无处不在的度量

米哈伊尔 · 格罗莫夫
翻译:Lyduck

April 1999

“距离”这一概念已经深入到日常生活当中, 其一般用来衡量两个物理对象或两个抽象概念相互靠近或远离的程度. 用来具象化这一模糊概念的最常见 (但不一定最泛用) 的数学对象是*度量空间*. 给定一个集合 X, 将其中的元素 $x \in X$ 称为*点*, 点之间的距离被被*正实数*所衡量. 这样, 一个度量空间是一个集合 X, 其上有一个双变量函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, 对于所有的三元组 $x, x'.x''$, 其满足如下知名的三角不等式

$$d(x, x'') \le d(x, x') + d(x', x'').$$

与此同时, 距离函数应该拥有*对称性*, 这是说,$d(x, x') = d(x', x)$.(这一结果与实际体验大相迳庭[1]: 不管是攀登生活中还是数学中的高峰, 上山与下山的体验往往是截然不同.

最后, 距离函数应当满足对于所有 $x \in X$, 都有 $d(x, x) = 0$, 并且增加如下的*分离性公理*: 如果 $x \ne x'$, 则 $d(x, x') \ne 0$[2]. 这一限制初看人畜无害, 因为人们总是可以通过等同 $d(x, x') = 0$ 的那些 x, x' 从而考虑商空间, 但是有些时候这一分离性将起到中心地位, 譬如考虑小林度量或 Hofer 度量时, 这种等同有可能将 X 约化为一个点.、

度量空间的原型是一般的 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 装备了 Pythagorean 距离, 其定义为对于两个点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 和 $x' = (x'_1, \cdots, x'_n)$, 有

$$d(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2}.$$

现在考虑 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 其上的度量提供了诸多颇有魅力的例子, 譬如*球* $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$, 和单位方体的棱, 这是说, 装备了诱导 Euclidean(Pythagorean) 度量的 $\{0, 1\}^n \in \mathbb{R}^n$. 如果 X 是一个光滑, 连通的 $\mathbb{R}^n$ 的子流形 (就如同先前提到的球),X 上除了先前提到的诱导 Euclidean 度量 $\mathrm{dist}_{\mathbb{R}^n}$ 之外, 还有*诱导 Riemannian 度量* $\mathrm{dist}_X(x, x')$, 其定义为包含于 X 中, 连接 x, x' 的最短曲线的长度.(一个诱惑的想法是使用先前的定义作为 Riemannian 度量的定义. 事实上, 根据 Nash 嵌入定理, 每个 Riemannian 流形都可以等距光滑嵌入于某个 $\mathbb{R}^n$ 种. 但是这样的 Euclidean 嵌入会掩盖而非揭示 Riemannian 流形真正的度量结构, 因为这种嵌入会带来不可控的失真 $\mathrm{dist}_X \mid \mathrm{dist}_{\mathbb{R}^n}$). 与此同时,Riemannian 完整的美丽与威力不仅仅取决于度量, 同时取决于与之关联的椭圆型 Riemannian 方程, 譬如 Laplace-Hodge 方程,Dirac 方程,Yang-Mills 方程⋯⋯这些方程自然地与 Riemannian 张量同在, 但是在 X 嵌入 $\mathbb{R}^n$ 后几近消没了形骸.

我们对于一般的度量空间的处理手段不可磨灭地带有早期 Euclidean 空间的印迹. 我们钟爱那些与 $\mathbb{R}^n$ 具有相同特征的空间. 因此关于*齐次*空间 X 的研究自然有着悠久的传统, 这一类空间的等距群*可迁地*作用于 X.(在 Riemannian 几何的情形,X 上的度量被一个切空间 $T_{X_O}(X)$ 上的正定二次型 g_O 完全描述, 但是这一简单的描述却让人感到迷惑: 衡量 X 上关于 g_O“不变”的度量十分困难. 一个例子是我们在描述心脏收缩 (systoles, 参见下文) 在譬如 $SO(n)$ 或 $U(n)$ 的 Lie 群的左不变度量的作用下的行为时仍然束手束脚.) 等距之外,$\mathbb{R}^n$ 保有诸多非平凡的*自相似性*, 这是说, 满足 $f^*(\mathrm{dist}) = \lambda \mathrm{dist}$ 的变换 f, 其中 λ 是不等于 0 或 1 的常数. 在 Riemannian 流形的语境下, 除了 $\mathbb{R}^n$ 之外没其他自相似的空间——这是显而易见的——但是仍然存

[1]This unpleasantly limits many applications.

[2]原文为 $d(x, x') = 0$, 疑似 typo.

在诸多非 Riemannian 的例子, 譬如 p-adic 向量空间 (这些东西是全不连通的) 和一些连通的幂零 Lie 群 (如 Heisenberg 群), 其上带有 Carnot-Carathéodory 度量.

调整意识的波长, 我们考虑曲率 K 大于 0 或小于 0 的空间, 这是说, 那些小的测地三角形比 Euclidean 空间的测地三角形更细 (或更粗). 在这里考虑的对象是对称空间的几何, 这些空间是知名的齐次空间, 譬如 $K \geq 0$ 的 S^n 和 $\mathbb{C}P^n$, 和 $K \leq 0$ 的 $SL_n\mathbb{R}/SO(n)$.

除了 Euclidean 空间的孝子贤孙之外, 同样有大量度量与其他诸多结构相关, 这些结构有些时候会出人意料或稍显微妙. 这是一些例子:

复流形: 复空间 $\mathbb{C}^n$, 其中 $n \geq 1$ 没有全纯自同构下的不变度量, 因为这些自同构实在是太多了! 然而, 诸多复流形 (或殆复流形), 如 $\mathbb{C}^n$ 中的有界区域, 有这些自然的度量, 如*小林度量*.

