ruang guru

VEKTOR

Besaran yang mempunyai
nilai dan arah.

Notasi Vektor

$\vec{a}$ atau $\mathbf{a}$

Penggambaran Vektor

Vektor digambarkan dengan anak panah.

Contoh vektor $\vec{a}$:

Vektor $\vec{a}$ mempunyai titik pangkal di O dan titik ujung di A.

ruang guru

Vektor dalam Koordinat 2D

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

Panjang vektor $\vec{a}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

Vektor dalam Koordinat 3D

$$\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$$

Panjang vektor $\vec{p}$

$$|\vec{p}| = \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2}$$

ruang guru

Vektor Satuan

Vektor yang mempunyai panjang satu satuan dan dilambangkan dengan topi (^).

Rumus

$$\frac{\textbf{Vektor}}{\textbf{Panjang Vektor}}$$

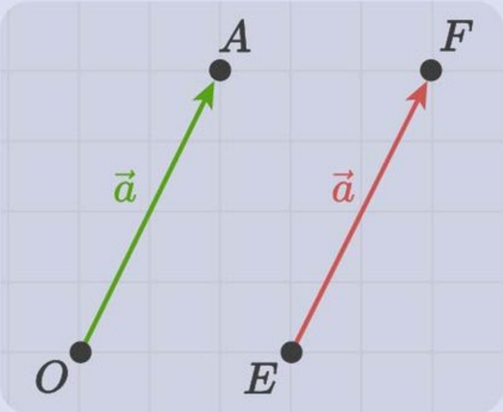
Contoh:

Misalkan diketahui vektor $\vec{p}$, dan panjang vektornya adalah $|\vec{p}|$, maka vektor satuannya $(\hat{p})$ adalah

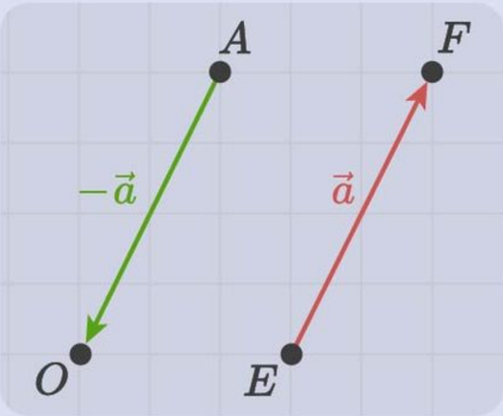
$$\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Kesamaan Dua Vektor

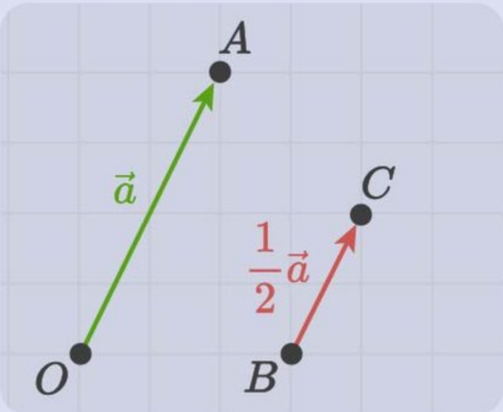
- Vektor sama panjang dan searah



- Vektor sama panjang dan berlawanan arah



- Vektor tidak sama panjang dan searah



ruang guru

Vektor Basis dinyatakan dalam Vektor Kolom

Vektor Basis

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contoh penggunaannya dalam suatu vektor:

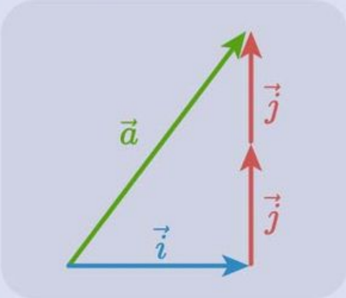
Misalkan diketahui vektor $\vec{p} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, maka vektor $\vec{p}$ dapat dinyatakan

$$\vec{p} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

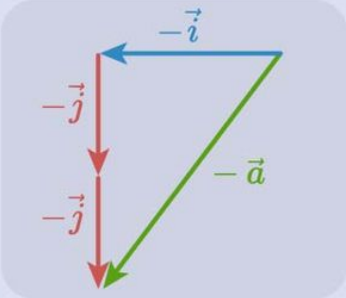
ruang guru

Kelipatan Suatu Vektor

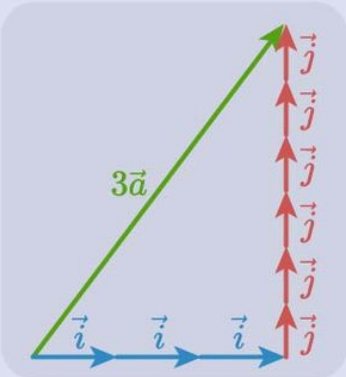
- $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$



