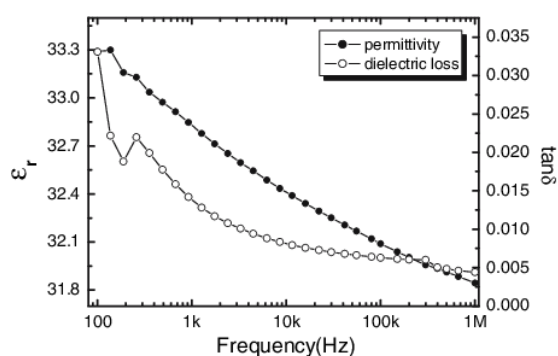


Figura 2.24: Permitividad eléctrica de un material cerámico  $Sb_3Nb_3O_{13}$  Ref: J Mater Sci (2007) 42:8387–8390 DOI 10.1007/s10853-007-1807-3



Las propiedades de los materiales son útiles para poder diseñar una aplicación a la ingeniería que puede ser por ejemplo un circuito de microondas. En la Figura 2.24 se puede observar la permitividad eléctrica, en partes real e imaginaria en función de la frecuencia, correspondiente a un material cerámico.

Los materiales dieléctricos pueden ser de bajas pérdidas en un determinado ancho de banda, aunque sus pérdidas no serán cero, porque no se respetaría el principio físico de causalidad, que se expresa mediante las ecuaciones de Kramers-Kronig. Este estudio de la causalidad de los sistemas físicos, el lector interesado lo puede encontrar en [31], ya que está fuera del tratamiento de este texto.

## 2.15. Permeabilidad magnética

### 2.15.1. Inductor con núcleo magnético con pérdidas

En la Figura 2.25 se ilustra un inductor toroidal que posee un arrollamiento por el que circula una corriente y se muestran las líneas de campo magnético por el núcleo magnético cerrado. Al comparar un solenoide que posee un núcleo magnético en contacto con el aire la reluctancia del solenoide será mayor que la reluctancia del toroide. Por el toroide circulará un flujo magnético mayor que en el solenoide, por eso se van a poder obtener inductores de mayor inductancia con los núcleos toroidales magnéticos.

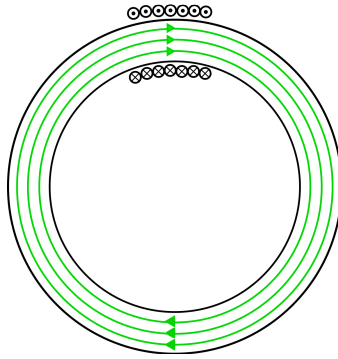


Figura 2.25: Flujo magnético en un inductor toroidal

Considere el toroide de la Figura 2.26 cuyo núcleo está constituido de material magnético con pérdidas, suponga además que no tiene pérdidas en los conductores del arrollamiento, el modelo circuital equivalente se puede expresar como una resistencia  $R$  que representa las pérdidas y una inductancia en serie  $L$  que representa la energía almacenada [32]. Al ser un circuito serie la diferencia de potencial se plantea como:

