# 微分

Seiro Ito

Institute of Developing Economies, Japan

Fall, 2024

Department of International Exchange, Sacred Heart University

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

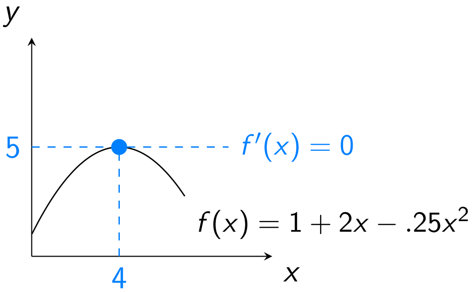
- ☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。
- ☞ 遠隔教育時間を増やす: 教室に来られない生徒の人的資本が増えるが、教室に来られる生徒の対面での人的資本蓄積が減る。
- ☞ 雇用時間を増やす: 収入が増えるが、支払う労働費用も増える。

関数が最大化する点は、関数が水平になる点=関数の傾きがゼロになる点です。

以下は $y = f(x)$ という 1 変数 $x$ の関数 $f(x)$ を描いています。

関数の微分は $f'(x)$ と表記しますが、その意味は $x$ での $f(x)$ の傾きのことです。

微分とは変数 $x$ が僅かに変化したときの関数 $f$ の反応を計算したものだからです。
微分してゼロとなる地点とは、傾きがゼロ $f'(x) = 0$ となる $x$ のことを指します。




$f'(x) = 2 - .5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

▸ 微分公式 $f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

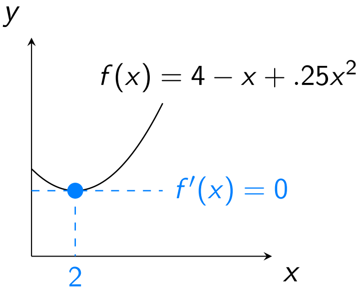
微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

以下は $y = f(x)$ という 1 変数 $x$ の関数 $f(x)$ を描いています。

関数の微分は $f'(x)$ と表記しますが、その意味は $x$ での $f(x)$ の傾きのことです。

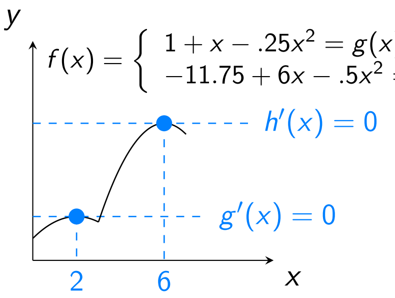
微分とは変数 $x$ が僅かに変化したときの関数 $f$ の反応を計算したものだからです。
微分してゼロとなる地点とは、傾きがゼロ $f'(x) = 0$ となる $x$ のことを指します。

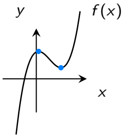


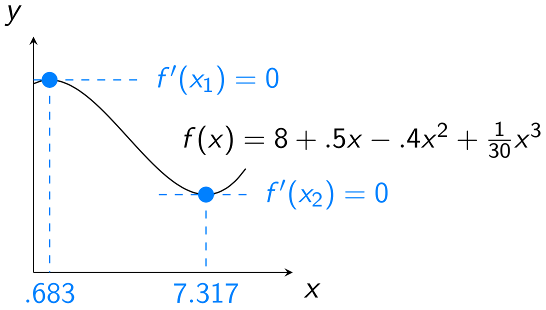

$f'(x) = 4 - x + .25x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
$f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

# 注意: $f'(x) = 0$ が最大値を与えない場合

1. $f'(x) = 0$ が最小値である場合
2. $f'(x) = 0$ がほかにも存在し、そちらの方が大きい場合
3. $f'(x) = 0$ という点はあっても、関数に最大と最小がない場合




$$g'(x) = 1 - .5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$h'(x) = 6 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

▸ 微分公式 $f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

$$f'(x) = .5 - .8x + .1x^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 4 \pm 10\sqrt{.11}.$$

