# Mathematica

1. **Oscillatore armonico forzato**
   Si risolva l'equazione differenziale

$$
\begin{aligned}
&x''(t) + \omega_N^2 x(t) = k\cos(\omega_F t)\\
&x'(0) = 0, \qquad x(0) = 1
\end{aligned}
$$

   Si disegnino i grafici tridimensionali che rappresentano la soluzione valutata con:
   1) $t \in [0, 50]$ e $\omega_F \in [0, 2]$, essendo fissati $k = 1$ e $\omega_N = 1$
   2) $t \in [0, 50]$ e $\omega_N \in [0, 2]$, essendo fissati $k = 1$ e $\omega_F = 1$
   3) $t \in [0, 50]$ e $k \in [0, 2]$, essendo fissati $\omega_F = 0.5$ e $\omega_N = 1$.
   Aumentare, se possibile, la qualità dei grafici.

2. **Matrici hermitiane**

   (a) Si generi una matrice 4x4 hermitiana utilizzando il comando per generare numeri casuali.

   (b) Si verifichi che gli autovalori di questa matrice sono reali.

   (c) Si calcoli il polinomio caratteristico di questa matrice e si risolva l'equazione secolare corrispondente, verificando che le radici coincidono con gli autovalori determinati al punto precedente.

3. **Matrici del gruppo SU(2)**

   (a) Si verifichi che la seguente matrice $A$ appartiene al gruppo SU(2), ovvero al gruppo delle matrici unitarie 2x2 con determinante +1.

$$
A = \begin{pmatrix} \cos(y1)\exp(iy2) & \sin(y1)\exp(iy3) \\ -\sin(y1)\exp(-iy3) & \cos(y1)\exp(-iy2) \end{pmatrix}
$$

   *suggerimento: si utilizzi la sostituzione* `Conjugate[x_]->x` *per sfruttare il fatto che i parametri $y_i$ sono reali.*

   (b) Si valuti la matrice $A$ per ($y_1 = 0.01$, $y_2 = 0.3$, $y_3 = 0.5$). Si calcolino i coefficienti della scomposizione di $A$ in termini della matrice identità e delle tre matrici di Pauli

$$
\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

4. **Campo di induzione magnetica generato da un dipolo**
   Si consideri un dipolo magnetico, di forma cilindrica, di lunghezza $L$ e di raggio $a$.

(a) Le componenti del campo di induzione magnetica lungo l'asse del cilindro $z$ e lungo la direzione radiale $\rho$ si ottengono calcolando i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}
B_z(a, L, z, \rho) &= \int_0^a dR + \frac{R(L/2 - z)}{(R^2 + (L/2 - z)^2 + \rho^2 - 2R\rho)^{3/2}} + \\
&\quad + \frac{R(L/2 + z)}{(R^2 + (L/2 + z)^2 + \rho^2 - 2R\rho)^{3/2}} \\
B_\rho(a, L, z, \rho) &= \int_0^a dR - \frac{R(\rho - R)}{(R^2 + (L/2 - z)^2 + \rho^2 - 2R\rho)^{3/2}} + \\
&\quad + \frac{R(\rho - R)}{(R^2 + (L/2 + z)^2 + \rho^2 - 2R\rho)^{3/2}}
\end{aligned}$$

(b) Si disegnino le linee del campo $B$, nel piano $(z, \rho)$, nell'intervallo $z \in [-2, 2]$ e $\rho \in [-2, 2]$, per un dipolo di lunghezza $L = 2$ e di raggio $a = 1$.