101 – GROUPES OPÉRANT SUR UN ENSEMBLE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Introduction

Certains ensembles mathématiques sont en interaction avec d'autres. Par exemple l'ensemble des symétries d'un cube est en interaction avec l'ensemble des sommets de ce cube : chaque symétrie du cube a pour effet de permuter les sommets du cube. L'ensemble des isométries de l'espace affine est en interaction avec l'ensemble des points de cet espace : à tout couple formé par une isométrie et un point x de l'espace, on peut associer le point image de l'isométrie au point x. La théorie des actions de groupe permet de formaliser et d'étudier ces interactions. Une action renseigne à la fois sur l'ensemble opérant et sur l'ensemble opéré. Ces actions de groupes permettent aussi, couplées avec la notion de relation d'équivalence, de réunir des objets d'un ensemble suivant certaines caractéristiques ou qualités.

Dans la première partie on présente tout d'abord le vocabulaire lié aux actions de groupes : la définition d'une action, le fait que l'on peut voir une action de groupe sur un ensemble X comme un morphisme dans les permutations de X. On définit alors la relation d'équivalence pour l'action et les orbites : construire des orbites permet de réunir des objets d'un ensemble suivant certaines caractéristiques ou qualités. On donnes quelques exemples simples, par exemple l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$.On en arrive au résultat central de cette partie : l'équation aux classes. Elle nous donne un lien entre le nombre d'éléments du groupe et le cardinal d'une orbite. Elle est souvent très utile pour compter les éléments du groupe ou de l'ensemble X. On expose les conséquences de l'équation aux classe dans la partie suivante.

Dans la partie 2, on donne deux exemples incontournables d'actions de groupe sur les groupes finis : l'action par translation et l'action par conjugaison. Avec l'action par translation on déduit notamment le théorème de Lagrange, central en théorie des groupes. Un exemple un peu plus exotique est celui de l'isomorphisme entre le groupe projectif linéaire et le groupe symétrique : cela fait l'objet de mon premier développement. Ces actions de groupe nous permettent d'obtenir les théorèmes de Sylow et je montre en développement le premier théorème de Sylow avec son corollaire. Les théorème de Sylow constituent une réciproque partielle du théorème de Lagrange.

Enfin en dernière partie on donne des exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices : on étudie les classes d'équivalence et de similitude.

Cadre : G désigne un groupe et 1 son élément neutre. Soit X un ensemble.

1 Premières définitions et propriétés

1.1 Action et stabilisateur [Per96]

Définition 1. G agit sur X

Remarque 2. Equivalent à se donner un homomorphisme $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{S}(X)$

Exemple 3. — $\mathcal{S}_n$ agit sur $[1,n]$ via : $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n \times [1,n] & \longrightarrow & [1,n] \\ (\sigma, x) & \longmapsto & \sigma(x) \end{array}$

— $\mathrm{GL}(E)$ agit sur E

Définition 4. Stabilisateur. C'est un sous groupe de G.

Exemple 5. Dans l'action de $\mathcal{S}_n$ sur $[1,n]$, le stabilisateur d'un point est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

Définition 6. On dit que G opère fidèlement si $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{S}(X)$ est injective i.e. si $g.x = x \ \forall x \in X \Rightarrow g = 1$.

Remarque 7. L'action est fidèle ssi $\cap_{x\in X} Stab(x) = \{1\}$.

Remarque 8. $G/Ker(\varphi)$ opère fidèlement sur X.

1.2 Orbites [Per96]

Définition 9. $x \sim y \iff \exists g \in G, \ \ g.x = y$ est une relation d'equivalence sur X et ses classes sont appelées orbites, notée $o(x)$.

Définition 10. Opération transitive

Exemple 11. Les orbites du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ dans son opération naturelle sur $\mathbb{R}^n$ sont les sphères de centre l'origine.
$\langle(1,\ldots,n)\rangle$ agit transitivement sur $[1,n]$.

Application 12. *Décomposition d'une permutation en cycles à supports disjoints.*

1.3 Equation aux classes [Per96], [Com98]

Proposition 13. *L'application* $: \begin{array}{ccc} G/Stab(x) & \longrightarrow & o(x) \\ \bar{g} & \longmapsto & g.x \end{array}$ *est une bijection. Si* G *est fini,* $|o(x)| \mid |G|$.

