ГУАП

КАФЕДРА № 43

ОТЧЕТ   
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ассистент |  |  |  | К. А. Кочин |
| должность, уч. степень, звание |  | подпись, дата |  | инициалы, фамилия |

|  |
| --- |
| ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ |
| «Моделирование функций правдоподобия информационных процессов» |
| по курсу: Прикладная теория вероятностей и статистика |
|  |
|  |

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| СТУДЕНТ гр. № | 4332 |  |  |  | А. А. Лютов |
|  |  |  | подпись, дата |  | инициалы, фамилия |

Санкт-Петербург 2025

**Задание:**

1. Моделирование функции правдоподобия:
   1. Смоделировать вектор наблюдений  размером  нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием  и стандартным отклонением  (значения ,  и  зависят от варианта и приведены в таблице ниже).
   2. Сформировать функцию правдоподобия нормально распределенной случайной величины для выборки:   
   3. Построить таблицу значений логарифма функции правдоподобия при следующих значениях параметров:

 (столбцы): , , …, , где 

 (строки): , , …, , где 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| \ |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |
| … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  |

* 1. Найти значение параметров  и  максимизирующих значение функции правдоподобия (или ее логарифма), и проверить что полученные значения равны или близки к  и .
  2. Построить трехмерный график логарифма функции правдоподобия по предыдущей таблице и обозначить на нем точку максимума. Например:

Изображение выглядит как диаграмма, линия, дизайн

Автоматически созданное описание

1. Моделирование искаженной функции правдоподобия:
   1. Смоделировать вектор шума  размером  элементов с нормальным распределением, нулевым математических ожиданием и единичной дисперсией.
   2. Сформировать реализацию случайно величины , представляющий собой зашумленный наблюдаемы параметр  с нормальным аддитивным шумом:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где  - реализация шума из предыдущего пункта, а  задан исходя из варианта.

* 1. Сформировать функцию правдоподобия наблюдаемых значений (взять:  ).
  2. Построить таблицу значений логарифма функции правдоподобия при следующий значений параметров:

 (столбцы): , , …, , где 

 (строки): , , …, , где 

* 1. Найти значение параметров  и  максимизирующих значение функции правдоподобия (или ее логарифма), и проверить что полученные значения равны или близки к  и 1.
  2. Построить двухмерный график логарифма функции правдоподобия по предыдущей таблице и обозначить на нем точку максимума. Например:

Изображение выглядит как диаграмма, линия, дизайн, куб

Автоматически созданное описание

**Ход работы:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| номер варианта |  |  |  |  |  |  |
| 13 | 4 | 4 | 100 | 180 | 220 | 10 |

**Моделирование функции правдоподобия:**

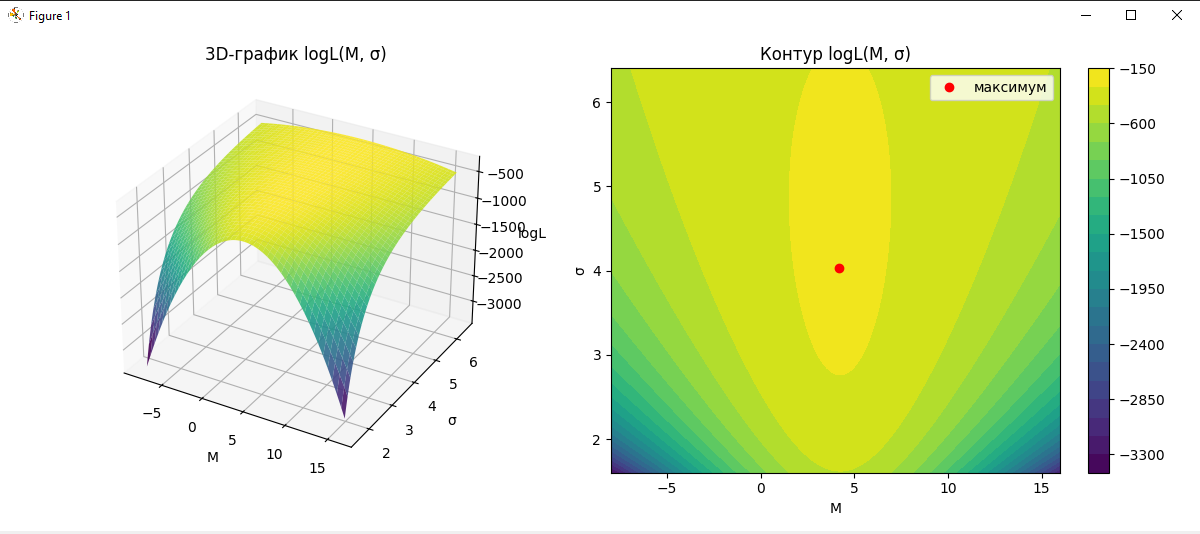
1. Был смоделирован вектор наблюдений размером N = 100 нормально распределённой случайной величины с математическим ожиданием = 4 и стандартным отклонением = 4. Выполнено с помощью программы на Python.
2. Сформирована функция правдоподобия нормально распределённой случайной величины для выборки по формуле:

