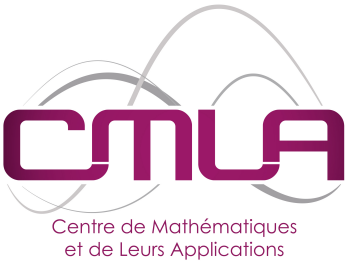


École Normale Supérieure Paris-Saclay

Centre de Mathématiques et de Leurs Applications

Rapport de stage de licence

Bundle adjustment with known positions

Ajustement de faisceaux avec positions de caméras connues

Antoine BARRIER
antoine.barrier@ens-paris-saclay.fr
Ségolène MARTIN
segolene.martin@ens-paris-saclay.fr

Encadrants : Carlo DE FRANCHIS
carlodef@gmail.com
Jean-Michel MOREL
moreljeanmichel@gmail.com

25 Janvier 2017 — 29 Juin 2017

Introduction

Contexte et situation

La modélisation en 3 dimensions à partir d'images réalisées par une ou plusieurs caméra(s) est un problème dont les applications se multiplient avec le développement de nouvelles technologies : cartographie 3D, estimation des dégâts lors d'une catastrophe naturelle, estimation de la fonte des glaciers ...

La technique de modélisation 3D la plus couramment employée s'appuie sur le principe de la **vision stéréoscopique** : les relations entre deux photographies d'une même scène rigide prises depuis deux points de vue différents permettent de reconstituer le relief de la scène.

Le problème du Bundle Adjustment

Cependant, pour calculer les coordonnées 3D d'un point identifié sur plusieurs images, il est nécessaire de connaître les **positions** et les **orientations** des caméras. Ce n'est en général pas le cas, ou alors à une incertitude près qui ne permet pas d'avoir une reconstitution satisfaisante.

Actuellement, la meilleure technique pour réestimer les paramètres (orientations et position des caméras) est de minimiser non linéairement les erreurs de reprojection dans les images [6]. Cette technique est connue sous le nom de Bundle Adjustment [7]. Cependant, les algorithmes d'optimisation actuels utilisés pour le Bundle Adjustment (on citera notamment les librairies `openMVG` [2, 4, 3] et `bundler` [5]) ne semblent pas fonctionner de manière totalement satisfaisante : s'ils permettent bien de remodéliser la scène 3D, c'est en fait plus du à une compensation d'erreurs qu'à une estimation exacte des paramètres de la caméra. **On souhaiterait donc une nouvelle méthode qui permet de réestimer précisément ces paramètres.**

Le problème semble assez mal posé étant donné que les algorithmes de bundle adjustment trouvent des configurations pour lesquelles tous les paramètres concordent mais qui ne sont pas la configuration réelle. **Pour simplifier le problème, nous nous sommes placés dans un cas particulier : celui où les positions des caméras sont connues**, c'est-à-dire sont assez précises pour ne pas nécessiter de correction. Cette hypothèse permet de simplifier la phase de bundle adjustment (puisqu'il y a moins de paramètres à réestimer) et semble de plus amplement justifiée dans de nombreuses situations, notamment avec des images satellitaires puisque les trajectoires sont contrôlées et connues avec une grande précision. **C'est alors la mesure de l'orientation qui est la plus sensible**, car suivant la distance entre la caméra et la scène, une erreur angulaire même très faible peut induire une erreur importante sur la position des points 3D (un milli-radian à 100 mètres de distance donne une erreur de 10 cm). Dans le cas satellitaire, les caméras sont à près de 800 km des scènes ciblées ...

La résolution de ce problème pourrait donc permettre une cartographie 3D précise de la Terre, et automatisée, dans le sens où elle ne nécessiterait pas de points de contrôle permettant de corriger les erreurs des algorithmes.

Objectifs

L'objectif de ce stage est d'étudier le problème du bundle adjustment dans le cas où les positions des caméras sont supposées connues précisément. On souhaite **trouver une stratégie pour trouver à la fois les angles de rotation réels des caméras avec une grande précision mais aussi une reconstruction 3D de la scène à partir de mesures faites uniquement sur les angles des caméras et les images** (c'est-à-dire des correspondances entre images obtenues de façon entièrement automatique avec des algorithmes comme la méthode SIFT dont la précision est de l'ordre de 0.1 pixel). On pourra alors programmer un algorithme capable de retourner une estimation de ces paramètres ainsi que des points de correspondances entre images.

Travail

Au cours de ce stage, nous avons eu différentes tâches à réaliser :

- un travail bibliographique pour assimiler les connaissances sur le sujet,
- une identification des difficultés de notre problème, mais aussi des simplifications apportées par les hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés,
- une implémentation en Python de nos méthodes, mais aussi des méthodes de Bundle Adjustment classique, afin de les comparer,
- tester notre algorithme sur des données simulées puis sur des données réelles.

Remerciements

Nous souhaitons remercier Jean-Michel MOREL pour ses nombreuses idées ainsi que Carlo DE FRANCHIS pour son aide et les nombreuses heures qu'il nous a consacré.

Plan du rapport

1 Description du problème

1.1 Rappels sur les caméras

On modélise une caméra par la donnée d'une matrice de taille 3×4 de la forme $\mathsf{P} = \mathsf{KR}[\mathsf{I}_3 \mid -\mathsf{C}]$ où :

- K contient les paramètres internes de la caméra : distance focale, résolution, informations sur le repère de l'image ...,
- R modélise l'orientation de la caméra : c'est une matrice de rotation,
- C est la position du centre de la caméra.

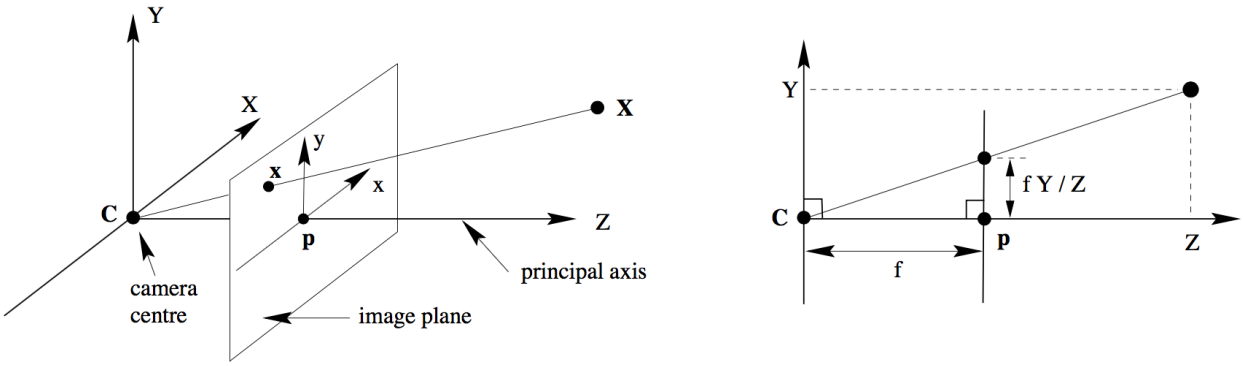


FIGURE 1 – Modélisation d'une caméra

Pour des descriptions plus détaillées, on pourra se référer au chapitre 6 du livre de HARTLEY et ZISSERMAN [1].

1.2 Situation et notations

On se place dans le référentiel terrestre noté $\mathbf{R}_T = (O, X_T, Y_T, Z_T)$.

On s'intéresse à K images prises par des caméras à K positions distinctes **connues précisément** pour lesquelles on a N points de correspondance (grâce à la méthode SIFT).

On note $\mathbf{R}_{cam\ i} = (\mathsf{C}_i, X_{cam\ i}, Y_{cam\ i}, Z_{cam\ i})$ le repère de la i-ième caméra, $\mathbf{R}_{im\ i}$ le repère du plan image de la i-ième caméra et on suppose précisément connues les coordonnées du centre C_i de chaque caméra.

On suppose de plus que les matrices K_i des paramètres internes des caméras sont toutes égales à

$$\mathsf{K} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où f est la focale de la caméra.

Pour des questions de compatibilité avec nos codes Python, on numérotera les caméras de 0 à $K-1$ et les points de 0 à $N-1$.

On dispose également :

— d'une **estimation** – pas assez précise – des angles de rotation des caméras, que l'on regroupe selon le vecteur :

$$\theta_0 = (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0, \dots, \tilde{\alpha}_{K-1}, \tilde{\beta}_{K-1}, \tilde{\gamma}_{K-1})^\top$$

où $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_i$ et $\tilde{\gamma}_i$ sont les angles de rotation estimés de la i-ième caméra respectivement par rapport à X_T, Y_T et Z_T. Ainsi, la matrice de rotation de la i-ième caméra se décompose sous la forme :

$$\mathrm{R}_i = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\gamma}_i) & -\sin(\tilde{\gamma}_i) & 0 \\ \sin(\tilde{\gamma}_i) & \cos(\tilde{\gamma}_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\beta}_i) & 0 & \sin(\tilde{\beta}_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\tilde{\beta}_i) & 0 & \cos(\tilde{\beta}_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\alpha}_i) & -\sin(\tilde{\alpha}_i) \\ 0 & \sin(\tilde{\alpha}_i) & \cos(\tilde{\alpha}_i) \end{pmatrix}$$

Remarque L'ordre des matrices et donc des trois rotations sous-entend que l'on considère des rotations définies de manière extrinsèque.

— d'une **estimation** – là encore pas assez précise [1] – des coordonnées des images sur chaque caméra des points pour lesquels on a une correspondance, regroupés selon le vecteur :

$$\mathbf{X}_0 = (\underbrace{\tilde{x}_0^0, \tilde{y}_0^0, \dots, \tilde{x}_i^0, \tilde{y}_i^0, \dots, \tilde{x}_{K-1}^0, \tilde{y}_{K-1}^0}_{\text{coord. des images du point 0}}, \dots, \underbrace{\tilde{x}_0^j, \tilde{y}_0^j, \dots, \tilde{x}_{K-1}^j, \tilde{y}_{K-1}^j}_{\text{coord. des images du point } j}, \dots, \underbrace{\tilde{x}_0^{N-1}, \tilde{y}_0^{N-1}, \dots, \tilde{x}_{K-1}^{N-1}, \tilde{y}_{K-1}^{N-1}}_{\text{coord. des images du point } N-1})^\top$$

où $(\tilde{x}_i^j, \tilde{y}_i^j)^\top$ sont les coordonnées estimées de l'image du j-ième point sur la i-ième caméra (donc exprimées dans le repère $\mathrm{R}_{im\ i}$).

1.3 Démarche

Notre problème consiste à estimer avec la meilleure précision possible les valeurs réelles θ_* des angles ainsi que $\mathbf{X}_*$ des coordonnées des points que l'on regroupera dans des vecteurs.

Pour cela, on dispose des valeurs de θ_0 et de $\mathbf{X}_0$ ainsi que des conditions imposées par les correspondances des points, à savoir le fait que pour tout $0 \leqslant j \leqslant N-1$ fixé, on sait que les droites $(\mathrm{C}_i \mathbf{x}_i^j)$ sont toutes sécantes en un même point (qui est le j-ième point de correspondance mais dont on ne connaît pas les coordonnées).

Ces conditions vont nous permettre de voir notre estimation $(\theta_a, \mathbf{X}_a)$ de $(\theta_*, \mathbf{X}_*)$ comme la solution d'une équation du type $F(\theta, \mathbf{X}) = 0$ au voisinage de $(\theta_0, \mathbf{X}_0)$.

1. les algorithmes de correspondance n'ont pas une précision parfaite

2 Formules associées au problème

2.1 Deux caméras et un point

On considère ici le cas où $K = 2$ et $N = 1$.[2]

On a $\theta_0 = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_2)^\top$ et $\mathbf{X}_0 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2)^\top$.

Notons $\theta_a = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^\top$ et $\mathbf{X}_a = (x_1, y_1, x_2, y_2)^\top$ les angles et positions que l'on va estimer.

On sait que les droites de projection du point **X** sur les deux caméras sont sécantes (en **X**). On obtient alors facilement l'existence de λ et μ tels que[3] :

$$\tilde{\mathsf{C}}_1 + \lambda \mathsf{R}_1^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_1 = \tilde{\mathsf{C}}_2 + \mu \mathsf{R}_2^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_2 \ (= \tilde{\mathbf{X}})$$

Autrement dit les 3 droites de vecteurs directeurs respectivement $\tilde{\mathsf{C}}_2 - \tilde{\mathsf{C}}_1$, $\mathsf{R}_2^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_2$ et $\mathsf{R}_1^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_1$ sont coplanaires, ce qui se traduit par le fait que :

$$\det(\mathsf{R}_1^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_1 \mid \mathsf{R}_2^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_2 \mid \tilde{\mathsf{C}}_2 - \tilde{\mathsf{C}}_1) = 0 \tag{1}$$

Calculons les valeurs de $R_1^{-1}K^{-1}\mathbf{x}_1$ et $R_2^{-1}K^{-1}\mathbf{x}_2$:

Pour simplifier les expressions on notera c_θ pour $\cos(\theta)$ et s_θ pour $\sin(\theta)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_i^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & s_{\alpha_i} \\ 0 & -s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\beta_i} & 0 & -s_{\beta_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\beta_i} & 0 & c_{\beta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\gamma_i} & s_{\gamma_i} & 0 \\ -s_{\gamma_i} & c_{\gamma_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/f & 0 & 0 \\ 0 & 1/f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & s_{\alpha_i} \\ 0 & -s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\beta_i} & 0 & -s_{\beta_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\beta_i} & 0 & c_{\beta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\gamma_i} & s_{\gamma_i} & 0 \\ -s_{\gamma_i} & c_{\gamma_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i/f \\ y_i/f \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & s_{\alpha_i} \\ 0 & -s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\beta_i} & 0 & -s_{\beta_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\beta_i} & 0 & c_{\beta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\gamma_i}x_i/f + s_{\gamma_i}y_i/f \\ -s_{\gamma_i}x_i/f + c_{\gamma_i}y_i/f \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & s_{\alpha_i} \\ 0 & -s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\beta_i}(c_{\gamma_i}x_i/f + s_{\gamma_i}y_i/f) - s_{\beta_i} \\ -s_{\gamma_i}x_i/f + c_{\gamma_i}y_i/f \\ s_{\beta_i}(c_{\gamma_i}x_i/f + s_{\gamma_i}y_i/f) + c_{\beta_i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{\beta_i}(c_{\gamma_i}x_i/f + s_{\gamma_i}y_i/f) - s_{\beta_i} \\ c_{\alpha_i}(-s_{\gamma_i}x_i/f + c_{\gamma_i}y_i/f) + s_{\alpha_i}[s_{\beta_i}(c_{\gamma_i}x_i/f + s_{\gamma_i}y_i/f) + c_{\beta_i}] \\ s_{\alpha_i}(s_{\gamma_i}x_i/f - c_{\gamma_i}y_i/f) + c_{\alpha_i}[s_{\beta_i}(c_{\gamma_i}x_i/f + s_{\gamma_i}y_i/f) + c_{\beta_i}] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous verrons par la suite que l'on a surtout besoin de calculer les dérivées partielles du déterminant (1) par rapport aux variables $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, x_i$ et y_i.

Notons $\det(\mathsf{R}_1^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_1 \mid \mathsf{R}_2^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_2 \mid \tilde{\mathsf{C}}_2 - \tilde{\mathsf{C}}_1) = \det \begin{pmatrix} k^1 & l^1 & m^1 \\ k^2 & l^2 & m^2 \\ k^3 & l^3 & m^3 \end{pmatrix}$.

2. exceptionnellement on numérotera les caméras 1 et 2 et non 0 et 1, cela étant plus parlant dans une section théorique sans application directe en Python

3. les $\sim$ indiquent qu'on utilise des coordonnées non homogènes

Considérons alors les mineurs d'ordre 2 des deux premières colonnes et calculons les dérivées partielles [4] :

— de $f^2 \det \begin{pmatrix} k^1 & l^1 \\ k^2 & l^2 \end{pmatrix}$:

On rappelle que l'on a :

— $[fk^1] = c_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) - fs_{\beta_1}$
— $[fk^2] = c_{\alpha_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1) + s_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + fc_{\beta_1}]$
— $[fl^1] = c_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) - fs_{\beta_2}$
— $[fl^2] = c_{\alpha_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2) + s_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + fc_{\beta_2}]$

On obtient :

Variable	Dérivée partielle
α_1	$-[fl^1](-s_{\alpha_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1) + c_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + fc_{\beta_1}])$
α_2	$[fk^1](-s_{\alpha_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2) + c_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + fc_{\beta_2}])$
β_1	$(-s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) - fc_{\beta_1})[fl^2] - [fl^1]s_{\alpha_1}[c_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) - fs_{\beta_1}]$
β_2	$[fk^1]s_{\alpha_2}[c_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) - fs_{\beta_2}] - (-s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) - fc_{\beta_2})[fk^2]$
γ_1	$c_{\beta_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1)[fl^2] - [fl^1](c_{\alpha_1}(-c_{\gamma_1}x_1 - s_{\gamma_1}y_1) + s_{\alpha_1}s_{\beta_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1))$
γ_2	$[fk^1](c_{\alpha_2}(-c_{\gamma_2}x_2 - s_{\gamma_2}y_2) + s_{\alpha_2}s_{\beta_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2)) - c_{\beta_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2)[fk^2]$
x_1	$c_{\beta_1}c_{\gamma_1}[fl^2] - [fl^1](-c_{\alpha_1}s_{\gamma_1} + s_{\alpha_1}s_{\beta_1}c_{\gamma_1})$
x_2	$[fk^1](-c_{\alpha_2}s_{\gamma_2} + s_{\alpha_2}s_{\beta_2}c_{\gamma_2}) - c_{\beta_2}c_{\gamma_2}[fk^2]$
y_1	$c_{\beta_1}s_{\gamma_1}[fl^2] - [fl^1](c_{\alpha_1}c_{\gamma_1} + s_{\alpha_1}s_{\beta_1}s_{\gamma_1})$
y_2	$[fk^1](c_{\alpha_2}c_{\gamma_2} + s_{\alpha_2}s_{\beta_2}s_{\gamma_2}) - c_{\beta_2}s_{\gamma_2}[fk^2]$

— de $f^2 \det \begin{pmatrix} k^1 & l^1 \\ k^3 & l^3 \end{pmatrix}$:

On rappelle que l'on a :

— $[fk^1] = c_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) - fs_{\beta_1}$
— $[fk^3] = s_{\alpha_1}(s_{\gamma_1}x_1 - c_{\gamma_1}y_1) + c_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + fc_{\beta_1}]$
— $[fl^1] = c_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) - fs_{\beta_2}$
— $[fl^3] = s_{\alpha_2}(s_{\gamma_2}x_2 - c_{\gamma_2}y_2) + c_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + fc_{\beta_2}]$

On obtient :

Variable	Dérivée partielle
α_1	$-[fl^1](c_{\alpha_1}(s_{\gamma_1}x_1 - c_{\gamma_1}y_1) - s_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + fc_{\beta_1}])$
α_2	$[fk^1](c_{\alpha_2}(s_{\gamma_2}x_2 - c_{\gamma_2}y_2) - s_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + fc_{\beta_2}])$
β_1	$(-s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) - fc_{\beta_1})[fl^3] - [fl^1]c_{\alpha_1}[c_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) - fs_{\beta_1}]$
β_2	$[fk^1]c_{\alpha_2}[c_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) - fs_{\beta_2}] - (-s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) - fc_{\beta_2})[fk^3]$
γ_1	$c_{\beta_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1)[fl^3] - [fl^1](s_{\alpha_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + c_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1))$
γ_2	$[fk^1](s_{\alpha_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + c_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2)]) - c_{\beta_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2)[fk^3]$
x_1	$c_{\beta_1}c_{\gamma_1}[fl^3] - [fl^1](s_{\alpha_1}s_{\gamma_1} + c_{\alpha_1}s_{\beta_1}c_{\gamma_1})$
x_2	$[fk^1](s_{\alpha_2}s_{\gamma_2} + c_{\alpha_2}s_{\beta_2}c_{\gamma_2}) - c_{\beta_2}c_{\gamma_2}[fk^3]$
y_1	$c_{\beta_1}s_{\gamma_1}[fl^3] - [fl^1](-s_{\alpha_1}c_{\gamma_1} + c_{\alpha_1}s_{\beta_1}s_{\gamma_1})$
y_2	$[fk^1](-s_{\alpha_2}c_{\gamma_2} + c_{\alpha_2}s_{\beta_2}s_{\gamma_2}) - c_{\beta_2}s_{\gamma_2}[fk^3]$

— de $f^2 \det \begin{pmatrix} k^2 & l^2 \\ k^3 & l^3 \end{pmatrix}$:

On rappelle que l'on a :