$$V = V_R + V_L = ZI = (R + j\omega L)I \quad (2.131)$$

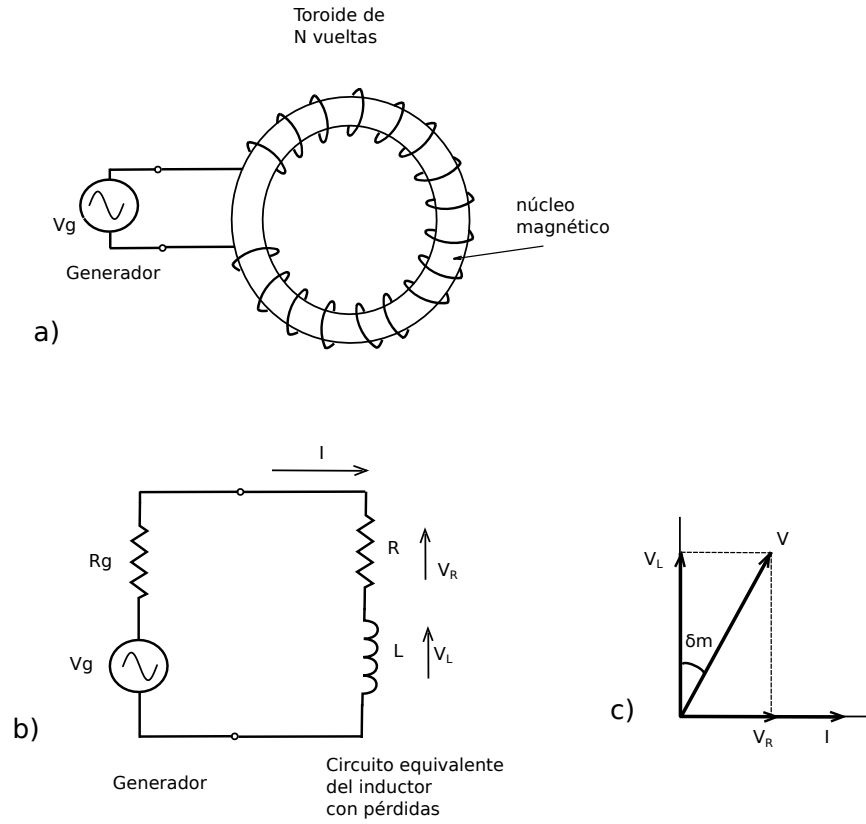


Figura 2.26: a) Inductor conectado a un generador de corriente alterna, b) Circuito eléctrico equivalente del generador y el inductor con pérdidas, c) Diagrama fasorial de las tensiones y corrientes

En la Figura 2.26 se muestra el diagrama fasorial en un inductor, donde la corriente se adelanta a la tensión. Si el inductor se vuelve de muy bajas pérdidas el ángulo entre la corriente y la tensión será prácticamente  $\pi/2$ . En cambio si el inductor posee pérdidas el ángulo de fase entre la tensión y corriente será menor a  $\pi/2$ , como se observa en el diagrama fasorial de la Figura 2.26.

Para el caso de un inductor toroidal con núcleo magnético en la sección 2.10.3 sin pérdidas se ha obtenido:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N^2 \mu A}{2\pi r_m} \quad (2.132)$$

donde  $A$  es la sección y  $r_m$  es el radio medio del toroide

Para el caso de que el núcleo magnético posea pérdidas se tendrá que la permeabilidad magnética se puede expresar como:  $\mu = \mu' - j\mu''$

Por lo tanto la inductancia pasa a ser un parámetro complejo:

$$L^* = \frac{N^2(\mu' - j\mu'')A}{2\pi r_m} \quad (2.133)$$

$$L^* = \frac{N^2\mu'A}{2\pi r_m} - j\frac{N^2\mu''A}{2\pi r_m} \quad (2.134)$$

La impedancia compleja del inductor con pérdidas será:

$$Z = j\omega L^* = j\omega \frac{N^2\mu'A}{2\pi r_m} - j^2\omega \frac{N^2\mu''A}{2\pi r_m} \quad (2.135)$$

Se llega entonces a:

$$Z = j\omega L^* = j\omega \frac{N^2\mu'A}{2\pi r_m} + \omega \frac{N^2\mu''A}{2\pi r_m} = j\omega L + R \quad (2.136)$$

Donde la resistencia y la inductancia se pueden escribir como:

$$R = \omega \frac{N^2\mu''A}{2\pi r_m} \quad (2.137)$$

$$L = \frac{N^2\mu'A}{2\pi r_m} \quad (2.138)$$

Notese que el inductor no tiene pérdidas en el conductor que forma el arrollamiento, pero posee pérdidas magnéticas en el núcleo magnético.

### 2.15.2. Respuesta en frecuencia

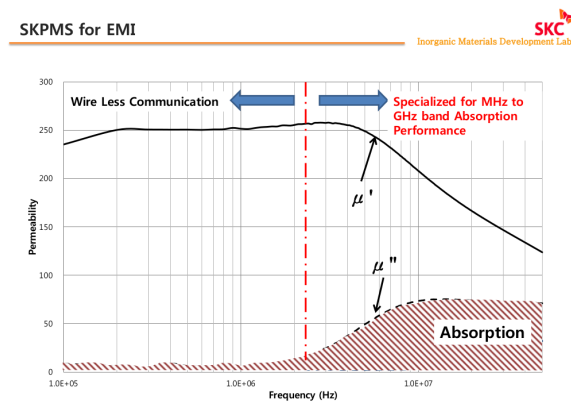


Figura 2.27: Permeabilidad magnética de una ferrita para absorción de ondas EM, y supresión de interferencias

La permeabilidad magnética es una propiedad que poseen los materiales magnéticos de magnetizarse con la presencia de campos magnéticos aplicados, por ejemplo los materiales derivados del hierro o de las cerámicas magnéticas. Desde el punto de vista macroscópico, un material magnético se encuentra formado por dipolos magnéticos que se van a orientar con la aplicación de una campo magnético externo.

