微分

Seiro Ito

Institute of Developing Economies, Japan

Fall, 2022

Department of International Exchange, Sacred Heart University

SHU, IDE

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

SHU, IDE

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]

SHU, IDE

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]

SHU, IDE

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

SHU, IDE

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。

☞ 遠隔教育時間を増やす: 教室に来られない生徒の人的資本が増えるが、教室に来られる生徒の対面での人的資本蓄積が減る。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

- ☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。
- ☞ 遠隔教育時間を増やす: 教室に来られない生徒の人的資本が増えるが、教室に来られる生徒の対面での人的資本蓄積が減る。
- ☞ 雇用時間を増やす: 収入が増えるが、支払う労働費用も増える。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

- ☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。
- ☞ 遠隔教育時間を増やす: 教室に来られない生徒の人的資本が増えるが、教室に来られる生徒の対面での人的資本蓄積が減る。
- ☞ 雇用時間を増やす: 収入が増えるが、支払う労働費用も増える。

関数が最大化する点は、関数が水平になる点=関数の傾きがゼロになる点です。

SHU, IDE

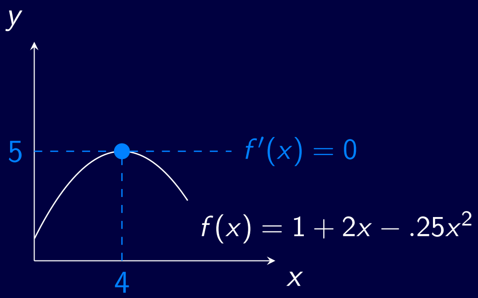
以下は $y = f(x)$ という 1 変数 x の関数 $f(x)$ を描いています。

微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

SHU, IDE

以下は $y = f(x)$ という 1 変数 x の関数 $f(x)$ を描いています。

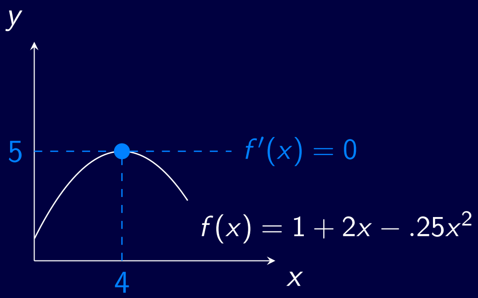


微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

以下は $y = f(x)$ という 1 変数 x の関数 $f(x)$ を描いています。

関数の微分は $f'(x)$ と表記しますが、その意味は x での $f(x)$ の傾きのことです。



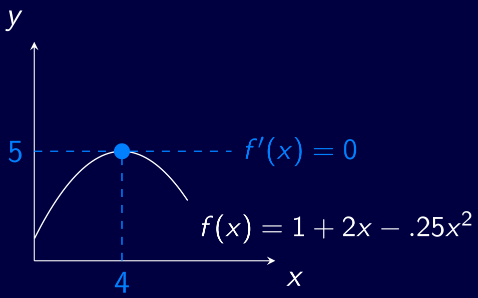
微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

以下は $y = f(x)$ という 1 変数 x の関数 $f(x)$ を描いています。

関数の微分は $f'(x)$ と表記しますが、その意味は x での $f(x)$ の傾きのことです。

微分とは変数 x が僅かに変化したときの関数 f の反応を計算したものだからです。
微分してゼロとなる地点とは、傾きがゼロ $f'(x) = 0$ となる x のことを指します。



微分の定義

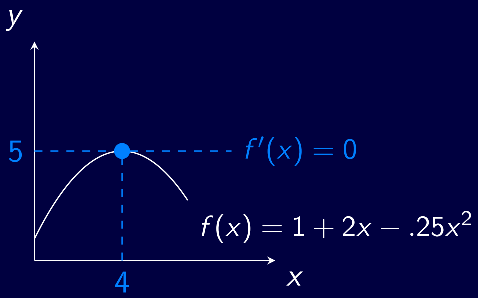
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

SHU, IDE

以下は $y = f(x)$ という 1 変数 x の関数 $f(x)$ を描いています。

関数の微分は $f'(x)$ と表記しますが、その意味は x での $f(x)$ の傾きのことです。

微分とは変数 x が僅かに変化したときの関数 f の反応を計算したものだからです。
微分してゼロとなる地点とは、傾きがゼロ $f'(x) = 0$ となる x のことを指します。



微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

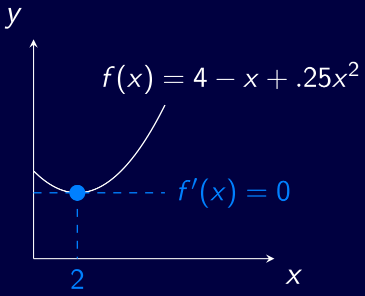
$$f'(x) = 2 - .5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

▸ 微分公式 $f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

以下は $y = f(x)$ という 1 変数 x の関数 $f(x)$ を描いています。

関数の微分は $f'(x)$ と表記しますが、その意味は x での $f(x)$ の傾きのことです。

微分とは変数 x が僅かに変化したときの関数 f の反応を計算したものだからです。
微分してゼロとなる地点とは、傾きがゼロ $f'(x) = 0$ となる x のことを指します。



$f'(x) = 4 - x + .25x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
$f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

注意: $f'(x) = 0$ が最大値を与えない場合

SHU, IDE

注意: $f'(x) = 0$ が最大値を与えない場合

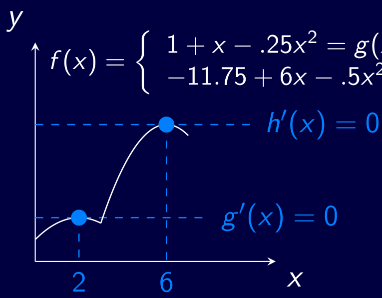
1. $f'(x) = 0$ が最小値である場合

SHU, IDE

注意: $f'(x)=0$ が最大値を与えない場合

1. $f'(x)=0$ が最小値である場合
2. $f'(x)=0$ がほかにも存在し、そちらの方が大きい場合

$$f(x)=\begin{cases} 1+x-.25x^2=g(x) & x\leqslant 3, \\ -11.75+6x-.5x^2=h(x) & x>3. \end{cases}$$



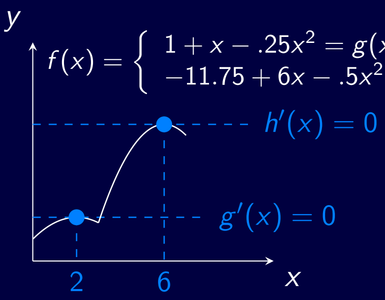
$$g'(x)=1-.5x=0 \quad\Rightarrow\quad x=2$$
$$h'(x)=6-x=0 \quad\Rightarrow\quad x=6$$

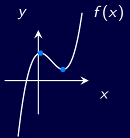
微分公式 $f(x)=bx^n \Rightarrow f'(x)=bnx^{n-1}$

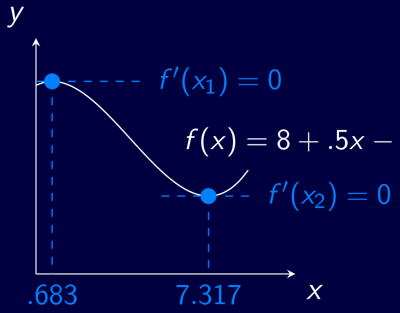
注意: $f'(x) = 0$ が最大値を与えない場合

1. $f'(x) = 0$ が最小値である場合
2. $f'(x) = 0$ がほかにも存在し、そちらの方が大きい場合
3. $f'(x) = 0$ という点はあっても、関数に最大と最小がない場合

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - .25x^2 = g(x) & x \leqslant 3, \\ -11.75 + 6x - .5x^2 = h(x) & x > 3. \end{cases}$$







$$g'(x) = 1 - .5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$h'(x) = 6 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

▸ 微分公式 $f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

$$f'(x) = .5 - .8x + .1x^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 4 \pm 10\sqrt{.11}.$$

SHU, IDE

✍ $f(x) = 8 + .5x - .4x^2 + \frac{1}{30}x^3$ のような 3 次関数は、最大値やと最小値が存在しません。最大値は無限大ですが、最大とか最小とかは有限の値のみに使います。よって、この関数には最大値も最小値も存在しないのです。しかし、極小値 (局所的な最小値 local minimum) や極大値 (局所的な最大値 local maximum) は存在します。右図の $x = 7.317$ は極小値、$x = .683$ は極大値です。いずれも $f'(x) = 0$ が成り立ちます。