4. on multiplie par f^2 pour simplifier les formules, cela étant sans importance

- $[fk^2] = c_{\alpha_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1) + s_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + fc_{\beta_1}]$
- $[fk^3] = s_{\alpha_1}(s_{\gamma_1}x_1 - c_{\gamma_1}y_1) + c_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + fc_{\beta_1}]$
- $[fl^2] = c_{\alpha_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2) + s_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + fc_{\beta_2}]$
- $[fl^3] = s_{\alpha_2}(s_{\gamma_2}x_2 - c_{\gamma_2}y_2) + c_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + fc_{\beta_2}]$

On obtient :

Variable	Dérivée partielle
α_1	$(-s_{\alpha_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1) + c_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + fc_{\beta_1}])[fl^3]$ $-[fl^2](c_{\alpha_1}(s_{\gamma_1}x_1 - c_{\gamma_1}y_1) - s_{\alpha_1}[s_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1))$
α_2	$[fk^2](c_{\alpha_2}(s_{\gamma_2}x_2 - c_{\gamma_2}y_2) - s_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + fc_{\beta_2}])$ $-(-s_{\alpha_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2) + c_{\alpha_2}[s_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + fc_{\beta_2}])[fk^3]$
β_1	$s_{\alpha_1}[c_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) - fs_{\beta_1}][fl^3]$ $-[fl^2]c_{\alpha_1}[c_{\beta_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) - fs_{\beta_1}]$
β_2	$[fk^2]c_{\alpha_2}[c_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) - fs_{\beta_2}]$ $-(s_{\alpha_2}[c_{\beta_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) - fs_{\beta_2}])[fk^3]$
γ_1	$(c_{\alpha_1}(-c_{\gamma_1}x_1 - s_{\gamma_1}y_1) + s_{\alpha_1}s_{\beta_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1))[fl^3]$ $-[fl^2](s_{\alpha_1}(c_{\gamma_1}x_1 + s_{\gamma_1}y_1) + c_{\alpha_1}s_{\beta_1}(-s_{\gamma_1}x_1 + c_{\gamma_1}y_1))$
γ_2	$[fk^2](s_{\alpha_2}(c_{\gamma_2}x_2 + s_{\gamma_2}y_2) + c_{\alpha_2}s_{\beta_2}(s_{\gamma_2}x_2 - c_{\gamma_2}y_2))$ $-(c_{\alpha_2}(-c_{\gamma_2}x_2 - s_{\gamma_2}y_2) + s_{\alpha_2}s_{\beta_2}(-s_{\gamma_2}x_2 + c_{\gamma_2}y_2))[fk^3]$
x_1	$(-c_{\alpha_1}s_{\gamma_1} + s_{\alpha_1}s_{\beta_1}c_{\gamma_1})[fl^3] - [fl^2](s_{\alpha_1}s_{\gamma_1} + c_{\alpha_1}s_{\beta_1}c_{\gamma_1})$
x_2	$[fk^2](s_{\alpha_2}s_{\gamma_2} + c_{\alpha_2}s_{\beta_2}c_{\gamma_2}) - (-c_{\alpha_2}s_{\gamma_2} + s_{\alpha_2}s_{\beta_2}c_{\gamma_2})[fk^3]$
y_1	$(c_{\alpha_1}c_{\gamma_1} + s_{\alpha_1}s_{\gamma_1})[fl^3] - [fl^2](-s_{\alpha_1}c_{\gamma_1} + c_{\alpha_1}s_{\beta_1}s_{\gamma_1})$
y_2	$[fk^2](-s_{\alpha_2}c_{\gamma_2} + c_{\alpha_2}s_{\beta_2}s_{\gamma_2}) - (c_{\alpha_2}c_{\gamma_2}y_2 + s_{\alpha_2}s_{\beta_2}s_{\gamma_2})[fk^3]$

On utilise alors la formule :

$$\det(\mathsf{R}_1^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_1 \mid \mathsf{R}_2^{-1}\mathsf{K}^{-1}\mathbf{x}_2 \mid \tilde{\mathsf{C}}_2 - \tilde{\mathsf{C}}_1) = m_1(k_2l_3 - k_3l_2) - m_2(k_1l_3 - k_3l_1) + m_3(k_1l_2 - k_2l_1)$$

où $m_1 = x_{C_2} - x_{C_1}$, $m_2 = y_{C_2} - y_{C_1}$ et $m_3 = z_{C_2} - z_{C_1}$

On obtient alors les dérivées partielles par rapport à chacune des variables de notre déterminant en prenant les combinaisons linéaires des trois tableaux précédents.

2.2 Généralisation

Lorsque l'on a plusieurs caméras et plusieurs points, on doit chercher $(\theta_a, \mathbf{X}_a)$ qui annulent tous les déterminants entre deux matrices et un point.

Posons alors $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{3K} \times \mathbb{R}^{2NK} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\binom{K}{2}N} \\ (\theta, \mathbf{X}) & \longmapsto & (\det^j_{i_1,i_2})_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant K \\ 0 \leqslant j \leqslant N-1}} \end{array}$ où $\det^j_{i_1,i_2}$ est le déterminant de la forme (1) associé aux caméras i_1, i_2 et au point j.

Notre problème consiste donc à chercher $(\theta_a, \mathbf{X}_a)$ qui annulent F au voisinage de $(\theta_0, \mathbf{X}_0)$.

2.2.1 Stratégie

On applique une formule de TAYLOR à l'ordre 1 :

$$F(\theta, \mathbf{X}) = F(\theta_0, \mathbf{X}_0) + dF_\theta(\theta_0, \mathbf{X}_0)d\theta + dF_{\mathbf{X}}(\theta_0, \mathbf{X}_0)d\mathbf{X} + o((d\theta, d\mathbf{X}))$$

où $d\theta = \theta - \theta_0$ et $d\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$.

On résout alors $F(\theta, \mathbf{X}) = 0$ au premier ordre (l'erreur étant supposée faible), c'est-à-dire on cherche $(d\theta, d\mathbf{X})$ tels que :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta_0, \mathbf{X}_0), \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}}(\theta_0, \mathbf{X}_0)\right) \begin{pmatrix} d\theta \\ d\mathbf{X} \end{pmatrix} = -F(\theta_0, \mathbf{X}_0)$$

Dans la suite, on notera $A := \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(\theta_0, \mathbf{X}_0)$ et $B := \dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{X}}(\theta_0, \mathbf{X}_0)$.

Notre problème consiste donc à inverser la matrice $M := (A, B)$. Cependant, comme on va avoir beaucoup de points de correspondance, on aura beaucoup plus d'équations que d'inconnues (le système est sur-déterminé), et donc notre matrice ne sera pas inversible. On espère donc que les équations à première vue incompatibles seront globalement redondantes et nous permettrons ainsi de gagner en précision. On va donc calculer la pseudo-inverse de M que l'on notera M^+.

La matrice $-M^+F(\theta_0, \mathbf{X}_0)$ fournit alors la meilleure approximation de $\begin{pmatrix} d\theta \\ d\mathbf{X} \end{pmatrix}$ au sens des moindres carrés.

On peut montrer que dans notre cas :

$$M^+ = (M^\top M)^{-1} M^\top$$

Algorithmiquement, la pseudo-inverse s'obtient à partir de la décomposition en valeurs singulières de M. On décompose $M = U\Sigma V^\top$ puis on calcule $M^+ = V\Sigma^{-1}U^\top$, où Σ^{-1} est l'inverse de la matrice diagonale Σ et s'obtient donc aisément.

Remarque Des bibliothèques Python permettrons de calculer les pseudo-inverses aisément.

2.2.2 Condition nécessaire sur le nombre de caméras

Pour calculer la pseudo inverse de $M = (A, B)$, on doit avoir plus d'équations que d'inconnues, c'est-à-dire que M doit avoir plus de lignes que de colonnes.

On rappelle que M possède $\binom{K}{2}N$ lignes et $3K + 2NK$ colonnes.

On résout donc $\binom{K}{2}N \geqslant (3 + 2N)K$, et on obtient :

$$\boxed{N(K-5) \geqslant 6}$$

Il faut donc au moins 6 caméras pour espérer calculer la pseudo-inverse.

3 Étude des matrices jacobiennes partielles A et B

3.1 Étude de la matrice A

A est la matrice jacobienne $D_\theta F \in \mathcal{M}_{\binom{K}{2}N,3K}$. On s'intéresse donc aux dérivées de F par rapport à tous les angles.

On remarque que les $\det^j_{i_1,i_2}$ ne dépendent que des angles α_{i_1}, β_{i_1}, γ_{i_1}, α_{i_2}, β_{i_2} et γ_{i_2}, et donc leurs dérivées par rapport à tous les angles associés aux caméras i telles que $i \neq i_1$ et $i \neq i_2$ sont nulles. Ainsi, la matrice A possède de nombreux 0. Essayons de comprendre la structure de A.

Pour commencer, choisissons une convention pour l'ordre des composantes de F (lignes de A) et des angles de θ (colonnes de A).

- Concernant les lignes, on associera aux lignes l comprises entre $\binom{K}{2}j \leqslant l < \binom{K}{2}(j+1)$ les déterminants associés au j-ième point de correspondance ($0 \leqslant j \leqslant N-1$), c'est-à-dire de la forme $\det^j_{i_1,i_2}$. Reste à choisir comment organiser au sein de ces groupes de lignes l'ordre des indices (i_1, i_2). On écrit les lignes dans l'ordre $(0,1)$, $(0,2), \dots (0,K-1)$, $(1,2), (1,3), \dots (1,K-1), \dots\dots (K-2,K-1)$.
- Concernant les colonnes, on dérivera pour A les composantes par rapport aux variables suivant l'ordre $\underbrace{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \alpha_{K-1}, \beta_{K-1}, \gamma_{K-1})}_{\theta^\top}$.

Exemple dans le cas $K = 4$: La matrice A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \text{ où } A_j = \begin{array}{c} \\ 6j \\ 6j+1 \\ 6j+2 \\ 6j+3 \\ 6j+4 \\ 6j+5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (i_1, i_2) \\ (0,1) \\ (0,2) \\ (0,3) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,3) \end{array}$$

Dans le cas général, A est composé des matrices A_j de taille $\binom{K}{2}$x$3K$.

Ensuite, les coefficients non nuls de A se calculent en utilisant les formules de la section précédente.

3.2 Étude de la matrice B

Commençons, comme pour A, par choisir une convention pour l'ordre des composantes de F (lignes de B) et des perturbations de δ (colonnes de B) :

- Concernant les lignes, on garde la même convention que pour A,
- Concernant les colonnes, on dérivera les composantes par rapport aux variables suivant l'ordre $\underbrace{\left(x_0^0, y_0^0, \dots, x_i^0, y_i^0, \dots, x_{K-1}^0, y_{K-1}^0, \dots\dots, x_0^j, y_0^j, \dots, x_{K-1}^j, y_{K-1}^j, \dots\dots, x_0^{N-1}, y_0^{N-1}, \dots, x_{K-1}^{N-1}, y_{K-1}^{N-1}\right)}_{\delta^\top}$.

Avec cette convention, on a encore un bon aperçu de la forme de B :

Exemple dans le cas $K = 4$: La matrice B est de la forme :

$$B = \text{diag}(B_1, \dots, B_j, \dots, B_N) \text{ où } B_j = \begin{array}{c} l \\ 6j \\ 6j+1 \\ 6j+2 \\ 6j+3 \\ 6j+4 \\ 6j+5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_0^j & y_0^j & x_1^j & y_1^j & x_2^j & y_2^j & x_3^j & y_3^j \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (i_1, i_2) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,4) \\ (2,3) \\ (2,4) \\ (3,4) \end{array}$$

Dans le cas général, B est donc une matrice diagonale par blocs avec $B_j \in \mathcal{M}_{\binom{K}{2},2N}$.

De même, les coefficients non nuls de B se calculent en utilisant les formules de la section précédente.

Remarques

- Par la suite, et comme nous allons le voir dans nos simulations, nous aurons besoin d'étudier notamment les conditionnements des matrices A et B.
- On retrouvera en Annexe A les fonctions de base permettant notamment l'implémentation des matrices A et B.

4 Simulations

Avant d'appliquer notre méthode sur des images satellites réelles, nous devons la tester avec des simulations. Nous avons utilisé pour cela Python. On trouvera en Annexe B les codes relatifs à cette partie.

4.1 Le cas satellitaire

4.1.1 Génération de données

Dans la réalité, un satellite situé à environ 800 km de la Terre capture des images terrestres d'environ 20 km par 20 km. Afin de simuler au mieux des données réelles, on souhaite donc modéliser des scènes vérifiant les critères suivants :

- on veut que les caméras visent plus ou moins un même point au centre de la zone à modéliser, que l'on appelera point de visée,
- les points de correspondance identifiés par les alogrithmes tels que la méthode SIFT doivent être situés dans la zone de 20 km par 20 km. Cependant, il ne faut pas négliger le relief terrestre : les points ne sont pas sur un plan, on laisse donc leur altitude varier de quelques kilomètres.

On génère ainsi aléatoirement N points de correspondance et K caméras correspondants à une telle situation.

L'étape la plus compliquée consiste à choisir les angles associés aux caméras pour qu'elles pointent le point de visée, que l'on définit arbitrairement comme le point $O = (0, 0, 0)$ (quitte à tout translater). Il est alors facile de voir (en utilisant des formules de changement de base) que, pour toute caméra i, le vecteur normalisé $-\frac{\vec{OC_i}}{\|\vec{OC_i}\|}$ doit être l'image de $(0, 0, 1)^\top$ par la matrice de rotation R_i^{-1} associée à la caméra. De plus, on remarque que l'on peut fixer l'angle γ à 0 sans pour autant empêcher que certains vecteurs soient l'image de $(0, 0, 1)^\top$ par R_i^{-1}. Avec ce choix, on détermine alors $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2[$ satisfaisants (cf. notre code).

On obtient avec notre code des situations comme celle-ci :

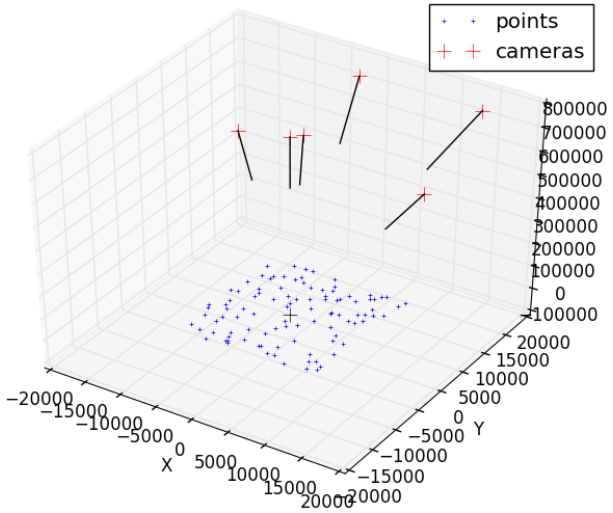


Figure 2 – Une situation avec 6 caméras et 100 points
(les traits noirs sont les directions de visée des caméras)

Remarque Évidemment l'échelle de variation des points de correspondance est très faible par rapport à l'altitude des satellites. Les points semblent donc être sur un même plan. C'est une spécificité du cas satellitaire sur laquelle nous reviendrons plus tard.

4.1.2 Perturbation des données

A partir des points et des caméras créés, on peut, en utilisant les matrices de projection des caméras, obtenir les coordonnées réelles des images des points sur nos caméras. On connaît donc les valeurs réelles des angles θ_* et des images $\mathbf{X}_*$ (cf. partie 1.3). On perturbe alors ces points et ces angles en ajoutant un bruit gaussien de paramètres $\sigma_{\mathbf{X}}$ et σ_θ. Typiquement, on a $\sigma_{\mathbf{X}} \simeq 10^{-2}$ px et $\sigma_\theta \simeq 10^{-5}$ rad. **On obtient alors θ_0 et $\mathbf{X}_0$.**

Remarque On rappelle que dans la réalité, on n'a pas accès à θ_* et $\mathbf{X}_*$, on nous fournit directement θ_0 et $\mathbf{X}_0$. Ainsi, dans la suite du code, on ne pourra bien évidemment pas utiliser θ_* et $\mathbf{X}_*$ pour nos calculs. On ne s'en servira que pour vérifier si nos estimations finales θ_a et $\mathbf{X}_a$ sont plus proches ou non des données réelles que ne le sont θ_0 et $\mathbf{X}_0$.

4.1.3 Estimation des paramètres réels

On utilise les données perturbées θ_0 et $\mathbf{X}_0$ à notre disposition pour calculer les matrices A et B, et donc la matrice M. Sa pseudo-inverse permet alors de calculer nos estimations θ_a et $\mathbf{X}_a$.

Reste à vérifier que l'on obtient des résultat cohérents, c'est-à-dire que θ_a et $\mathbf{X}_a$ soient plus proches de θ_* et $\mathbf{X}_*$ que θ_0 et $\mathbf{X}_0$ et que l'ensemble des déterminants de F soient diminués significativement.

4.1.4 Premiers résultats

Remarque Afin de calculer la solution au moindre carrés de notre problème, nous avons dans un premier temps calculé la matrice pseudo-inverse de notre problème avec la fonction `pinv` du package `numpy.linalg`, mais nous avons finalement constaté que l'éxécution de l'algorithme était plus rapide et que les résultats étaient toujours meilleurs en utilisant les matrices creuses (package `scipy.sparse`) et en calculant directement la solution aux moindres carrés sans passer par la pseudo-inverse avec la fonction `lsqr` du package `scipy.sparse.linalg`.

Afin de se faire une première idée sur la qualité des résultats que l'on obtient, on fait varier les différents paramètres (nombre de caméras, nombre de points, $\sigma_{\mathbf{X}}$, σ_θ, ...). Pour chaque ensemble de paramètres fixés, on réalise plusieurs expériences (une quinzaine ici) de simulation de données et de réestimations. Pour chacune d'entre elle, on affiche alors sur un graphe les erreurs initiales et les erreurs après correction des différents indicateurs (erreurs selon les angles, selon les points et selon les déterminants). Plus précisément (exemple pour l'erreur angulaire) :

- en bleu, on affiche l'erreur initiale ($\theta_0 - \theta_*$),
- en rouge, on affiche l'erreur après correction ($\theta_a - \theta_*$),
- $\theta_0 - \theta_*$ et $\theta_a - \theta_*$ étant des vecteurs d'erreurs, on affiche avec des carrés l'erreur moyenne et avec des traits les erreurs maximale et minimale des différents vecteurs.

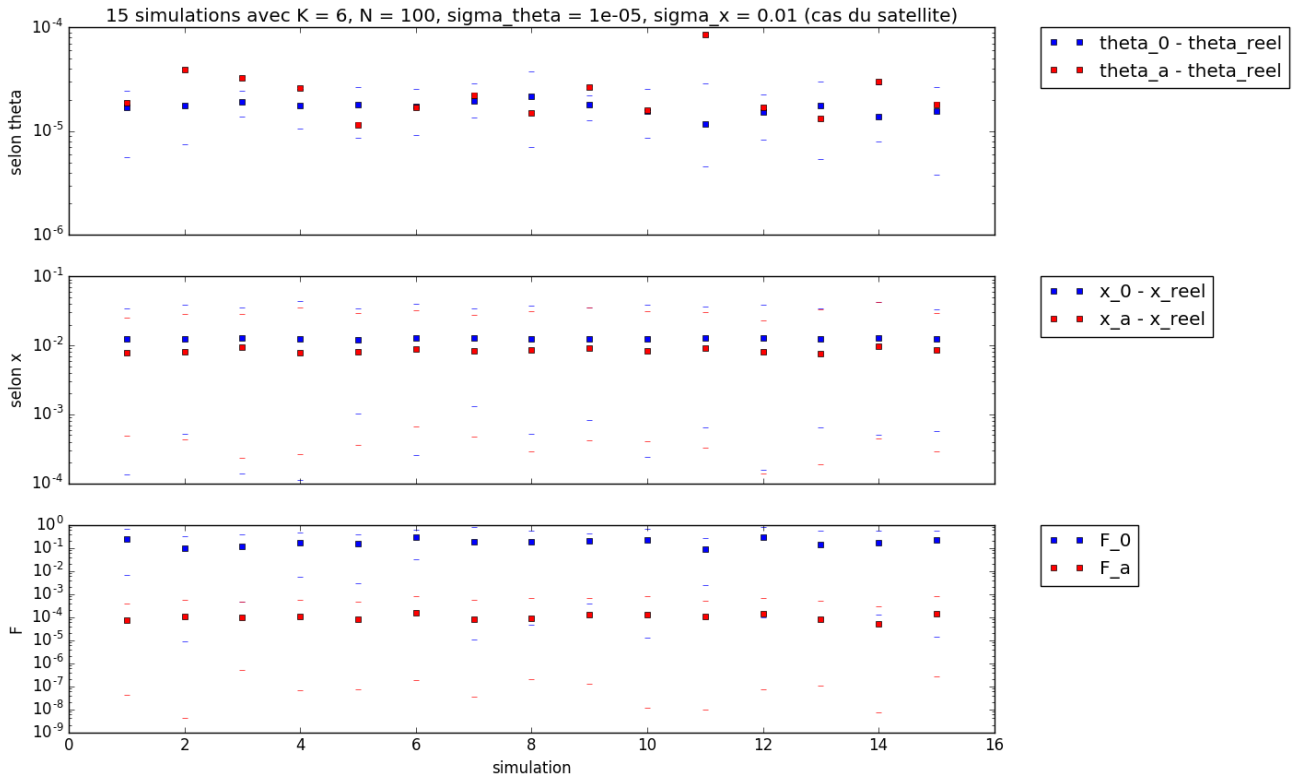


FIGURE 3 – 15 simulations générales

Quelques soient les paramètres, on observe en général :

- que **la valeur des déterminants est très bien diminuée** par notre nouvelle estimation,
- que **l'erreur des positions des images des caméras est légèrement diminuée**, mais pas significativement,
- que **l'erreur angulaire n'est pas souvent diminuée**.

