数学分析

ElegantLaTeX 经典之作

作者：Seihitsu Zankyou
组织：ElegantLaTeX Program
时间：December 18, 2022
版本：pre-1

ElegantLaTeX Program

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

目录

第一部分

重提旧事

主题概要

> **No scales. Never. Exercises? Never. …**
> **I was training my works and if it doesn't sound I kept studying it again.**
> **Technique skills doesn't fly away.**
>
> —*Martha Argerich*

数学分析是一门由多个不同部分组成的、扎根于十七世纪前的自然科学与自然哲学研究中的学科，其大多结果经过几个世纪的打磨，已经能非常成熟地进行数学公理化了。现代数学分析在某种程度上是对“古典分析学”进行的拓展、特化、抽象，但其本质仍然是继承着旧时代研究方法与先贤思辨的、精致而庞大的系统。

按部就班地按照有多年教学经验的教授所撰写书籍来学习，远比一头扎入名为“现代数学”的深谭要能更快去到前沿。

数学分析的教科书少说也有小 30 本，笔者对其中的一些有所了解，但更多的还尚未读过，便借着写笔记的机会把某些经典教材好好读读。在宏观角度下，数学分析便是严格化的微积分，更确切地说是为一种**微分-积分**过程提供语言描述。

在研究运动学的时候，牛顿发现将一个较为复杂的运动给分解为**无穷级数**后求解非常容易计算，约在 1665 年时利用二项式定理得到了非常经典的结果：曲线 $y = ax^{\frac{n}{m}}$ 围出的面积是 $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$，即对函数 $f(x) = ax^{\frac{n}{m}}$ 求积分。但是他所用的方法并没有很好的严谨与简洁性[1]，不过对于那个仅仅能对非常简单的运动进行分析的时代来说，已经是一项非常特出的贡献了。

海峡另一侧，德国通识家莱布尼茨在 1684 年的时候发布了他在微积分学上工作的第一篇论文，题为《一种求极大极小值与切线的方法，适用于有理与无理量，与该特殊类型的计算》，内容关于要如何用微分求出一个“变换”的极值。在此之后，他为当时的所有微积分创建了新记号与名字，如称变换为函数、积分号 $\int$、微分号 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及其它。他的著作《微分学的历史与起源》有非常突出的历史地位，在文学上的造诣让这学说流传甚广，虽然历史并没有为他开拓通往未来的航道，如果你有兴趣，请去寻找名叫**莱布尼茨全集**的系列。

[1]具体参考《微积分的历程：从牛顿到勒贝格》的 24-28 页

第 1 章 分析浅引：空间的构筑

1.1 基本记号

学习数学的时候，能提出问题才有结果。设想自己没有对任何事物的感受能力，仅仅能知道有“这么一些东西”存在于那里，这时能做到的事不过是将这些东西视为一个收集中的不同事物而已。

定义 1.1

一堆对象的收集 X，是这一堆东西的整体。 ♣

注

为了定义“收集”，需要引入“集合”：**集合**是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 这些对象称为该集合的**元素**，但是这与收集的概念在本质上是几乎一样的。形式上，我们对收集中的对象蒙蔽了感官，所以并不能判断其是否有相同**性质**，在集论中有配套的逻辑系，用这个系统进行性质的具体刻画是必要的。

逻辑系统的主要目的是判断一个问题是否**可解**，或称该命题是否为真。从一个已知命题推出新的命题是**逻辑演绎**的唯一方法，称推导第一个步骤的假设为**公理**，它们是**恒真式**的例子，在任何附加条件下都是正确的。

定义 1.2

一些基础逻辑记号规范：

1. **真值**是定下的两个对象 $\top, \bot$ 或 $0, 1$，它们在所论收集 Γ 内作为**真**与**假**，是初始的恒真式与矛盾式。
2. 符号 p, q, r 暂时作为收集 Γ 中的对象，称为**命题变量**，简称**变量**。
3. 如果 q 是 p 的**推论**，则记为 $p \Rightarrow q$，当 p 为真时 q 必然为真，其它情况则不一定。另外将恒真式记为 $\vDash p$，即 $p \Rightarrow 1$。
4. 对推论进行判断，记为 $p \to q$，如果 p 为真时 q 为假，则 $(p \to q)$ 为假，其它情况为真。
5. 如果 p 与 q 互为推论，亦即 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，那么它们的真值一定相同，记为 $p \Leftrightarrow q$，称它们**等价**。同时简单地把真值相同的变量记为 $p = q$。
6. 将 $p \to 0$ 记为 $\neg p$，称为 p 的**否定**，它只在 p 为 0 时为真，即它反转 p 的真值，立见 $\neg\neg p = p$。 ♣