En aplicaciones tales como núcleo de transformadores de bajas frecuencias ( $50Hz$ ), habitualmente se usan las láminas de hierro al Silicio, porque estos materiales presentan una permeabilidad magnética relativa mayores a 2000. Sin embargo en aplicaciones de electrónica es muy frecuente la utilización de las cerámicas magnéticas, que son materiales que se crearon para trabajar en frecuencias mas altas, a partir de centenares de  $kHz$ , porque las pérdidas son menores que las del hierro.

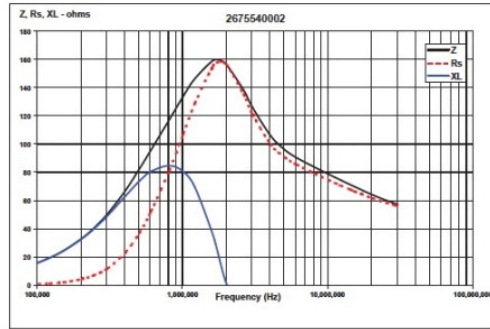


Figura 2.28: Fair-rite Products Corps. *Ref* <https://www.fair-rite.com>

Cuando el material magnético posee pérdidas la permeabilidad magnética  $\mu$  se escribe como un número complejo, donde la parte real representa la energía magnética acumulada y la parte imaginaria las pérdidas magnéticas.

Una aplicación habitual de las ferritas es la absorción de ondas electromagnéticas, y la supresión de interferencias conducidas.

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega) \quad (2.139)$$

En la Figura 2.27 se muestra la curva de la permeabilidad magnética de una ferrita en función de la frecuencia y las aplicaciones en cada región del espectro: comunicaciones y supresión de interferencias.

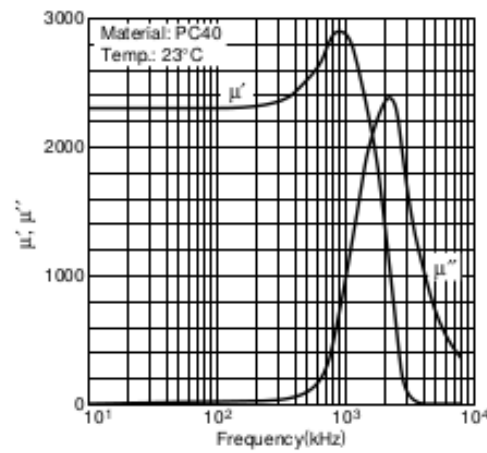


Figura 2.29: Permeabilidad magnética de una ferrita TDK usada en potencia

En la Figura 2.28 se muestran las curvas de la permeabilidad magnética de una ferrita comercial, usada habitualmente para suprimir la interferencia en los cables que alimentan los equipos electrónicos.

En la Figura 2.29 se muestra la permeabilidad magnética relativa de una ferrita en usada en potencia. En la Figura 2.30 se muestra las propiedades de la ferrita en función de la frecuencia

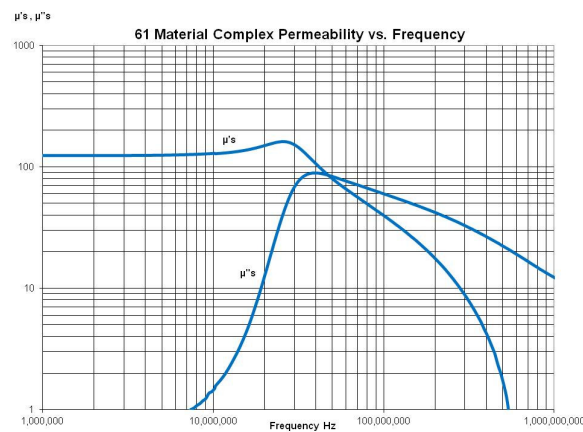


Figura 2.30: Permeabilidad magnetica de una ferrita NiZn Fair-rite usada en aplicaciones de altas frecuencias. Ref <https://www.fair-rite.com/61-material-data-sheet>