On remarque donc que l'on a un problème puisque l'on n'arrive pas (assez) à se rapprocher des paramètres réels. On arrive quand même à diminuer les valeurs de F, ce qui est mauvais signe puisque cela pourrait signifier que F prend des valeurs très faibles sur toute une famille de solutions proche de notre solution réelle, et donc qu'il est difficilement possible de retrouver la valeur attendue. En réitérant l'algorithme, F continue à diminuer jusqu'à 0 alors que les solutions ne se rapprochent pas davantage vers la solution réelle : **on en conclut que le problème est mal posé, il n'y a pas unicité de la solution** (du moins numériquement). Ce résultat peut être simplement expliqué par l'idée qu'une perturbation sur les x pourra toujours être compensée par une perturbation sur les angles.

Dès lors nous avons mis en place différentes méthodes afin de forcer notre algorithme vers la bonne solution. Ces méthodes sont détaillées dans les sections suivantes.

4.1.5 Études plus approfondies : simplifications et conditionnements des matrices

Afin de déterminer la nature du problème, on le teste dans des situations moins compliquées : avec moins de caméras, moins de points ...

Une expérience importante consiste à voir ce qui se passe lorsque l'on essaye d'estimer uniquement les angles ou uniquement les coordonnées des images.

Tout d'abord, **fixons les coordonnées des images** et essayons de **réestimer uniquement les angles**. la matrice associée au problème est la matrice A.

— Si l'on suppose que les coordonnées des images ne sont pas perturbées et donc que $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_*$, on remarque que l'on arrive à diminuer les erreurs angulaires des caméras avec une bonne précision (on divise l'erreur par un facteur 3 ou 4 sur la figure ci-dessous). Les valeurs des déterminants sont elles aussi amplement diminuées par rapport aux erreurs initiales.
Sur le graphique suivant, on réalise, pour différentes valeurs de N, une dizaine de simulations (avec des coordonnées différentes à chaque fois) puis on calcule les moyennes des erreurs des vecteurs $\theta_a - \theta_*$ puis $F(\theta_a, \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_*)$ (en rouge ci-dessous) et $\theta_0 - \theta_*$ puis $F(\theta_0, \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_*)$ (en bleu).

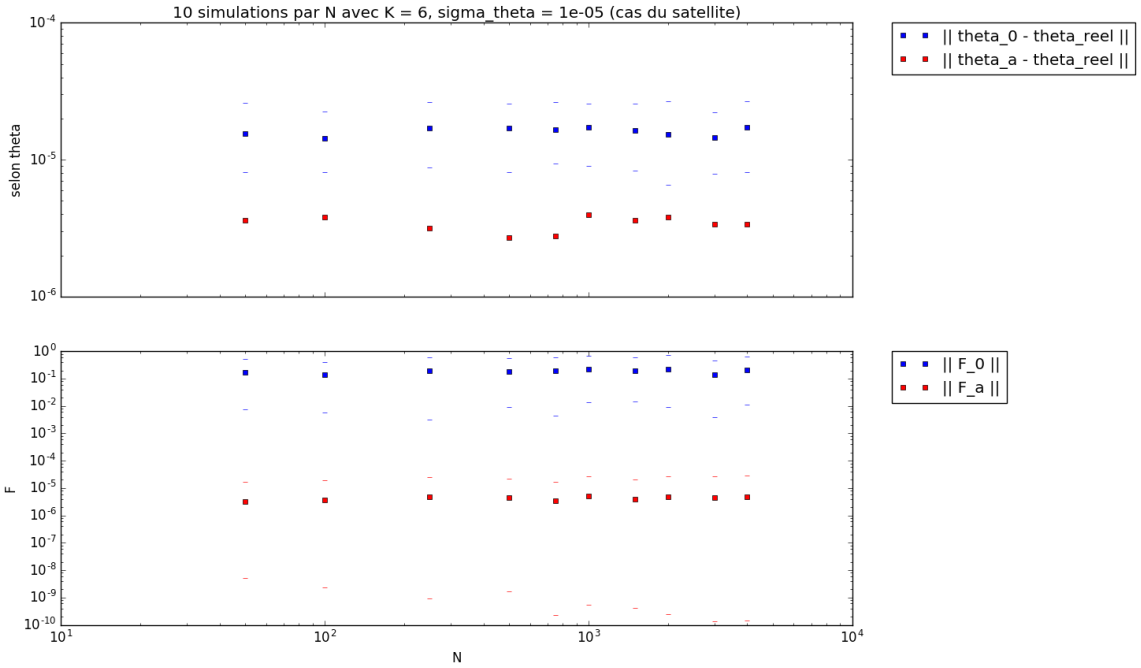


FIGURE 4 – Réestimation des angles à $\mathbf{X}_0$ fixé à $\mathbf{X}_*$

On voit bien que notre estimation finale est beaucoup plus proche de la valeur réelle et que la norme de F a été fortement diminuée. Par ailleurs, le nombre de points N ne semble pas avoir un rôle particulier.

— On peut aussi supposer qu'on a eu une perturbation des coordonnées des images (ce qui est le cas dans la réalité) mais que l'on ne cherche pas à la corriger. Dans ce cas, on a donc $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_*$. On obtient alors :
Cette fois-ci, on arrive à réestimer un peu mieux les angles, mais on observe surtout que la qualité de la réestimation dépend du nombre de points N : plus l'on a de points et plus on va pouvoir réestimer les angles précisément.
C'est à la fois une bonne nouvelle puisque l'on a en général accès à plusieurs centaines de points (voire quelques milliers) mais aussi une limitation puisque c'est les algorithme de type SIFT qui fournissent les points de correspondance et qui limitent le nombre de points.

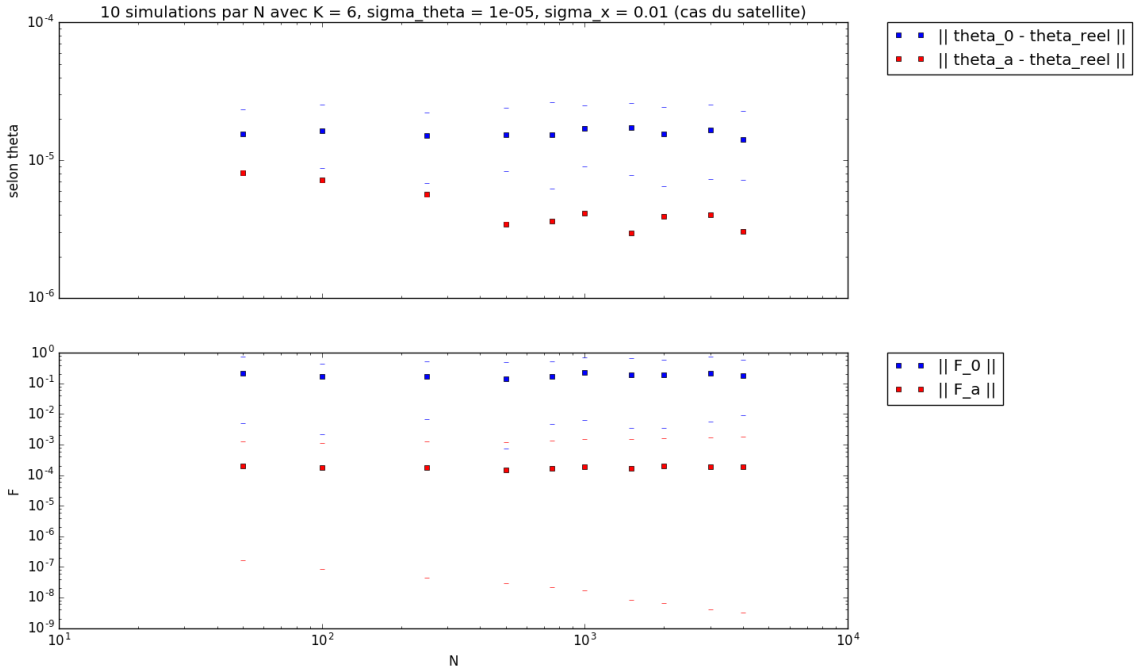


FIGURE 5 – Réestimation des angles à $\mathbf{X}_0$ perturbé mais non réestimé

Ensuite, on peut faire l'expérience inverse : **on fixe les angles des caméras et on essaye d'estimer uniquement les coordonnées des images**. La matrice associée au problème est alors la matrice B.

— Si l'on suppose $\theta_0 = \theta_*$ (on n'a pas d'erreur sur nos angles), on obtient :

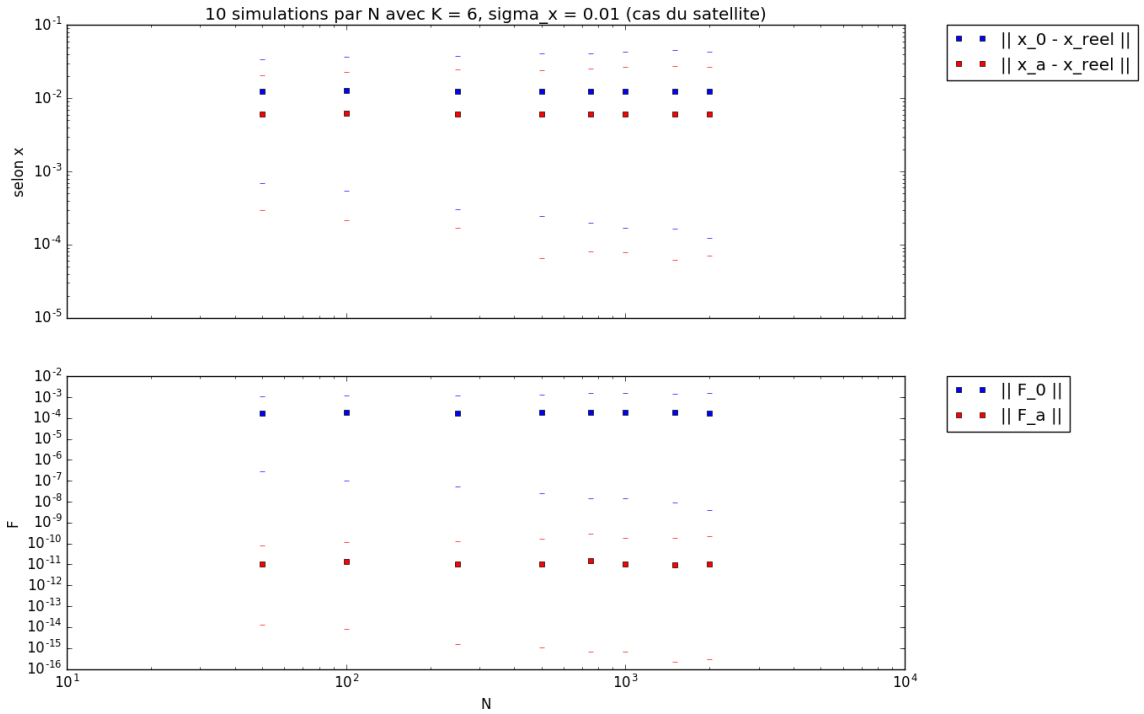


FIGURE 6 – Réestimation des points à θ_0 fixé à θ_*

On observe que notre réestimation se rapproche légèrement de la solution initiale, sans pour autant que

cela soit très significatif. La valeur des déterminants est quant à elle très fortement diminuée. Enfin, le nombre de points N ne semble pas avoir de rôle particulier.

— Si l'on rajoute une petite perturbation sur les angles, comme dans la réalité, on obtient :

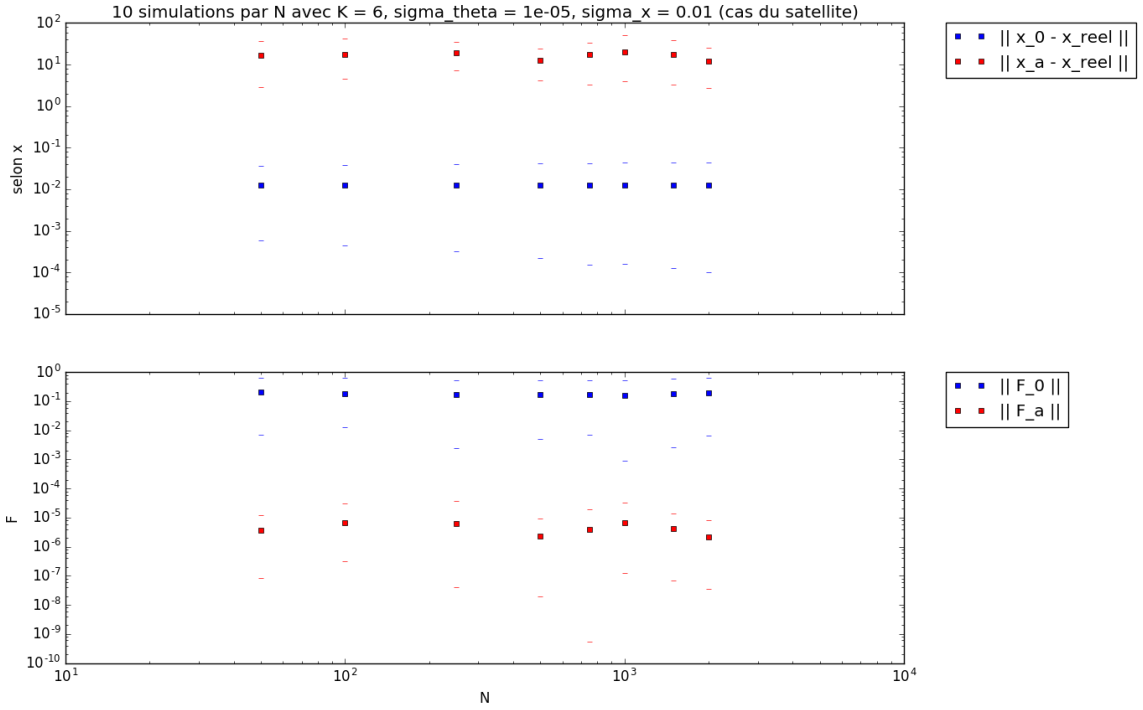


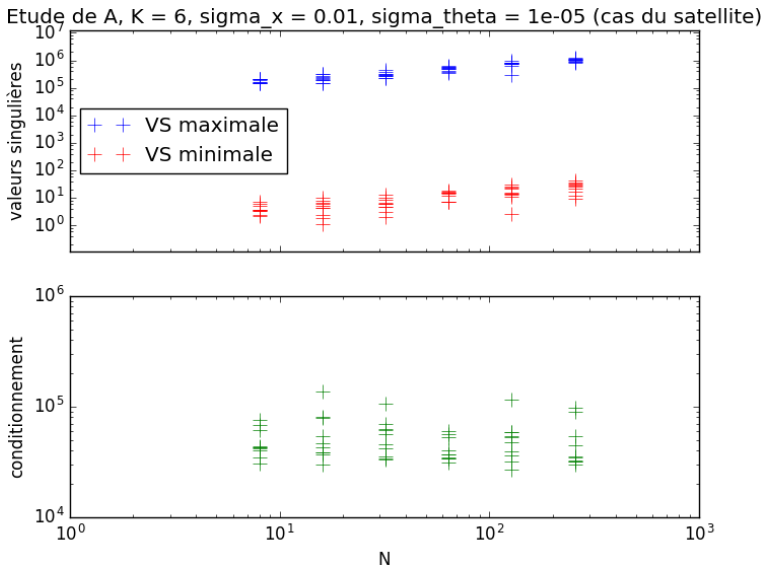
FIGURE 7 – Réestimation des points à θ_0 perturbé mais non réestimé

Les résultats ne sont pas très bons : les coordonnées réestimées s'éloignent des coordonnées initiales ...

Comment interpréter ces résultats ?

→ On peut s'attendre à un **problème de conditionnement** des différentes matrices.

Regardons alors les conditionnements des matrices A, B et M, pour une dizaine de matrices aléatoires pour chaque valeur de N testée :



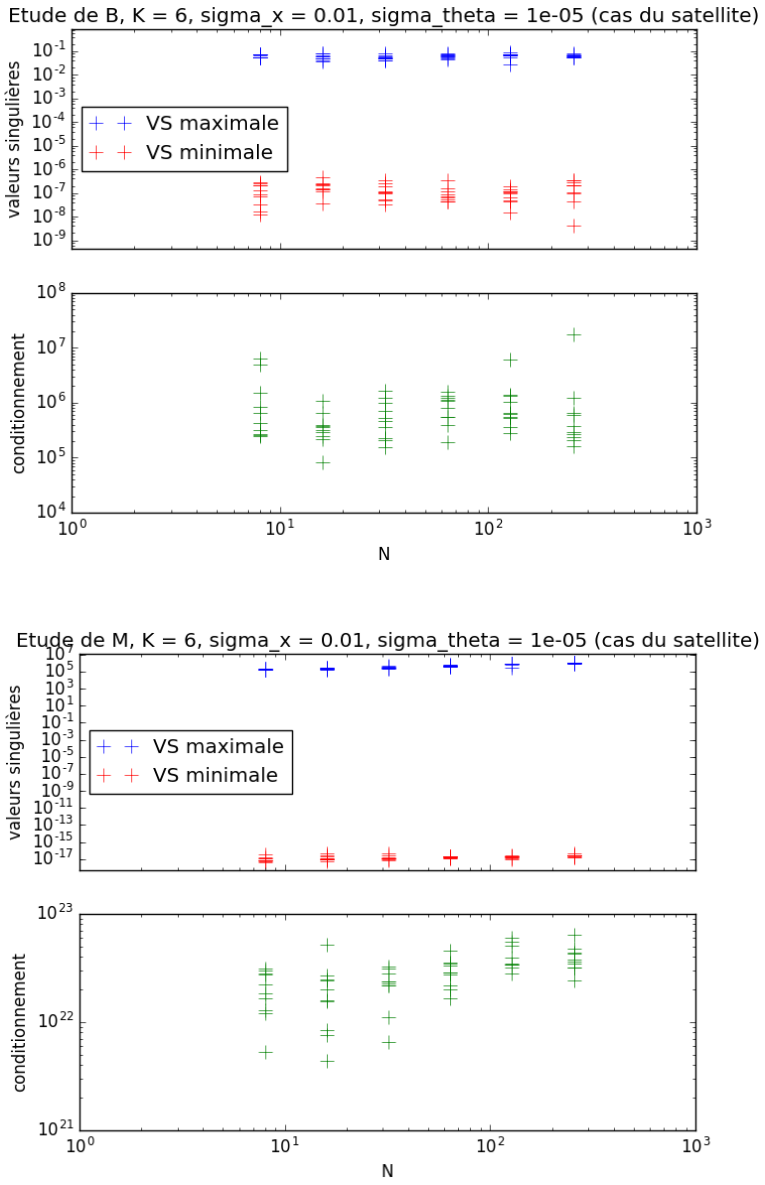


FIGURE 8 – Étude des conditionnements des matrices $A^\top A$, $B^\top B$ et $M^\top M$

On observe de très mauvais conditionnements pour le problème général associé à la matrice M (où l'on doit réestimer tous les paramètres). Les deux autres conditionnements pour les problèmes avec paramètres fixés sont moins monstrueux mais restent très importants.

4.2 Un cas terrestre

Essayons de voir ce que donne notre méthode si l'on change les ordres de grandeurs, en essayant par exemple de reconstituer une scène avec des images prises par des drones.

4.2.1 Génération de données

On procède un peu de la même manière pour générer nos données. Évidemment, on change tous les ordres de grandeurs : la scène s'étend sur une zone d'environ 100 m par 100 m, sur une hauteur d'une quarantaine de mètres environ.