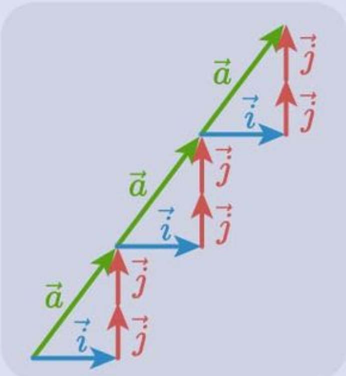
- $-\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j}$



- $3\vec{a} = \vec{i} + \vec{i} + \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{j} + 2\vec{j}$



- $3\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{i} + 2\vec{j}$

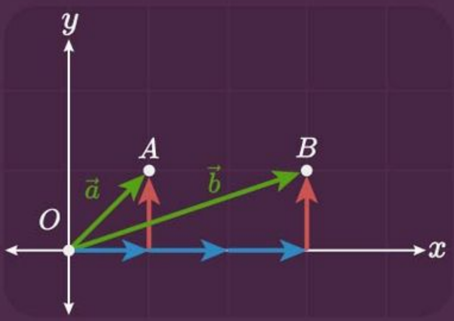


ruang guru

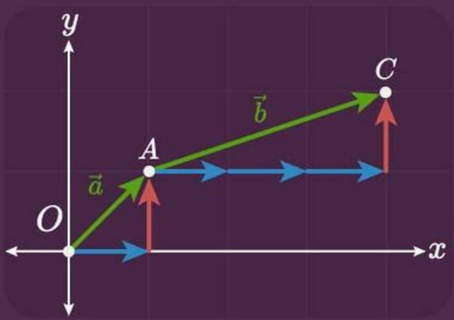
Penjumlahan Dua Vektor

Metode Segitiga

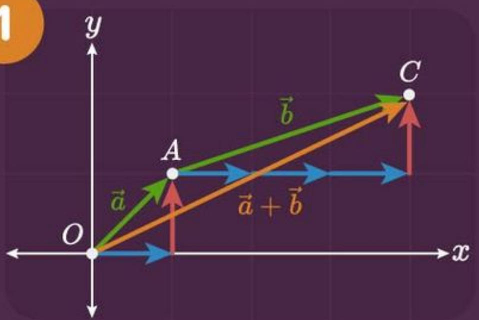
Misalkan diketahui, vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ seperti ini



Kemudian susun vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ seperti ini
(untuk mencari hasil dari $\vec{a}+\vec{b}$ dan $\vec{b}+\vec{a}$)