## 2.16. Componentes reales

### 2.16.1. Capacitor real

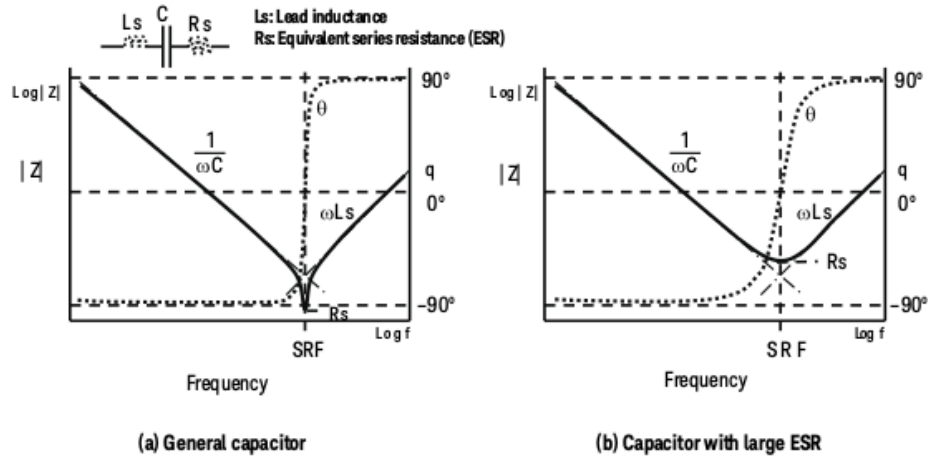


Figura 2.31: Respuesta en frecuencia de: a) Capacitor real con dieléctrico de aire, b) Capacitor real con pérdidas, gentileza de Keysight [33]

Un capacitor real se muestra en la Figura 2.31 a), se observa un capacitor con dieléctrico de aire, y se encuentra una inductancia parásita en serie originada por los conductores del capacitor. Las pérdidas eléctricas en los conductores se encuentran representadas por la resistencia en serie  $R_s$  [33].

En la Figura 2.31 b), se muestra la respuesta en frecuencia de un capacitor con pérdidas dieléctricas, nótese que al poseer pérdidas, la curva del módulo de la impedancia en función de la frecuencia se redondea, en cambio en un capacitor con dieléctrico de bajas pérdidas como en la Figura 2.31 a) se observa mas afilada.

### 2.16.2. Inductor real

El inductor real se muestra en la Figura 2.32 a), se observa un inductor con núcleo de aire, donde está la inductancia, y en paralelo se encuentra la capacidad parásita entre espiras  $C_0$ , esto hace que el inductor resuene a una determinada frecuencia. Luego aparece la resistencia serie que representa las pérdidas óhmicas del arrollamiento  $R_0$  [33].

El caso de un inductor real que posee núcleo magnético con pérdidas, que se muestra en la Figura 2.32 b), donde se representa la inductancia en paralelo con una capacidad que se produce entre las espiras, una resistencia en serie que es la resistencia del alambre del arrollamiento, y una resistencia en paralelo que está dada por las pérdidas eléctricas en el núcleo magnético.

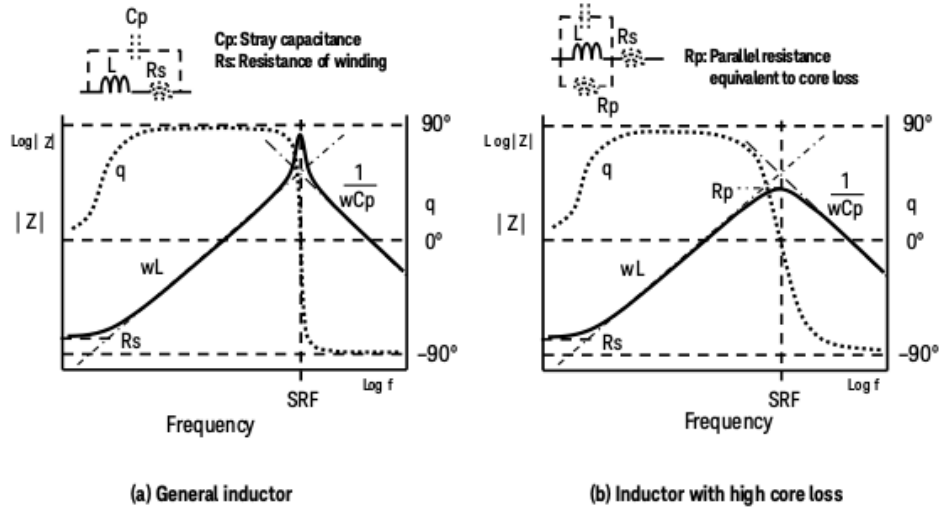


Figura 2.32: Respuesta en frecuencia de: a) Inductor real con núcleo de aire, b) Inductor real con núcleo magnético, gentileza de Keysight [33]

Las pérdidas magnéticas en el núcleo, son las pérdidas por histéresis y las pérdidas por las corrientes de Foucault [34].