- ✍ $f(x) = 8 + .5x - .4x^2 + \frac{1}{30}x^3$ のような 3 次関数は、最大値やと最小値が存在しません。最大値は無限大ですが、最大とか最小とかは有限の値のみに使います。よって、この関数には最大値も最小値も存在しないのです。しかし、極小値 (局所的な最小値 local minimum) や極大値 (局所的な最大値 local maximum) は存在します。右図の $x = 7.317$ は極小値、$x = .683$ は極大値です。いずれも $f'(x) = 0$ が成り立ちます。
- ✍ 以下では、関数が最大値 (最小値) をもち、かつ、現在検討している $f'(x) = 0$ が関数の最大値 (最小値) であると仮定し、そこでの数学的特徴を考えていきます。
  - ☞ $f'(x) = 0$ が最大値 (最小値) である確証を得るためには、一般的には関数をグラフにして全体を見渡す必要があります。

SHU, IDE

✍ 一般に、$f'(x) = 0$ だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分 $f'(x)$[=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。

- ✍ 一般に、$f'(x) = 0$ だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分 $f'(x)$[=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ✍ 傾きの変化は $f'(x)$ をさらに微分した 2 階微分で計算できます。

SHU, IDE

- ✍ 一般に、$f'(x) = 0$ だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分 $f'(x)$[=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ✍ 傾きの変化は $f'(x)$ をさらに微分した 2 階微分で計算できます。
  - ☞ 2 階微分は加速度を表します。

SHU, IDE

✍ 一般に、$f'(x) = 0$ だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分 $f'(x)$[=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。

✍ 傾きの変化は $f'(x)$ をさらに微分した 2 階微分で計算できます。

- ☞ 2 階微分は加速度を表します。
- ☞ 2 階微分 (加速度) が負とは、最初の図の $x > 4$[“最大値の右側”] 部分のように 1 階微分が負の関数では、傾きが率を高めて負値で小さくなっていく (絶対値では大きくなっていく) ことを意味します。よって、最大値の場合、2 階微分は負 $f''(x) < 0$ です。

- ✍ 一般に、$f'(x)=0$ だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分 $f'(x)$[=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ✍ 傾きの変化は $f'(x)$ をさらに微分した 2 階微分で計算できます。
  - ☞ 2 階微分は加速度を表します。
  - ☞ 2 階微分 (加速度) が負とは、最初の図の $x>4$[“最大値の右側”] 部分のように 1 階微分が負の関数では、傾きが率を高めて負値で小さくなっていく (絶対値では大きくなっていく) ことを意味します。よって、最大値の場合、2 階微分は負 $f''(x)<0$ です。
  - ☞ 1 階微分が正の関数では、2 階微分が負とは、正の傾きが率を高めて小さくなっていく (傾きは正のままゼロに近づいていく) ことを意味します。

SHU, IDE

- ✍ 一般に、$f'(x)=0$ だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分 $f'(x)$[=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ✍ 傾きの変化は $f'(x)$ をさらに微分した 2 階微分で計算できます。
  - ☞ 2 階微分は加速度を表します。
  - ☞ 2 階微分 (加速度) が負とは、最初の図の $x>4$[“最大値の右側”] 部分のように 1 階微分が負の関数では、傾きが率を高めて負値で小さくなっていく (絶対値では大きくなっていく) ことを意味します。よって、最大値の場合、2 階微分は負 $f''(x)<0$ です。
  - ☞ 1 階微分が正の関数では、2 階微分が負とは、正の傾きが率を高めて小さくなっていく (傾きは正のままゼロに近づいていく) ことを意味します。
- ✍ 最大値ならば $f''(x)<0$、最小値ならば $f''(x)>0$ というように、2 階微分の符号で判定をします。ただし、2 階微分がゼロ (=その地点で関数が線形=傾きが変化しない) の場合は、最大値か最小値か判定できません。

☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$

☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2, f'(x) = 2 - .5x$

☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2, f'(x) = 2 - .5x, f''(x) = -.5 < 0.$

☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$, $f'(x) = 2 - .5x$, $f''(x) = -.5 < 0$. よって、$f'(x) = 2 - .5x = 0$ が示す点は最大化点。

☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2, f'(x) = 2 - .5x, f''(x) = -.5 < 0$. よって、$f'(x) = 2 - .5x = 0$ が示す点は最大化点。$f(x)$ を最大化する x は $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$.

SHU, IDE

- ☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2, f'(x) = 2 - .5x, f''(x) = -.5 < 0$. よって、$f'(x) = 2 - .5x = 0$ が示す点は最大化点。$f(x)$ を最大化する x は $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$.
- ☞ $f(x) = 1 + 2x + .25x^2$

SHU, IDE

- ☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$, $f'(x) = 2 - .5x$, $f''(x) = -.5 < 0$. よって、$f'(x) = 2 - .5x = 0$ が示す点は最大化点。$f(x)$ を最大化する x は $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$.
- ☞ $f(x) = 1 + 2x + .25x^2$, $f'(x) = 2 + .5x$

- ☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2, f'(x) = 2 - .5x, f''(x) = -.5 < 0$. よって、$f'(x) = 2 - .5x = 0$ が示す点は最大化点。$f(x)$ を最大化する x は $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$.
- ☞ $f(x) = 1 + 2x + .25x^2, f'(x) = 2 + .5x, f''(x) = .5 > 0$.

SHU, IDE

- ☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2, f'(x) = 2 - .5x, f''(x) = -.5 < 0$. よって、$f'(x) = 2 - .5x = 0$ が示す点は最大化点。$f(x)$ を最大化する x は $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$.
- ☞ $f(x) = 1 + 2x + .25x^2, f'(x) = 2 + .5x, f''(x) = .5 > 0$. よって、$f'(x) = 2 + .5x = 0$ が示す点は最小化点。

- ☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2, f'(x) = 2 - .5x, f''(x) = -.5 < 0$. よって、$f'(x) = 2 - .5x = 0$ が示す点は最大化点。$f(x)$ を最大化する x は $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$.
- ☞ $f(x) = 1 + 2x + .25x^2, f'(x) = 2 + .5x, f''(x) = .5 > 0$. よって、$f'(x) = 2 + .5x = 0$ が示す点は最小化点。$f(x)$ を最小化する x は $f'(x) = 2 + .5x = 0 \Rightarrow x = -4$.

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

x での接線の傾きは $-4x+4$ です。仮に $x=2$ だとしたら、接線の傾きは $f'(2) = -4*2+4 = -4$ です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる x を求めます。

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

x での接線の傾きは $-4x + 4$ です。仮に $x = 2$ だとしたら、接線の傾きは $f'(2) = -4 * 2 + 4 = -4$ です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる x を求めます。これはこの方程式を x について解けば得られます。

$$x = 1.$$

2 階条件

$$f''(x) = -4 < 0$$

なので最大化点です。最大化された値 $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$。

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

x での接線の傾きは $-4x + 4$ です。仮に $x = 2$ だとしたら、接線の傾きは $f'(2) = -4 * 2 + 4 = -4$ です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる x を求めます。これはこの方程式を x について解けば得られます。

$$x = 1.$$

2 階条件

$$f''(x) = -4 < 0$$

なので最大化点です。最大化された値 $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$。

次の例は 1 次関数 (直線) です。

$$f(x) = 1 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2.$$

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

x での接線の傾きは $-4x + 4$ です。仮に $x = 2$ だとしたら、接線の傾きは $f'(2) = -4 * 2 + 4 = -4$ です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる x を求めます。これはこの方程式を x について解けば得られます。

$$x = 1.$$

2 階条件

$$f''(x) = -4 < 0$$

なので最大化点です。最大化された値 $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$。

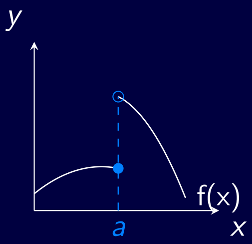
次の例は 1 次関数 (直線) です。

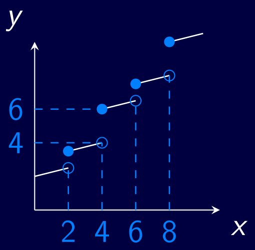
$$f(x) = 1 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2.$$

$1 + 2x$ は 2 の傾きで増えます。直線なので接線は関数そのものです。よって、接線の傾きは関数の傾きと同じ 2 です。直線なので最大化点は存在しません。よって、微分してゼロと置いても、$x = \cdots$ と解くことはできません。

SHU, IDE

参考: 微分できない場合 1



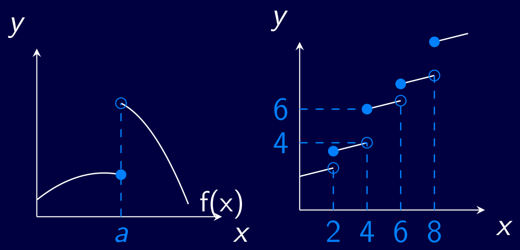


$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 6 \\ \lim_{x \uparrow 4} f(x) = 4 \end{array}\right\}$$ 非連続的ジャンプ