- ✍ $f(x) = 8 + .5x - .4x^2 + \frac{1}{30}x^3$ のような 3 次関数は、最大値やと最小値が存在しません。最大値は無限大ですが、最大とか最小とかは有限の値のみに使います。よって、この関数には最大値も最小値も存在しないのです。しかし、極小値 (局所的な最小値 local minimum) や極大値 (局所的な最大値 local maximum) は存在します。右図の $x = 7.317$ は極小値、$x = .683$ は極大値です。いずれも $f'(x) = 0$ が成り立ちます。
- ✍ 以下では、関数が最大値 (最小値) をもち、かつ、現在検討している $f'(x) = 0$ が関数の最大値 (最小値) であると仮定し、そこでの数学的特徴を考えていきます。
  - ☞ $f'(x) = 0$ が最大値 (最小値) である確証を得るためには、一般的には関数をグラフにして全体を見渡す必要があります。

- ✍ 一般に、$f'(x)=0$ だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分 $f'(x)$[=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ✍ 傾きの変化は $f'(x)$ をさらに微分した 2 階微分で計算できます。
  - ☞ 2 階微分は加速度を表します。
  - ☞ 2 階微分 (加速度) が負とは、最初の図の $x>4$[“最大値の右側”] 部分のように 1 階微分が負の関数では、傾きが率を高めて負値で小さくなっていく (絶対値では大きくなっていく) ことを意味します。よって、最大値の場合、2 階微分は負 $f''(x)<0$ です。
  - ☞ 1 階微分が正の関数では、2 階微分が負とは、正の傾きが率を高めて小さくなっていく (傾きは正のままゼロに近づいていく) ことを意味します。
- ✍ 最大値ならば $f''(x)<0$、最小値ならば $f''(x)>0$ というように、2 階微分の符号で判定をします。ただし、2 階微分がゼロ (=その地点で関数が線形=傾きが変化しない) の場合は、最大値か最小値か判定できません。

☞ $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$, $f'(x) = 2 - .5x$, $f''(x) = -.5 < 0$. よって、$f'(x) = 2 - .5x = 0$ が示す点は最大化点。$f(x)$ を最大化する $x$ は $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$.

☞ $f(x) = 1 + 2x + .25x^2$, $f'(x) = 2 + .5x$, $f''(x) = .5 > 0$. よって、$f'(x) = 2 + .5x = 0$ が示す点は最小化点。$f(x)$ を最小化する $x$ は $f'(x) = 2 + .5x = 0 \Rightarrow x = -4$.

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

$x$ での接線の傾きは $-4x + 4$ です。仮に $x = 2$ だとしたら、接線の傾きは $f'(2) = -4 * 2 + 4 = -4$ です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる $x$ を求めます。これはこの方程式を $x$ について解けば得られます。

$$x = 1.$$

2 階条件

$$f''(x) = -4 < 0$$

なので最大化点です。最大化された値 $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$。

次の例は 1 次関数 (直線) です。

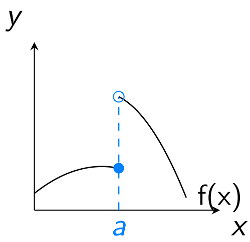
$$f(x) = 1 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2.$$

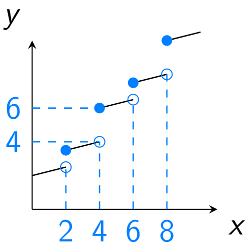
$1 + 2x$ は 2 の傾きで増えます。直線なので接線は関数そのものです。よって、接線の傾きは関数の傾きと同じ 2 です。直線なので最大化点は存在しません。よって、微分してゼロと置いても、$x = \cdots$ と解くことはできません。

