数ＩA

第一問

[1] 実数 a ,b, c が $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=13$ を満たす。

(1) $ab+bc+ca$, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ の値を求めよ。

(2) $a-b=2\sqrt{5}$ のとき, $(a-b)(b-c)(c-a)$の値を求めよ。

[2] $\angle C=90°$, $\angle A=16°$となる直角三角形 ABC の AC, BC をそれぞれ 100000 倍, 25000 倍した直角三角形 A'B'C'を考えるとき, ∠B'A'C'の大きさを概算せよ。　＊三角比の表は略

[3]　外接円の半径が 3 である三角形 ABC において, 点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。

(1) AB=5, AC=4 とするとき, sin∠ABC, AD の値を求めよ。

(2) 2AB+AC=14 のとき, AD の長さの最大値を求めよ。

第二問

[1] $x^2+px+q=0$, $x^2+qx+p=0$ を共に満たす実数 x の個数を n とおく。

(1) $(p,q)=(4, -4)$ 及び $(p, q)=(1, -2)$のときの n の値をそれぞれ求めよ。

(2) $p=-6$ のとき, $n=3$ となる q の値を両方とも求めよ。

(3) $y= x^2-6x+q$, $y=x^2+qx-6$ の 2 つのグラフを考える。q=1 から増加させたとき, 2 つのグラフはそれぞれどのように移動するか, 図示せよ。

(4) q の範囲が(2)で求めた 2 つの値の間(それぞれの値は含めない)にあるとき, 実数全体の集合 U の部分集合 A, B を,

$A=\{x \mid x^2-6x+q < 0\}$, $B=\{x \mid x^2+qx-6 < 0\}$

とする。このとき, 以下の命題の真偽を判定せよ。

(i) $x\in A$ ならば $x\in B$,　及びその逆

(ii) $x\in B$ ならば $x\in \bar{A}$, 及びその逆

[2]　まとめるのが面倒なので略

第三問

複数人がそれぞれ異なるプレゼントを一つずつ持ち寄り，交換会をする。交換の結果, 1 人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は交換をやり直し，全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了することにする。

(1) (i) 2 人で交換会をするとき, 1 回目の交換で交換会が終了する確率を求めよ。

(ii) 3 人で交換会をするとき, 1 回目の交換で交換会が終了する確率を求めよ。

(iii) 3 人で交換会をするとき, 4 回以下の交換で交換会が終了する確率を求めよ。

(2) 4 人で交換会をするとき, 1 回目の交換で交換会が終了する確率を求めよ。

(3) 5 人で交換会をするとき, 1 回目の交換で交換会が終了する確率を求めよ。

(4) 5 人で交換会をし，1 回目の交換でそのうち 4 人が自分以外の人のプレゼントを受け取ったとき，その回の交換で交換会が終了する条件つき確率を求めよ。

第四問

(1) 不定方程式 $5^4x-2^4y=1$ の整数解のうち，x が正整数で最小のとき及び x が 2 桁の正整数で最小のときの(x,y)の組をそれぞれ求めよ。

(2) 625^2 を 5^5 で割ったときの余り，及び 2^5 で割ったときの余りをそれぞれ求めよ。

(3) 不定方程式 $5^5x-2^5y=1$ の整数解のうち, x が 3 桁の正整数で最小のときの(x,y)の組を求めよ。

(4) 不定方程式 $11^5x-2^5y=1$ の整数解のうち, x が正整数で最小のときの(x,y)の組を求めよ。

第五問

△ABC の重心を G とし，線分 AG 上で点 A とは異なる位置に点 D をとる。直線 AG と辺 BC の交点を E とする。また，直線 BC 上で辺 BC にない位置に点 F をとる。直線 DF と辺 AB の交点を P, 直線 DF と辺 AC の交点を Q とする。

(1) 点 D を線分 AG の中点とするとき，$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}$ 及び $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}$ の値を求めよ。

(2) AB=9, BC=8, AC=6 とし，点 D を線分 AG の中点とする。4 点 B, C, Q, P が同一円周上にあるように点 F をとるとき, CF の長さを求めよ。

(3) つねに $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=10$ となるときの $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}$ の値を求めよ。