辛流形: 正维数的辛流形 X 没有不变度量, 因为辛同态群太大了. 然而, 无限维的 X 中的闭 Lagrangian 子流形构成的空间 (或换言之每个"Hamiltonian 部分") 上有这种度量.(这一度量的构造是简单的, 但是 Hofer 证明其分离性的工作是十分深刻的, 遗憾的是这本书没有余裕去谈论他的工作.)

同伦范畴: 一旦可以函子性地将一个无限维度量多面体与所有拓扑空间 X 的同伦等价类相连接, 就能够将空间中的连续映射转化为多面体之间的距离递减的映射. 令人惊异地, 每个多面体的度量不变性 (如其心脏收缩, 即其同伦类的极小子簇) 可以导出新的同伦不变性, 这在那些拥有大基本群的 (非球面的) 空间 X 中是非常有用的.

离散群: 对于那些生成元构成有限集的群而言, 其自然装备一个离散度量, 这些度量仅仅是温和的 (moderately), 或双 Lipschitz 的, 当它们改变时, 生成元也发生变化. 然后利用来自对非紧 Riemannian 流形的研究, 可以定义一簇关于无限群的渐进不变量. 这让整个群论的研究流淌出了新的光束.

Lipschitz 和双 Lipschitz: 度量空间之间重要的映射是什么? “等距” 只会带来贫乏而无趣的一个范畴, 更慷慨的回应 “连续” 将我们从几何中带出, 带到纯拓扑的领域. 我们通过对*距离递减映射* $f : X \to Y$ 的研究调和这两个极端, 这种映射也是广义的 λ-Lipschitz 映射, 其将距离放大至多 $\lambda \geq 0$ 倍.

在这一范畴中, 同构是 λ-双 Lipschitz 同态, 且本书中定义的绝大多数的度量不变量都在 λ-Lipschitz 映射下被 λ-控制. 一个例子是空间的*直径*, 定义为 $\mathrm{Diam}X = \sup_{x,x'} \mathrm{dist}(x, x')$. 我们将讨论诸多不变量, 其可以通过对心脏收缩的特殊处理来衡量 X 中的同伦类的极小体积, 完备 Riemannian 流形的等周资料和无限群, 其关联于拟共形和拟正则映射.

渐进视角: 注意到每个紧流形之间的微分同胚都是 λ-双 Lipschitz 的, 其中 $\lambda < \infty$, 一个*取定的* Riemannian 流形 X 的不变量所能提供的信息寥寥, 在 λ-Lipschitz 的语境下, 真正有趣的是研究一列紧空间的行为. 这一意识形态应用于譬如一个独立的非紧空间 X, 其渐进几何可以看作 X 被一列如巨浪般不断增长的紧空间的穷竭. 我们同样讨论序列的映射和取定的紧流形的同伦类, 这是说 $f_i : X \to Y$, 并将这种渐进度量行为关联于 X 和 Y 的同伦结构 (这其中仍然余留诸多开放问题).

度量社会学: 当我们的视角从独立的空间 X 拉至空间族 (如序列) 时, 我们开始同时考察所有度量空间, 并且发现这里有诸多令人满意的用来衡量度量空间之间距离的概念. 因此我们也许会讨论一个空间序列 X_i 收敛到 X 的诸多方式, 并且研究一些特定序列的渐进行为. 譬如, 如果 X_i, 其中 $i = 1, 2, \cdots$ 是 n 维 Riemannian 流形,

其截面曲率有下界, 则存在一个子序列收敛 (或坍缩) 到一个温和的 (mildly) 奇异空间, 其维数 $m \leq n$.

度量, 测度和概率: 假设我们的度量空间上有一些额外的测度结构, 譬如, 当我们考虑紧 Riemannian 流形时的标准 Riemannian 测度. 现在考虑一些额外的概念: 度量空间收敛模掉测度趋于 0 的子集. 则这样给出了一个更弱的收敛概念, 其更适合当 $\dim X_i \to \infty$ 时的 X_i 序列. 据此, 单位球 $S^i \subseteq \mathbb{R}^{i+1}$ 在正规化下的 Riemannian 测度中收敛 (或聚焦) 到一个单位质量的单原子! 这可以被视为大数定律的几何学版本, 这可以被球等周不等式导出.

从局部到整体: 这是一个在几何和分析中都占据指导地位的原则, 读者能够在这本书的每一个角落中找到它. 这在我们揭示 *Ricci* 曲率的下界如何导出测度双倍性质时显得尤为明晰, 这是说, 每个不是很大的 $2r$-球 $B(2r) \subseteq X$ 的体积不会超过同心球 $B(r) \subseteq B(2r)$ 体积的常数倍. 这可以导出一系列关于 X 的基本群的拓扑结论.

与此同时,Ricci 曲率控制 X 的等周资料, 譬如球等周不等式可以推广到具有常数下界 Ricci 曲率的流形上.

度量空间上的分析: 光滑流形和映射在无限小的意义下都是线性的, 其在显微镜下的表现古井无波, 苍白无力. 但是奇异的分形空间和映射在所有小尺度下如万花筒般千变万化. 一部分这些空间和映射具有足够的正则性, 这是说, 它们满足双倍体积性质, 从而提供了一片丰沛的土壤, 足以让几何分析之花在其上茁壮成长. 这被 Stephen Semmes 首先发掘.

我完整地描述了这本书的内容, 如果需要完整谈论度量在数学各个分支中的应用, 我们则需要额外的一卷书.

Misha Gromov
April 1999

References

[Gro07] Mikhail Gromov - Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces, 2007, Birkhäuser Basel.