1. Построена таблица значений логарифма функции правдоподобия при следующих значениях параметров:

(столбцы): , , …, , где

(строки): , , …, , где

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| \ |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |
| … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  |

1. С помощью программы были найдены значения параметров M и σ, максимизирующих функцию правдоподобия
2. Построен трёхмерный и контурный график логарифма функции правдоподобия. 

**Моделирование искажённой функции правдоподобия:**

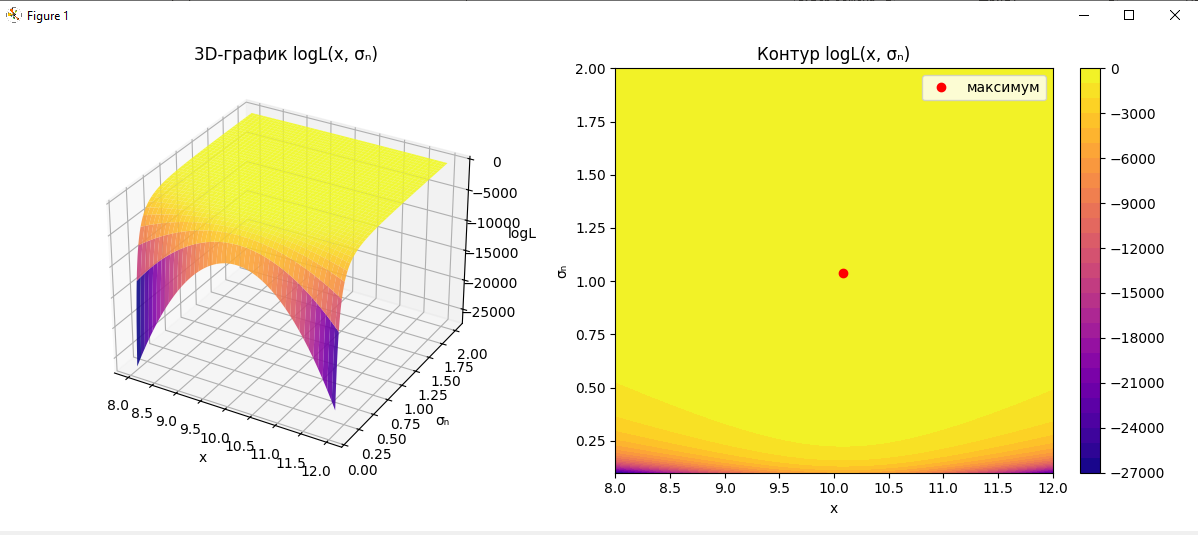
1. Был смоделирован вектор шума ⟩ из N нормально распределённых значений с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.
2. Построен вектор наблюдений

, где = 10.

1. Сформирована функция правдоподобия для наблюдаемых значений:
2. Была построена таблица значений логарифма функции правдоподобия при следующих значениях параметров (значения рассчитаны в программе):

(столбцы): , , …, , где

(строки): , , …, , где

1. При помощи программы были найдены значения параметров и максимизирующих значение функции правдоподобия.
2. Построены 3D и контурные графики функции правдоподобия. 

**Листинг:**

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from mpl\_toolkits.mplot3d import Axes3D

np.random.seed(0)

N = 100

Mb = 4.0

sigb = 4.0

x = np.random.normal(loc=Mb, scale=sigb, size=N)

sum\_x = np.sum(x)

sum\_x2 = np.sum(x\*x)

M\_vals = np.linspace(Mb + sigb\*(-3), Mb + sigb\*3, 180)

sigma\_vals = np.linspace(0.4\*sigb, 1.6\*sigb, 220)

M\_grid, S\_grid = np.meshgrid(M\_vals, sigma\_vals, indexing='ij')

const = -N \* np.log(np.sqrt(2\*np.pi))

logL = const - N\*np.log(S\_grid) - (sum\_x2 - 2\*M\_grid\*sum\_x + N\*M\_grid\*\*2) / (2\*S\_grid\*\*2)

idx = np.unravel\_index(np.nanargmax(logL), logL.shape)