On obtient avec notre code des situations comme celle-ci :

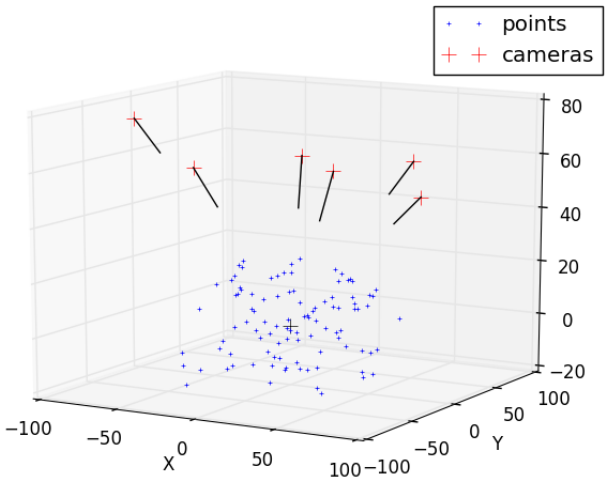


FIGURE 9 – Une situation avec 6 caméras et 100 points
(les traits noirs sont les directions de visée des caméras)

Cette fois-ci, les points de correspondances se situent dans un pavé et ne semblent plus être sur un même plan. Cela pourrait-il laisser présager un meilleur conditionnement des matrices ?

4.2.2 Perturbation des données

On perturbe de même nos données en ajoutant un bruit gaussien de paramètres $\sigma_{\mathbf{X}}$ et σ_θ. Les ordres de grandeurs des perturbations sont ici différents, on prend typiquement $\sigma_{\mathbf{X}} \simeq 10^{-2}$ px et $\sigma_\theta \simeq 10^{-2}$ rad.

4.2.3 Estimation des paramètres réels

Là encore, on utilise les données perturbées θ_0 et $\mathbf{X}_0$ à notre disposition pour calculer les matrices A et B, et donc la matrice M.

4.2.4 Premiers résultats

Quelques soient les paramètres, on observe en général :

— que **la valeur des déterminants est bien diminuée** par notre nouvelle estimation,

— que **la position des images des caméras n'est pas du tout corrigée**, puisque l'erreur augmente d'un facteur environ 10^3 après notre estimation,
— que **l'erreur angulaire reste au moins du même ordre** qu'initialement, voire dans certains cas est bien améliorée.

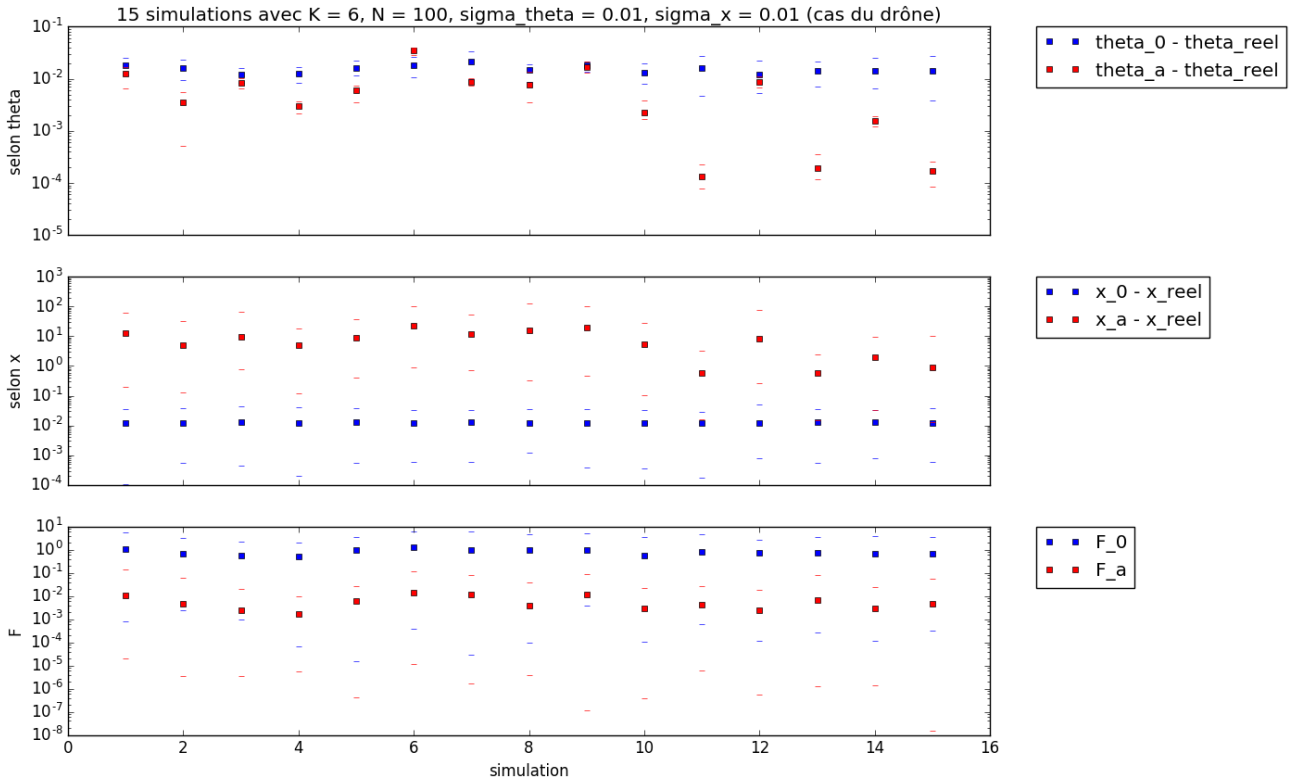


FIGURE 10 – 15 simulations générales

4.2.5 Étude plus approfondie : le conditionnement des matrices

Tout d'abord, si l'**on fixe les coordonnées des images** et qu'**on essaye d'estimer uniquement les angles** :

— Si l'on suppose que les coordonnées ne sont pas perturbées et donc que $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_*$, on remarque que l'on arrive toujours à retrouver les angles réels des caméras avec une très grande précision.
On voit que notre estimation finale est beaucoup plus proche de la valeur réelle et que la norme de F a été fortement diminuée.

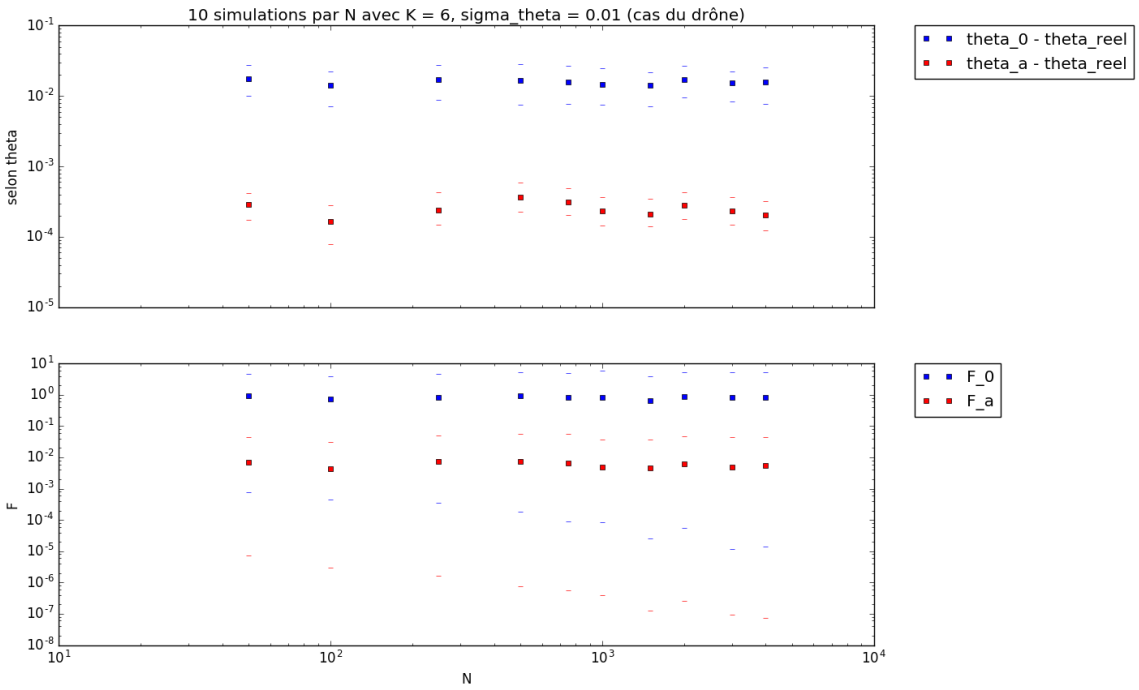


FIGURE 11 – Réestimation des angles à $\mathbf{X}_0$ fixé à $\mathbf{X}_*$

— On peut aussi supposer qu'on a eu une perturbation des coordonnées des images mais qu'on ne cherche pas à la corriger. Dans ce cas, on a donc $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_*$. On obtient alors des résultats très similaires :

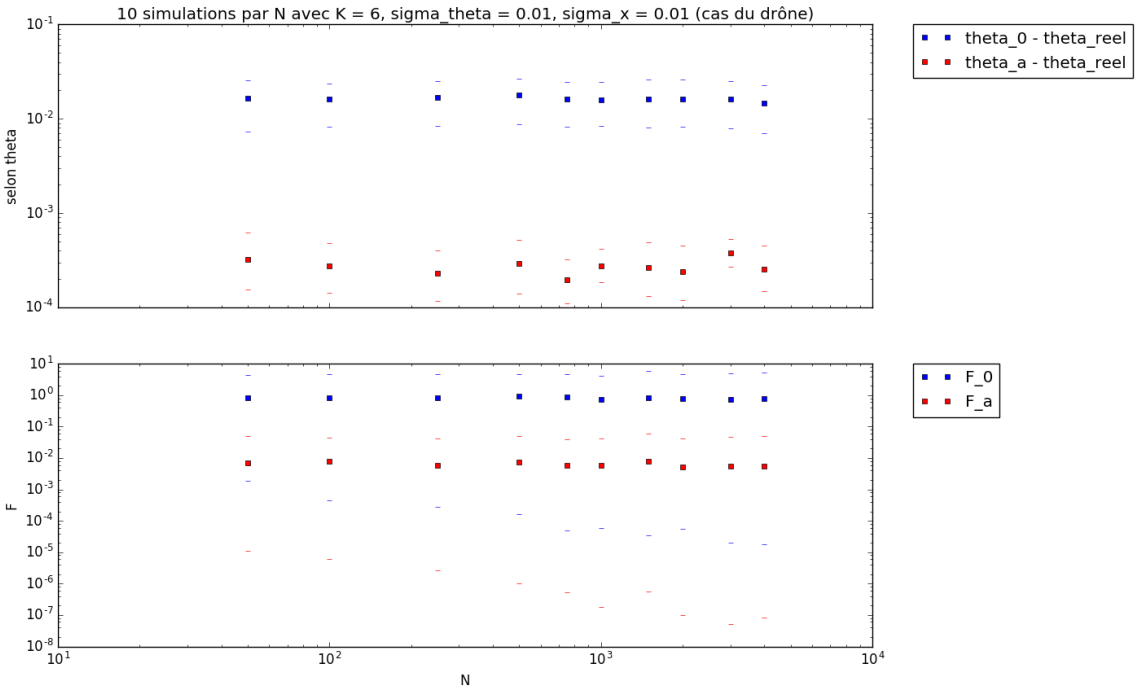


FIGURE 12 – Réestimation des angles à $\mathbf{X}_0$ perturbé mais non réestimé

On arrive donc une nouvelle fois à retrouver les paramètres angulaires réels avec une bonne précision. **C'est mieux que dans le cas satellitaire, puisque le nombre de points de correspondances ne semble pas avoir un rôle trop important, et que le facteur d'amélioration est toujours beaucoup plus élevé.**

Ensuite, on peut faire l'expérience inverse : **on fixe les angles des caméras et on essaye d'estimer uniquement les coordonnées des images**.

— Si l'on suppose $\theta_0 = \theta_*$ (on n'a pas d'erreur sur nos angles), on obtient par exemple :

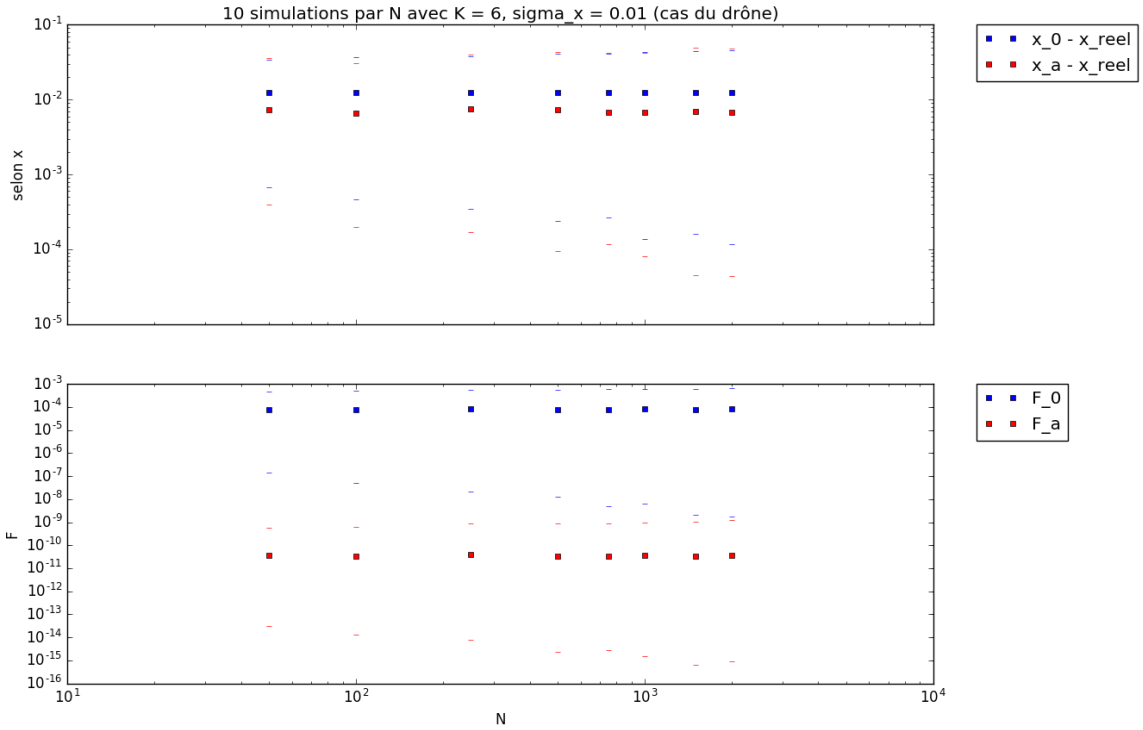
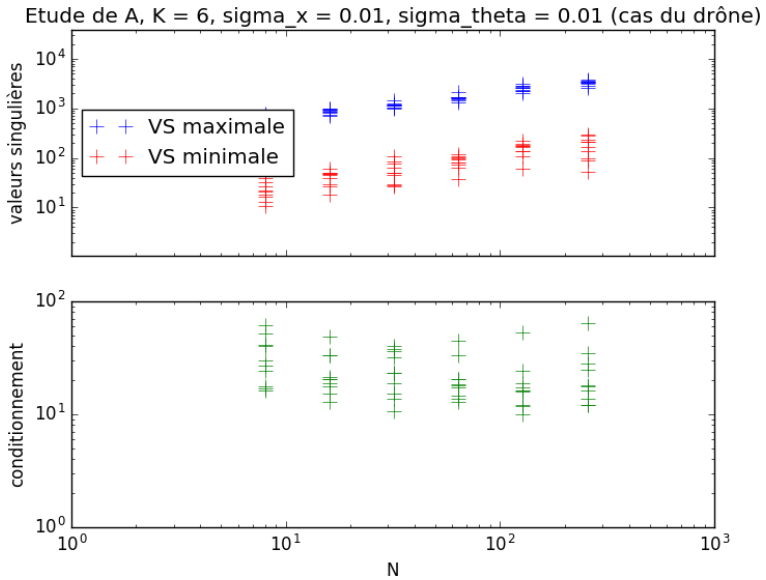


FIGURE 13 – Réestimation des points à θ_0 fixé à θ_*

Comme en satellitaire, on minimise F mais on ne se rapproche pas vraiment des coordonnées réelles.

— **Si l'on ajoute une légère perturbation sur θ_0, cela ne fonctionne plus du tout et les points sont envoyés loin des positions réelle et initiale.**

Regardons alors les conditionnements des matrices A, B et M (dix matrices aléatoires par valeur de N) :



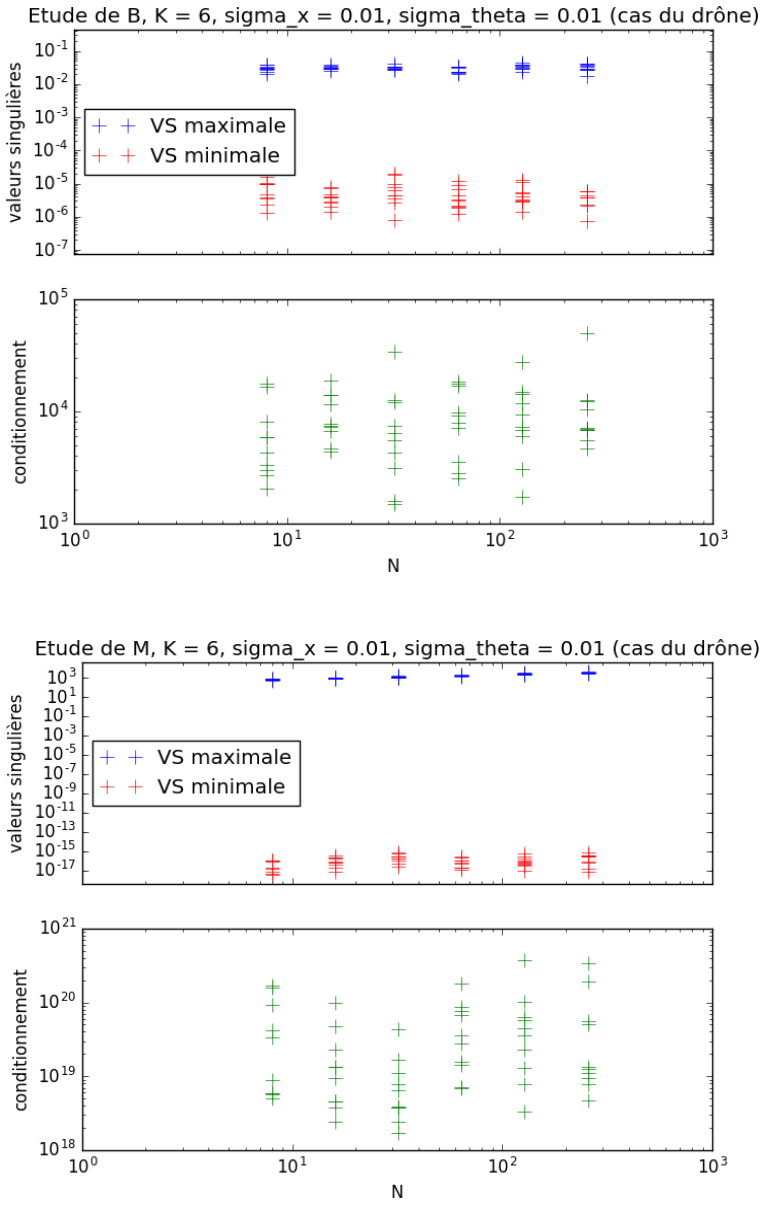


FIGURE 14 – Étude des conditionnements des matrices $A^\top A$, $B^\top B$ et $M^\top M$

On observe encore de très mauvais conditionnements pour le problème général associé à la matrice M. Le conditionnement de la matrice B (estimation des coordonnées des images) est lui aussi assez mauvais. Pour la matrice A, le conditionnement est assez aléatoire mais pas trop important.

4.3 Améliorations de la méthode : ajout d'un terme forçant

Dans la suite de ce rapport, on se placera dans la situation satellitaire, qui est la situation d'intérêt pour ce stage.

4.3.1 Principe

Les expériences précédentes montrent que notre problème est mal conditionné, et que plusieurs approximations sont possibles au voisinage des données initiales. On espérait que la résolution, au sens des moindres carrés,

du système

$$M \begin{pmatrix} d\theta \\ d\mathbf{X} \end{pmatrix} = -F(\theta_0, \mathbf{X}_0)$$

nous conduirait à l'obtention d'une unique solution, à savoir la solution $(\theta_*, \mathbf{X}_*)$ mais ce n'est clairement pas le cas puisque le simulateur nous renvoie des valeurs $(\theta_a, \mathbf{X}_a)$ qui diminuent les valeurs des déterminants mais qui restent loin de la solution réelle et même parfois de la solution initiale.

Afin de corriger ce problème, on impose une contrainte supplémentaire au problème en cherchant des solutions $(d\theta, d\mathbf{X})$ qui minimisent la quantité :

$$\left\| M \begin{pmatrix} d\theta \\ d\mathbf{X} \end{pmatrix} + F(\theta_0, \mathbf{X}_0) \right\|^2 + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} d\theta \\ d\mathbf{X} \end{pmatrix} \right\|^2 \tag{2}$$

où λ est un préfacteur à déterminer afin d'obtenir des résultats optimaux.