SHU, IDE

参考: 微分できない場合 1

微分は関数の微小な変化を扱います。よって、(対象とする変数 x の範囲で) 関数が連続で滑らかでないと適用できません。



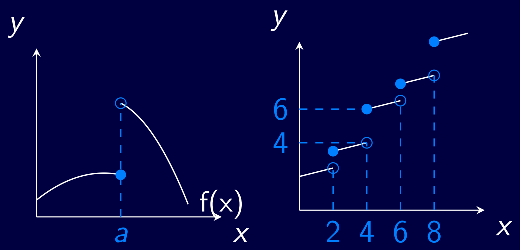
$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 6 \\ \lim_{x \uparrow 4} f(x) = 4 \end{array}\right\}$$ 非連続的ジャンプ

SHU, IDE

参考: 微分できない場合 1

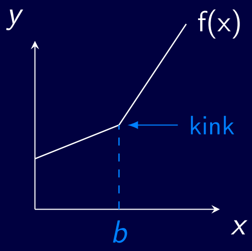
微分は関数の微小な変化を扱います。よって、(対象とする変数 x の範囲で) 関数が連続で滑らかでないと適用できません。

$x = a$ で非連続である (ジャンプがある) と、a の前 (左) の関数の値と a の後 (右) の関数の値が異なります。行き着く先 $x = a$ で関数の値=極限の値=極値、が一致しないと、$x = a$ で極値が存在しない、と言います。 $x = a$ での微小な変化は、a での関数の極値を扱うので、極値が存在しないと議論できません。



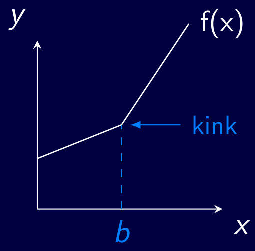
$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 6 \\ \lim_{x \uparrow 4} f(x) = 4 \end{array}\right\} \text{非連続的ジャンプ}$$

参考: 微分できない場合 2



参考: 微分できない場合 2

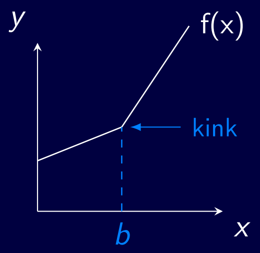
$x = b$が尖っている (=滑らかでない) と、接線の傾きが左から b に近づく場合と右から b に近づく場合で異なるため、$x = b$ での微小な変化の大きさが右と左で変わります。接線の傾きを 1 つに決められないために $x = b$ で微分できません。下記の関数はそれ以外の点では微分可能です。



SHU, IDE

参考: 微分できない場合 2

$x = b$ が尖っている (=滑らかでない) と、接線の傾きが左から b に近づく場合と右から b に近づく場合で異なるため、$x = b$ での微小な変化の大きさが右と左で変わります。接線の傾きを 1 つに決められないために $x = b$ で微分できません。下記の関数はそれ以外の点では微分可能です。

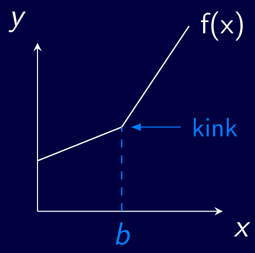


- b での左部分での微分を左右からの微分 left differentiation と呼びます。b での右部分での微分を右からの微分 right differentiation と呼びます。

SHU, IDE

参考: 微分できない場合 2

$x=b$が尖っている (=滑らかでない) と、接線の傾きが左から b に近づく場合と右から b に近づく場合で異なるため、$x=b$ での微小な変化の大きさが右と左で変わります。接線の傾きを 1 つに決められないために $x=b$ で微分できません。下記の関数はそれ以外の点では微分可能です。



- b での左部分での微分を左右からの微分 left differentiation と呼びます。b での右部分での微分を右からの微分 right differentiation と呼びます。
- 微分できない点なのに、右からの微分とか左からの微分とかいう用語法は、厳密には矛盾しています。詳しい事情は知りません。

1 変数関数 $f(x)$ の微分の公式

$f(x) = a$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 0$	水平線の傾きは 0
$f(x) = bx^n$	$\Rightarrow$	$f'(x) = bnx^{n-1}$	指数関数、$n = 1$ は線形関数
$f(x) = \frac{b}{x^n} = bx^{-n}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -bnx^{-n-1}$	分数は指数関数の一種
$f(x) = g(x) + h(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$	和の微分公式
$f(x) = g(x)h(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$	積の微分公式
$f(x) = g\{h(x)\}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = g'(h)h'(x)$	チェーンルール
$f(x) = b \ln x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = b\frac{1}{x}$	対数関数の微分公式
$f(x) = ae^{bx}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = abe^{bx}$	自然指数関数の微分公式

▸ 戻る

SHU, IDE

参考: なぜ $f'(x) = bnx^{n-1}$?

証明ではないですが、定義を使って計算すると公式の正しさが確認できます。微分の定義は以下です。関数の変化 (率の極限) を求めています。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

参考: なぜ $f'(x) = bnx^{n-1}$?

証明ではないですが、定義を使って計算すると公式の正しさが確認できます。微分の定義は以下です。関数の変化 (率の極限) を求めています。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$f(x) = a + bx + cx^2$ で考えます。$f'(x) = bnx^{n-1} = b + 2cx$。定義を使うと

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{a + b(x+h) + c(x+h)^2 - (a + bx + cx^2)}{h}, \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a + b(x+h) + c(x^2 + 2hx + h^2) - (a + bx + cx^2)}{h}, \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{bh + 2chx + h^2}{h}, \\
&= \lim_{h \to 0} b + 2cx + h, \\
&= b + 2cx.
\end{aligned}$$

参考: なぜ $f'(x) = bnx^{n-1}$?

証明のスケッチ: $f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n$ で考えます。
$f'(x) = b + 2cx + \cdots + dnx^{n-1}$。定義を使うと

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a + b(x+h) + c(x+h)^2 + \cdots + d(x+h)^n - (a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{a + b(x+h) + c(x^2 + 2hx + h^2) + \cdots + d(x^n + nhx^{n-1} + \cdots + h^n)}{h}, \right. \\
&\qquad \left. - \frac{a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n}{h} \right), \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{bh + 2chx + ch^2 + \cdots + d(nhx^{n-1} + nh^2x^{n-2} + \cdots + h^n)}{h}, \\
&= b + 2cx + \cdots + dnx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

チェーンルール

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g\{h(x)\} \\
&\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).
\end{aligned}
$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

x が変化

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

x が変化 $\underbrace{\rightarrow h\text{ が変化}}_{h'(x)}$

SHU, IDE

チェーンルール

$$
\begin{aligned}
&f(x) = g\{h(x)\} \\
&\qquad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).
\end{aligned}
$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

x が変化 $\underbrace{\to h \text{ が変化}}_{h'(x)}$ $\underbrace{\to g \text{ が変化}}_{g'(h)}$

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

$$x\text{が変化} \underbrace{\rightarrow h\text{が変化}}_{h'(x)} \underbrace{\rightarrow g\text{が変化}}_{g'(h)}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

x が変化 $\underbrace{\rightarrow h\text{ が変化}}_{h'(x)}$ $\underbrace{\rightarrow g\text{ が変化}}_{g'(h)}$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合
$g'(h) = 2,\ h'(x) = 4x + 1$

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

$$x \text{ が変化} \underbrace{\to h \text{ が変化}}_{h'(x)} \underbrace{\to g \text{ が変化}}_{g'(h)}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合
$g'(h) = 2,\ h'(x) = 4x + 1$ なので、
$f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

$$x \text{ が変化} \underbrace{\rightarrow h \text{ が変化}}_{h'(x)} \underbrace{\rightarrow g \text{ が変化}}_{g'(h)}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合
$g'(h) = 2,\ h'(x) = 4x + 1$ なので、
$f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$
$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1 = 4x^2 + 2x - 1$ だから、微分すると $f'(x) = 8x + 2$ で同じになることが確認できる。

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

$$x \text{ が変化} \underbrace{\rightarrow h \text{ が変化}}_{h'(x)} \underbrace{\rightarrow g \text{ が変化}}_{g'(h)}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合
$g'(h) = 2,\ h'(x) = 4x + 1$ なので、
$f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$
$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1 = 4x^2 + 2x - 1$
だから、微分すると $f'(x) = 8x + 2$ で同じになることが確認できる。

$g(h) = \frac{1}{h}, h(t) = N(t)$、つまり、$f(t) = \frac{1}{N(t)}$ の場合

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

$$x \text{ が変化} \underbrace{\rightarrow h \text{ が変化}}_{h'(x)} \underbrace{\rightarrow g \text{ が変化}}_{g'(h)}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合
$g'(h) = 2,\ h'(x) = 4x + 1$ なので、
$f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$
$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1 = 4x^2 + 2x - 1$
だから、微分すると $f'(x) = 8x + 2$ で同じになることが確認できる。

$g(h) = \frac{1}{h}, h(t) = N(t)$、つまり、$f(t) = \frac{1}{N(t)}$ の場合
$g'(h) = -\frac{1}{h^2}, h'(t) = N'(t)$