## 2.17. Ecuación de ondas en el vacío

Cuando una antena emite energía electromagnética esta energía se desplaza en el aire para comunicaciones en la superficie de la tierra como puede ser el caso de la telefonía celular y las aplicaciones móviles tan importantes en la actualidad. También la energía se puede propagar en el vacío si se trata de una comunicación satelital. A efectos prácticos se considera que el aire y el vacío poseen propiedades similares, dejando de lado los efectos de las lluvias, tormentas, nieve, y gases que existen en la atmósfera terrestre, donde se producirán resonancias en ciertas bandas. Por esta razón el estudio de la propagación de una onda electromagnética es muy importante en el aire y el vacío. La ecuación que permite obtener la función de ondas se llama ecuación de ondas

En el aire, en una zona libre de cargas y corrientes se tiene que:  $\rho = 0$  y  $J_c = 0$ , por lo tanto las ecuaciones de Maxwell que se han visto en la Sección 2.12 se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.140)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.141)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.142)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.143)$$

Aplicando rotor a la ec. (2.140), se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \quad (2.144)$$

Como  $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \quad (2.145)$$

Reemplazando (2.141) en (2.145):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (2.146)$$

Operando se obtiene:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (2.147)$$

Por la identidad:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} \quad (2.148)$$

Como  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$  o  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , se obtiene:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (2.149)$$

Resulta:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (2.150)$$

Reemplazando  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.151)$$

Si el medio es el vacío,  $\epsilon = \epsilon_0$  y  $\mu = \mu_0$ , y la velocidad de propagación de la onda electromagnética es:  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  y  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{v^2}$ , se obtiene la ecuación vectorial de ondas en el vacío:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.152)$$

Análogamente para el campo magnético:



$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (2.153)$$

Las ecuaciones (2.151) y (2.153) son ecuaciones diferenciales vectoriales de ondas del campo eléctrico y del campo magnético. Para el campo eléctrico desarrollando la ecuación (2.151) se expresa como:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 t} \quad (2.154)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 z} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t} \quad (2.155)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 z} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 t} \quad (2.156)$$

Suponiendo el vector  $E$  solamente tiene componente en  $x$ , eso significa que:  $E_y = E_z = 0$ . Además suponga que solo hay variación en  $z$ , entonces se puede escribir  $E_x(z)$ . Por lo tanto las ecs. (2.154), (2.155) y (2.156) se reducen a [35]:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 t} \quad (2.157)$$

La expresión (2.157) es la forma más sencilla de la ecuación diferencial de ondas, cuya solución será una función de ondas con el campo eléctrico polarizado en la dirección  $x$ , que varía en función de  $z$ , y del tiempo, que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{E} = E_0 f(z - vt) \hat{x} \quad (2.158)$$

Por lo tanto esta función  $f(z - vt)$ , aplicándola a la ecuación de ondas (2.157), se tiene:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} = \hat{x} \frac{\partial^2 E_0 f(z - vt)}{\partial z^2} = \hat{x} E_0 f''_u \quad (2.159)$$

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \hat{x} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_0 f(z - vt)}{\partial t^2} = \hat{x} \frac{1}{v^2} v^2 E_0 f''_u = \hat{x} E_0 f''_u \quad (2.160)$$

Quiere decir que  $f(z - vt)$  verifica la ecuación diferencial (2.157). En la Figura 2.33 se muestra la propagación de un pulso electromagnético en  $z = z_0$  para el tiempo  $t = t_0$  y en  $z = z_1$  para el tiempo  $t = t_1$ .

Además  $f(z + vt)$  será función de ondas que satisface la ecuación diferencial de ondas (2.157) ecuación diferencial de d'Alembert, el lector interesado puede repetir el procedimiento de demostración.