Théorème 14 (Equation aux classes). [Com98, p.45] *(sans utiliser le fait que* $|G/Stab(x)| = |G|/|Stab(x)|$ *car on n'a pas encore introduit le théorème de Lagrange.)*

Application 15 (Théorème de Cauchy)**.**

Théorème 16 (Formule de Burnside). [Com98, p.45] *On note* $Fix(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$. *Alors le nombre d'orbites sous l'action de* G *est* $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$.

Application 17. [NNST94, p.100] *Il y a 57 façons différentes de colorier un cube avec les couleurs bleu, blanc, rouge.*

2 Action de groupe sur les groupes finis

2.1 Action par conjugaison [Per96]

Définition 18. Action par conjugaison de G sur lui même.

Remarque 19.
- $Stab(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$
- a est fixé par $G \iff |o(a)| = 1 \iff a \in Z(G)$.

Exemple 20. Les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_n$ sont les éléments de même type.

Application 21. *Le centre d'un p-groupe non trivial n'est pas réduit à* $\{1\}$.

Application 22. *[FG97] Un groupe d'ordre* p^2 *est abélien.*

Théorème 23 (Wedderburn).

2.2 Action par translation [Per96]

Définition 24. H sg de G. Action par translation de G sur X.

Exemple 25.
- L'action de $G \longrightarrow G$ par translation est fidèle et transitive.
- On peut faire agir H sg de G sur G par translation.
- G opère sur G/H par translation.

Application 26 (Théorème de Cayley)**.** *Si* G *est fini de cardinal* n, G *est isomorphe à un sous groupe de* $\mathcal{S}_n$.

Application 27 (Théorème de Lagrange)**.**

Application 28 (Un isomorphisme exceptionnel)**.** $PGL(2, \mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{S}_5$

2.3 Théorèmes de Sylow [Per96]

Définition 29. Groupe de Sylow.

Application 30. *Existence des p-Sylow dans un groupe fini d'ordre* n *avec* $p \mid n$

Corollaire 31. *Existence d'un* p^α *sous-groupe pour tous les* α.

Théorème 32 (Les p-Sylow sont conjugués).

Application 33. *S'il y a qu'un seul p Sylow il est distingué.*

Théorème 34 (Nombre de p Sylow).

Exemple 35. Utilisation des théorèmes de Sylow
- Un groupe d'ordre 30 n'est pas simple et plus généralement un groupe d'ordre pqr avec p, q, r premiers tous distincs, est simple.
- Un groupe d'ordre 255 est cyclique [Ort04]

3 Action de groupe sur les matrices

3.1 Classes d'équivalence [CG17]

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $n, p \in \mathbb{N}$.

Définition 36. L'application suivante est une action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée action de Steinitz.

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q), M) & \longmapsto & PMQ^{-1} \end{array}$$

On dira que deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour cette action.

Théorème 37. *Toute matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *de rang* r *est équivalente à* $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 38. *Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang. On note O_r l'orbite des matrices de rang r.*

Proposition 39. (voir poly Sage) *On suppose que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (il faut une topologie !). Pour tout $r \leq min(p,n)$, l'adhérence de O_r est donnée par la réunion disjointe :*

$$\bar{O_r} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$$

3.2 Classes de similitude

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 40. L'application suivante est une action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, M) & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$$

On dira que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si elles sont dans la même orbite pour cette action.

Proposition 41. *Deux matrices semblables ont même rang, trace, déterminant, polynôme caractéristique et polynôme minimal.*

Références

[CG17] P. Caldero and J. Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Number vol. 1 in Mathématiques en devenir. Calvage et Mounet, 2017.

[Com98] F. Combes. *Algèbre et géométrie : agrégation, CAPES, licence, maîtrise*. CAPES-agrégation. Bréal, 1998.

[FG97] S. Francinou and H. Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Algebre 1*. Number vol. 1. Masson, 1997.

[NNST94] P.M. Neumann, P.M. Neumann, G.A. Stoy, and E.C. Thompson. *Groups and Geometry*. Oxford science publications. Oxford University Press, 1994.

[Ort04] P. Ortiz. *Exercices d'algèbre*. CAPES-agrég mathématiques. Ellipses, 2004.

[Per96] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. CAPES-agrég mathématiques. Ellipses, 1996.

Remarques

— Rajouter des exemples

— Pour le coloriage du cube http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/gelineau/devagreg/Formule_Burnside_Applications_Combinatoires.pdf

Rapport du jury

Dans cette leçon, il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche via le morphisme du groupe agissant vers le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. La formule des classes et ses applications immédiates sont incontournables. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des groupes ou des anneaux. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide). S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en décrivant les actions naturelles de PGL sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes. En notant que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations, ils pourront en déterminer le caractère.