# 参考: 微分できない場合 1

微分は関数の微小な変化を扱います。よって、(対象とする変数 $x$ の範囲で) 関数が連続で滑らかでないと適用できません。

$x = a$ で非連続である (ジャンプがある) と、$a$ の前 (左) の関数の値と $a$ の後 (右) の関数の値が異なります。行き着く先 $x = a$ で関数の値=極限の値=極値、が一致しないと、$x = a$ で極値が存在しない、と言います。 $x = a$ での微小な変化は、$a$ での関数の極値を扱うので、極値が存在しないと議論できません。

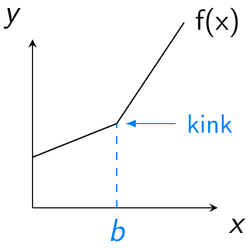



$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 6 \\ \lim\limits_{x \uparrow 4} f(x) = 4 \end{array}\right\} \text{非連続的ジャンプ}$$

# 参考: 微分できない場合 2

$x = b$ が尖っている (=滑らかでない) と、接線の傾きが左から $b$ に近づく場合と右から $b$ に近づく場合で異なるため、$x = b$ での微小な変化の大きさが右と左で変わります。接線の傾きを 1 つに決められないために $x = b$ で微分できません。下記の関数はそれ以外の点では微分可能です。




- $b$ での左部分での微分を左右からの微分 left differentiation と呼びます。$b$ での右部分での微分を右からの微分 right differentiation と呼びます。
- 微分できない点なのに、右からの微分とか左からの微分とかいう用語法は、厳密には矛盾しています。詳しい事情は知りません。

## 1 変数関数 $f(x)$ の微分の公式

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$ | | 水平線の傾きは 0 |
| $f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$ | | 指数関数、$n = 1$ は線形関数 |
| $f(x) = \frac{b}{x^n} = bx^{-n} \Rightarrow f'(x) = -bnx^{-n-1}$ | | 分数は指数関数の一種 |
| $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$ | | 和の微分公式 |
| $f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$ | | 積の微分公式 |
| $f(x) = g\{h(x)\} \Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x)$ | | チェーンルール |
| $f(x) = b\ln x \Rightarrow f'(x) = b\frac{1}{x}$ | | 対数関数の微分公式 |
| $f(x) = ae^{bx} \Rightarrow f'(x) = abe^{bx}$ | | 自然指数関数の微分公式 |

戻る

参考: なぜ $f'(x) = bnx^{n-1}$?

証明ではないですが、定義を使って計算すると公式の正しさが確認できます。微分の定義は以下です。関数の変化 (率の極限) を求めています。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$f(x) = a + bx + cx^2$ で考えます。$f'(x) = bnx^{n-1} = b + 2cx$。定義を使うと

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a + b(x+h) + c(x+h)^2 - (a + bx + cx^2)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a + b(x+h) + c(x^2 + 2hx + h^2) - (a + bx + cx^2)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{bh + 2chx + h^2}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} b + 2cx + h, \\
&= b + 2cx.
\end{aligned}$$

参考: なぜ $f'(x) = bnx^{n-1}$?

証明のスケッチ: $f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n$ で考えます。
$f'(x) = b + 2cx + \cdots + dnx^{n-1}$。定義を使うと

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{a + b(x+h) + c(x+h)^2 + \cdots + d(x+h)^n - (a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n)}{h}, \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \left( \frac{a + b(x+h) + c(x^2 + 2hx + h^2) + \cdots + d(x^n + nhx^{n-1} + \cdots + h^n)}{h} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n}{h} \right), \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{bh + 2chx + ch^2 + \cdots + d(nhx^{n-1} + nh^2x^{n-2} + \cdots + h^n)}{h}, \\
&\quad = b + 2cx + \cdots + dnx^{n-1}.
\end{aligned}$$

# チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$ が $g\{h(x)\}$ という $g(h)$, $h(x)$ の二重の関数になっている場合:

1. $h$ を変数のように考えて $g(h)$ を $h$ で微分: $g'(h)$
2. $h(x)$ を $x$ で微分: $h'(x)$
3. 両方を乗じた $g'(h)h'(x)$ が全体 $f(x)$ の微分となる

$$x\text{ が変化}\underbrace{\rightarrow h\text{ が変化}}_{h'(x)}\underbrace{\rightarrow g\text{ が変化}}_{g'(h)}$$

$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1$
$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$ の場合
$g'(h) = 2,\ h'(x) = 4x + 1$ なので、
$f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$
$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2+1x-1)+1 = 4x^2+2x-1$
だから、微分すると $f'(x) = 8x + 2$ で同じになることが確認できる。

$f(l) = \beta u\{h(l) + Rs\}$ で
$f(l) = \beta u\{c_2(l)\} = g\{c_2(l)\}$、つまり、
$g(c_2) = \beta u(c_2)$, $c_2(l) = h(l) + Rs$ とおく

$$g'(c_2) = \beta u'(c_2),\ c_2'(l) = h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned} f(l) &= g\{c_2(l)\}, \\ f'(l) &= g'(c_2)c_2'(l), \\ &= \beta u'(c_2)h'(l), \\ &= \beta u'\{h(l) + Rs\}h'(l). \end{aligned}$$

$g, h$ を微分して乗じても手数は変わらないですが、計算の誤りが減ります。

$u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$ を 2 変数 $l, s$ で最大化

1. $l$ について微分してゼロとおく
2. $s$ について微分してゼロとおく

$F(l) = u\{c_1(l)\} + \beta u\{c_2(l)\}$、つまり、
$c_1(l) = w(24 - l) + A - s$, $c_2(l) = h(l) + Rs$
$U(s) = u\{c_1(s)\} + \beta u\{c_2(s)\}$、つまり、
$c_1(s) = w(24 - l) + A - s$,
$c_2(s) = h(l) + Rs$

$$\begin{aligned} F'(l) &= u'(c_1)c_1'(l) & +\beta u'(c_2)c_2'(l) = 0, \\ U'(s) &= u'(c_1)c_1'(s) & +\beta u'(c_2)c_2'(s) = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = -\beta\frac{c_2'(l)}{c_1'(l)},$$
$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = -\beta\frac{c_2'(s)}{c_1'(s)}.$$

$F(l,s) = u\{w(24-l)+A-s\} + \beta u\{h(l)+Rs\}$ を 2 変数 $l, s$ で最大化

1. $l$ について微分してゼロとおく　2. $s$ について微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l,s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}\frac{\partial c_1(l,s)}{\partial l} + \beta\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}\frac{\partial c_2(l,s)}{\partial l} = 0, \qquad \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta\frac{\frac{\partial c_2(l,s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l,s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l,s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}\frac{\partial c_1(l,s)}{\partial s} + \beta\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}\frac{\partial c_2(l,s)}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta\frac{\frac{\partial c_2(l,s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l,s)}{\partial s}}.$$

$c_1(l,s) = w(24-l)+A-s,\ \frac{\partial c_1(l,s)}{\partial l} = -w,\ \frac{\partial c_1(l,s)}{\partial s} = -1,$

$c_2(l,s) = h(l)+Rs,\ \frac{\partial c_2(l,s)}{\partial l} = h'(l),\ \frac{\partial c_2(l,s)}{\partial s} = R.$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta\frac{\frac{\partial c_2(l,s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l,s)}{\partial l}} = -\beta\frac{h'(l)}{-w} = \beta\frac{h'(l)}{w},$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta\frac{\frac{\partial c_2(l,s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l,s)}{\partial s}} = -\beta\frac{R}{-1} = \beta R.$$

$$wR = h'(l).$$

$F(l,s)$ を 2 変数 $l, s$ で最大化すると、この条件が成り立っていなければならない

純便益=粗便益-費用です。粗便益も費用も $x$ の関数だとしましょう。粗便益 $b(x)$、費用 $c(x)$ と関数表記します。経済学では 2 階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