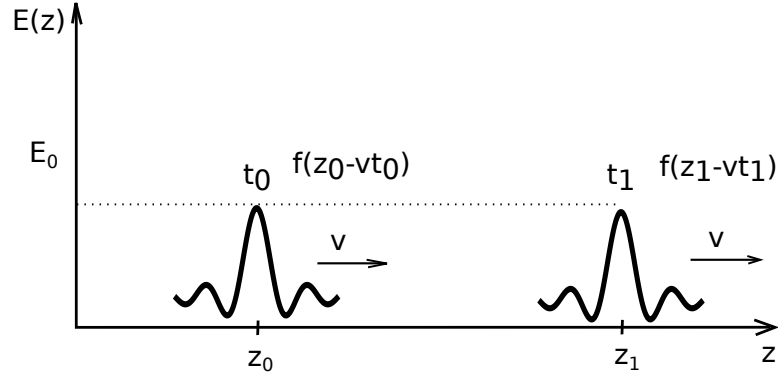


Figura 2.33: Propagación de un pulso electromagnético cuya función es:  $f(z - vt)$

La expresión (2.158) representa una onda cuyo campo eléctrico está polarizado en la dirección  $\hat{x}$ , es transversal a la dirección de propagación  $\hat{z}$  que se propaga en la dirección positiva de  $z$ , con una velocidad  $v$ , que para el espacio será  $v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Respecto a la amplitud del campo eléctrico en función de la distancia, aunque no haya pérdidas en el medio como el vacío, la amplitud del campo disminuirá con la distancia a la fuente. Habitualmente en la bibliografía de Antenas y propagación este fenómeno se denomina atenuación de espacio libre [36].

## 2.18. Ecuación de ondas en el vacío con excitación armónica

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío cuando los campos eléctrico y magnético tienen variación armónica, con una determinada frecuencia  $f$ , son un caso de interés para ingeniería y ciencias. Estas ecuaciones también se denominan ecuaciones de Helmholtz. La solución para la variación armónica, donde las expresiones de los campos eléctrico y magnético son funciones seno o coseno, y resultarán ondas monocromáticas, que se escribe como:

$$Ex = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \quad (2.161)$$

Habitualmente los campos eléctricos y magnéticos se expresan en forma exponencial, y se le aplica la parte real:

$$Ex = \text{Real}\{E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}\} \quad (2.162)$$

Reemplazando en la ecuación de onda de d'Alembert de  $E$  (2.157) :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 t} \quad (2.163)$$

Se obtiene:

$$\beta^2 E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} - \frac{\omega^2}{c^2} E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} = 0 \quad (2.164)$$

Aquí se ha visto que la expresión exponencial del campo eléctrico verifica la ecuación diferencial.

donde  $\beta = \frac{\omega}{c}$

Usando campo armónico  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0 \quad (2.165)$$

llamando a la constante de propagación  $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (2.166)$$

Estas son las ecuaciones de onda reducida, o ecuaciones de Helmholtz.

La constante de propagación se expresa habitualmente:  $\gamma = \alpha + j\beta$

Para el vacío, que es un medio sin pérdidas, por lo tanto la constante de atenuación  $\alpha = 0$ , y la constante de propagación es:

$$\gamma = j\beta = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{j\omega}{c} \quad (2.167)$$

## 2.19. Ecuación de ondas en medios con pérdidas

Si la onda electromagnética se propaga en un medio con pérdidas, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ \mu &= \mu' - j\mu'' \end{aligned}$$

Análogamente al caso de propagación en el vacío, considerando los campos que varían en forma armónica, se obtiene la ecuación de onda reducida o ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \quad (2.168)$$

donde  $\gamma$  es la constante de propagación, que será un número complejo porque el medio posee pérdidas:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2.169)$$

La constante de propagación resulta:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad (2.170)$$

donde:

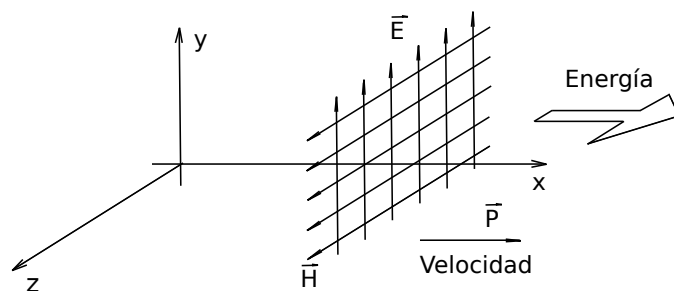
$\alpha$ [Neper/m]: es la constante de atenuación.

$\beta$ [rad/m]: es la constante de fase.