想要操作逻辑符号，那必须进行两个逻辑词之间的关系判断，比如“当 p 与 q 都为真时该命题为真”或“当 p 与 q 中任一者为真时该命题为真”。将“该命题”专门提出来，称为**与**、**或**，它们与上述的 $\to, 0, 1, \neg$ 放在一起被称为**逻辑符号**。

定义 1.3 (De Morgan 律与合/析取)

合取记为 $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$，**析取**则是 $p \vee q = \neg p \to q$，计算得 $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$。 ♣

能直接看出，若 p 非真，则其为假，称此现象为**排中律**，与 $\neg(\neg\neg p) = \neg p$ 等价。**反证法**是根据排中律设计的一种方法：p 与 $\neg p$ 中总有一个为假，想证明 p 为真；如果 $\neg p \Rightarrow r$，但 $r \Rightarrow p$，这导致**悖论** $\neg p \Rightarrow p$，根据基本假设这是谬误的，因此 p 为真。

接下来将直接使用平常人都知道的集合论语言进行描述，所谓的“收集”仅是不声明所选择的“集合论”与“逻辑系”时选择的词汇，在范畴论中会经常遇到。

1.2 自然数

可以尝试把一个集合中的元素排成序，$P=(P,\leqslant)$，比如集合 $\{x,y\}$ 有两个不同的排序 $x\leqslant y$ 与 $y\leqslant x$，而 $\{x,y,z\}$ 有四个，$\{w,x,y,z\}$ 有八个。总的来看，有 n 个元素的集合将有 2^n 个不同的排序方式，当 $n\to\infty$ 时，这些方式将会远远多于集合的元素。但是对于一个有限的 n，总能选择一个使得给定元素 x 比任何其它元素更小的序，称它为**良序**。

但是没有人喜欢选择。

如果有一种典型的方式，在一个集合上给出每个元素都可排序且总有最小的元素的序，那么世界会变得简单，**公理化集合论**的目的在本质上就是这样，避免一切悖论，囊括全部情形。不过直接给出公理是很难受的，就像学习向量空间的时候说“向量空间是一个使得其元素可加减、可倍率且有零的集合”一样，非常不知所云。

定义 1.4 (定理-命题-推论)

所谓**定理**，记为 $\Gamma\vdash p$，是一个有限定范围的恒真式，范围是 Γ。而**命题**是一个待证明为真的**公式**，后者指由逻辑符号连接变量构成的整体，如 $p\wedge\neg q$ 就是一个公式。**合式公式**是有意义的公式，咱 $p\to\neg p$ 就没有意义。能证明的公式就是合式公式。而**推论**无非是 $p\Rightarrow q$。♣

一般来说省略显然命题的证明，直接称其为定理。虽然在一些意义上它并不显然。

定理 1.1 (空集)

对于任意一个给定的集合 X，有唯一的**空集**为 $\varnothing:=\{x\in X\,|\,x\notin x\}$，并且 $\varnothing^{C}=X$。♡

定义 1.5 (幂集)

给定集合 X，可以生成新的集 $P(X):=\{Y\subset X\}$，那么可得 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，$P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$。♣

定义 1.6 (Cartesian 积)

定义**有序对** $(x,y):=\{x,\{x,y\}\}$，集合 $X\times Y:=\{(x,y)\,|\,x\in X,y\in Y\}$ 被称为 X 与 Y 的 **Cartesian 积**。♣

$X\vee Y=\varnothing$ 则乘积为空，而且 $X\times Y\subset P(P(X\cup Y))$，$Y\times X$ 同理。比如在 $X=\{x\},Y=\{y\}$ 时，$P(P(X\cup Y))\supset P(\{x,y\})\supset\{x,y,\{x,y\}\}$，立见其无序性。

定理 1.2 (序数的后继)

如果 $\alpha\subset P(\alpha)$，那么 $P(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$，称其为**序数**，而序数的幂集为其**后继**。♡