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

$$x\text{が変化} \underbrace{\rightarrow h\text{が変化}}_{h'(x)} \underbrace{\rightarrow g\text{が変化}}_{g'(h)}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合
$g'(h) = 2,\ h'(x) = 4x + 1$ なので、
$f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$
$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1 = 4x^2 + 2x - 1$
だから、微分すると $f'(x) = 8x + 2$ で同じになることが確認できる。

$g(h) = \frac{1}{h}, h(t) = N(t)$、つまり、$f(t) = \frac{1}{N(t)}$ の場合
$g'(h) = -\frac{1}{h^2}, h'(t) = N'(t)$ だから、
$f'(t) = g'(h)h'(t) = -\frac{1}{h^2} \times h'(t)$、

SHU, IDE

チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. h を変数のように考えて $g(h)$ を h で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を x で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

$$x \text{ が変化} \underbrace{\rightarrow h \text{ が変化}}_{h'(x)} \underbrace{\rightarrow g \text{ が変化}}_{g'(h)}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合
$g'(h) = 2,\ h'(x) = 4x + 1$ なので、
$f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$
$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1 = 4x^2 + 2x - 1$
だから、微分すると $f'(x) = 8x + 2$ で同じになることが確認できる。

$g(h) = \frac{1}{h}, h(t) = N(t)$、つまり、$f(t) = \frac{1}{N(t)}$ の場合
$g'(h) = -\frac{1}{h^2}, h'(t) = N'(t)$ だから、
$f'(t) = g'(h)h'(t) = -\frac{1}{h^2} \times h'(t)$、ここで
$h(t) = N(t)$ を代入して
$f'(t) = -\frac{1}{h^2} \times h'(t) = -\frac{1}{N^2(t)} \times N'(t).$

SHU, IDE

$$f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}.$$

$g(h)=\frac{1}{h}, h(j)=1+j, j(x)=\frac{1}{2}x^2$ とすると

$$g'(h)=-\frac{1}{h^2}, h'(j)=1, j'(x)=x.$$

チェーンルールを使うと

$$f(x)=g\left[h\{j(x)\}\right],$$

$$f'(x)=g'(h)h'(j)j'(x)=-\frac{1}{h^2}\cdot 1\cdot x,$$

$$=-\frac{1}{h^2}x=-\frac{x}{\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^2}.$$

$f(l)=\beta u\{h(l)+Rs\}$ の微分で

$g(c_2)=\beta u(c_2),\ c_2(l)=h(l)+Rs$ とおく

$$g'(c_2)=\beta u'(c_2),\ c_2'(l)=h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned} f(l)&=g\left\{c_2(l)\right\},\\ f'(l)&=g'(c_2)c_2'(l),\\ &=\beta u'(c_2)h'(l),\\ &=\beta u'\{h(l)+Rs\}h'(l). \end{aligned}$$

SHU, IDE

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}.$$

$g(h) = \frac{1}{h}, h(j) = 1+j, j(x) = \frac{1}{2}x^2$ とすると

$$g'(h) = -\frac{1}{h^2}, h'(j) = 1, j'(x) = x.$$

チェーンルールを使うと

$$\begin{aligned} f(x) &= g\left[h\{j(x)\}\right], \\ f'(x) &= g'(h)h'(j)j'(x) = -\frac{1}{h^2} \cdot 1 \cdot x, \\ &= -\frac{1}{h^2}x = -\frac{x}{\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^2}. \end{aligned}$$

$f(l) = \beta u\{h(l) + Rs\}$ の微分で
$g(c_2) = \beta u(c_2),\ c_2(l) = h(l) + Rs$ とおく

$$g'(c_2) = \beta u'(c_2),\ c_2'(l) = h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned} f(l) &= g\left\{c_2(l)\right\}, \\ f'(l) &= g'(c_2)c_2'(l), \\ &= \beta u'(c_2)h'(l), \\ &= \beta u'\{h(l) + Rs\}h'(l). \end{aligned}$$

g, h を微分して乗じても手数は変わらないですが、計算の誤りが減ります。

$F(x) = (1-x)w + \beta\{\ln(a+x) + \ln n\} =$
$(1-x)w + f(x)$ の最大化。
$g(h) = \beta(h + \ln n), h(j) = \ln j, j(x) = a + x$:

$$g'(h) = \beta, h'(j) = \frac{1}{j}, j'(x) = 1.$$

チェーンルールを使うと

$$f'(x) = g'(h)h'(j)j'(x) = \beta \cdot \frac{1}{j} \cdot 1 = \beta \frac{1}{a+x}.$$

$$F'(x) = -w + f'(x) = -w + \beta \frac{1}{a+x} = 0.$$

$$w(a+x) = \beta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\beta}{w} - a.$$

純便益の構成要素の粗便益と費用が x の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。

純便益の構成要素の粗便益と費用が x の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。経済学では 2 階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

純便益の構成要素の粗便益と費用が x の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。経済学では2階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

☞ $\in$ は “is in”, “belongs to” と読みます。

純便益の構成要素の粗便益と費用が x の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。経済学では 2 階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

- ☞ $\in$ は “is in”，“belongs to” と読みます。
- ☞ $\mathbb{R}_+$ は 0 を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

純便益の構成要素の粗便益と費用が x の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。経済学では 2 階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

- ☞ $\in$ は "is in", "belongs to" と読みます。
- ☞ $\mathbb{R}_+$ は 0 を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all $x \in \mathbb{R}_+$」とは「for all x in the set of all positive real numbers」(x は正の実数すべての集合、もしくは、x は正の実数であれば何でもよい) と読みます。

SHU, IDE

純便益の構成要素の粗便益と費用が x の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。経済学では 2 階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

- ☞ $\in$ は “is in”, “belongs to” と読みます。
- ☞ $\mathbb{R}_+$ は 0 を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all $x \in \mathbb{R}_+$」とは「for all x in the set of all positive real numbers」(x は正の実数すべての集合、もしくは、x は正の実数であれば何でもよい) と読みます。つまり、x が正の実数であれば、1 階微分と 2 階微分の符号がこのようになる、と書いています。

純便益の構成要素の粗便益と費用が x の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。経済学では 2 階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

- ☞ $\in$ は “is in”, “belongs to” と読みます。
- ☞ $\mathbb{R}_+$ は 0 を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all $x \in \mathbb{R}_+$」とは「for all x in the set of all positive real numbers」(x は正の実数すべての集合、もしくは、x は正の実数であれば何でもよい) と読みます。つまり、x が正の実数であれば、1 階微分と 2 階微分の符号がこのようになる、と書いています。

- ☞ 例として x は時間や生産量と考え、正の実数しか取り得ない状況を考えます。

SHU, IDE

純便益の構成要素の粗便益と費用が x の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。経済学では 2 階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

- ☞ $\in$ は “is in”, “belongs to” と読みます。
- ☞ $\mathbb{R}_+$ は 0 を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all $x \in \mathbb{R}_+$」とは「for all x in the set of all positive real numbers」(x は正の実数すべての集合、もしくは、x は正の実数であれば何でもよい) と読みます。つまり、x が正の実数であれば、1 階微分と 2 階微分の符号がこのようになる、と書いています。

- ☞ 例として x は時間や生産量と考え、正の実数しか取り得ない状況を考えます。

経済学では $b'(x)$ を限界便益 marginal benefits、$c'(x)$ を限界費用 marginal costs と呼びます。

SHU, IDE

関数の最大化を思い出して下さい。純便益 $= b(x) - c(x)$ を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

関数の最大化を思い出して下さい。純便益 $= b(x) - c(x)$ を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

☞ 限界便益=限界費用

関数の最大化を思い出して下さい。純便益 $= b(x) - c(x)$ を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

☞ 限界便益=限界費用

一階微分がゼロ (一階条件 first order condition) だけだと最小値かもしれません。2 階微分が負 (最大値の二階条件 second order condition for the maximum) か確認します。

$$b''(x) - c''(x) < 0. \quad \Leftarrow \quad b''(x) < 0,\ c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

関数の最大化を思い出して下さい。純便益 $= b(x) - c(x)$ を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

☞ 限界便益=限界費用

一階微分がゼロ (一階条件 first order condition) だけだと最小値かもしれません。2 階微分が負 (最大値の二階条件 second order condition for the maximum) か確認します。

$$b''(x) - c''(x) < 0. \quad \Leftarrow \quad b''(x) < 0,\ c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

✍ x は正の実数なので 0 という下限値があります。ここでは関数の最大値が下限値 $x = 0$ ではない、と (説明なく) 仮定しています。実は、最大値が $x = 0$ の場合、一階条件は $b'(x) - c'(x) \leqslant 0$ となるのですが、この点は後で説明します。

関数の最大化を思い出して下さい。純便益 $= b(x) - c(x)$ を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