- ☞ $\in$ は "is in", "belongs to" と読みます。
- ☞ $\mathbb{R}_+$ は 0 を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all $x \in \mathbb{R}_+$」とは「for all $x$ in the set of all positive real numbers」($x$ は正の実数すべての集合、もしくは、$x$ は正の実数であれば何でもよい) と読みます。つまり、$x$ が正の実数であれば、1 階微分と 2 階微分の符号がこのようになる、と書いています。

- ☞ 例として $x$ は時間や生産量と考え、正の実数しか取り得ない状況を考えます。

経済学では $b'(x)$ を限界便益 marginal benefits、$c'(x)$ を限界費用 marginal costs と呼びます。

純便益 $= b(x) - c(x)$ を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

☞ 限界便益=限界費用

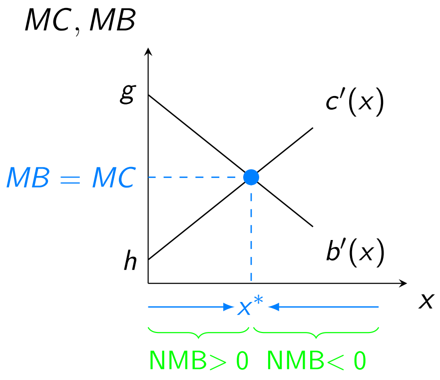
一階微分がゼロ (一階条件 first order condition) だけだと最小値かもしれません。2 階微分が負 (最大値の二階条件 second order condition for the maximum) か確認します。

$$b''(x) - c''(x) < 0. \quad \Leftarrow \quad b''(x) < 0,\ c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

✍ $x$ は正の実数なので 0 という下限値があります。ここでは関数の最大値が下限値 $x = 0$ ではない、と (説明なく) 仮定しています。実は、最大値が $x = 0$ の場合、一階条件は $b'(x) - c'(x) \leqslant 0$ となるのですが、この点は後で説明します。

✍ 最大化問題が解を持つように、以下も成り立つと仮定します。この意味は後で図を使って説明します。

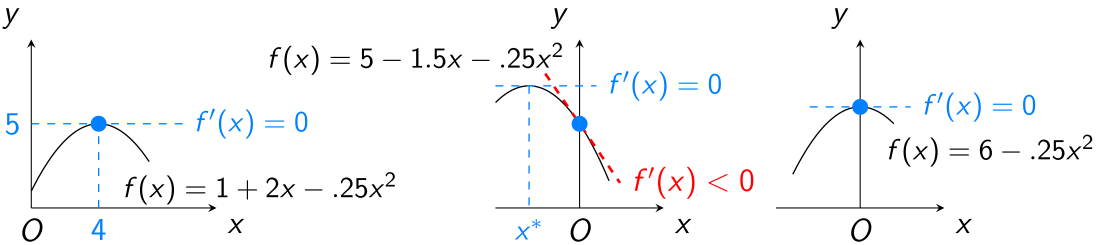
$$[b'(x) \text{ の } Y \text{ 切片}]\ \lim_{x \to 0} b'(x) = g, \quad [c'(x) \text{ の } Y \text{ 切片}]\ \lim_{x \to 0} c'(x) = h, \quad g > h.$$




- Second order conditions: $b''(x) < 0, c''(x) > 0$
- $b''(x)$ は $b'(x)$ の $x$ に対する傾きです。$b''(x) < 0$ なので $b'(x)$ は右下がりです。
- この図で限界便益と限界費用の差 $b'(x) - c'(x)$、つまり、縦方向の長さが限界純便益 net marginal benefits (NMB) です。限界純便益とは、$x$ を変化することによる純便益変化の大きさです。
- 最大値の二階条件 (限界便益-限界費用は $x$ が増えると減る) が満たされているので、限界純便益が正であれば、$x$ を増やすと純便益が増えます。限界純便益が負であれば、$x$ を減らすと純便益が増えます。

$$\left.\begin{array}{llll} b''(x) < 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+ & [\Leftrightarrow \quad b'(x) \text{ は減少関数}], & \lim_{x \to 0} b'(x) = g, & \\ & & & g > h \\ c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+ & [\Leftrightarrow \quad c'(x) \text{ は増加関数}], & \lim_{x \to 0} c'(x) = h, & \end{array}\right\}$$