Cette nouvelle contrainte permet de mieux contrôler la distance entre $(\theta_0, \mathbf{X}_0)$ et $(\theta_a, \mathbf{X}_a)$. On espère donc obtenir une approximation finale meilleure que sur nos premières simulations.

Remarque En pratique, on n'a pas $\sigma_{\mathbf{X}} = \sigma_\theta$, et on n'est pas obligé d'imposer $\lambda_{\mathbf{X}} = \lambda_\theta$. On essayera donc plutôt de minimiser la quantité :

$$\left\| M \begin{pmatrix} d\theta \\ d\mathbf{X} \end{pmatrix} + F(\theta_0, \mathbf{X}_0) \right\|^2 + \frac{\lambda_\theta^2}{\sigma_\theta^2} \|d\theta\|^2 + \frac{\lambda_{\mathbf{X}}^2}{\sigma_{\mathbf{X}}^2} \|d\mathbf{X}\|^2$$

4.3.2 Implémentation

Pour mettre en place cette méthode, on rajoute à notre système linéaire les équations :

$$\frac{\lambda_\theta}{\sigma_\theta} d\theta = 0 \text{ et } \frac{\lambda_{\mathbf{X}}}{\sigma_{\mathbf{X}}} d\mathbf{X} = 0$$

Cela revient à rajouter le bloc $\text{diag}(\sigma_\theta, \dots, \sigma_\theta, \sigma_{\mathbf{X}}, \dots, \sigma_{\mathbf{X}}) \in \mathcal{M}_{3K+2KN}$ à la matrice M. On obtient ainsi une nouvelle matrice M' qui possède plus de lignes (plus d'équations) et on résout le système par la méthode habituelle, la pseudo-inverse de M' permettant alors de minimiser la quantité (2).

Remarque Algorithmiquement, cela rallonge considérablement le temps de calcul.

4.3.3 Résultats

Dans la suite, on utilisera les indices suivants :

- 0 sera associé aux données initialement perturbées,
- "reel" sera associé aux données exactes,
- a_1 sera associé à la solution fournie par l'algorithme sans terme forçant,
- a_2 sera associé à la solution fournie par l'algorithme avec terme forçant.

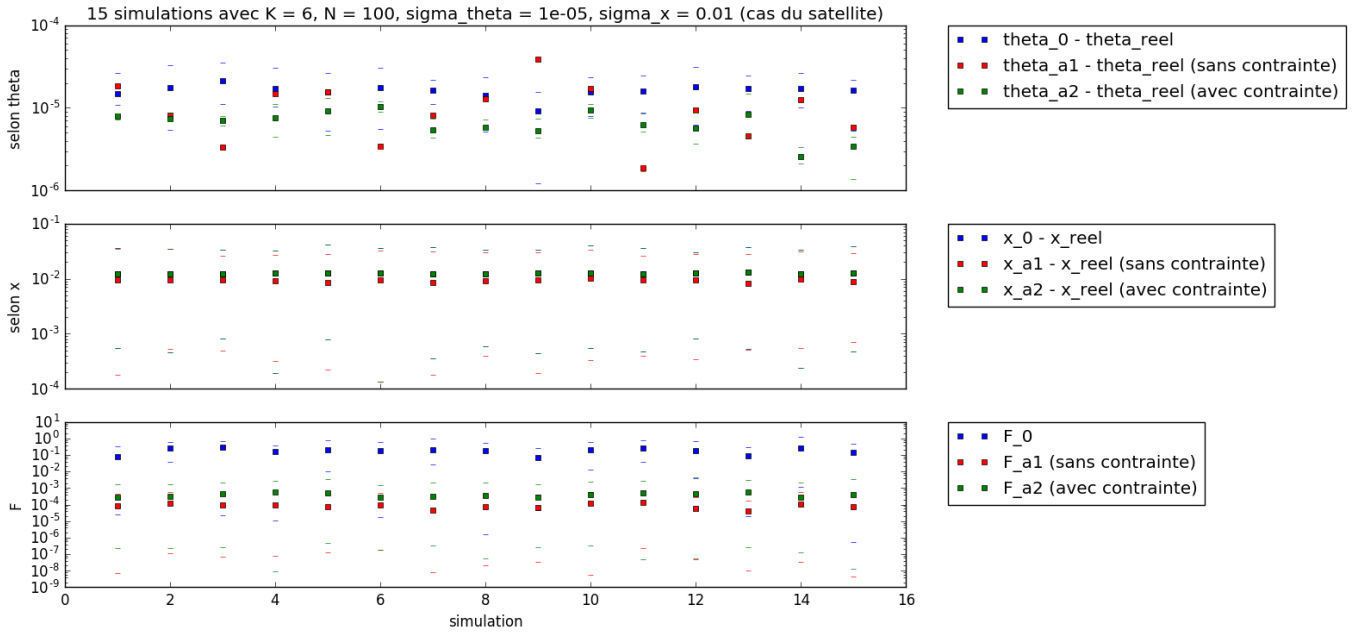


FIGURE 15 – Comparaison sur F, x et θ des solutions a_1 et a_2

On remarque que l'algorithme sans contrainte minimise un peu mieux les déterminants de F que l'algorithme avec contrainte, ce qui s'explique simplement par le fait que l'algorithme sans contrainte est autorisé à aller chercher des solutions plus loin de la solution initiale. Cependant la minimisation est satisfaisante pour les deux algorithmes (les déterminants sont environ divisés par 1000).

Selon x, la solution avec terme forçant est identique à la solution initiale et légèrement moins bonne que la solution sans terme forçant.

En revanche le terme forçant contribue nettement à rapprocher la solution des angles exactes alors qu'en l'absence de terme forçant aucun comportement régulier n'est observé.

Remarque Pour se rapprocher davantage de la solution réelle selon les angles, on peut essayer de procéder à plusieurs itérations de l'algorithme, mais on remarque que cela n'améliore pas beaucoup plus la solution.

Ainsi nos observations nous assurent que notre méthode d'approximation des angles des caméras et des coordonnées des points fonctionne : notre algorithme nous fournit une solution qui est plus proche de la solution réelle que la solution initiale, et ce avec une certaine fiabilité.

4.3.4 Quelques tests complémentaires

Voici quelques résultats obtenus en faisant varier :

- les conditions initiales (on fixe certaines valeurs initiales à leur valeur réelle)
- les paramètres que l'on réestime (c'est-à-dire ceux qu'on obtient après inversion de la matrice M)

On a fixé $N = 100$, $K = 6$, $\sigma_x = 0.1$, $\sigma_\theta = 0.00001$, $\lambda_x = \lambda_\theta = 0.02$. On notera dist_x la distance moyenne (en norme euclidienne) de la solution à la solution réelle selon x, et dist_θ la distance de la solution à la solution réelle selon θ.

Les tests ont été réalisés avant et après rajout du terme forçant.

Paramètres fixés à leur valeur réelle	**Paramètres non réestimés**	**Résultats sans contrainte**	**Résultats avec contrainte**
Aucun	Aucun	- F : bien diminué (facteur 10^2) - dist_x : diminué (facteur 2 qui ne varie pas avec N) - dist_θ : augmenté, tend vers la solution initiale lorsque N augmente	- F : bien diminué (facteur 10^2) - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : diminution (facteur 3 qui ne varie pas avec N)
x	Aucun	- F : bien diminué (facteur 10^5) - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : nette diminution (facteur 100)	- F : bien diminué (facteur 10^2) - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : diminué (facteur 2)
x	x	- F : bien diminué (facteur 10^4) - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : diminution (facteur 8)	- F : bien diminué (facteur 10^3) - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : diminué (facteur 3)
Tous les x sauf ceux sur caméra 1	Tous les x sauf ceux sur caméra 1	- F : bien diminué (facteur 10^2) - dist_x : amélioré (facteur 2) - dist_θ : pas d'amélioration régulière	- F : bien diminué (facteur 10^2) - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : amélioration (facteur 2)
Tous les x sauf ceux sur caméra 1	Tous les x sauf ceux sur caméra 1 et θ	- F : presque pas diminué - dist_x : augmenté (facteur 100) - dist_θ : identique solution initiale	- F : presque pas diminué - dist_x : augmenté (facteur 2) - dist_θ : identique solution initiale
Tous les x sauf ceux sur caméra 1 et θ	Tous les x sauf ceux sur caméra 1 et θ	- F : beaucoup diminué (facteur 10^8) - dist_x : quasi nul (diminué par facteur 10^8) - dist_θ : identique solution initiale	- F : presque pas diminué - dist_x : identique solution initiale - dist_θ : identique solution initiale
Tous les x sauf ceux sur caméra 1 et θ sauf les angles de la caméra 1	Tous les x sauf ceux sur caméra 1 et θ sauf les angles de la caméra 1	- F : diminué (facteur 10^3) - dist_x : diminué (facteur 10) - dist_θ : diminué (facteur 100)	- F : diminué (facteur 10^2) - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : diminué (facteur 10)
θ	θ	- F : diminué (facteur 10^7) - dist_x : amélioration (facteur 2) - dist_θ : identique à la solution initiale	- F : presque pas diminué - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : identique à la solution initiale
θ et tous les x sauf ceux qui correspondent aux projections du point $\mathbf{X}_1$ de l'espace	θ et tous les x sauf ceux qui correspondent aux projections du point $\mathbf{X}_1$ de l'espace	- F : diminué (facteur 10^8) - dist_x : amélioration (facteur 2) - dist_θ : identique à la solution initiale	- F : presque pas diminué - dist_x : identique à la solution initiale - dist_θ : identique à la solution initiale

Observations Rajouter une contrainte n'est pas toujours bénéfique sur les résultats. Ce l'est dans le cas général où l'ensemble des paramètres sont reestimés. En revanche, lorsqu'on simplifie le problème en fixant certains paramètres, la contrainte utilisée (avec $\lambda = 0.02$) est trop lourde et on retombe sur la solution initiale alors que l'algorithme sans contrainte fournit une bien meilleure solution. Ce tableau laisse donc à penser qu'il existe un λ optimal différent pour chaque configuration (qui cependant ne dépend pas du nombre de point experimentalement).

5 Application à des images satellitaires

Afin de mieux comprendre l'intérêt de notre méthode et de nos hypothèses par rapport aux techniques classiques de bundle adjustment, nous nous sommes intéressés à des images satellitaires réelles, prises sur la ville de Napier en Nouvelle-Zélande. Nous avons voulu comparer les résultats de notre méthode aux résultats obtenus avec les méthodes de Bundle Adjustment classiques.

Nous avons à notre disposition 20 images [5] du satellite Pléiades prises lors à différentes dates (on a des doublets et des triplets d'images). On nous fournit également une approximation des 20 matrices de projection.

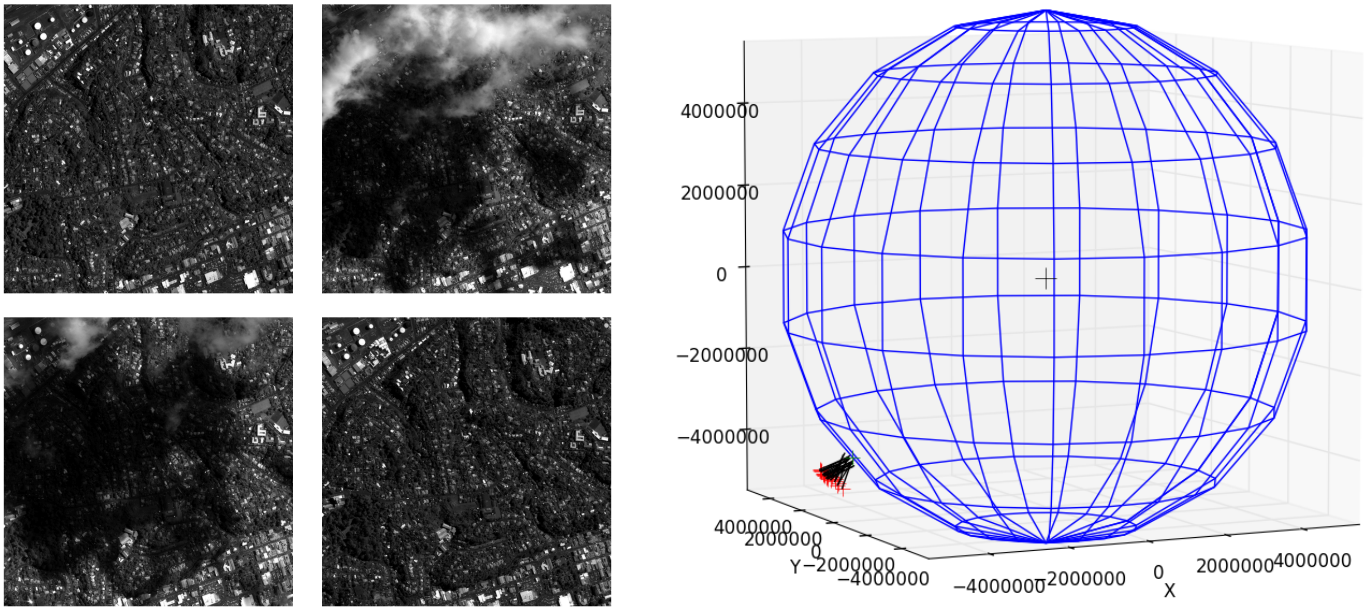


FIGURE 16 – Quelques images de la ville de Napier | Pointage des caméras sur Napier

5.1 Implémentation de notre méthode

5.1.1 Obtention de correspondances sur K caméras à partir des correspondances 2 à 2

La première étape consiste à sélectionner K images ($K = 6$ le plus souvent) parmi les 20 et à en extraire des points de correspondances. Alors qu'un algorithme SIFT nous fournit des correspondances deux à deux entre les images, notre algorithme nécessite de connaître des correspondances entre nos K images.

La difficulté consiste à trouver un algorithme rapide, puisque les données sont de taille importance, et incomplètes : on peut avoir $x_1 \leftrightarrow x_2$ [6] et $x_2 \leftrightarrow x_3$ sans avoir $x_1 \leftrightarrow x_3$.

Le fait que les données soient incomplètes ne nous permet pas de traiter *rapidement* le problème en faisant des parcours de listes pour remplir de grands tableaux de correspondances.

A la place, on remarque que l'on peut se ramener à un problème de graphe.

Considérons le graphe dont les sommets sont de la forme (x, y, k) où $x_k = (x, y)$ est un point de la k-ième image

5. images fournies par le CNES
6. $x_1 \leftrightarrow x_2$ signifie que l'on a une correspondance entre un point x_1 sur une caméra k_1 et un point x_2 sur une caméra k_2

présent dans une au moins des listes de correspondances et dont les arrêtes représentent les correspondances des listes deux à deux.

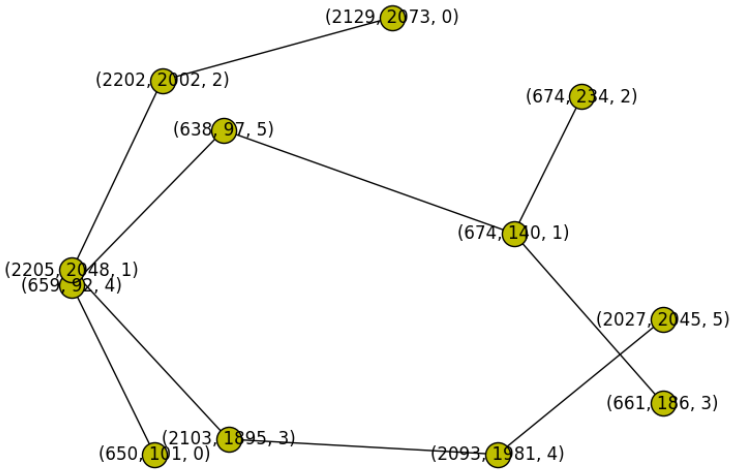


FIGURE 17 – Exemple de graphe (réduit) correspondant au problème

Il suffit donc d'obtenir les composantes connexes à K éléments afin d'obtenir les points de correspondances sur K images. Ce que des packages Python spécifiques aux graphes permettent d'effectuer rapidement.

5.1.2 Sélection des meilleurs jeux d'images pour l'implémentation

Plus l'on a de points de correspondance, et plus l'on s'attend (cf. nos simulations) à gagner en précision. Le choix des caméras utilisées pour réestimer la scène 3D est donc très important puisque les longueurs des fichiers de correspondance deux à deux diffèrent beaucoup !

On souhaite donc déterminer les jeux de K images parmi les 20 pour lesquels on aura le plus de points de correspondances. Pour cela, on regarde le nombre de correspondances deux à deux pour toutes les caméras :

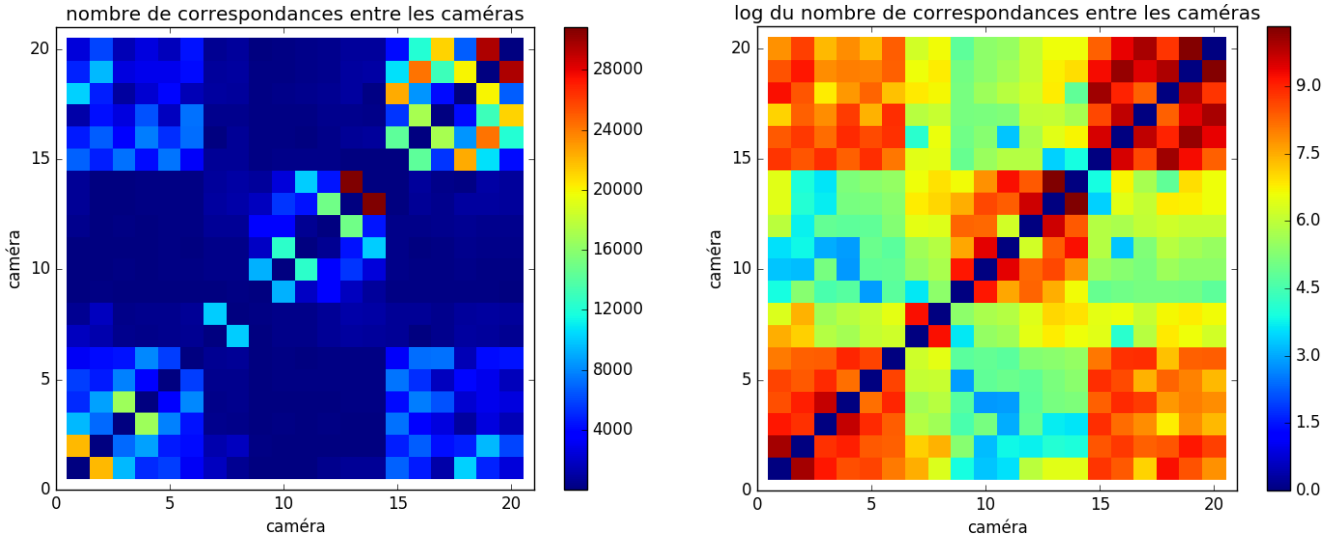


FIGURE 18 – Matrice des correspondances (ransac 0,2)

On a trois types de fichiers de correspondance, selon le filtrage Ransac effectué (aucun, 0,2 px ou 0,05 px). Les matrices ci-dessus sont globalement peu modifiées par le type de filtrage (à un rapport près sur le nombre de correspondances).

On pourrait implémenter un algorithme qui estime les meilleures caméras à utiliser. Cependant, dans notre cas ($K = 6$ la plupart du temps), on peut voir assez facilement à la main quels K-uplets de caméras semblent bien fonctionner.

Afin de montrer l'importance d'un bon choix des caméras, prenons quelques 6-uplets de caméras pour lesquels le nombre de correspondances peut varier significativement :

6-uplet	Sans filtrage	Ransac 0,2	Ransac 0,05
$(02, 15, 16, 17, 18, 19)$	10504	2311	42
$(01, 02, 03, 04, 05, 06)$	4751	1193	19
$(12, 13, 14, 18, 19, 20)$	1608	280	6
$(01, 02, 07, 08, 13, 14)$	1181	185	1
$(07, 08, 09, 10, 11, 12)$	876	88	2

Dasn la suite de nos expériences, nous utiliserons sauf mention contraire les données filtrées à 0,2 px.

