Mathematica

1. Si risolva il sistema di equazioni

$$\begin{cases} z &= x^2 + y^2 \\ z &= -(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + 30 \\ z &= -40x - 40y \end{cases}$$

   e si disegnino le 3 superfici associate alle 3 equazioni, con $x \in [-3, 3]$ e $y \in [-3, 3]$.

2. Si definisca una funzione associata alla soluzione numerica, nell'intervallo $t \in [0, 10]$, dell'equazione differenziale

$$y'(t) = a\,(1 - y(t))\,y(t) + b\,. \tag{1}$$

   Questa funzione dipende dai parametri a, b e dalla costante k che determina la condizione al condizione al contorno $y(0) = k$.

   Si generi un grafico tridimensionale, facendo variare $t \in [0, 10]$ e $a \in [0.5, 1.5]$, avendo fissato $k = b = 0.5$.

   Si generi un secondo grafico tridimensionale, facendo variare $t \in [0, 10]$ e $b \in [0.1, 10]$, avendo fissato $a = k = 0.5$.

   Si generi un terzo grafico tridimensionale, facendo variare $t \in [0, 10]$ e $k \in [0.5, 1.5]$, avendo fissato $a = b = 0.5$.

3. Si generino 100000 valori casuali x_i compresi tra -5 e 5. Per ciascun valore x_i, si estragga un secondo valore casuale y_i compreso tra 0 e 1. Si valuti la disuguaglianza $y_i < \exp(x_i^2)$ e si salvi la coppia (x_i, y_i) solo se la disuguaglianza è soddisfatta. Si proceda quindi a disegnare l'insieme dei punti selezionati, utilizzando `ListPlot`. Si confronti la frazione di punti selezionati rispetto a quelli generati con il risultato del rapporto di integrali

$$\frac{\int_{-5}^{5} dx \exp(-x^2)}{\int_{-5}^{5} dx\, 1}$$

4. Si generi una matrice 1000x1000 di numeri casuali compresi tra 0 e 1. Si calcolino gli autovalori di questa matrice. Si trasformi ciascun autovalore z nella coppia $\{Re[z], Im[z]\}$. Si utilizzi `ListPlot` per disegnare gli autovalori.

5. La soluzione del problema del punto 2, assegnando ai parametri i valori $a = b = 0.5$, può essere affrontato con la tecnica di Runge-Kutta. Posto $(x_0 = 0, y_0 = 0.5)$ e fissato un intervallo $h = 0.01$, si calcoli una successione di 1000 coppie di punti (x_n, y_n) in cui

$x_n = x_0 + n\,h$ e in cui il valore di y è ottenuto secondo il seguente algoritmo. Data $f(x_n, y_n) = 0.5\,(1 - y_n)\,y_n + 0.5$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Si visualizzi la successione delle coppie di punti e si confronti questo grafico con quello corrispondente ottenuto utilizzando la soluzione del punto 2.

6. Il comando `Distribute` permette di implementare la proprietà distributiva rispetto all'addizione di funzioni generiche (p.es. `Distribute`[h[a+b,c]] = h[a,c]+h[b,c]).

   (a) Dati due operatori A e B che non commutano, si sfrutti questo comando per generare in forma espansa tutti i termini fino al secondo ordine del prodotto di operatori $\exp(A)\exp(B)$. (*suggerimento: si utilizzi una funzione* h *di due sole variabili per mantenere l'ordine tra A e B.*)

   (b) Si consideri ora lo sviluppo al secondo ordine della formula di Baker-Campbell-Hausdorf $C = A{+}B{+}\frac{1}{2}[A, B]$. Si scrivano, a mano, **formalmente**, i primi tre termini dello sviluppo (fino al secondo ordine) di $\exp(C)$, sempre sfruttando la funzione h per mantenere l'ordinamento. Con `Distribute` si espanda anche questo risultato (può servire in questo caso il simbolo :> al posto di $->$ per indicare la regola di sostituzione).

   (c) Si implementino delle definizioni per semplificare le espressioni

   (d) Si sottraggano le espressioni dei punti (a) e (b), mostrando che i termini rimanenti sono di ordine superiore.