## 2.20. Onda Plana

Las ondas electromagnéticas que provienen del sol son ondas esféricas, esta radiación solar llega a la tierra luego de viajar 170 millones de kilómetros, parte de estas ondas, pueden ser observadas por los seres humanos. Dichas ondas llegan a la tierra como ondas planas, porque estamos observando solamente una pequeña porción de la onda esférica a gran distancia del astro rey. Una situación idéntica ocurre con las olas del mar que se observan en la costa como una onda plana porque una persona desde la costa solo ve una pequeña porción de las mismas. Vale aclarar que las ondas en el mar, se pueden observar a simple vista porque son ondulaciones de agua, pero las ondas electromagnéticas no se observan a simple vista, sino que a partir de sus efectos y de la teoría electromagnética. Si se tiene una antena transmisora que irradia ondas electromagnéticas y otra antena receptora las recibe, va a recibir prácticamente ondas planas, despreciando los efectos que pudieran ocurrir en la ionósfera y las reflexiones en la superficie de la tierra.

Es necesario aclarar que el comportamiento de las ondas electromagnéticas es similar a las ondas mecánicas, o las vibraciones como el sonido. Estas ondas habitualmente se denominan ondas de materia porque para propagarse necesitan de medios materiales, en cambio las ondas electromagnéticas se propagan tanto en medios materiales como en el vacío. Las ondas electromagnéticas de radiofrecuencias y microondas que se tratan en este texto no se pueden ver, se las estudia mediante mediciones de potencias, tensiones o corrientes, pero todas poseen características ondulatorias comunes [37].



Onda plana en un medio isótropo

Figura 2.34: Vector de campo eléctrico  $\vec{E}$ , vector campo magnético  $\vec{H}$ , y vector de Poynting  $\vec{P}$  de la onda plana en un medio isótropo.

En la Figura 2.34, se ilustra una onda plana en un medio isótropo que se desplaza o propaga en la dirección de  $x$  positiva. Aquí el campo eléctrico está en dirección del eje  $y$ , y el campo magnético en la dirección del eje  $z$ . Se observa que la energía tiene la misma dirección que la velocidad, esto ocurrirá en la mayoría de los medios que se denominan simples o isótropos.

Para casos anisótropos la velocidad y la energía pueden tener direcciones diferentes. La amplitud de la onda disminuirá, debido a la atenuación del medio si este posee pérdidas y además porque el campo eléctrico disminuirá su amplitud debido al fenómeno de *atenuación de espacio libre* que se observa aún en medios sin pérdidas. Esto se debe a que la potencia radiada se mantiene constante, pero el área de la superficie esférica aumenta. Por lo tanto la densidad de potencia disminuirá, habitualmente calculada en promedio temporal, variará como  $\frac{1}{r^2}$ . Los campos eléctrico y magnético tendrán una variación inversa con la distancia  $\frac{1}{r}$ . Esta ley de variación el lector la puede encontrar en todos los textos de teoría de antenas y propagación [38], [39], [27], [40], [41]. Cabe destacar que la onda plana se va a producir en la zona de campo lejano, donde los vectores de  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  y el vector de Poynting  $\vec{P}$  son esencialmente perpendiculares entre si. Estos conceptos junto a la impedancia de onda, se tratarán en el capítulo 7 de emisiones radiadas, donde se estudiará lo que sucede también en la región de campo cercano.

## 2.21. Pulso en un medio dispersivo

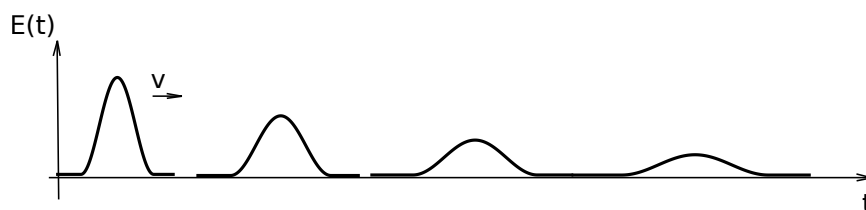


Figura 2.35: Pulso gaussiano en medios dispersivos

Se puede considerar a un material como dispersivo, cuando la velocidad de propagación varía respecto a la frecuencia de la onda electromagnética. En muchos casos los materiales que poseen pérdidas son dispersivos. Al aplicar un pulso por ejemplo en un material dispersivo y con pérdidas, el pulso a medida que se propaga cuando avanza en su posición se atenuará, es decir disminuirá la amplitud de la onda con el transcurso del tiempo, y además se deformará al propagarse.

En la Figura 2.35 se puede ver la propagación electromagnética del pulso en un medio en función de la distancia para el dominio del tiempo, considerando al material dispersivo y con pérdidas .