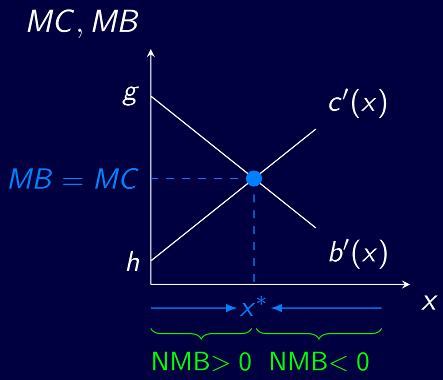
☞ 限界便益=限界費用

一階微分がゼロ (一階条件 first order condition) だけだと最小値かもしれません。2 階微分が負 (最大値の二階条件 second order condition for the maximum) か確認します。

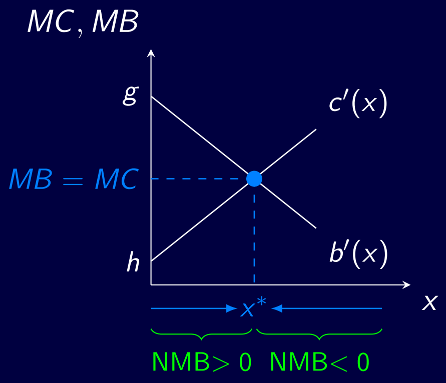
$$b''(x) - c''(x) < 0. \quad \Leftarrow \quad b''(x) < 0,\ c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

- ✍ x は正の実数なので 0 という下限値があります。ここでは関数の最大値が下限値 $x = 0$ ではない、と (説明なく) 仮定しています。実は、最大値が $x = 0$ の場合、一階条件は $b'(x) - c'(x) \leqslant 0$ となるのですが、この点は後で説明します。
- ✍ 最大化問題が解を持つように、以下も成り立つと仮定します。この意味は後で図を使って説明します。

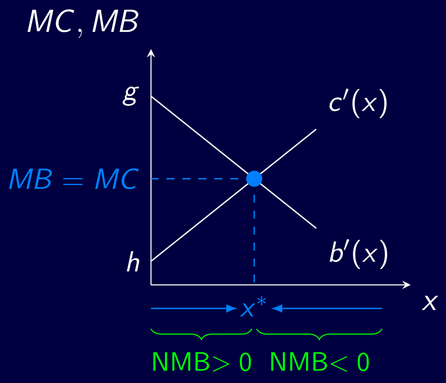
$$[b'(x) \text{ の } Y \text{ 切片}]\ \lim_{x\to 0} b'(x) = g, \quad [c'(x) \text{ の } Y \text{ 切片}]\ \lim_{x\to 0} c'(x) = h, \quad g > h.$$



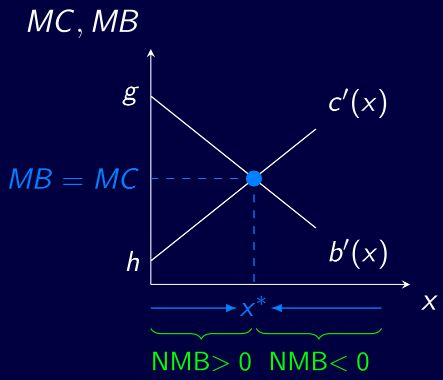
SHU, IDE



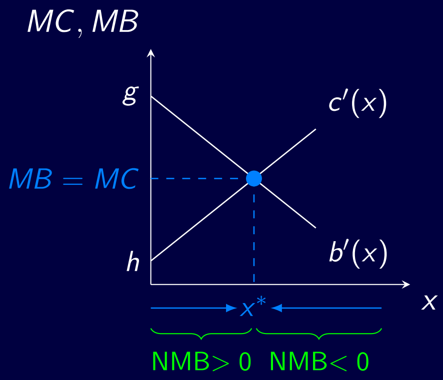
✍ Second order conditions: $b''(x) < 0, c''(x) > 0$



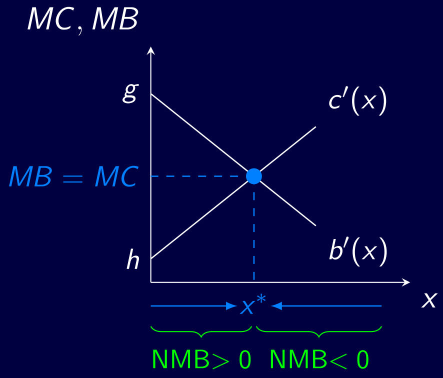
- ✍ Second order conditions: $b''(x) < 0, c''(x) > 0$
- ✍ $b''(x)$ は $b'(x)$ の x に対する傾きです。
  $b''(x) < 0$ なので $b'(x)$ は右下がりです。



- Second order conditions: $b''(x) < 0, c''(x) > 0$
- $b''(x)$ は $b'(x)$ の x に対する傾きです。$b''(x) < 0$ なので $b'(x)$ は右下がりです。
- この図で限界便益と限界費用の差 $b'(x) - c'(x)$、つまり、縦方向の長さが限界純便益 net marginal benefits (NMB) です。限界純便益とは、x を変化することによる純便益変化の大きさです。



- ✍ Second order conditions: $b''(x) < 0, c''(x) > 0$
- ✍ $b''(x)$ は $b'(x)$ の x に対する傾きです。$b''(x) < 0$ なので $b'(x)$ は右下がりです。
- ✍ この図で限界便益と限界費用の差 $b'(x) - c'(x)$、つまり、縦方向の長さが限界純便益 net marginal benefits (NMB) です。限界純便益とは、x を変化することによる純便益変化の大きさです。
- ✍ 最大値の二階条件 (限界便益-限界費用は x が増えると減る) が満たされているので、限界純便益が正であれば、x を増やすと純便益が増えます。限界純便益が負であれば、x を減らすと純便益が増えます。



- ✍ Second order conditions: $b''(x) < 0, c''(x) > 0$
- ✍ $b''(x)$ は $b'(x)$ の x に対する傾きです。
  $b''(x) < 0$ なので $b'(x)$ は右下がりです。
- ✍ この図で限界便益と限界費用の差 $b'(x) - c'(x)$、つまり、縦方向の長さが限界純便益 net marginal benefits (NMB) です。限界純便益とは、x を変化することによる純便益変化の大きさです。
- ✍ 最大値の二階条件 (限界便益-限界費用は x が増えると減る) が満たされているので、限界純便益が正であれば、x を増やすと純便益が増えます。限界純便益が負であれば、x を減らすと純便益が増えます。

$$\left.\begin{array}{llll} b''(x) < 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+ & [\Leftrightarrow & b'(x) \text{ は減少関数}], & \lim\limits_{x \to 0} b'(x) = g, \\ c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+ & [\Leftrightarrow & c'(x) \text{ は増加関数}], & \lim\limits_{x \to 0} c'(x) = h, \end{array} \quad g > h \right\}$$

なので x が正の領域で交点がある

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

- ☞ この仮定が現実的だというもっともらしい理由付けを以下で示します。

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

- ☞ この仮定が現実的だというもっともらしい理由付けを以下で示します。

教育による人的資本量を考えます。教育の総時間は決まっていて、遠隔教育時間と対面教育時間に分けられます。人的資本量を遠隔教育時間の関数として考えます。

SHU, IDE

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

☞ この仮定が現実的だというもっともらしい理由付けを以下で示します。

教育による人的資本量を考えます。教育の総時間は決まっていて、遠隔教育時間と対面教育時間に分けられます。人的資本量を遠隔教育時間の関数として考えます。

- 遠隔教育を受ける時間を x とし、粗便益が遠隔教育による人的資本量、費用が対面授業をしないことで失う人的資本量だとします。

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

- ☞ この仮定が現実的だというもっともらしい理由付けを以下で示します。

教育による人的資本量を考えます。教育の総時間は決まっていて、遠隔教育時間と対面教育時間に分けられます。人的資本量を遠隔教育時間の関数として考えます。

- 遠隔教育を受ける時間を x とし、粗便益が遠隔教育による人的資本量、費用が対面授業をしないことで失う人的資本量だとします。
- 対面教育に参加できない人も遠隔教育には参加できると仮定します。

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

- ☞ この仮定が現実的だというもっともらしい理由付けを以下で示します。

教育による人的資本量を考えます。教育の総時間は決まっていて、遠隔教育時間と対面教育時間に分けられます。人的資本量を遠隔教育時間の関数として考えます。

- 遠隔教育を受ける時間を x とし、粗便益が遠隔教育による人的資本量、費用が対面授業をしないことで失う人的資本量だとします。
- 対面教育に参加できない人も遠隔教育には参加できると仮定します。

- ☞ 遠隔教育時間を 0 から延ばすに従い、遠隔教育に参加できる人数は減るため、遠隔教育の粗便益は増え方が減る=限界粗便益は減少する、と仮定します。

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

☞ この仮定が現実的だというもっともらしい理由付けを以下で示します。

教育による人的資本量を考えます。教育の総時間は決まっていて、遠隔教育時間と対面教育時間に分けられます。人的資本量を遠隔教育時間の関数として考えます。

- 遠隔教育を受ける時間を x とし、粗便益が遠隔教育による人的資本量、費用が対面授業をしないことで失う人的資本量だとします。
- 対面教育に参加できない人も遠隔教育には参加できると仮定します。