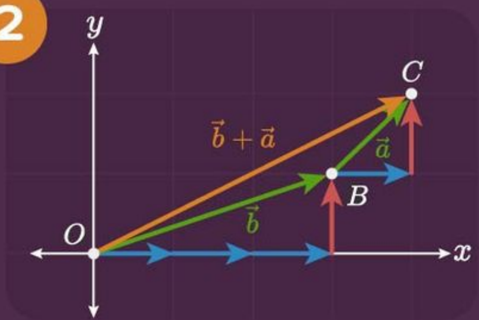


1



$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

2

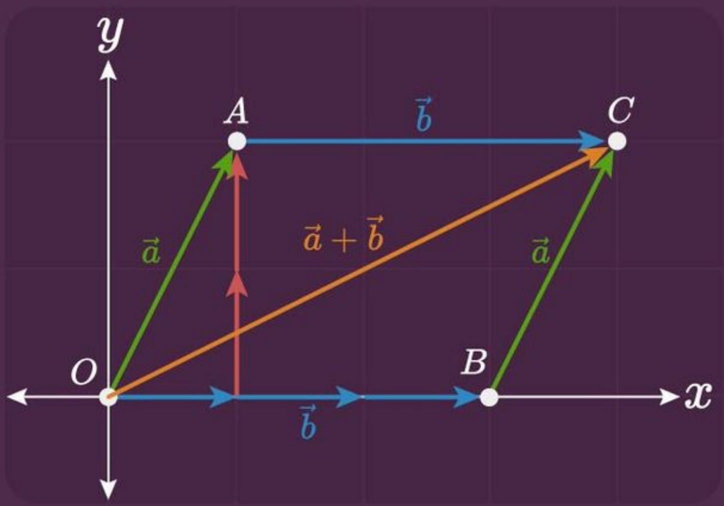


$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

ruang guru

Metode Jajaran Genjang



$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

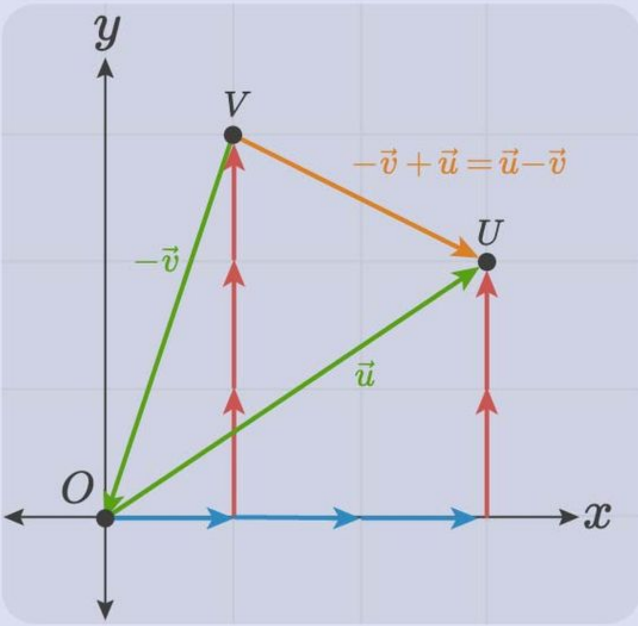
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}$$

ruang guru

Selisih Dua Vektor

Misalkan vektor $\overrightarrow{OV}$ adalah $\vec{v}$, maka vektor $\overrightarrow{VO}$ adalah $-\vec{v}$. Karena vektor sama panjang dan berlawanan arah, maka dapat diperoleh $\overrightarrow{VO} = -\overrightarrow{OV}$, sehingga



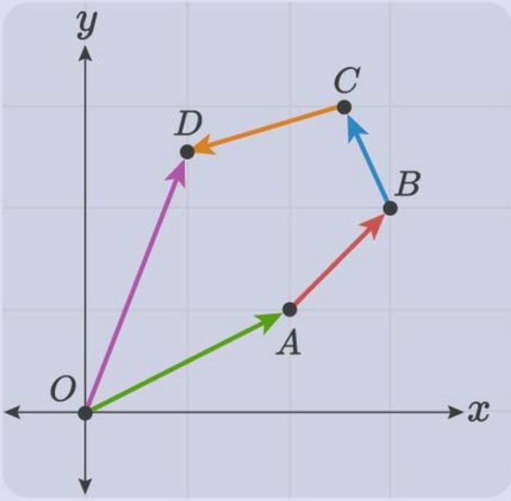
$$\begin{aligned}\overrightarrow{VU} &= \overrightarrow{VO} + \overrightarrow{OU}\\ &= -\vec{v} + \vec{u}\\ &= \vec{u} - \vec{v}\end{aligned}$$

$\vec{u} - \vec{v}$ adalah selisih dari vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