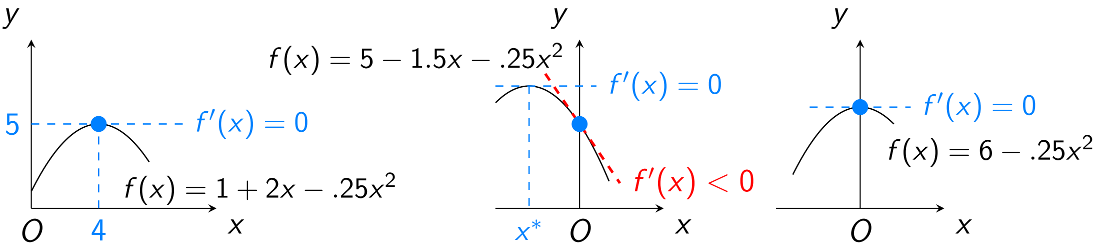
なので $x$ が正の領域で交点がある




$x = 0$ が最大値となる場合は上図の右 2 つのケースです。

- 中央の図は最大値を与える $x$ が負です。$x$ は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は $x$ が取り得る最も小さい値の 0 となります。
  - ☞ $x$ が負値を取れない状況: 「非負制約 nonnegativity constraint がある」

  非負制約が bind していると最大値での接線 $f'(x)$ の傾きが負になります。
- 右の図は $x = 0$ のときに関数が最大化されている場合です。この状況では非負制約を考えずに最大化問題を $f'(x) = 0$ で解いても $x^* = 0$ となります。
- 左の図は非負制約が縛りを課さない (bind しない、nonbinding) ケースです。




- ☞ 非負制約つきの最大化問題の解は、関数の形状によって上図 3 つのいずれかになります。
- ☞ 非負制約が bind していれば接線の傾きは負、bind していなければゼロなので、非負制約つき最大化問題の解では、目的関数 (純便益関数) の傾きが負かゼロ、つまり、非正であること、$f'(x) \leqslant 0$ が必要です (これが非負制約つき最大化問題の一階条件 first order condition です)。

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7\left(\frac{K}{L}\right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$ は $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ の簡易表示です。一般に、$F_L(K, L)$ は $K$ と $L$ の関数です。$F(K, L)$ が連続して微分可能と仮定すると、$F_L(K, L)$ を $L$ で微分すると $F_{LL}(K, L)$、$K$ で微分すると $F_{LK}(K, L)$ が得られます。

$F_{LK}(K, L)$ は $L$ に関する微分 $F_L(K, L)$ を $K$ で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。$F_{LK} = F_{KL}$ であることが証明できます。

$F_{LK}(K, L)$ は $F_L(K, L)$ が $K$ とともに変化する方向 (正=増える、負=減る) です。

多くの生産関数は $F_{LK}(K, L) > 0$ です。資本 $K$ が増えると労働の限界生産性 $F_L(K, L)$ は増えることが多いためです。$F_{LK} = .7 * .3\frac{1}{K^{.7}L^{.3}} > 0$. $F_L$ は $K$ の増加関数。

# おまけ: 全微分=関数のすべての変数について微分すること

資本と労働を要素とする生産関数を考えましょう。

$$Y = AF(K, L).$$

全微分すると (積の公式)

$$dY = F(K, L)dA + A\frac{\partial F}{\partial K}dK + A\frac{\partial F}{\partial L}dL.$$