☞ 遠隔教育時間を 0 から延ばすに従い、遠隔教育に参加できる人数は減るため、遠隔教育の粗便益は増え方が減る=限界粗便益は減少する、と仮定します。

✍ 「逓減限界便益」diminishing marginal benefits といいます。

SHU, IDE

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

☞ この仮定が現実的だというもっともらしい理由付けを以下で示します。

教育による人的資本量を考えます。教育の総時間は決まっていて、遠隔教育時間と対面教育時間に分けられます。人的資本量を遠隔教育時間の関数として考えます。

- 遠隔教育を受ける時間を x とし、粗便益が遠隔教育による人的資本量、費用が対面授業をしないことで失う人的資本量だとします。
- 対面教育に参加できない人も遠隔教育には参加できると仮定します。

☞ 遠隔教育時間を 0 から延ばすに従い、遠隔教育に参加できる人数は減るため、遠隔教育の粗便益は増え方が減る=限界粗便益は減少する、と仮定します。

✍ 「逓減限界便益」diminishing marginal benefits といいます。

☞ 遠隔教育時間を 0 から延ばすに従い、対面教育の時間が減り対面教育による人的資本量は減ります。対面教育が 1 時間減ることで失われる人的資本量は増えていく (対面教育の粗便益は対面教育時間が短いほど大きい=便益逓減である) ため、遠隔教育の費用は加速度的に増える=限界費用は増加する、と仮定します。

SHU, IDE

遠隔教育に粗便益と費用があり、遠隔教育時間が増えると限界粗便益が減少し、限界費用が増加する状況を仮定します。

☞ この仮定が現実的だというもっともらしい理由付けを以下で示します。

教育による人的資本量を考えます。教育の総時間は決まっていて、遠隔教育時間と対面教育時間に分けられます。人的資本量を遠隔教育時間の関数として考えます。

- 遠隔教育を受ける時間を x とし、粗便益が遠隔教育による人的資本量、費用が対面授業をしないことで失う人的資本量だとします。
- 対面教育に参加できない人も遠隔教育には参加できると仮定します。

☞ 遠隔教育時間を 0 から延ばすに従い、遠隔教育に参加できる人数は減るため、遠隔教育の粗便益は増え方が減る＝限界粗便益は減少する、と仮定します。

✍ 「逓減限界便益」diminishing marginal benefits といいます。

☞ 遠隔教育時間を 0 から延ばすに従い、対面教育の時間が減り対面教育による人的資本量は減ります。対面教育が 1 時間減ることで失われる人的資本量は増えていく (対面教育の粗便益は対面教育時間が短いほど大きい＝便益逓減である) ため、遠隔教育の費用は加速度的に増える＝限界費用は増加する、と仮定します。

✍ 「逓増限界費用」increasing marginal costs といいます。

✍ 限界便益=限界費用となる $x = x^*$ 時間の遠隔教育、つまり、限界純便益がゼロとなる x が純便益を最大化します。なぜならば、(最大値の 2 階条件が満たされていれば) これよりも短い時間だと限界便益 $>$ 限界費用なので、もう少し x を増やすことで純便益を増やせます。これよりも長い時間だと限界便益 $<$ 限界費用なので、もう少し x を減らすことで純便益を増やせます。

- ✍ 限界便益=限界費用となる $x = x^*$ 時間の遠隔教育、つまり、限界純便益がゼロとなる x が純便益を最大化します。なぜならば、(最大値の 2 階条件が満たされていれば) これよりも短い時間だと限界便益 $>$ 限界費用なので、もう少し x を増やすことで純便益を増やせます。これよりも長い時間だと限界便益 $<$ 限界費用なので、もう少し x を減らすことで純便益を増やせます。
- ✍ 最適な遠隔教育によって $b(x^*) - c(x^*)$ の純便益が得られます。遠隔授業の時間がゼロのときの純便益は $b(0) - c(0)$ だとしましょう。

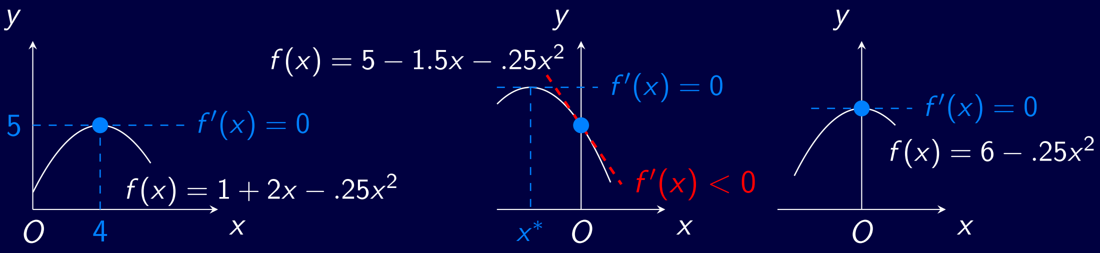
- 限界便益=限界費用となる $x = x^*$ 時間の遠隔教育、つまり、限界純便益がゼロとなる x が純便益を最大化します。なぜならば、(最大値の 2 階条件が満たされていれば) これよりも短い時間だと限界便益 $>$ 限界費用なので、もう少し x を増やすことで純便益を増やせます。これよりも長い時間だと限界便益 $<$ 限界費用なので、もう少し x を減らすことで純便益を増やせます。
- 最適な遠隔教育によって $b(x^*) - c(x^*)$ の純便益が得られます。遠隔授業の時間がゼロのときの純便益は $b(0) - c(0)$ だとしましょう。
  - $b(x^*) - c(x^*) \geqslant b(0) - c(0)$ であれば、遠隔教育を x^* 時間すると社会の純便益が最大化できます [等号を含んでいるのは、純便益が同じであればやっても (やらなくても) よいということです]。

SHU, IDE

- ✍ 限界便益=限界費用となる $x = x^*$ 時間の遠隔教育、つまり、限界純便益がゼロとなる x が純便益を最大化します。なぜならば、(最大値の 2 階条件が満たされていれば) これよりも短い時間だと限界便益 $>$ 限界費用なので、もう少し x を増やすことで純便益を増やせます。これよりも長い時間だと限界便益 $<$ 限界費用なので、もう少し x を減らすことで純便益を増やせます。
- ✍ 最適な遠隔教育によって $b(x^*) - c(x^*)$ の純便益が得られます。遠隔授業の時間がゼロのときの純便益は $b(0) - c(0)$ だとしましょう。
  - $b(x^*) - c(x^*) \geqslant b(0) - c(0)$ であれば、遠隔教育を x^* 時間すると社会の純便益が最大化できます [等号を含んでいるのは、純便益が同じであればやっても (やらなくても) よいということです]。
  - $x^* < 0$ で $b(x^*) - c(x^*) > b(0) - c(0)$ であっても、遠隔教育を負の時間することはできません。このため、遠隔教育を 0 時間すると社会の純便益が最大化できます。

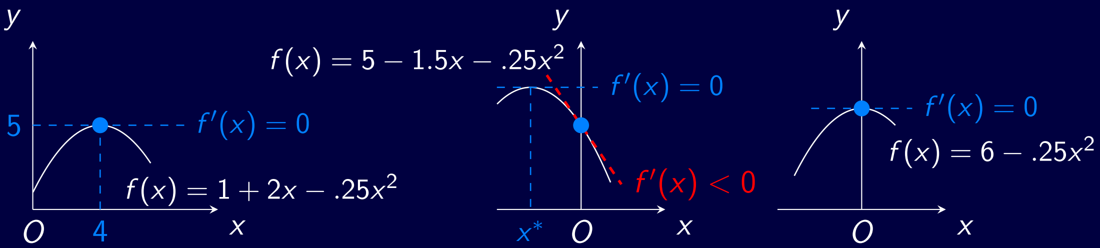
純便益 $b(x) - c(x)$ を $f(x)$ と表記します。

SHU, IDE



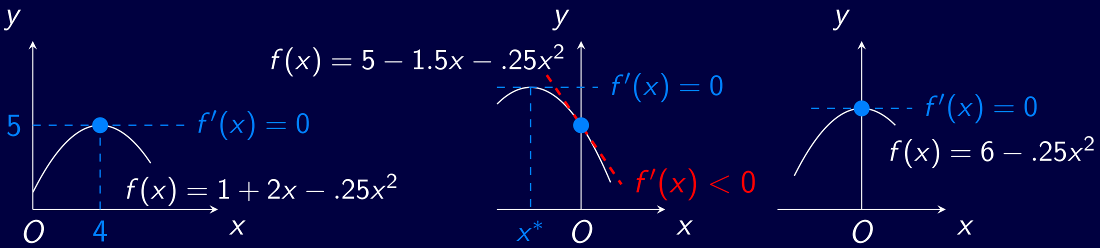
$x=0$が最大値となる場合は上図の右2つのケースです。

SHU, IDE



$x = 0$ が最大値となる場合は上図の右 2 つのケースです。

- 中央の図は最大値を与える x が負です。x は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は x が取り得る最も小さい値の 0 となります。