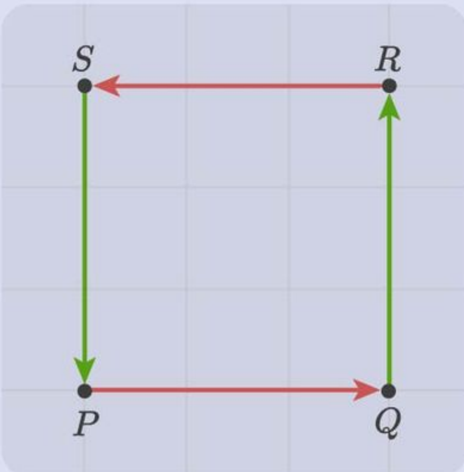
ruang guru

Penjumlahan pada Banyak Vektor

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$$



$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{PP}$$



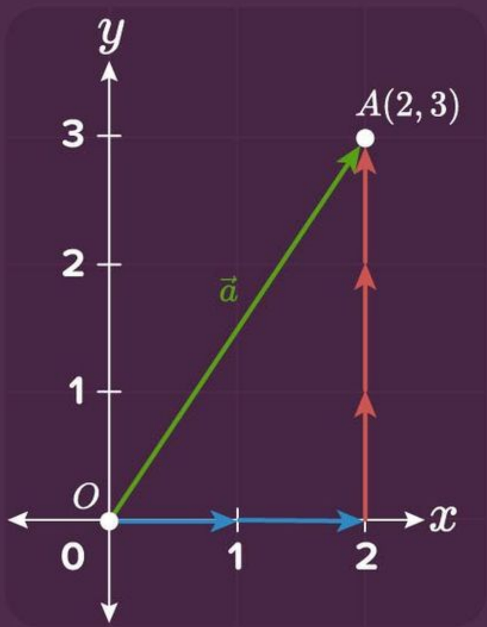
Karena kembali ke posisi awal, maka $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ (vektor nol).

ruang guru

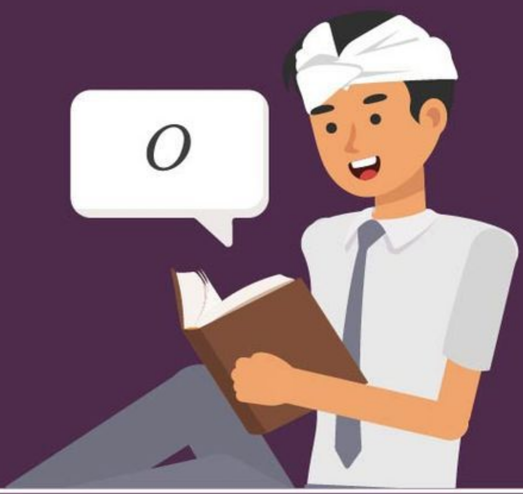
Vektor Posisi

Vektor yang dimulai dari titik ***O*** (pusat koordinat) ke suatu titik.

Contoh:



$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

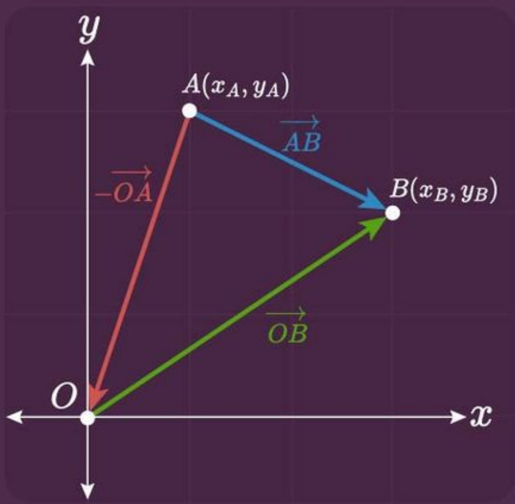


ruang guru

Menentukan Suatu Vektor dari Dua Titik

Dalam Koordinat 2D

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Dalam Koordinat 3D

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Contoh:

Diketahui titik $A(3, 2, 4)$ dan $B(4, -1, 5)$. Tentukan vektor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ -1 - 2 \\ 5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

ruang guru

Sifat-Sifat Operasi Hitung pada Vektor

- Jika ada suatu skalar m dan suatu vektor $\vec{p}$, maka berlaku:

$$m\vec{p} = mp_x\vec{i} + mp_y\vec{j} + mp_z\vec{k}$$

- Jika ada dua skalar m dan n dan vektor $\vec{p}$, maka berlaku:

$$(mn)\vec{p} = m(n\vec{p}) = n(m\vec{p})$$

$$(m \pm n)\vec{p} = m\vec{p} \pm n\vec{p}$$

- Jika ada skalar m dan dua vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$, maka berlaku:

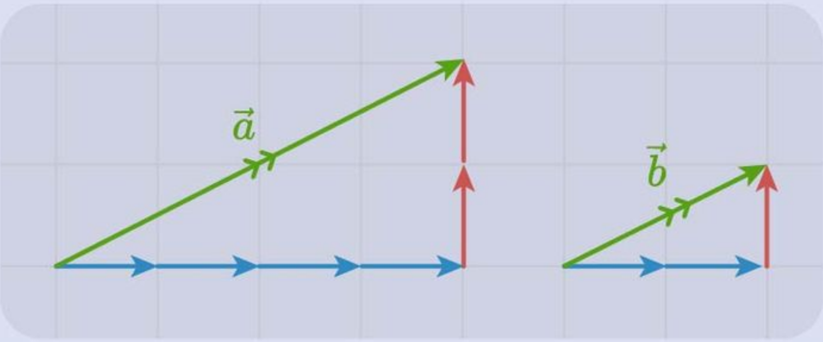
$$m(\vec{p} + \vec{q}) = m\vec{p} + n\vec{q}$$

Sifat Operasi Penjumlahan pada Vektor:

- $\vec{p} + (-\vec{p}) = \vec{0}$
- $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$
- $\vec{p} + (\vec{q} + \vec{r}) = (\vec{p} + \vec{q}) + \vec{r}$

ruang guru

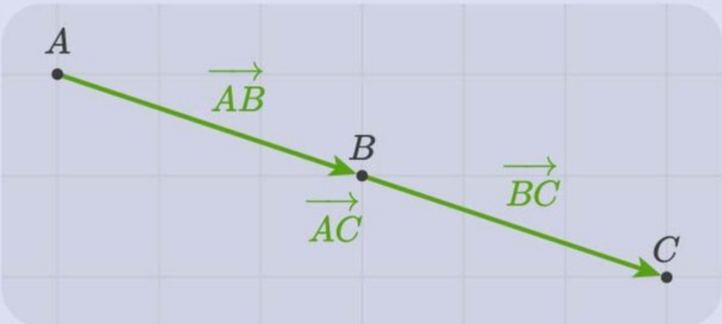
Vektor yang Saling Sejajar



$$\vec{a} = m\vec{b}$$

$m \neq 0$ dan $m \in \mathbb{R}$

Tiga Titik Segaris

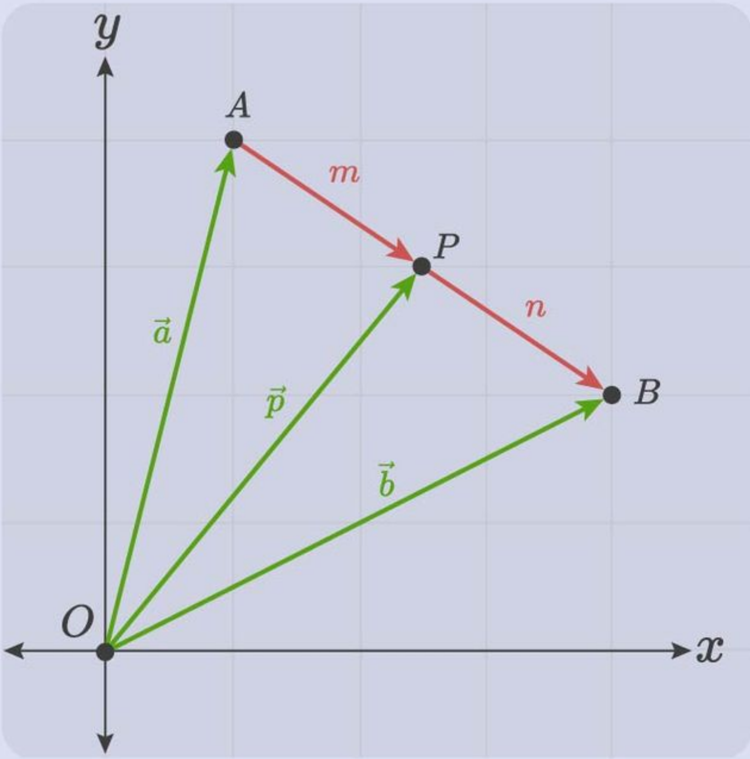


Dari gambar di atas diperoleh 3 hubungan, yaitu:

- $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{AB}$

dengan m, n, t skalar bukan nol.

