ruang guru

Konsep Kilat

MATRIKS

Definisi Matriks

Sekumpulan bilangan yang disusun berdasarkan baris dan kolom dan ditempatkan di dalam kurung biasa atau kurung siku.

Bentuk Umum Matriks

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\rightarrow \text{Baris ke-1} \\
\rightarrow \text{Baris ke-2} \\
\\
\rightarrow \text{Baris ke-}n
\end{array} \\
\begin{array}{cccc}
\downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\text{Kolom ke-1} & \text{Kolom ke-2} & & \text{Kolom ke-}n
\end{array}
\end{array}
$$

ruang guru

Ordo

Ukuran matriks.

Banyak baris × Banyak kolom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ordo dari matriks A adalah $m \times n$.
Ditulis: $A_{m \times n}$

Transpose Matriks

Sebuah matriks yang didapatkan dengan cara memindahkan elemen-elemen pada baris menjadi elemen-elemen pada kolom atau sebaliknya.

Misalkan A^T adalah transpose dari matriks A, maka berlaku:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \longleftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks

- **Matriks Baris (Banyaknya baris adalah 1)**

$$A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- **Matriks Kolom (Banyaknya kolom adalah 1)**

$$A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- **Matriks Persegi (Banyak baris = banyak kolom)**

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dengan $m = n$

Contoh

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- **Matriks Persegi Panjang (Banyak baris $\neq$ banyak kolom)**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

dengan $m \neq n$

ruang guru

Kesamaan Matriks

Dua atau lebih matriks dikatakan sama, jika:

- Memiliki ordo yang sama
- Elemen-elemen yang seletak bernilai sama

Misalkan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dan

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Jika matriks A = matriks B maka,

$$\begin{gathered} a_{11} = b_{11} \\ a_{12} = b_{12} \\ \vdots \\ a_{mn} = b_{mn} \end{gathered}$$

ruang guru

Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

- Syarat penjumlahan dan pengurangan matriks adalah memiliki ordo yang sama.
- **Caranya:** menjumlahkan atau mengurangkan elemen seletak.

Misalkan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

karena ordo matriks A dan matriks B sama, yaitu 2×3,

maka kita bisa mencari nilai $A \pm B$, yaitu

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{pmatrix}$$

ruang guru

Matriks Nol

Sebuah matriks yang semua elemen-elemennya bernilai nol.

Contoh

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Perkalian Skalar pada Matriks

Misalkan diketahui sebuah matriks A dan sebuah skalar k

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

maka nilai dari k dikali matriks A atau kA adalah:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

ruang guru

Perkalian Matriks

$$A_{m\times n} \cdot B_{p\times q} = C_{m\times q}$$

Syarat suatu matriks dapat dikalikan adalah $n = p$

Contoh perkalian dua buah matriks:

Diketahui matriks $A_{2\times 3}$ dan $B_{3\times 1}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

dengan:

$$c_{11} = (a_{11} \times b_{11}) + (a_{12} \times b_{21}) + (a_{13} \times b_{31})$$

$$c_{21} = (a_{21} \times b_{11}) + (a_{22} \times b_{21}) + (a_{23} \times b_{31})$$

ruang guru

Matriks Identitas (I)

Matriks persegi dengan elemen pada diagonal utamanya 1, selain itu elemennya adalah 0.

Contoh matriks identitas pada ordo 2×2

$$I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh matriks identitas pada ordo 3×3

$$I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suatu matriks, misalkan A, jika dikalikan dengan matriks identitas I, maka hasilnya adalah matriks itu sendiri.

$$A \times I = A$$

$$I \times A = A$$

ruang guru

Penyelesaian Sistem Persaamaan Linear (SPL) dengan OBE

Langkah-langkah mencari penyelesaian SPL dengan OBE:

1 SPL dengan bentuk:

$ax + by = p$ dan $cx + dy = q$

2 Susun SPL menjadi seperti berikut

$$\begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \end{array}\right)$$

3 Ubah bentuk matriks pada langkah 2 menjadi

$$\begin{aligned} 1x + 0y &= S_1 \\ 0x + 1y &= S_2 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & S_1 \\ 0 & 1 & S_2 \end{array}\right)$$

dengan: S_1 adalah penyelesaian untuk x
S_2 adalah penyelesaian untuk y

Penting!

Cara mengubah persamaan dan matriks pada langkah ke-2 menjadi langkah ke-3 adalah dengan tahapan yang bisa dilakukan pada proses OBE, yaitu:

1. Mengalikan baris manapun dengan bilangan (membagi juga termasuk).
2. Menambah atau mengurangi baris manapun dengan kelipatan dari lainnya.
3. Menukar urutan baris.

Cara penyelesaian di atas juga berlaku untuk sistem persamaan linear tiga variabel.

ruang guru

Invers Matriks dengan OBE

Langkah-langkah mencari invers dari suatu matriks dengan OBE:

1 Misalkan sebuah matriks A sembarang

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2 Ubah susunan matriks menjadi:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3 Ubah susunan matriks pada langkah ke-2 menjadi

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & e & f \\ 0 & 1 & g & h \end{array}\right)$$

Diperoleh Invers matriks A, yaitu:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Penting!

Cara mengubah persamaan dan matriks pada langkah ke-2 menjadi langkah ke-3 adalah dengan tahapan yang bisa dilakukan pada proses OBE, yaitu:

1. Mengalikan baris manapun dengan bilangan (membagi juga termasuk).
2. Menambah atau mengurangi baris manapun dengan kelipatan dari lainnya.
3. Menukar urutan baris.