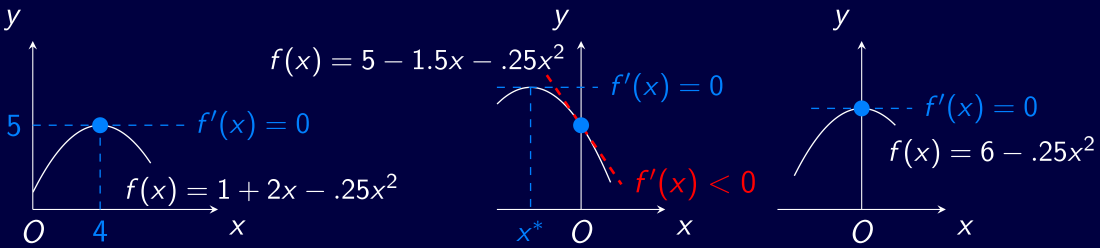


$x = 0$ が最大値となる場合は上図の右 2 つのケースです。

- 中央の図は最大値を与える x が負です。x は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は x が取り得る最も小さい値の 0 となります。
  - ☞ x が負値を取れない状況: 「非負制約 nonnegativity constraint がある」

非負制約が bind していると最大値での接線 $f'(x)$ の傾きが負になります。

SHU, IDE



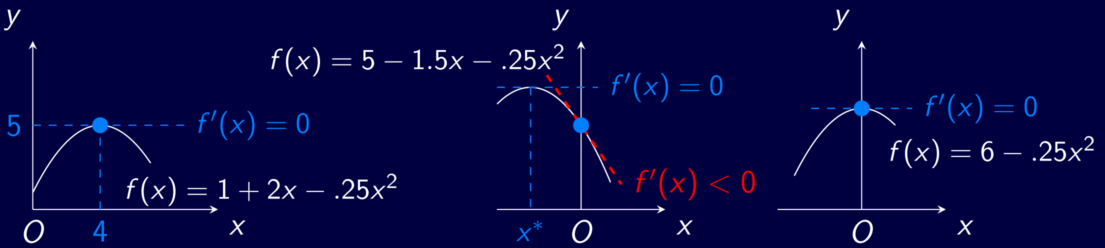
$x = 0$ が最大値となる場合は上図の右 2 つのケースです。

- 中央の図は最大値を与える x が負です。x は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は x が取り得る最も小さい値の 0 となります。
  - ☞ x が負値を取れない状況: 「非負制約 nonnegativity constraint がある」

  非負制約が bind していると最大値での接線 $f'(x)$ の傾きが負になります。

- 右の図は $x = 0$ のときに関数が最大化されている場合です。この状況では非負制約を考えずに最大化問題を $f'(x) = 0$ で解いても $x^* = 0$ となります。

SHU, IDE

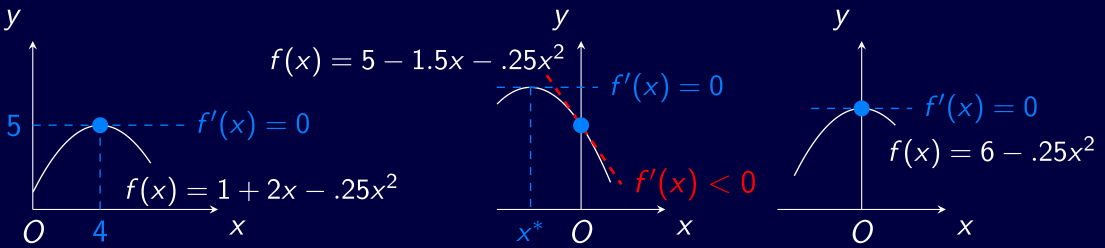


$x = 0$ が最大値となる場合は上図の右 2 つのケースです。

- 中央の図は最大値を与える x が負です。x は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は x が取り得る最も小さい値の 0 となります。
  - ☞ x が負値を取れない状況: 「非負制約 nonnegativity constraint がある」

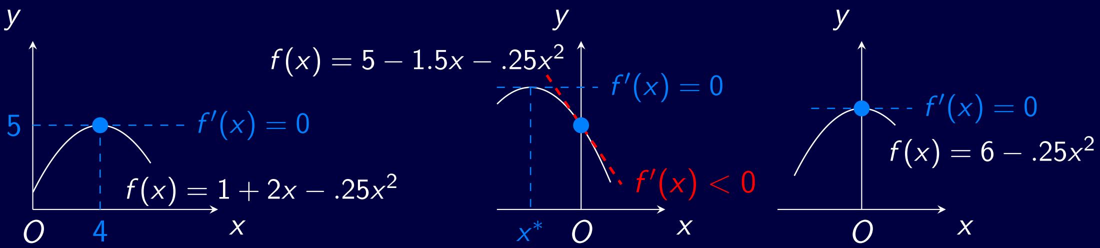
非負制約が bind していると最大値での接線 $f'(x)$ の傾きが負になります。

- 右の図は $x = 0$ のときに関数が最大化されている場合です。この状況では非負制約を考えずに最大化問題を $f'(x) = 0$ で解いても $x^* = 0$ となります。
- 左の図は非負制約が縛りを課さない (bind しない、nonbinding) ケースです。

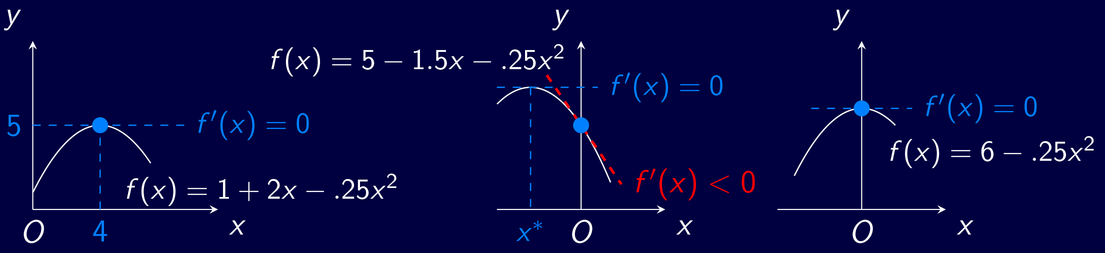


y
5
$f'(x) = 0$
$f(x) = 1 + 2x - .25x^2$
O
4
x
$f(x) = 5 - 1.5x - .25x^2$
y
$f'(x) = 0$
$f'(x) < 0$
x^*
O
x
y
$f'(x) = 0$
$f(x) = 6 - .25x^2$
O
x

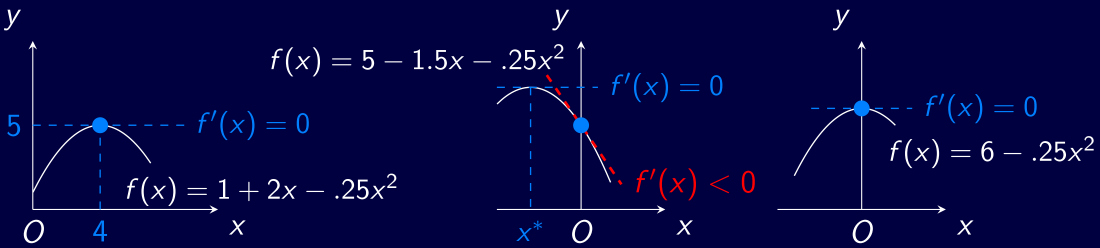
SHU, IDE



☞ 非負制約つきの最大化問題の解は、関数の形状によって上図 3 つのいずれかになります。



- ☞ 非負制約つきの最大化問題の解は、関数の形状によって上図 3 つのいずれかになります。
- ☞ 非負制約が bind していれば接線の傾きは負、bind していなければゼロなので、非負制約つき最大化問題の解では、目的関数 (純便益関数) の傾きが負かゼロ、つまり、非正であること、$f'(x) \leqslant 0$ が必要です (これが非負制約つき最大化問題の一階条件 first order condition です)。



- ☞ 非負制約つきの最大化問題の解は、関数の形状によって上図 3 つのいずれかになります。
- ☞ 非負制約が bind していれば接線の傾きは負、bind していなければゼロなので、非負制約つき最大化問題の解では、目的関数 (純便益関数) の傾きが負かゼロ、つまり、非正であること、$f'(x) \leqslant 0$ が必要です (これが非負制約つき最大化問題の一階条件 first order condition です)。
- ☞ 中央や右の図の場合、遠隔授業をせず、すべてを対面授業にすれば社会の純便益を最大化できます。

SHU, IDE

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

SHU, IDE

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

L について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L).$$

SHU, IDE

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3} L^{.7}$$

L について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7 \left(\frac{K}{L} \right)^{.3}$$