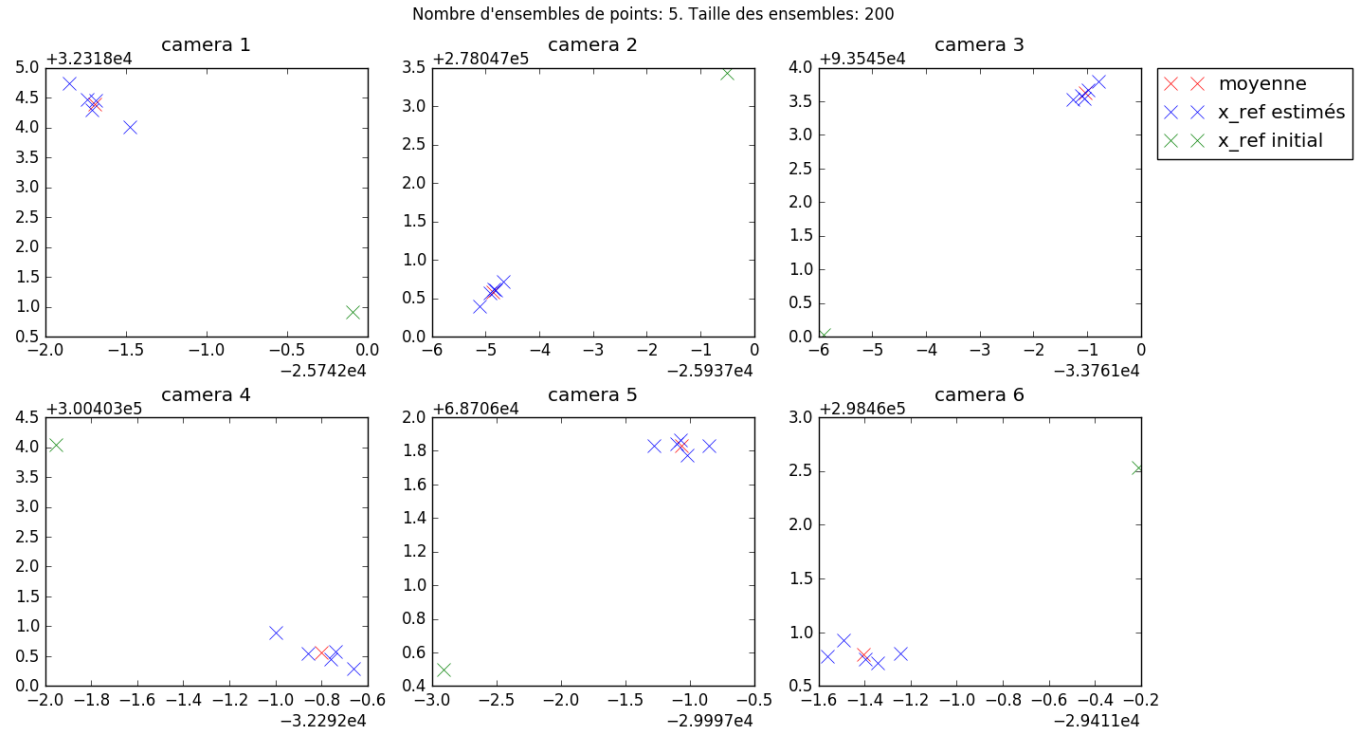
5.1.3 Méthodes pour évaluer la fiabilité de nos résultats

Dans le cas d'images réelles, nous n'avons accès ni aux angles exacts ni aux coordonnées exactes. Il devient alors plus difficile d'évaluer la qualité de notre approximation, celle-ci étant considéré comme bonne si elle est proche des données exactes.

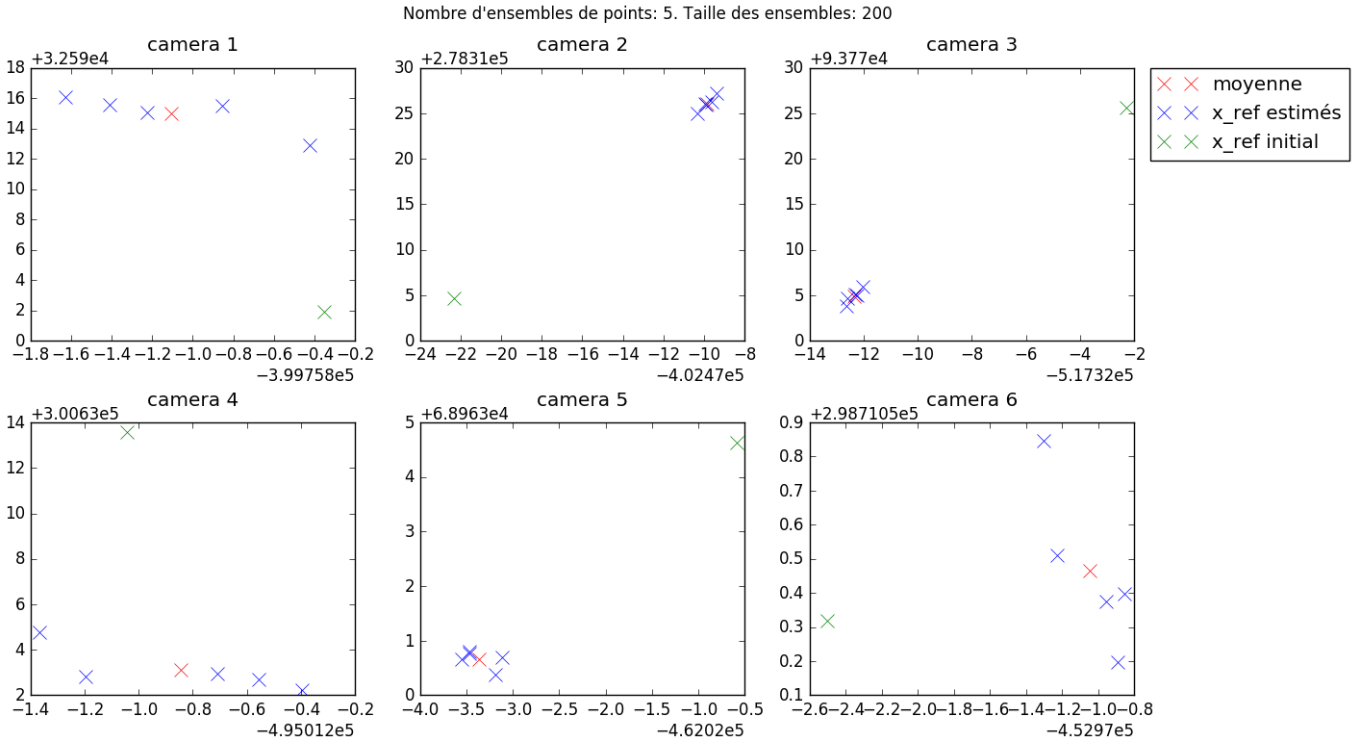
Nous proposons deux méthodes permettant de vérifier que nos réestimations ne sont pas incohérentes

Comparaison de la solution à partir de différents ensembles de points Considérons les caméras 1 à 6 pour lesquelles on possède environ 1200 correspondances (c'est-à-dire 1200 points de l'espace) avec la méthode SIFT. Fixons l'un de ces points comme une correspondance de référence : on notera x_{ref} l'ensemble des projections sur les 6 caméras de ce point $\mathbf{X}_{ref}$ de l'espace. Prenons M ensembles de 200 correspondances ayant pour intersection deux à deux x_{ref}, et appliquons notre algorithme à ces M ensembles. Alors plus les M approximations de x_{ref} sont proches, plus la solution selon les x pourra être considérée comme bonne.

Pour nos tests nous avons pris $M = 5$. On a représenté x_{ref} (valeur initiale), les $\mathrm{x}_{ref,a}$ estimés par les 5 ensembles de points et leur moyenne dans chacune des images.



(a) x_{ref} aléatoire : bon cas



(b) x_{ref} aléatoire : mauvais cas

FIGURE 19 – Distances des différentes solutions à la solution initiale selon x_{ref}

On remarque qu'il existe des ensembles de points pour lesquels on obtient de très bons résultats (figure (a)) c'est-à-dire la distance maximale entre les approximations est très inférieure à la distance moyenne à la solution initiale. Cependant pour certains rares x_{ref} (figure (b)), on obtient des approximations trop dispersées pour pouvoir en déduire l'exactitude de nos solutions. Ce dernier cas arrive tout de même moins souvent que le

premier, mais il reste non négligeable.

De la même façon, toujours avec les mêmes ensembles de points, on peut **évaluer la qualité de nos approximations selon les angles**. Nous avons représenté sur des droites pour chaque caméra et chaque direction X, Y, Z, les valeurs des estimations et la valeur initiale :

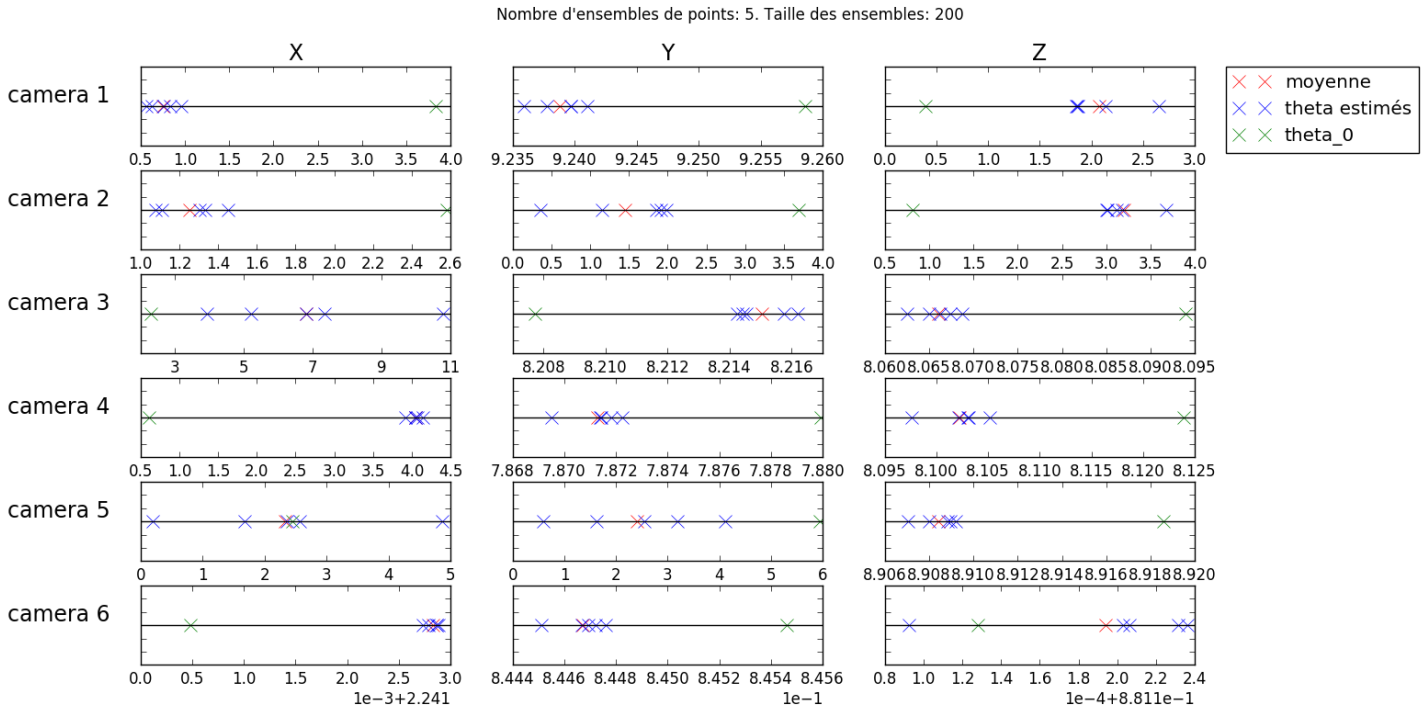


FIGURE 20 – Distances des différentes solutions à la solution initiale selon θ

Encore une fois les résultats semblent positifs : nos solutions estimées à partir des différents ensembles de points sont groupées et à distance de la solution initiale. Cependant, pour deux angles (β selon les caméras 2 et 5), l'échelle de variation est beaucoup trop grosse.

Comparaison de la solution à partir de différents ensembles de cameras Pour avoir une idée de la qualité de notre approximation selon les angles, on peut reprendre le même raisonnement que ci-dessus mais cette fois comparer les solutions obtenues à partir de différents ensembles des caméras d'intersection une unique caméra. Par exemple, comparons les estimations des angles de la caméra 2 à partir des ensembles de caméras $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ et $(2, 15, 16, 17, 18, 19)$.

[figure à insérer ?]

5.2 Comparaison avec les méthodes classiques de Bundle Adjustment

5.2.1 Notre implémentation du Bundle Ajdustment "classique"

Un algorithme de Bundle Adjustement est un algorithme qui, étant donné des conditions initiales $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{P}$ (matrices de projection) minimise sur les matrices de projection $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant K}$ et sur les points de l'espace $(\mathbf{X}^j)_{0 \leqslant j \leqslant N}$ la somme des erreurs de reprojection c'est-à-dire minimise la fonction :

$$S(P, \mathbf{X}) = \sum_{i,j} \text{dist}(P_i \mathbf{X}^j - \hat{\mathbf{x}}_i^j))^2$$

Or notre étude se place dans le cas où les positions et les paramètres internes des caméras sont connues. Cela permet de se ramener à minimiser sur θ et sur $(\mathbf{X}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ la quantité :

$$S(\theta, \mathbf{X}) = \sum_{i,j} \text{dist}((P_i\mathbf{X}^j - \hat{\mathbf{x}}_i^j))^2$$

Pour des N peu grands (i.e. $\leqslant 80$) nous avons fait des simulations en utilisant le solveur python de la bibliothèque `scipy.optimize` et avons comparé les solutions obtenues avec celles obtenues par la méthode des déterminants ainsi que les temps d'exécution.

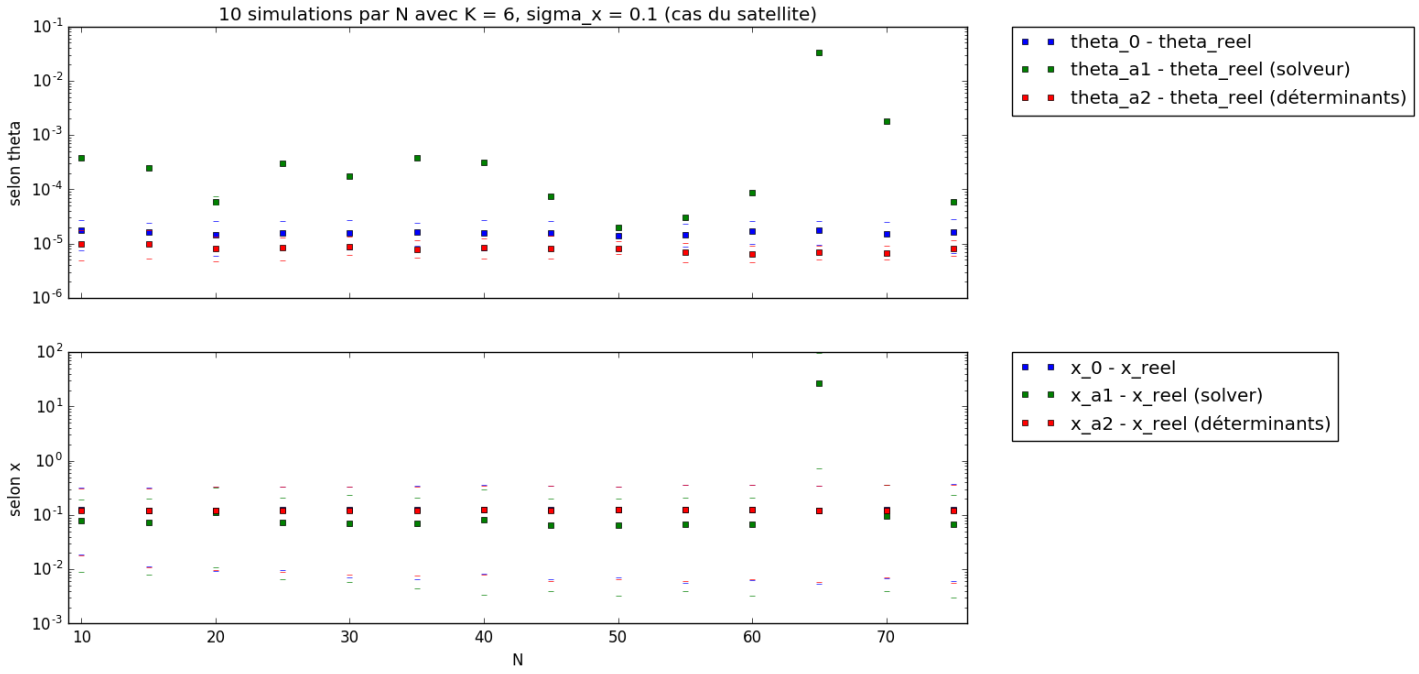


FIGURE 21 – Comparaison des solutions de notre algorithme et du solveur python selon θ et selon x (moyenne sur 10 expériences pour chaque N)

Les solutions fournies par notre algorithme (déterminant) sont meilleurs et plus régulières selon les angles.

5.2.2 La librairie openMVG

Il existe deux librairies permettant de faire de la reconstruction 3D en utilisant le Bundle Adjustment "classique" : le `bundler` ([5]) et openMVG ([4]).

Nous n'avons pas eu le temps de les étudier en détail, car leur installation est très compliquée et les documentations peu étoffées ...

En revanche, nous avons pu vérifier (en prenant les images 12, 13, 14, 18, 19 et 20 de Napier [7]) que les résultats obtenus avec openMVG sont totalement incohérents. En effet :

— $(12, 13, 14)$ et $(18, 19, 20)$ sont deux triplets (c'est-à-dire que les trois photos ont été prises lors d'un même survol). Les positions réelles des caméras doivent donc être alignées et l'espace entre la première et la deuxième doit à peu près être le même qu'entre la deuxième et la troisième. C'est d'ailleurs le cas avec les positions des caméras récupérées des matrices de projection. Cependant, avec openMVG, cela n'est pas du tout vérifié et il n'y a aucune cohérence sur les positionnement des caméras.

7. puis revérifier avec le simages 01 à 06

— Concernant la reconstruction de la scène 3D, on arrive globalement à deviner quelques caractéristiques de la scène réelle, cependant de très nombreux points sont totalement incohérents : il y a par exemple une zone sur les images quasiment plane, pour laquelle openMVG retourne des points sur deux niveaux totalement différents.

Il est donc compliqué de comparer précisément notre méthode avec les méthodes classiques de Bundle Adjustment. Cependant, il est certain que ces dernières ne fonctionnent pas correctement dans le cas satellitaire.

Conclusion

Notre problème, visant à minimiser les déterminants deux à deux pour trouver la solution réelle, semble mal posé : en effet on observe numériquement des solutions de faible déterminant mais loin de la solution réelle. Cela s'explique simplement par le fait qu'une perturbation sur les angles pourra toujours être compensée par une perturbations sur les coordonnées des points dans les images. Néanmoins grâce à l'ajout d'une contrainte pour rester suffisamment proche de la solution initiale, grâce à la possibilité de fixer certains paramètres ou encore d'utiliser un grand nombre de points de correspondances, les résultats sont encourageants. Ils permettent en effet de diviser l'erreur sur les x d'un facteur 2, l'erreur sur θ d'un facteur 3 et pour un nombre de points de l'ordre de 1000, celle-ci est réduite d'un facteur 10. Quelques expériences complémentaires pourraient être menées :

- sélectionner plusieurs sous-ensembles parmi les 20 caméras dont l'intersection est réduite à une caméra cam_{ref} et comparer les estimations des angles de cam_{ref},
- appliquer notre algorithme sans contrainte aux données réelles - le nombre de correspondances à notre disposition est en principe suffisant pour trouver une solution satifaisante d'après la figure 5 - et comparer les résultats aux résultats de la section 5.1.3,
- étudier l'impact du facteur λ sur nos solutions : comment expliquer le λ optimum et s'assurer que ce dernier est optimal pour nos données réelles,
- approfondir les comparaisons avec les algorithmes de bundle adjustement existants.

Références

[1] Richard HARTLEY and Andrew ZISSERMAN. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University Press, 2003.

[2] Pierre MOULON, Pascal MONASSE, and Renaud MARLET. Adaptive structure from motion with a contrario model estimation. *Asian Conference on Computer Vision*, pages 257–270, 2013.

[3] Pierre MOULON, Pascal MONASSE, and Renaud MARLET. Global Fusion of Relative Motions for Robust, Accurate and Scalable Structure from Motion. In *ICCV*, page to appear, Sydney, Australia, December 2013.

[4] Pierre MOULON, Pascal MONASSE, Renaud MARLET, and Others. OpenMVG. `https://github.com/openMVG/openMVG`.

[5] Noah SNAVELY. Bundler : Structure from Motion (SfM) for Unordered Image Collections. `http://www.cs.cornell.edu/~snavely/bundler/#S4`.

[6] Richard SZELISKI. *Computer Vision : Algorithms and Applications*. Springer, 2014.

[7] Bill TRIGGS, Philip MCLAUCHLAN, Richard HARTLEY, and Andrew FITZGIBBON. Bundle Adjustment – A Modern Synthesis. *Vision Algorithms : Theory and Practice (International Workshop on Vision Algorithms)*, pages 298–372, 2000.

Annexes

L'ensemble des codes Python présentés dans ces annexes, ainsi que quelques codes supplémentaires (notamment ceux permettant d'afficher les résultats) peut être retrouvé sur `Github` à l'adresse `https://github.com/Tooine/BA` ou `https://github.com/SegoleneMartin/bundle-adjustment`.