Perbandingan Vektor dalam Segitiga

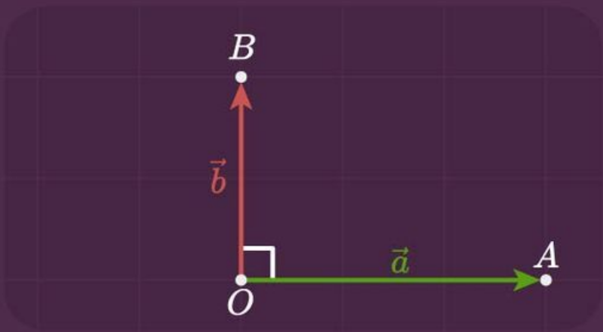


$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m + n}$$

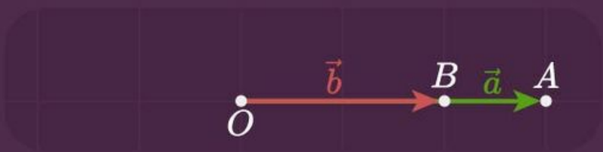
ruang guru

Hasil Kali Skalar *(Dot Product)*

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$



- $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

Hasil Perkalian Titik antar Vektor Basis

- $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$
- $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$
- $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$
- $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$
- $\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$

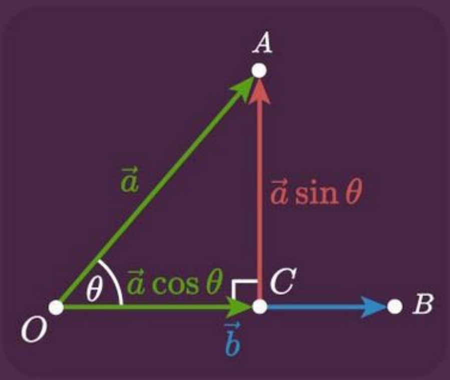
ruang guru

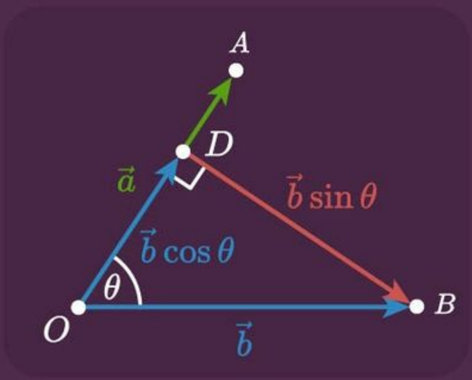
Rumus Hasil Kali Skalar

- Jika diketahui komponennya, maka

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Jika diketahui panjang dan sudutnya, maka





$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \qquad \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}| \cos\theta$$

Sifat-Sifat Hasil Kali Skalar

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$

Proyeksi Vektor Ortogonal

Proyeksi Vektor $\vec{a}$ terhadap Vektor $\vec{b}$

- Proyeksi skalar ortogonal

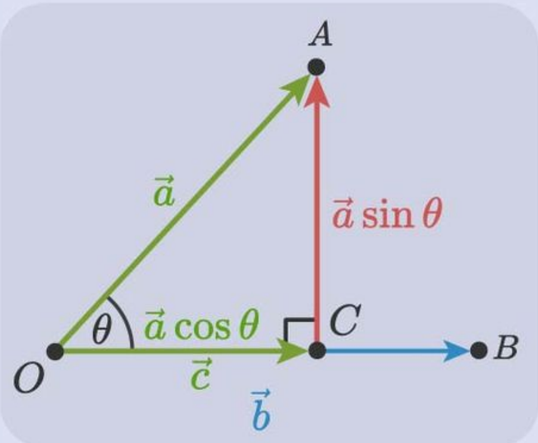
$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