可见 $\varnothing$ 是最小的序数，所有的序数都被它生成。记 α 的后继为 α^+。

命题 1.1 (归纳法)

如果命题 p 基于序数 α，记为 $p=p(\alpha)$，同时 $\vDash p(\varnothing)$，且对于任意序数 $\beta\subsetneq\alpha$ 有 $\vdash p(\beta)$，那么 $\vdash p(\alpha)$。

证明 [采纳 J. Schlöder - Ordinal Arithmetic 中的证明]

假设 $\neg p(\theta)$ 是使得该命题为假的最小序数，则 $\theta\neq\varnothing$；若 $\theta=\gamma^+$，由于 $\vdash p(\gamma)$，有 $\vdash p(\theta)$，得到悖论。♠

定理 1.3 (Peano 公理)

可以看出 $\mathbf{On}:=$ **全体序数的收集**满足下列性质：

- $\varnothing\in\mathbf{On}$.
- $\alpha\in\mathbf{On}\Rightarrow\alpha^+\in\mathbf{On}$.
- $(\alpha=\beta)\Leftrightarrow(\alpha^+=\beta^+)$.

- $\forall \alpha \in \mathbf{On}, \alpha^+ \neq \varnothing$.
- $\vdash p(\varnothing) \wedge (\forall \beta < \alpha, \vdash p(\beta)) \Rightarrow \vdash p(\alpha)$.

从空集生成的序数类记为 $\mathbb{N}$，称之为**自然数**。它包含了全部 $P(\varnothing), P(P(\varnothing)), P(P(P(\varnothing))), \ldots$，直接记为 $1, 2, 3, \ldots$，但它本身是否是集合不能从上述运算中导出，为了保持数学上的严谨性，我们规定**自然数的收集是个集合**（无穷公理的一种表达）。

序数类不会是集合，因为每个序数都有后继，自然数也有后继，假设序数类包含了全部序数那它本身也是一个序数。这很显然能导出悖论：**Russell 悖论**的一种形式，另一种比较熟知的是**全体集合不构成集合**，因为 $\mathbf{On}$ 在全体集合的收集中，所以它不可能是集合。

更多公理集合论、自然数构造与无穷序数的信息可以查询附录。

1.3 数

实数是一个对加减乘除封闭、任何点之间都没有空隙的空间。

定义 1.7

实数集 $\mathbb{R}$ 满足以下条件：

- 有操作 $+ : (x, y) \to x + y \in \mathbb{R}$，$\times : (x, y) \to x \cdot y \in \mathbb{R}$，称为**加法与乘法**。
- 有序关系 $(\mathbb{R}, \leqslant)$，使其任意元素皆可排序，且任意非空子集总有最小元。

称 $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ 为**实数系**，它满足下述公理：x, y, z 是 $\mathbb{R}$ 中的任意元素，

F.1 $x + (y + z) = (x + y) + z,\ x + y = y + x,\ 0 + x = x + 0 = x,\ x + (-x) = 0.$

F.2 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ x \cdot y = y \cdot x,\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\ x \cdot (x^{-1}) = 1.$

F.3 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

O.1 $x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z.$

O.2 $x \leqslant y \leqslant x \Rightarrow x = y.$

O.3 $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z.$

O.4 $0 \leqslant x, y \Rightarrow 0 \leqslant xy.$

O.5 $0 < x \Rightarrow \exists n,\ y < n \cdot x.$

O.6 $P \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \sup(P) \in \mathbb{R}.$

♣

定义 1.8 (确界，开闭性)

称 x 为有序集 $P \subset P'$ 的**上界**，若 $P \leqslant x$，即 $\forall y \in P,\ y \leqslant x$。而**上确界** $\sup(P)$ 是全体上界中最小的那个，如果 $P = P'$，则上确界就是 P 的**极大元**：没有比它更大的数。
反过来有下确界。称不包含上与下确界的集合为**开集**，反之是**闭集**。

♣

注

指出几点重要性质：以上定义的各种概念都是唯一的，比如

1. $x + x' = x + y \Rightarrow (-x) + x + x' = (-x) + x + y \Rightarrow x' = y$，乘法情形相似；所以单位元都是唯一的。

2. $0 \leqslant x \Rightarrow -x \leqslant x + (-x) = 0.$

3. $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 0.$

4. 上确界显然唯一。

5. $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x \cdot x^{-1} = 1 \leqslant x^{-1}.$