SHU, IDE

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

L について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7\left(\frac{K}{L}\right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$ は $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ の簡易表示です。一般に、$F_L(K, L)$ は K と L の関数です。$F(K, L)$ が連続して微分可能と仮定すると、$F_L(K, L)$ を L で微分すると $F_{LL}(K, L)$、K で微分すると $F_{LK}(K, L)$ が得られます。

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

L について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7\left(\frac{K}{L}\right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$ は $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ の簡易表示です。一般に、$F_L(K, L)$ は K と L の関数です。$F(K, L)$ が連続して微分可能と仮定すると、$F_L(K, L)$ を L で微分すると $F_{LL}(K, L)$、K で微分すると $F_{LK}(K, L)$ が得られます。

$F_{LK}(K, L)$ は L に関する微分 $F_L(K, L)$ を K で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

L について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7\left(\frac{K}{L}\right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$ は $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ の簡易表示です。一般に、$F_L(K, L)$ は K と L の関数です。$F(K, L)$ が連続して微分可能と仮定すると、$F_L(K, L)$ を L で微分すると $F_{LL}(K, L)$、K で微分すると $F_{LK}(K, L)$ が得られます。

$F_{LK}(K, L)$ は L に関する微分 $F_L(K, L)$ を K で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。$F_{LK} = F_{KL}$ であることが証明できます。

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K,L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

L について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = AF_L(K,L). \quad F_L = .7\left(\frac{K}{L}\right)^{.3}$$

$F_L(K,L)$ は $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ の簡易表示です。一般に、$F_L(K,L)$ は K と L の関数です。$F(K,L)$ が連続して微分可能と仮定すると、$F_L(K,L)$ を L で微分すると $F_{LL}(K,L)$、K で微分すると $F_{LK}(K,L)$ が得られます。

$F_{LK}(K,L)$ は L に関する微分 $F_L(K,L)$ を K で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。$F_{LK} = F_{KL}$ であることが証明できます。

$F_{LK}(K,L)$ は $F_L(K,L)$ が K とともに変化する方向 (正=増える、負=減る) です。

SHU, IDE

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

L について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7\left(\frac{K}{L}\right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$ は $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ の簡易表示です。一般に、$F_L(K, L)$ は K と L の関数です。$F(K, L)$ が連続して微分可能と仮定すると、$F_L(K, L)$ を L で微分すると $F_{LL}(K, L)$、K で微分すると $F_{LK}(K, L)$ が得られます。

$F_{LK}(K, L)$ は L に関する微分 $F_L(K, L)$ を K で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。$F_{LK} = F_{KL}$ であることが証明できます。

$F_{LK}(K, L)$ は $F_L(K, L)$ が K とともに変化する方向 (正=増える、負=減る) です。

多くの生産関数は $F_{LK}(K, L) > 0$ です。資本 K が増えると労働の限界生産性 $F_L(K, L)$ は増えることが多いためです。

SHU, IDE

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

L について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7\left(\frac{K}{L}\right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$ は $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ の簡易表示です。一般に、$F_L(K, L)$ は K と L の関数です。$F(K, L)$ が連続して微分可能と仮定すると、$F_L(K, L)$ を L で微分すると $F_{LL}(K, L)$、K で微分すると $F_{LK}(K, L)$ が得られます。

$F_{LK}(K, L)$ は L に関する微分 $F_L(K, L)$ を K で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。$F_{LK} = F_{KL}$ であることが証明できます。

$F_{LK}(K, L)$ は $F_L(K, L)$ が K とともに変化する方向 (正=増える、負=減る) です。

多くの生産関数は $F_{LK}(K, L) > 0$ です。資本 K が増えると労働の限界生産性 $F_L(K, L)$ は増えることが多いためです。$F_{LK} = .7 * .3\frac{1}{K^{.7}L^{.3}} > 0$. F_L は K の増加関数。

おまけ: 全微分=関数のすべての変数について微分すること

資本と労働を要素とする生産関数を考えましょう。

$$Y = AF(K, L).$$

全微分すると (積の公式)

$$dY = F(K, L)dA + A\frac{\partial F}{\partial K}dK + A\frac{\partial F}{\partial L}dL.$$

両辺をそれぞれ Y と $AF(K, L)$ で割ると

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \frac{F_K dK}{F(K, L)} + \frac{F_L dL}{F(K, L)}.$$

SHU, IDE

おまけ: $Y = AF(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1)$ をコブ・ダグラス型生産関数といいます。最もよく使われる生産関数形の 1 つです。

$$Y = AF(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1),\ F_K = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}, F_L = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha},$$
$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \alpha K^{-1}dK + (1-\alpha)L^{-1}dL = \frac{dA}{A} + \alpha\frac{dK}{K} + (1-\alpha)\frac{dL}{L}.$$
$$\hat{Y} = \hat{A} + \alpha\hat{K} + (1-\alpha)\hat{L}.$$

労働生産性 $y = \frac{Y}{L}$ の変化率を計算します。

$$y = \frac{Y}{L} = AK^{\alpha}L^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}, \quad k = \frac{K}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dA}{A} + \alpha\frac{dk}{k}.$$
$$\hat{y} = \hat{A} + \alpha\hat{k}.$$

よって、労働生産性の成長率は TFP 成長率と $\alpha\times$ 労働 1 単位あたり資本成長率 (=資本深化) に分解できます。

おまけ: コブ・ダグラス型生産関数の α は資本分配率パラメタといい、資本分配率 $(= rK/pY)$ に等しくなる、と示すことができます。

利潤最大化問題

$$\max_{\{K,L\}} \pi = pAK^{\alpha}L^{1-\alpha} - rK - wL, \quad \alpha \in (0,1).$$

K についての FOC は

$$pA\alpha K^{\alpha-1}L^{\alpha} - r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = MPK = \alpha \frac{pAK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = \alpha \frac{pY}{K}.$$

よって、α は資本報酬/収入の比に等しい。

$$\alpha = \frac{rK}{pY}.$$

$1-\alpha$ は労働分配率に等しくなります。

おまけ: L についての FOC は

$$pA(1-\alpha)K^{\alpha}L^{\alpha-1} - w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = MPL = (1-\alpha)\frac{pAK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = (1-\alpha)\frac{pY}{L}.$$

$1-\alpha$ は労働分配率に等しくなります。

$$1-\alpha = \frac{wL}{pY}.$$

FOCs を K, L について解くと

$$K^* = \alpha\frac{pY}{r}, \quad L^* = (1-\alpha)\frac{pY}{w}.$$

解 K^*, L^* を目的関数 (利潤) に代入すると、最大化された利潤は 0 であることが分かります。

$$\pi^* = pY - r\alpha\frac{pY}{r} - w(1-\alpha)\frac{pY}{w} = pY - pY = 0.$$

コブ・ダグラス型生産関数では、価格 p, w, r を所与とした利潤最大化では、収入 pY は資本と労働に完全分配されて利潤が 0 になります。

おまけ: A が誤差付きの $\tilde{A}$ として測定されるとき

$$\tilde{A} = a + bA.$$

a, b は変化しない定数だとします。TFP 成長率は $\frac{dA}{A}$ として計算されます。ここで計測されるのは $\tilde{A}$ なので、$\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}}$ を計算することになります。微分すると定数は 0 になるので

$$d\tilde{A} = bdA.$$

よって

$$\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}} = \frac{bdA}{a + bA} = \frac{dA}{\frac{a}{b} + A}.$$

つまり、$a = 0$ であれば $\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}} = \frac{dA}{A}$ です。

SHU, IDE

まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x) = 0$、その方程式で x について解く。

まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x) = 0$、その方程式で x について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。

まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x) = 0$、その方程式で x について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [$f''(x)$ の符号] で最大値か最小値か判明する。

SHU, IDE

まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x) = 0$、その方程式で x について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [$f''(x)$ の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。

まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x)=0$、その方程式で x について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [$f''(x)$ の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。

まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x)=0$、その方程式で x について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [$f''(x)$ の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。
  - ☞ 限界便益=限界費用は限界便益線と限界費用線が交差する点。

まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x) = 0$、その方程式で x について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [$f''(x)$ の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。
  - ☞ 限界便益=限界費用は限界便益線と限界費用線が交差する点。
  - ☞ 交差するためには、限界便益が右下がり、限界費用が右上がり、x が小さいときに限界便益 $>$ 限界費用、という条件が必要。

まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x) = 0$、その方程式で x について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [$f''(x)$ の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。
  - ☞ 限界便益=限界費用は限界便益線と限界費用線が交差する点。
  - ☞ 交差するためには、限界便益が右下がり、限界費用が右上がり、x が小さいときに限界便益 > 限界費用、という条件が必要。
- x に非負制約があるとき、$x = 0$ が最大化点の場合もある。その場合は $f'(0) \leqslant 0$ が成立している。

SHU, IDE