En la Figura 2.36 se puede observar la propagación de un pulso en un medio dispersivo. El pulso con trazo negro se propaga considerando que no hay dispersión en el medio, ni pérdidas, por lo tanto se va propagando en distintas posiciones pero no cambia su forma. En el pulso del trazo azul se considera al medio con pérdidas y dispersión, donde la velocidad para las distintas frecuencias que componen el pulso será distinta. Por eso se muestra

la atenuación en la amplitud a la vez que se deforma con el transcurso del tiempo y la posición.

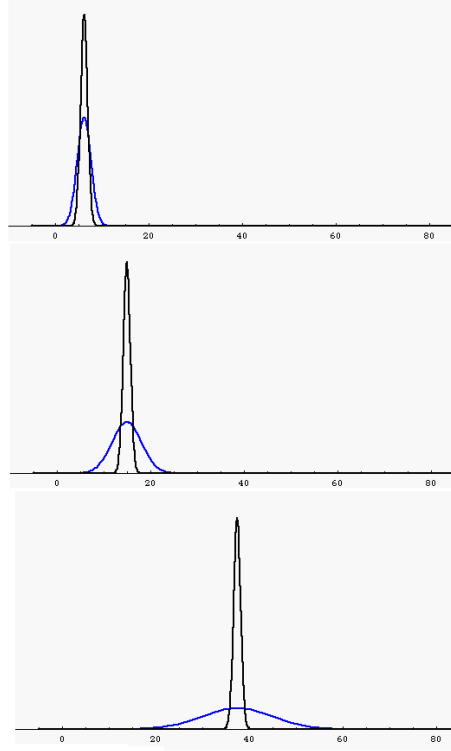


Figura 2.36: Pulso que se propaga en un medio dieléctrico perfecto con línea negra, y en un medio dispersivo con línea azul en tres instantes de tiempo. Ref: D.A. Russell Pennsylvania State University, <https://www.acs.psu.edu>

## 2.22. Unidades de electromagnetismo

En la actualidad se usa el Sistema de Unidades mksa (metro-kilogramo-segundo-Ampère), que es un subsistema del Sistema Internacional de unidades SI.

Cuadro 2.1: Unidades del Sistema Internacional

Simbolo	Significado	Unidad
F	Fuerza	$[N] = [kg * m/s^2]$ ( <i>Newton</i> )
L	Trabajo $L = F \Delta l$	$[J] = [kg * m^2/s^2]$ ( <i>Joule</i> )
W	Potencia $W = \frac{dL}{dt}$	$[W] = [kg * m^2/s^2]$ ( <i>Watt</i> )
V	Potencial eléctrico $= \frac{\Delta L}{\Delta Q}$	$[J/C]$ ( <i>Volt</i> )
I	Corriente eléctrica	$[V/m]$ ( <i>Ampere</i> )
Q	Carga eléctrica	$[C]$ ( <i>Coulomb</i> )
$\rho$	Densidad de Carga eléctrica	$[C/m^2]$ ( <i>Coulomb/m^2</i> )
E	Campo eléctrico $E = \frac{dV}{dl}$	$[V/m]$
H	Campo magnético	$[A/m]$
D	Desplazamiento eléctrico	$[C/m^2]$
P	Polarización eléctrica	$[C/m^2]$
B	Densidad de flujo magnético	$[T] = [Wb/m^2]$ ( <i>Tesla</i> )
M	Magnetización	$[A/m]$
$\phi_e$	Flujo eléctrico	$[C]$ ( <i>Coulomb</i> )
$\phi_m$	Flujo magnético	$[Wb]$ ( <i>Weber</i> )
C	Capacidad eléctrica	$[F]$ ( <i>Farad</i> )
L	Inductancia	$[H]$ ( <i>Henry</i> )
R	Resistencia	$[\Omega]$ ( <i>Ohm</i> )
P	Densidad de Potencia	$[W/m^2]$ ( <i>Watt/m^2</i> )

Es importante mencionar que en la actualidad el Sistema Internacional de unidades es el más usado en todo el mundo, aunque por razones históricas, aún figura en las tablas de materiales magnéticos e inclusive en instrumentos de medición el sistema CGS de unidades (cm-g-s). Este es el caso del campo magnético y la densidad de flujo magnético. Es por esa razón que conviene conocer la conversión entre ambos sistemas de unidades.

### Conversión de unidades

Conversión de Tesla a Gauss:  $[1T] = 10^4[G]$  ( $10^4 Gauss$ )

Conversión de Oersted a  $A/m$ :  $[1Oe] \cong 79,6 [A/m]$

donde  $[Oe]$ (*Oersted*) y  $[G]$ (*Gauss*)