Annexe A Fonctions de base

Les fonctions suivantes sont couramment utilisées pour chacune des simulations :

```
## packages

import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from numpy.random import rand, normal
import scipy.linalg as sl
from scipy.linalg import rq
from math import atan2

## fonctions

def det(C1, C2, theta1, theta2, p1, p2, f):
    """ retourne la valeur du déterminant associé à un point et deux caméras
    et aux paramètres

    PARAMETRES
    C1, C2 [array (3,)] : coordonnées des centres des caméras,
    theta1, theta2 [array (3,)] : angles de rotation associés aux caméras,
    p1, p2 [array (2,)] : coordonnées des images des points sur les plans images des caméras

    """

    ca1, ca2 = np.cos(theta1[0]), np.cos(theta2[0])
    sa1, sa2 = np.sin(theta1[0]), np.sin(theta2[0])
    cb1, cb2 = np.cos(theta1[1]), np.cos(theta2[1])
    sb1, sb2 = np.sin(theta1[1]), np.sin(theta2[1])
    cg1, cg2 = np.cos(theta1[2]), np.cos(theta2[2])
    sg1, sg2 = np.sin(theta1[2]), np.sin(theta2[2])
    x1, x2 = p1[0], p2[0]
    y1, y2 = p1[1], p2[1]
    m1, m2, m3 = C2[0]-C1[0], C2[1]-C1[1], C2[2]-C1[2]

    return (
    m1 * ((ca1*(-sg1*x1+cg1*y1) + sa1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)) * (sa2*(sg2*x2-cg2*y2) + ca2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)) - (ca2*(-sg2*x2+cg2*y2) + sa2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)) * (sa1*(sg1*x1-cg1*y1) + ca1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)))
    - m2 * ((cb1*(cg1*x1+sg1*y1) - f*sb1) * (sa2*(sg2*x2-cg2*y2) + ca2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)) - (cb2*(cg2*x2+sg2*y2) - f*sb2) * (sa1*(sg1*x1-cg1*y1) + ca1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)))
    + m3 * ((cb1*(cg1*x1+sg1*y1) - f*sb1) * (ca2*(-sg2*x2+cg2*y2) + sa2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)) - (cb2*(cg2*x2+sg2*y2) - f*sb2) * ( ca1*(-sg1*x1+cg1*y1) + sa1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)))
    ) / f**2

```

```
39 def deriv_det(C1, C2, theta1, theta2, p1, p2, f):
40     """ Retourne les dérivées partielles du déterminant associé à un point
41     et deux caméras et aux paramètres
42 
43     PARAMETRES
44     C1, C2 [array (3,)] : coordonnées des centres des caméras,
45     theta1, theta2 [array (3,)] : angles de rotation associés aux caméras,
46     p1, p2 [array (2,)] : coordonnées des images des points sur les plans images des camé
           ras
47 
48     SORTIE
49     D [array (5, 2)] : retourne les dérivées partielles par rapport (dans l'ordre par
           ligne) aux alpha_i, beta_i, gamma_i, x_i et y_i. (colonne 0 : point 1, colonne 1 :
            point 2)
50 
51     """
52 
53     # notations
54     ca1, ca2 = np.cos(theta1[0]), np.cos(theta2[0])
55     sa1, sa2 = np.sin(theta1[0]), np.sin(theta2[0])
56     cb1, cb2 = np.cos(theta1[1]), np.cos(theta2[1])
57     sb1, sb2 = np.sin(theta1[1]), np.sin(theta2[1])
58     cg1, cg2 = np.cos(theta1[2]), np.cos(theta2[2])
59     sg1, sg2 = np.sin(theta1[2]), np.sin(theta2[2])
60     x1, x2 = p1[0], p2[0]
61     y1, y2 = p1[1], p2[1]
62     m1, m2, m3 = C2[0]-C1[0], C2[1]-C1[1], C2[2]-C1[2]
63     fk1 = cb1*(cg1*x1+sg1*y1) - f*sb1
64     fl1 = cb2*(cg2*x2+sg2*y2) - f*sb2
65     fk2 = ca1*(-sg1*x1+cg1*y1) + sa1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)
66     fl2 = ca2*(-sg2*x2+cg2*y2) + sa2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)
67     fk3 = sa1*(sg1*x1-cg1*y1) + ca1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)
68     fl3 = sa2*(sg2*x2-cg2*y2) + ca2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)
69 
70     # remplissage de la matrice D
71     D = np.zeros((5, 2))
72 
73     D[0, 0] = (m1 * ((-sa1*(-sg1*x1+cg1*y1) + ca1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)) * fl3 -
           fl2 * (ca1*(sg1*x1-cg1*y1) - sa1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)))
74     - m2 * (- fl1 * (ca1*(sg1*x1-cg1*y1) - sa1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1)))
75     + m3 * (- fl1 * (-sa1*(-sg1*x1+cg1*y1) + ca1*(sb1*(cg1*x1+sg1*y1) + f*cb1))))
76 
77     D[0, 1] = (m1 * (fk2 * (ca2*(sg2*x2-cg2*y2) - sa2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)) - (-
           sa2*(-sg2*x2+cg2*y2) + ca2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)) * fk3)
78     - m2 * (fk1 * (ca2*(sg2*x2-cg2*y2) - sa2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2)))
79     + m3 * (fk1 * (-sa2*(-sg2*x2+cg2*y2) + ca2*(sb2*(cg2*x2+sg2*y2) + f*cb2))))
80 
81     D[1, 0] = (m1 * (sa1*(cb1*(cg1*x1+sg1*y1) - f*sb1) * fl3 - fl2 * (ca1*(cb1*(cg1*x1+sg1
           *y1) - f*sb1)))
82     - m2 * ((-sb1*(cg1*x1+sg1*y1) - f*cb1) * fl3 - fl1 * (ca1*(cb1*(cg1*x1+sg1*y1) - f*sb1
           )))
83     + m3 * ((-sb1*(cg1*x1+sg1*y1) - f*cb1) * fl2 - fl1 * (sa1*(cb1*(cg1*x1+sg1*y1) - f*sb1
           ))))
84 
85     D[1, 1] = (m1 * (fk2 * (ca2*(cb2*(cg2*x2+sg2*y2) - f*sb2)) - (sa2*(cb2*(cg2*x2+sg2*y2)
           - f*sb2)) * fk3)
86     - m2 * (fk1 * (ca2*(cb2*(cg2*x2+sg2*y2) - f*sb2)) - (-sb2*(cg2*x2+sg2*y2) - f*cb2) *
           fk3)
87     + m3 * (fk1 * (sa2*(cb2*(cg2*x2+sg2*y2) - f*sb2)) - (-sb2*(cg2*x2+sg2*y2) - f*cb2) *
           fk2))
```

```
88
89      D[2, 0] = (m1 * ((ca1*(-cg1*x1-sg1*y1) + sa1*sb1*(-sg1*x1+cg1*y1)) * fl3 - fl2 * (sa1
            *(cg1*x1+sg1*y1) + ca1*sb1*(-sg1*x1+cg1*y1)))
90      - m2 * (cb1*(-sg1*x1+cg1*y1) * fl3 - fl1 * (sa1*(cg1*x1+sg1*y1) + ca1*sb1*(-sg1*x1+cg1
            *y1)))
91      + m3 * (cb1*(-sg1*x1+cg1*y1) * fl2 - fl1 * (ca1*(-cg1*x1-sg1*y1) + sa1*sb1*(-sg1*x1+
            cg1*y1))))
92
93      D[2, 1] = (m1 * (fk2 * (sa2*(cg2*x2+sg2*y2) + ca2*sb2*(-sg2*x2+cg2*y2)) - (ca2*(-cg2*
            x2-sg2*y2) + sa2*sb2*(-sg2*x2+cg2*y2)) * fk3)
94      - m2 * (fk1 * (sa2*(cg2*x2+sg2*y2) + ca2*sb2*(-sg2*x2+cg2*y2)) - cb2*(-sg2*x2+cg2*y2)
            * fk3)
95      + m3 * (fk1 * (ca2*(-cg2*x2-sg2*y2) + sa2*sb2*(-sg2*x2+cg2*y2)) - cb2*(-sg2*x2+cg2*y2)
             * fk2))
96
97      D[3, 0] = (m1 * ((ca1*-sg1 + sa1*sb1*cg1) * fl3 - fl2 * (sa1*sg1 + ca1*sb1*cg1))
98      - m2 * (cb1*cg1 * fl3 - fl1 * (sa1*sg1 + ca1*sb1*cg1))
99      + m3 * (cb1*cg1 * fl2 - fl1 * (ca1*-sg1 + sa1*sb1*cg1)))
100
101     D[3, 1] = (m1 * (fk2 * (sa2*sg2 + ca2*sb2*cg2) - (ca2*-sg2 + sa2*sb2*cg2) * fk3)
102     - m2 * (fk1 * (sa2*sg2 + ca2*sb2*cg2) - cb2*cg2 * fk3)
103     + m3 * (fk1 * (ca2*-sg2 + sa2*sb2*cg2) - cb2*cg2 * fk2))
104
105     D[4, 0] = (m1 * ((ca1*cg1 + sa1*sb1*sg1) * fl3 - fl2 * (sa1*-cg1 + ca1*sb1*sg1))
106     - m2 * (cb1*sg1 * fl3 - fl1 * (sa1*-cg1 + ca1*sb1*sg1))
107     + m3 * (cb1*sg1 * fl2 - fl1 * (ca1*cg1 + sa1*sb1*sg1)))
108
109     D[4, 1] = (m1 * (fk2 * (sa2*-cg2 + ca2*sb2*sg2) - (ca2*cg2 + sa2*sb2*sg2) * fk3)
110     - m2 * (fk1 * (sa2*-cg2 + ca2*sb2*sg2) - cb2*sg2 * fk3)
111     + m3 * (fk1 * (ca2*cg2 + sa2*sb2*sg2) - cb2*sg2 * fk2))
112
113     return D / f**2
114
115 def genere_liste_couples(K):
116     """ crée la liste des couples (i1, i2) pour i1<i2 entre 0 et K-1 """
117
118     liste_couples = []
119     for i1 in range(K-1):
120         for i2 in range(i1+1, K):
121             liste_couples.append((i1, i2))
122
123     return liste_couples
124
125 def matrices_Aj_Bj(C, theta, x, j, f, liste_couples):
126     """ Calcule simultanné des matrices Aj et Bj associées au j-ième point de x
127
128     PARAMETRES
129     C [array (K, 3)] : ensemble des coordonnées des K caméras
130     theta [array (K, 3)] : ensemble des angles de rotations des caméras
131     x [array (N, K, 2)]: ensemble des coordonnées des images sur les K caméras des N
            points
132
133     """
134
135     K = C.shape[0]
136     Aj, Bj = np.zeros((K*(K-1)//2, 3*K)), np.zeros((K*(K-1)//2, 2*K))
137     for (l, (i1, i2)) in enumerate(liste_couples):
138         derivees = deriv_det(C[i1], C[i2], theta[i1], theta[i2], x[j, i1], x[j, i2], f)
139         Aj[l, 3*i1:3*i1+3] = derivees[:3, 0]
140         Aj[l, 3*i2:3*i2+3] = derivees[:3, 1]
```

```
141         Bj[l, 2*i1:2*i1+2] = derivees[3:, 0]
142         Bj[l, 2*i2:2*i2+2] = derivees[3:, 1]
143
144     return Aj, Bj
145
146 def matrice_Aj(C, theta, x, j, f, liste_couples):
147     """ Calcule la matrice Aj associée au j-ième point de x
148
149     PARAMETRES
150     C [array (K, 3)] : ensemble des coordonnées des K caméras
151     theta [array (K, 3)] : ensemble des angles de rotations des caméras
152     x [array (N, K, 2)]: ensemble des coordonnées des images sur les K caméras des N
            points
153
154     """
155
156     K = C.shape[0]
157     Aj = np.zeros((K*(K-1)//2, 3*K))
158     for (l, (i1, i2)) in enumerate(liste_couples):
159         derivees = deriv_det(C[i1], C[i2], theta[i1], theta[i2], x[j, i1], x[j, i2], f)
160         Aj[l, 3*i1:3*i1+3] = derivees[:3, 0]
161         Aj[l, 3*i2:3*i2+3] = derivees[:3, 1]
162
163     return Aj
164
165 def matrice_Bj(C, theta, x, j, f, liste_couples):
166     """ Calcule la matrice Bj associée au j-ième point de x
167
168     PARAMETRES
169     C [array (K, 3)] : ensemble des coordonnées des K caméras
170     theta [array (K, 3)] : ensemble des angles de rotations des caméras
171     x [array (N, K, 2)]: ensemble des coordonnées des images sur les K caméras des N
            points
172
173     """
174
175     K = C.shape[0]
176     Bj = np.zeros((K*(K-1)//2, 2*K))
177     for (l, (i1, i2)) in enumerate(liste_couples):
178         derivees = deriv_det(C[i1], C[i2], theta[i1], theta[i2], x[j, i1], x[j, i2], f)
179         Bj[l, 2*i1:2*i1+2] = derivees[3:, 0]
180         Bj[l, 2*i2:2*i2+2] = derivees[3:, 1]
181
182     return Bj
183
184 def matrices_A_B(C, theta, x, f):
185     """ Calcule les matrices A et B
186
187     PARAMETRES
188     C [array (K, 3)] : ensemble des coordonnées des K caméras
189     theta [array (K, 3)] : ensemble des angles de rotations des caméras
190     x [array (N, K, 2)] : ensemble des coordonnées des images sur les K caméras des N
            points
191
192     """
193
194     K, N = C.shape[0], x.shape[0]
195     A, B = np.zeros((K*(K-1)//2*N, 3*K)), np.zeros((K*(K-1)//2*N, 2*K*N))
196     for j in range(N):
197         A[K*(K-1)//2*j:K*(K-1)//2*(j+1)], B[K*(K-1)//2*j:K*(K-1)//2*(j+1), 2*K*j:2*K*(j+1)
```

```
            ] = matrices_Aj_Bj(C, theta, x, j, f, genere_liste_couples(K))
198
199     return A, B
200
201 def matrice_A(C, theta, x, f):
202     """ Calcule la matrice A
203
204     PARAMETRES
205     C [array (K, 3)] : ensemble des coordonnées des K caméras
206     theta [array (K, 3)] : ensemble des angles de rotations des caméras
207     x [array (N, K, 2)]: ensemble des coordonnées des images sur les K caméras des N
            points
208
209     """
210
211     K, N = C.shape[0], x.shape[0]
212     A = np.zeros((K*(K-1)//2*N, 3*K))
213     for j in range(N):
214         A[K*(K-1)//2*j:K*(K-1)//2*(j+1)] = matrice_Aj(C, theta, x, j, f,
                genere_liste_couples(K))
215
216     return A
217
218 def matrice_B(C, theta, x, f):
219     """ Calcule la matrice B
220
221     PARAMETRES
222     C [array (K, 3)] : ensemble des coordonnées des K caméras
223     theta [array (K, 3)] : ensemble des angles de rotations des caméras
224     x [array (N, K, 2)]: ensemble des coordonnées des images sur les K caméras des N
            points
225
226     """
227
228     K, N = C.shape[0], x.shape[0]
229     B = np.zeros((K*(K-1)//2*N, 2*K*N))
230     for j in range(N):
231         B[K*(K-1)//2*j:K*(K-1)//2*(j+1), 2*K*j:2*K*(j+1)] = matrice_Bj(C, theta, x, j, f,
                genere_liste_couples(K))
232
233     return B
234
235 def F(C, theta, x, f):
236     """ Calcule les valeurs de tous les déterminants du problème
237
238     PARAMETRES
239     C [array (K, 3)] : ensemble des coordonnées des K caméras
240     theta [array (K, 3)] : ensemble des angles de rotations des caméras
241     x [array (N, K, 2)]: ensemble des coordonnées des images sur les K caméras des N
            points
242
243     SORTIE
244     FF [list (N*K*(K-1)//2)] : valeurs de tous les déterminants dans l'ordre de nos
            conventions
245
246     """
247
248     N, K = x.shape[:-1]
249     FF = []
250     for j in range(N):
```

```
251         for (i1, i2) in genere_liste_couples(K):
252             FF.append(det(C[i1], C[i2], theta[i1], theta[i2], x[j, i1], x[j, i2], f))
253 
254     return np.array(FF)
255 
256 def RX(t):
257     """ matrice de rotation selon X d'angle t """
258 
259     return(np.array([[1, 0, 0],
260                      [0, np.cos(t), -np.sin(t)],
261                      [0, np.sin(t), np.cos(t)]]))
262 
263 def RY(t):
264     """ matrice de rotation selon Y d'angle t """
265 
266     return(np.array([[np.cos(t), 0, np.sin(t)],
267                      [0, 1, 0],
268                      [-np.sin(t), 0, np.cos(t)]]))
269 
270 def RZ(t):
271     """ matrice de rotation selon Z d'angle t """
272 
273     return(np.array([[np.cos(t), -np.sin(t), 0],
274                      [np.sin(t), np.cos(t), 0],
275                      [0, 0, 1]]))
276 
277 def matrice_R(theta):
278     """ matrice de rotation de la forme Rz Ry Zx
279 
280     PARAMETRE
281     theta [array (3,)] : angles de rotations
282 
283     """
284 
285     return np.dot(RZ(theta[2]), np.dot(RY(theta[1]), RX(theta[0])))
286 
287 def matrice_P(C, theta, f):
288     """ crée la matrice de projection d'une caméra
289 
290     PARAMETRES
291     C [array (3,)] : coordonnées de la caméra
292     theta [array (3,)] : angles de rotations de la caméra
293     f : focale en pixels
294 
295     """
296 
297     R = matrice_R(theta)
298     K = np.array([[f, 0, 0], [0, f, 0], [0, 0, 1]])
299     P = np.zeros((3, 4))
300     P[:, :3] = np.dot(K, R)
301     P[:, 3] = np.dot(K, R).dot(-C)
302 
303     return P
304 
305 def kr_from_p(P):
306     """ Extract K, R and C from a camera matrix P, such that P = K*R*[eye(3) | -C].
307 
308     K is scaled so that K[2, 2] = 1 and K[0, 0] > 0.
309 
310     """
```

```
311
312     K, R = rq(P[:, :3])
313
314     K /= K[2, 2]
315     if K[0, 0] < 0:
316         D = np.diag([-1, -1, 1])
317         K = np.dot(K, D)
318         R = np.dot(D, R)
319
320     C = -np.linalg.solve(P[:, :3], P[:, 3])
321
322     test = np.dot(np.dot(K, R), np.concatenate((np.eye(3), -np.array([C]).T), axis=1))
323     np.testing.assert_allclose(test / test[2, 3], P / P[2, 3])
324
325     return C, R, K
326
327 def theta_from_r(R):
328     a = atan2(R[2, 1], R[2, 2])
329     b = atan2(-R[2, 0], np.sqrt(R[2, 1]**2 + R[2, 2]**2))
330     g = atan2(R[1, 0], R[0, 0])
331
332     return a, b, g
```

Annexe B Simulations

On a besoin des packages suivants :

```
1  ## packages
2
3  import numpy as np
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
6  from numpy.random import rand, normal
7  import scipy.linalg as sl
8  from scipy.sparse import csr_matrix
9  import scipy.sparse.linalg as ssl
10 import os
11
12 plt.ion(), plt.show()
13
14 ## import de BA_fonctions
15
16 dossier = "/Users/abarrier/Documents/Scolaire/ENS/L3/Cours/Stage/Python"
17
18 os.chdir(dossier)
19 from BA_fonctions import *
```