现在能够操作的数是 $0, 1$，它们与上述条件将能够非常有效地造出整个实数系：

定义 1.9 (自然数)

只考虑加法与乘法交换结合性，可得 $1^+ = 1 + 1 \in \mathbb{N}$，$n^+ = n + 1 \in \mathbb{N}$。$\mathbb{N}$ 也对数乘封闭，因为 $n \times m = m + m + \ldots + m \in \mathbb{N}$，写 $(\mathbb{N}, +, \times, 1, 0)$ 为自然数系。♣

定义 1.10 (整数)

在自然数的基础上考虑加法逆元，存在 $1 + (-1) = 0$, $-1 \in \mathbb{Z}$, 对数乘的封闭性直接得到 $-n = (-1)n \in \mathbb{Z}$, 类似地，写整数为 $(\mathbb{Z}, +, \times, -1, 1, 0)$。♣

定义 1.11 (有理数)

在整数中添入乘法逆元，由乘法封闭性得到 $m \cdot n^{-1} \in \mathbb{Q}$，记为 $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, /)$。♣

命题 1.2 (有理数的非完备性)

定义 $\mathbb{Q}$ 中的**开区间**为 $(a, b) := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$，而**闭区间**显然是 $[a, b] := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$。

考虑半开半闭区间 $\{[-a, x) \subset \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$，它在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界。

证明 [陈天权《数学分析讲义》第一册 pp.43]

取上确界 $p/q \geqslant 1$，欲知 $(p/q)^2 \neq 2$，即 $p^2 = 2q^2$，因此 p 是偶数。假设 p, q 互素。取 $p = 2r$，得到 $2r = q^2$，即 q 也是偶数，那么 p/q 可以分解，与假设矛盾。♠

有理数与实数只差了一条公理：**完备性公理**，即所谓确界原理。

定义 1.12 (实数)

根据确界原理，我们可以形式地定义实数：$\mathbb{R} = \{\sup(U) \,|\, U \subset \mathbb{Q}\}$。♣

所以实数是一个没有洞的空间，因为所有的洞都（形式地）被填上了。但是这样的公理对于研究来说只有证明上的作用，实际的构造性结果还需要更丰富的结构。

定义 1.13 (Dedekind 分割)

令 $X \subset \mathbb{Q}$，$X' = \mathbb{Q} \setminus X$，并且

1. $X, X' \neq \varnothing$.

2. $\forall x \in X, \forall x' \in X', x < x'$，简写为 $X < X'$.

3. $\nexists \max(X)$.

则称 $X \cup X'$ 为一个**分割**。♣

例题 1.1

考虑对应于 $\sqrt{2}$ 的分割：$X = \{x \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \,|\, x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_{\leqslant 0}$，那么它等价于 $X = (-\infty, \sqrt{2})$，$X' = (\sqrt{2}, \infty)$，显然，它定义了点 $\sqrt{2}$。

取集合上的序关系 $X \leqslant Y \Leftrightarrow X \subset Y$，据定义，它是一个良序（请写出证明）。我们希望能直接从分割的定义导出确界原理。

命题 1.3 (确界原理)

取 $\mathcal{R}$ 为全体分割的集合，$\mathcal{X} \subset \mathcal{R}$，并且有 $M \in \mathcal{R}$ 使得 $\forall X \in \mathcal{X}, X \leqslant M$，那么

$$\sup(\mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X.$$

证明 [于品 - 《数学分析讲义》pp.31]
第一步：证明 $M_0 := \sup(\mathcal{X})$ 是个分割。

1. $M_0 \neq \varnothing \wedge M_0' \neq \varnothing$，因为 $\varnothing \notin \mathcal{R}$。
2. $\forall x_1 \in M_0, x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 \in M_0$：条件使得 $\exists X \in \mathcal{X}, x_1 \in X$，即 $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 \in X \subset M_0$。
3. $\nexists \max(M_0)$。假设 $x_0 = \max(M_0)$，则存在 $X \in \mathcal{X}$，$x_0 = \max(X)$，与定义矛盾。

第二步：说明 $\sup(\mathcal{X})$ 的确是其上确界。
定义 $\mathcal{M} := \{M \in \mathcal{R} \,|\, \forall X \in \mathcal{X}, X \leqslant M\}$ 为 $\mathcal{X}$ 的上界族，欲证 $M_0 \in \mathcal{M} \wedge \forall M \in \mathcal{M}, M_0 \leqslant M$。
第一步已经说明 $M_0 \in \mathcal{M}$。而作为上界，$\forall X \in \mathcal{X}, X \subset M$，故 $\bigcup X = M_0 \subset M$，得证。