M\_max, sigma\_max, L\_max = M\_vals[idx[0]], sigma\_vals[idx[1]], logL[idx]

print(f"[1] Максимум logL: M = {M\_max:.4f}, sigma = {sigma\_max:.4f}, logL = {L\_max:.4f}")

print("\nТаблица logL(M, sigma):")

k = 6

l = 6

M\_indices = np.linspace(0, len(M\_vals)-1, k, dtype=int)

sigma\_indices = np.linspace(0, len(sigma\_vals)-1, l, dtype=int)

header = ["σ\\M"] + [f"M{i+1} = {M\_vals[j]:.2f}" for i, j in enumerate(M\_indices)]

print("\t".join(header))

for i, si in enumerate(sigma\_indices):

    row = [f"σ{i+1} = {sigma\_vals[si]:.2f}"]

    for mj in M\_indices:

        row.append(f"{logL[mj, si]:.2f}")

    print("\t".join(row))

fig = plt.figure(figsize=(12, 5))

ax1 = fig.add\_subplot(1, 2, 1, projection='3d')

ax1.plot\_surface(M\_grid, S\_grid, logL, cmap='viridis', edgecolor='none', alpha=0.9)

ax1.set\_title('3D-график logL(M, σ)')

ax1.set\_xlabel('M')

ax1.set\_ylabel('σ')

ax1.set\_zlabel('logL')

ax2 = fig.add\_subplot(1, 2, 2)

cs = ax2.contourf(M\_vals, sigma\_vals, logL.T, levels=30, cmap='viridis')

ax2.plot(M\_max, sigma\_max, 'ro', label='максимум')

ax2.set\_title('Контур logL(M, σ)')

ax2.set\_xlabel('M')

ax2.set\_ylabel('σ')

plt.colorbar(cs, ax=ax2)

ax2.legend()

plt.tight\_layout()

plt.show()

x\_c = 10.0

eta = np.random.normal(0, 1, N)

z = x\_c + eta

sum\_z = np.sum(z)

sum\_z2 = np.sum(z\*z)

x\_vals = np.linspace(0.8\*x\_c, 1.2\*x\_c, 180)

sigma\_n\_vals = np.linspace(0.1, 2.0, 220)

x\_grid, sn\_grid = np.meshgrid(x\_vals, sigma\_n\_vals, indexing='ij')

logL2 = const - N\*np.log(sn\_grid) - (sum\_z2 - 2\*x\_grid\*sum\_z + N\*x\_grid\*\*2) / (2\*sn\_grid\*\*2)

idx2 = np.unravel\_index(np.nanargmax(logL2), logL2.shape)

x\_max, sn\_max, L2\_max = x\_vals[idx2[0]], sigma\_n\_vals[idx2[1]], logL2[idx2]

print(f"\n[2] Максимум logL (искажённая модель): x = {x\_max:.4f}, σ\_n = {sn\_max:.4f}, logL = {L2\_max:.4f}")

print("\nТаблица logL(x, sigma\_n):")

x\_indices = np.linspace(0, len(x\_vals)-1, k, dtype=int)

sn\_indices = np.linspace(0, len(sigma\_n\_vals)-1, l, dtype=int)

header2 = ["σₙ\\x"] + [f"x{i+1} = {x\_vals[j]:.2f}" for i, j in enumerate(x\_indices)]

print("\t".join(header2))

for i, si in enumerate(sn\_indices):

    row = [f"σₙ{i+1} = {sigma\_n\_vals[si]:.2f}"]

    for xj in x\_indices:

        row.append(f"{logL2[xj, si]:.2f}")

    print("\t".join(row))

fig2 = plt.figure(figsize=(12, 5))

ax3 = fig2.add\_subplot(1, 2, 1, projection='3d')

ax3.plot\_surface(x\_grid, sn\_grid, logL2, cmap='plasma', edgecolor='none', alpha=0.9)

ax3.set\_title('3D-график logL(x, σₙ)')

ax3.set\_xlabel('x')

ax3.set\_ylabel('σₙ')

ax3.set\_zlabel('logL')

ax4 = fig2.add\_subplot(1, 2, 2)

cs2 = ax4.contourf(x\_vals, sigma\_n\_vals, logL2.T, levels=30, cmap='plasma')

ax4.plot(x\_max, sn\_max, 'ro', label='максимум')

ax4.set\_title('Контур logL(x, σₙ)')

ax4.set\_xlabel('x')

ax4.set\_ylabel('σₙ')

plt.colorbar(cs2, ax=ax4)

ax4.legend()

plt.tight\_layout()

plt.show()

**Выводы:**

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено моделирование функции правдоподобия и искаженной функции правдоподобия, были найдены значения, которые максимизируют данные функции. Путем сравнения полученных параметров с исходными значениями можно сделали вывод, что полученные результаты близки к исходным данным. Это свидетельствует о корректности и эффективности метода максимального правдоподобия в данном случае.