Les 6 fonctions suivantes permettent de faire toute les simulations sans terme forçant nécessaires :

```
1  ## rappels
2
3  # on suppose les points de correspondances situés dans la zone
4  # [-X0/2, X0/2] x [-Y0/2, Y0/2] x [-Z0/2, Z0/2]
5
6  # on suppose les caméras situées dans la zone
7  # [-X0, X0] x [-Y0, Y0] x [Z1, Z2] avec Z0 << Z1
8
```

```
# on suppose que les caméras pointent vers le point (0, 0, 0)
# pour cela, connaissant les coordonnées de la caméra, on fixe l'angle gamma à 0
# puis alpha et beta sont alors déterminés de manière unique

## fonctions

def genere_donnees():
    """ crée aléatoirement des données

    SORTIES
    C_reel [array (K, 3)] : coordonnées des caméras
    X_reel [array (N, 3)] : coordonnées des points
    theta_reel [array (K, 3)] : angles de rotation des caméras initiaux

    """

    C_reel = rand(K, 3)
    C_reel[:, 0] = (C_reel[:, 0] - 0.5) *2*X0
    C_reel[:, 1] *= (C_reel[:, 1] - 0.5) *2*Y0
    C_reel[:, 2] = C_reel[:, 2] * (Z2-Z1) + Z1

    theta_reel = np.zeros((K, 3))
    for i in range(K): # on fait pointer les caméras vers le point (0, 0, 0)
        X, Y, Z = -C_reel[i] / sl.norm(C_reel[i])
        beta = np.arcsin(-X)
        alpha = np.arcsin(Y/np.cos(beta))
        if np.cos(alpha)*np.cos(beta)*Z < 0: alpha = np.pi - alpha
        theta_reel[i, 0] = alpha
        theta_reel[i, 1] = beta

    X_reel = (rand(N, 3) - 0.5)
    X_reel[:, 0] *= X0
    X_reel[:, 1] *= Y0
    X_reel[:, 2] *= Z0

    return C_reel, X_reel, theta_reel

def scene_3D():
    """ crée une figure 3D correspondant aux données """

    Z_cam = []
    for theta in theta_reel:
        Z_cam.append(np.linalg.inv(matrice_R(theta)).dot(np.array([0, 0, 1])))

    plt.figure().gca(projection = "3d")
    plt.xlabel("X"), plt.ylabel("Y")
    plt.plot([0], [0], [0], color="k", marker="+", markersize=10)
    plt.plot(X_reel[:, 0], X_reel[:, 1], X_reel[:, 2], marker="+", markersize=3
             , color="b", label="points", linestyle="None")
    plt.plot(C_reel[:, 0], C_reel[:, 1], C_reel[:, 2], marker="+", markersize=10
             , color="r", label="cameras", linestyle="None")
    plt.legend(loc="best")
    plt.xlim(-X0, X0), plt.ylim(-Y0, Y0)

    t = 200000
    for C, Z in zip(C_reel, Z_cam):    # trace les axes Z_cam
        ZZ = C + t*Z
        plt.plot([C[0], ZZ[0]], [C[1], ZZ[1]], [C[2], ZZ[2]], color="k")

def reestimation_globale(x_exact=False, theta_exact=False, affichage=False):
```

```
    """ réalise une simulation globale (création des données + réestimation de tous les paramètres)

    PARAMETRES
    x_exact [bool] : si vrai, fixe x_0 à x_reel (pas de perturbation des points)
    theta_exact [bool] : si vrai, fixe theta_0 à theta_reel (pas de perturbation des angles)
    affichage [bool] : si vrai, affiche les données créées sur une figure 3D

    SORTIES
    C_reel [array (K, 3)] : coordonnées des caméras
    X_reel [array (N, 3)] : coordonnées des points
    theta_reel, theta_0, theta_a [array (K, 3)] : angles de rotation des caméras, respectivement initiaux, perturbés et réestimés
    x_reel, x_0, x_a [array (N, K, 2)] : coordonnées des images des points, respectivement initiaux, perturbés et réestimés

    """

    C_reel, X_reel, theta_reel = genere_donnees()

    if affichage: scene_3D()

    matrices_P = []
    for i in range(K):
        matrices_P.append(matrice_P(C_reel[i], theta_reel[i], f))

    x_reel = np.zeros((N, K, 2))
    for j in range(N):
        for i in range(K):
            point = matrices_P[i].dot(np.array([X_reel[j, 0], X_reel[j, 1], X_reel[j, 2], 1]))
            x_reel[j, i] = point[:-1] / point[-1]

    # perturbation des coordonnées et des angles

    x_0 = np.copy(x_reel)
    if not x_exact: x_0 += normal(0, sigma_x, (N, K, 2))
    theta_0 = np.copy(theta_reel)
    if not theta_exact: theta_0 += normal(0, sigma_theta, (K, 3))

    # minimisation de F

    A, B = matrices_A_B(C_reel, theta_0, x_0, f)
    M = csr_matrix(np.concatenate((A, B), axis=1))

    erreur = ssl.lsqr(M, -F(C_reel, theta_0, x_0, f), conlim=1.0e+8)[0]

    theta_a = theta_0 + erreur[:3*K].reshape((K, 3))
    x_a = np.copy(x_0)
    for j in range(N):
        for i in range(K):
            x_a[j, i, 0] += erreur[3*K + 2*K*j + 2*i]
            x_a[j, i, 1] += erreur[3*K + 2*K*j + 2*i + 1]

    return C_reel, X_reel, theta_reel, theta_0, theta_a, x_reel, x_0, x_a

def reestimation_x(theta_exact=False, affichage=False):
    """ réalise une simulation ne réestimant que les x (création des données + réestimation des x)
```

```
123
124     PARAMETRES
125     x_exact [bool] : si vrai, fixe x_0 à x_reel (pas de perturbation des points)
126     theta_exact [bool] : si vrai, fixe theta_0 à theta_reel (pas de perturbation des
            angles)
127     affichage [bool] : si vrai, affiche les données créées sur une figure 3D
128
129     SORTIES
130     C_reel [array (K, 3)] : coordonnées des caméras
131     X_reel [array (N, 3)] : coordonnées des points
132     theta_reel, theta_0, theta_a [array (K, 3)] : angles de rotation des caméras,
            respectivement initiaux, perturbés et réestimés
133     x_reel, x_0, x_a [array (N, K, 2)] : coordonnées des images des points, respectivement
             initiaux, perturbés et réestimés
134
135     """
136
137     C_reel, X_reel, theta_reel = genere_donnees()
138
139     if affichage: scene_3D()
140
141     matrices_P = []
142     for i in range(K):
143         matrices_P.append(matrice_P(C_reel[i], theta_reel[i], f))
144
145     x_reel = np.zeros((N, K, 2))
146     for j in range(N):
147         for i in range(K):
148             point = matrices_P[i].dot(np.array([X_reel[j, 0], X_reel[j, 1], X_reel[j, 2],
                    1]))
149             x_reel[j, i] = point[:-1] / point[-1]
150
151     # perturbation des coordonnées et des angles
152
153     x_0 = x_reel + normal(0, sigma_x, (N, K, 2))
154     theta_0 = np.copy(theta_reel)
155     if not theta_exact: theta_0 += normal(0, sigma_theta, (K, 3))
156
157     # minimisation de F
158
159     B = csr_matrix(matrice_B(C_reel, theta_0, x_0, f))
160
161     erreur = ssl.lsqr(B, -F(C_reel, theta_0, x_0, f), conlim=1.0e+8)[0]
162
163     theta_a = np.copy(theta_0)
164     x_a = np.copy(x_0)
165     for j in range(N):
166         for i in range(K):
167             x_a[j, i, 0] += erreur[2*K*j + 2*i]
168             x_a[j, i, 1] += erreur[2*K*j + 2*i + 1]
169
170     return C_reel, X_reel, theta_reel, theta_0, theta_a, x_reel, x_0, x_a
171
172 def reestimation_theta(x_exact=False, affichage=False):
173     """ réalise une simulation ne réestimant que les angles (création des données + ré
            estimation des angles)
174
175     PARAMETRES
176     x_exact [bool] : si vrai, fixe x_0 à x_reel (pas de perturbation des points)
177     theta_exact [bool] : si vrai, fixe theta_0 à theta_reel (pas de perturbation des
```

```
        angles)
178     affichage [bool] : si vrai, affiche les données créées sur une figure 3D
179
180     SORTIES
181     C_reel [array (K, 3)] : coordonnées des caméras
182     X_reel [array (N, 3)] : coordonnées des points
183     theta_reel, theta_0, theta_a [array (K, 3)] : angles de rotation des caméras,
            respectivement initiaux, perturbés et réestimés
184     x_reel, x_0, x_a [array (N, K, 2)] : coordonnées des images des points, respectivement
             initiaux, perturbés et réestimés
185
186     """
187
188     C_reel, X_reel, theta_reel = genere_donnees()
189
190     if affichage: scene_3D()
191
192     matrices_P = []
193     for i in range(K):
194         matrices_P.append(matrice_P(C_reel[i], theta_reel[i], f))
195
196     x_reel = np.zeros((N, K, 2))
197     for j in range(N):
198         for i in range(K):
199             point = matrices_P[i].dot(np.array([X_reel[j, 0], X_reel[j, 1], X_reel[j, 2],
                    1]))
200             x_reel[j, i] = point[:-1] / point[-1]
201
202     # perturbation des coordonnées et des angles
203
204     x_0 = np.copy(x_reel)
205     if not x_exact: x_0 += normal(0, sigma_x, (N, K, 2))
206     theta_0 = theta_reel + normal(0, sigma_theta, (K, 3))
207
208     # minimisation de F
209
210     A = csr_matrix(matrice_A(C_reel, theta_0, x_0, f))
211
212     erreur = ssl.lsqr(A, -F(C_reel, theta_0, x_0, f), conlim=1.0e+8)[0]
213
214     theta_a = theta_0 + erreur.reshape((K, 3))
215     x_a = np.copy(x_0)
216
217     return C_reel, X_reel, theta_reel, theta_0, theta_a, x_reel, x_0, x_a
218
219 def reestimation_parametres_choisis(x_fixes, theta_fixes, affichage=False):
220     """ réalise une simulation qui ne réestime que les paramètres souhaités
221
222     PARAMETRES
223     x_fixes [array (N, K, 2)] : array de 0 et de 1. Les 1 correspondent aux coordonnées qu
            'il ne faut pas réestimer
224     theta_fixes [array (K, 3)] : array de 0 et de 1. Les 1 correspondent aux angles qu'il
            ne faut pas réestimer
225     affichage [bool] : si vrai, affiche les données créées sur une figure 3D
226
227     SORTIES
228     C_reel [array (K, 3)] : coordonnées des caméras
229     X_reel [array (N, 3)] : coordonnées des points
230     theta_reel, theta_0, theta_a [array (K, 3)] : angles de rotation des caméras,
            respectivement initiaux, perturbés et réestimés
```

```
    x_reel, x_0, x_a [array (N, K, 2)] : coordonnées des images des points, respectivement
        initiaux, perturbés et réestimés

    """

    C_reel, X_reel, theta_reel = genere_donnees()

    if affichage: scene_3D()

    matrices_P = []
    for i in range(K):
        matrices_P.append(matrice_P(C_reel[i], theta_reel[i], f))

    x_reel = np.zeros((N, K, 2))
    for j in range(N):
        for i in range(K):
            point = matrices_P[i].dot(np.array([X_reel[j, 0], X_reel[j, 1], X_reel[j, 2],
                1]))
            x_reel[j, i] = point[:-1] / point[-1]

    # perturbation des coordonnées et des angles

    x_0 = x_reel + normal(0, sigma_x, (N, K, 2))
    theta_0 = theta_reel + normal(0, sigma_theta, (K, 3))

    for n in range(N):
        for k in range(K):
            for i in range(2):
                if x_fixes[n, k, i] == 1:
                    x_0[n, k, i] = x_reel[n, k, i]
    for k in range(K):
        for angle in range(3):
            if theta_fixes[k, angle] == 1:
                theta_0[k, angle] = theta_reel[k, angle]

    # minimisation de F

    A, B = matrices_A_B(C_reel, theta_0, x_0, f)
    for k in range(K-1, -1, -1):
        for angle in range(2, -1, -1):
            if theta_fixes[k, angle] == 1:
                A = np.delete(A, (3*k+angle), axis=1)
    for n in range(N-1, -1, -1):
        for k in range(K-1, -1, -1):
            for i in range(1, -1, -1):
                if x_fixes[n, k, i] == 1:
                    B = np.delete(B, (2*K*n + 2*k + i), axis=1)

    M = np.concatenate((A, B), axis=1)

    erreur1 = ssl.lsqr(M, -F(C_reel, theta_0, x_0, f), conlim=1.0e+8)[0]

    erreur = np.zeros((3*K + 2*N*K))
    i = 0
    for p in range(3*K):
        if theta_fixes[p//3, p%3] == 0:
            erreur[p] = erreur1[i]
            i += 1
    for p in range(3*K, 3*K + 2*N*K):
        q = p - 3*K
```

```
289         if x_fixes[q//(2*K), (q%(2*K))//2, q%2] == 0:
290             erreur[p] = erreur1[i]
291             i += 1
292 
293     theta_a = theta_0 + erreur[:3*K].reshape((K, 3))
294     x_a = np.copy(x_0)
295     for j in range(N):
296         for i in range(K):
297             x_a[j, i, 0] += erreur[3*K + 2*K*j + 2*i]
298             x_a[j, i, 1] += erreur[3*K + 2*K*j + 2*i + 1]
299 
300     return C_reel, X_reel, theta_reel, theta_0, theta_a, x_reel, x_0, x_a
```

Et celles-ci permettent de faire les simulations avec un terme forçant :

```
1  def reestimation_globale_forcant(x_exact=False, theta_exact=False, affichage=False):
2      """ réalise une simulation globale (création des données + réestimation de tous les
           paramètres)
3  
4      PARAMETRES
5      x_exact [bool] : si vrai, fixe x_0 à x_reel (pas de perturbation des points)
6      theta_exact [bool] : si vrai, fixe theta_0 à theta_reel (pas de perturbation des
           angles)
7      affichage [bool] : si vrai, affiche les données créées sur une figure 3D
8  
9      SORTIES
10     C_reel [array (K, 3)] : coordonnées des caméras
11     X_reel [array (N, 3)] : coordonnées des points
12     theta_reel, theta_0, theta_a [array (K, 3)] : angles de rotation des caméras,
           respectivement initiaux, perturbés et réestimés
13     x_reel, x_0, x_a [array (N, K, 2)] : coordonnées des images des points, respectivement
            initiaux, perturbés et réestimés
14 
15     """
16 
17     C_reel, X_reel, theta_reel = genere_donnees()
18 
19     if affichage: scene_3D()
20 
21     matrices_P = []
22     for i in range(K):
23         matrices_P.append(matrice_P(C_reel[i], theta_reel[i], f))
24 
25     x_reel = np.zeros((N, K, 2))
26     for j in range(N):
27         for i in range(K):
28             point = matrices_P[i].dot(np.array([X_reel[j, 0], X_reel[j, 1], X_reel[j, 2],
                   1]))
29             x_reel[j, i] = point[:-1] / point[-1]
30 
31     # perturbation des coordonnées et des angles
32 
33     x_0 = np.copy(x_reel)
34     if not x_exact: x_0 += normal(0, sigma_x, (N, K, 2))
35     theta_0 = np.copy(theta_reel)
36     if not theta_exact: theta_0 += normal(0, sigma_theta, (K, 3))
37 
38     # minimisation de F
39 
40     A, B = matrices_A_B(C_reel, theta_0, x_0, f)
```

```
41      M = np.concatenate((A, B), axis=1)
42
43      # ajout du terme forcant sur la matrice M
44      lamb = np.zeros(3*K+2*K*N)
45      lamb[0:3*K] = lamb_theta
46      lamb[3*K:] = lamb_x
47      sig = np.zeros(3*K+2*K*N)
48      sig[0:3*K] = sigma_theta
49      sig[3*K:] = sigma_x
50
51      contrainte = np.eye(3*K+2*N*K) * lamb/sig
52      M = csr_matrix(np.append(M, contrainte, axis=0))
53
54      b = np.zeros((K*(K-1)//2*N+3*K+2*N*K))
55      b[:K*(K-1)//2*N] = -F(C_reel, theta_0, x_0, f)
56
57      erreur = ssl.lsqr(M, b, conlim=1.0e+8)[0]
58
59      theta_a = theta_0 + erreur[:3*K].reshape((K, 3))
60      x_a = np.copy(x_0)
61      for j in range(N):
62          for i in range(K):
63              x_a[j, i, 0] += erreur[3*K + 2*K*j + 2*i]
64              x_a[j, i, 1] += erreur[3*K + 2*K*j + 2*i + 1]
65
66      return C_reel, X_reel, theta_reel, theta_0, theta_a, x_reel, x_0, x_a
67
68  def reestimation_x_forcant(theta_exact=False, affichage=False):
69      """ réalise une simulation ne réestimant que les x (création des données + ré
            estimation des x)
70
71      PARAMETRES
72      x_exact [bool] : si vrai, fixe x_0 à x_reel (pas de perturbation des points)
73      theta_exact [bool] : si vrai, fixe theta_0 à theta_reel (pas de perturbation des
            angles)
74      affichage [bool] : si vrai, affiche les données créées sur une figure 3D
75
76      SORTIES
77      C_reel [array (K, 3)] : coordonnées des caméras
78      X_reel [array (N, 3)] : coordonnées des points
79      theta_reel, theta_0, theta_a [array (K, 3)] : angles de rotation des caméras,
            respectivement initiaux, perturbés et réestimés
80      x_reel, x_0, x_a [array (N, K, 2)] : coordonnées des images des points, respectivement
             initiaux, perturbés et réestimés
81
82      """
83
84      C_reel, X_reel, theta_reel = genere_donnees()
85
86      if affichage: scene_3D()
87
88      matrices_P = []
89      for i in range(K):
90          matrices_P.append(matrice_P(C_reel[i], theta_reel[i], f))
91
92      x_reel = np.zeros((N, K, 2))
93      for j in range(N):
94          for i in range(K):
95              point = matrices_P[i].dot(np.array([X_reel[j, 0], X_reel[j, 1], X_reel[j, 2],
                    1]))
```

```
96              x_reel[j, i] = point[:-1] / point[-1]
97
98      # perturbation des coordonnées et des angles
99
100     x_0 = x_reel + normal(0, sigma_x, (N, K, 2))
101     theta_0 = np.copy(theta_reel)
102     if not theta_exact: theta_0 += normal(0, sigma_theta, (K, 3))
103
104     # minimisation de F
105
106     B = matrice_B(C_reel, theta_0, x_0, f)
107
108     # ajout du terme forcant sur la matrice M
109     contrainte = np.eye(2*N*K) * lamb_x/sigma_x
110     M = csr_matrix(np.append(B, contrainte, axis=0))
111
112     b = np.zeros((K*(K-1)//2*N+2*N*K))
113     b[:K*(K-1)//2*N] = -F(C_reel, theta_0, x_0, f)
114
115     erreur = ssl.lsqr(B, -F(C_reel, theta_0, x_0, f), conlim=1.0e+8)[0]
116
117     theta_a = np.copy(theta_0)
118     x_a = np.copy(x_0)
119     for j in range(N):
120         for i in range(K):
121             x_a[j, i, 0] += erreur[2*K*j + 2*i]
122             x_a[j, i, 1] += erreur[2*K*j + 2*i + 1]
123
124     return C_reel, X_reel, theta_reel, theta_0, theta_a, x_reel, x_0, x_a
125
126 def reestimation_theta_forcant(x_exact=False, affichage=False):
127     """ réalise une simulation ne réestimant que les angles (création des données + ré
        estimation des angles)
128
129     PARAMETRES
130     x_exact [bool] : si vrai, fixe x_0 à x_reel (pas de perturbation des points)
131     theta_exact [bool] : si vrai, fixe theta_0 à theta_reel (pas de perturbation des
        angles)
132     affichage [bool] : si vrai, affiche les données créées sur une figure 3D
133
134     SORTIES
135     C_reel [array (K, 3)] : coordonnées des caméras
136     X_reel [array (N, 3)] : coordonnées des points
137     theta_reel, theta_0, theta_a [array (K, 3)] : angles de rotation des caméras,
        respectivement initiaux, perturbés et réestimés
138     x_reel, x_0, x_a [array (N, K, 2)] : coordonnées des images des points, respectivement
         initiaux, perturbés et réestimés
139
140     """
141
142     C_reel, X_reel, theta_reel = genere_donnees()
143
144     if affichage: scene_3D()
145
146     matrices_P = []
147     for i in range(K):
148         matrices_P.append(matrice_P(C_reel[i], theta_reel[i], f))
149
150     x_reel = np.zeros((N, K, 2))
151     for j in range(N):
```

```
152         for i in range(K):
153             point = matrices_P[i].dot(np.array([X_reel[j, 0], X_reel[j, 1], X_reel[j, 2],
                    1]))
154             x_reel[j, i] = point[:-1] / point[-1]
155
156     # perturbation des coordonnées et des angles
157
158     x_0 = np.copy(x_reel)
159     if not x_exact: x_0 += normal(0, sigma_x, (N, K, 2))
160     theta_0 = theta_reel + normal(0, sigma_theta, (K, 3))
161
162     # minimisation de F
163
164     A = matrice_A(C_reel, theta_0, x_0, f)
165
166     # ajout du terme forcant sur la matrice M
167     contrainte = np.eye(3*K) * lamb_theta/sigma_theta
168     M = csr_matrix(np.append(A, contrainte, axis=0))
169
170     b = np.zeros((K*(K-1)//2*N+3*K))
171     b[:K*(K-1)//2*N] = -F(C_reel, theta_0, x_0, f)
172
173     erreur = ssl.lsqr(A, -F(C_reel, theta_0, x_0, f), conlim=1.0e+8)[0]
174
175     theta_a = theta_0 + erreur.reshape((K, 3))
176     x_a = np.copy(x_0)
177
178     return C_reel, X_reel, theta_reel, theta_0, theta_a, x_reel, x_0, x_a
```

Pour l'affichage des différentes figures présentes sur ce rapport, on pourra se référer directement aux fichiers `BA_simulations.py` et `BA_simulations_terme_forçant.py` sur Github.