命题 1.4

为了说明这样构造的确界原理确实与前述的完备性公理等价，我们需要证明 $\mathcal{R} = \mathbb{R}$。
证明
需要证明的无非是 $\mathcal{R}$ 上有加减乘除，有序，有 Archimedes 性质，且诸运算互相匹配。
简单说明加法：$X + Y := \{x + y \in \mathbb{Q} \,|\, x \in X, y \in Y\}$，逐点计算说明加法交换结合有逆，称 $(\mathcal{R}, +)$ 为一个**交换群**，或称 **Abel 群**。乘法有相似定义，逐点计算表明 $(\mathcal{R}, \cdot)$ 是个交换群，同时它们分配。
例：$\bar{0} := \{z \in \mathbb{Q} \,|\, \forall z < 0\}$，$\bar{0} + X = \{z + x \in \mathbb{Q} \,|\, \forall z < 0, x \in X\}$，需要说明 $\bar{0} + X = X$。

1. 由于 $z + x < x$，$\bar{0} + X \subset X$。
2. 由于 $x \in X \Rightarrow \exists \overline{x} \in X, x < \overline{x}$，令 $z = \overline{x} - x$，则 $0 < z \Rightarrow x = x' - z \in \bar{0} + X$，所以 $X \subset \bar{0} + X$。

说明序与加法互相匹配在技术上是挺复杂的，我们引入下述引理：

引理 1.1

对于分割 $X \cup X'$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\exists x' \in X', \exists x \in X$ 使得 $0 < x' - x < \dfrac{1}{n}$.
证明 [于品 - 《数学分析讲义》pp.33]
取 $x_0 \in X, x_0' \in X'$，由归纳法，假设存在 x_k, x_k'，令 $y = \frac{1}{2}(x_k + x_k')$，如果 $y \in X$ 则令 $(x_{k+1}, x_{k+1}') = (y, x_k')$，反之则 $(x_{k+1}, x_{k+1}') = (x_k, y)$，其中 $k \geqslant 0$。那么

$$x_k' - x_k = \frac{1}{2}(x_{k-1}' - x_{k-1}) = \ldots = \frac{1}{2^k}(x_0' - x_0).$$

显然 $x_k' - x_k < x_{k-1}' - x_{k-1}$，由 Archimedes 性质，任选 n 有 $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2^{k_0}}(x_0' - x_0)$。得证。

首先，$X < Y \Rightarrow X + Z \leqslant Y + Z$，欲知 $X + Z \neq X + Z$。取 $y, \overline{y} \in Y - X$ 如上，使 $\frac{1}{n} < y - \overline{y}$，另取 $\overline{z} - z < \frac{1}{n}$。如果 $y + z \in X + Z$，则有 $y + z = x + z'$，但 $x < y$ 为定义，那么 $z' < z$，且 $x < \overline{y}$ 与 $z' < \overline{z}$。得到

$$
\begin{aligned}
x &< (\overline{y} - y) + y, \\
z' &< (\overline{z} - z) + z < \frac{1}{n} + z < (\overline{y} - y) + z
\end{aligned}
$$

相加，得到 $x + z' < y + z$，与上式矛盾。

余下的都可以按照相似手段得到结果，请**读者自证**。

所以有理数上的戴德金分割与实数是等价的，还有几种从不同角度切入的实数定义，它们各有特色，在数学分析中其作用也时常有所体现。在初步课程中按照一种循序渐进的方式逐步介绍各种实数定义，因为最基本的例子都需要使用它们。

1.4 点列极限

例如在引理1.1中，用于证明的极限思想说明每一个数都是逼近过程的“最终”结果。在一个数系中，用**列**逼近希望被导出的数是非常重要的技术手段，它与戴德金分割的思想有许多相似之处，之后会见到的闭区间套、有限覆盖、Stone-Weierstrass 逼近定理之流与极限思想在某些层面上都是等效的。

1.5 极限的计算

1.6 线性空间

1.7 函数极限

1.8 度量空间与平移

1.9 线性映射与算子

1.10 求和、连续、收敛性判别