- Panjang proyeksi skalar ortogonal

$$|\vec{c}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right|$$

- Proyeksi vektor ortogonal

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \cdot \vec{b}$$



ruang guru

Proyeksi Vektor $\vec{b}$ terhadap Vektor $\vec{a}$

- Proyeksi skalar ortogonal

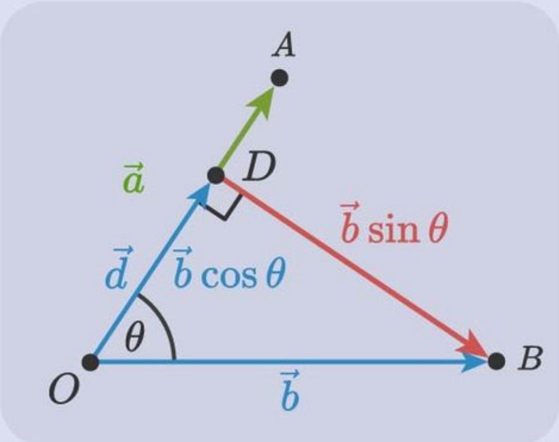
$$\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$$

- Panjang proyeksi skalar ortogonal

$$|\vec{d}\,| = \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \right|$$

- Proyeksi vektor ortogonal

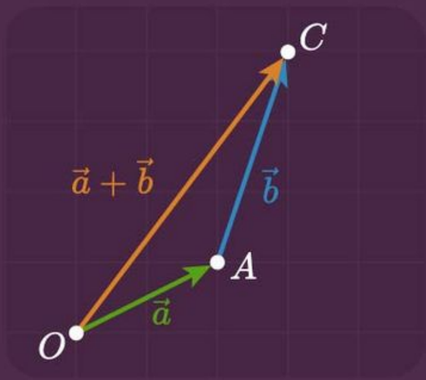
$$\vec{d} = \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right) \cdot \vec{a}$$



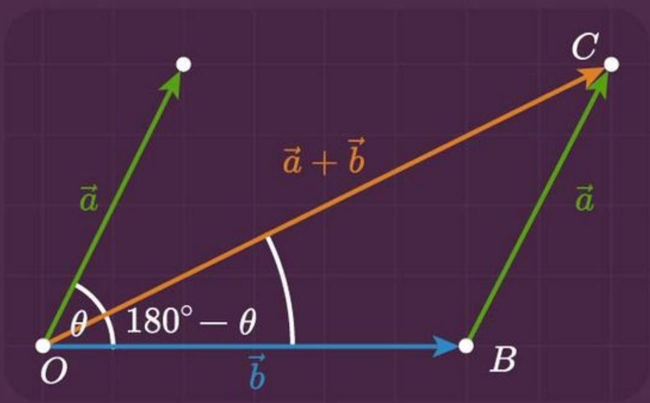
ruang guru

Proyeksi Vektor

Panjang Jumlah Dua Vektor

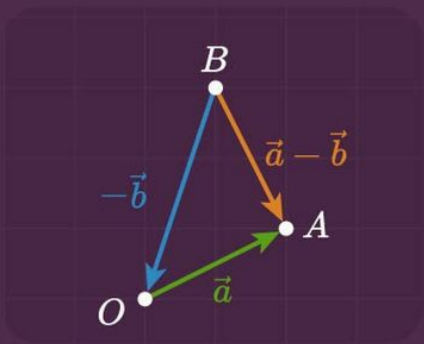


$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2(\vec{a}\cdot\vec{b})}$$

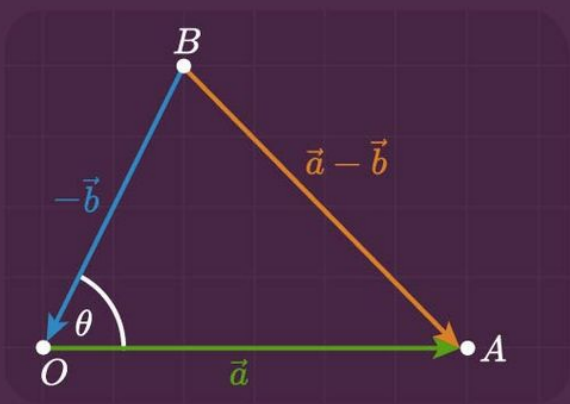


$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

Panjang Selisih Dua Vektor



$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2(\vec{a}\cdot\vec{b})}$$



$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$