両辺をそれぞれ $Y$ と $AF(K, L)$ で割ると

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \frac{F_K dK}{F(K, L)} + \frac{F_L dL}{F(K, L)}.$$

おまけ: $Y = AF(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1)$ をコブ・ダグラス型生産関数といいます。最もよく使われる生産関数形の 1 つです。

$$Y = AF(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \; F_K = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}, F_L = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha},$$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \alpha K^{-1}dK + (1-\alpha)L^{-1}dL = \frac{dA}{A} + \alpha\frac{dK}{K} + (1-\alpha)\frac{dL}{L}.$$

$$\hat{Y} = \hat{A} + \alpha\hat{K} + (1-\alpha)\hat{L}.$$

労働生産性 $y = \frac{Y}{L}$ の変化率を計算します。

$$y = \frac{Y}{L} = AK^{\alpha}L^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}, \quad k = \frac{K}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dA}{A} + \alpha\frac{dk}{k}.$$

$$\hat{y} = \hat{A} + \alpha\hat{k}.$$

よって、労働生産性の成長率は TFP 成長率と $\alpha\times$ 労働 1 単位あたり資本成長率 (=資本深化) に分解できます。

おまけ: コブ・ダグラス型生産関数の $\alpha$ は資本分配率パラメタといい、資本分配率 $(= rK/pY)$ に等しくなる、と示すことができます。

利潤最大化問題

$$\max_{\{K,L\}} \pi = pAK^{\alpha}L^{1-\alpha} - rK - wL, \quad \alpha \in (0,1).$$

$K$ についての FOC は

$$pA\alpha K^{\alpha-1}L^{\alpha} - r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = MPK = \alpha\frac{pAK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = \alpha\frac{pY}{K}.$$

よって、$\alpha$ は資本報酬/収入の比に等しい。

$$\alpha = \frac{rK}{pY}.$$

別の言い方をすれば、コブ・ダグラス型生産関数では、資本報酬 $= \alpha \times$ 収入が成り立つ。

おまけ: $L$ についての FOC は

$$pA(1-\alpha)K^\alpha L^{\alpha-1} - w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = MPL = (1-\alpha)\frac{pAK^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = (1-\alpha)\frac{pY}{L}.$$

$1-\alpha$ は労働分配率に等しくなります。

$$1-\alpha = \frac{wL}{pY}.$$

FOCs を $K, L$ について解くと

$$K^* = \alpha\frac{pY}{r}, \quad L^* = (1-\alpha)\frac{pY}{w}.$$

解 $K^*, L^*$ を目的関数 (利潤) に代入すると、最大化された利潤は 0 であることが分かります。

$$\pi^* = pY - r\alpha\frac{pY}{r} - w(1-\alpha)\frac{pY}{w} = pY - pY = 0.$$

コブ・ダグラス型生産関数では、価格 $p, w, r$ を所与とした完全競争下の利潤最大化では、収入 $pY$ は資本と労働に完全分配されて利潤が 0 になります。

おまけ: $A$ が誤差付きの $\tilde{A}$ として測定されるとき

$$\tilde{A} = a + bA.$$

$a, b$ は変化しない定数だとします。TFP 成長率は $\frac{dA}{A}$ として計算されます。ここで計測されるのは $\tilde{A}$ なので、$\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}}$ を計算することになります。微分すると定数は0 になるので

$$d\tilde{A} = bdA.$$

よって

$$\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}} = \frac{bdA}{a + bA} = \frac{dA}{\frac{a}{b} + A}.$$

つまり、$a = 0$ であれば $\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}} = \frac{dA}{A}$ です。

# まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき $f'(x) = 0$、その方程式で $x$ について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [$f''(x)$ の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。
  - ☞ 限界便益=限界費用は限界便益線と限界費用線が交差する点。
  - ☞ 交差するためには、限界便益が右下がり、限界費用が右上がり、$x$ が小さいときに限界便益 $>$ 限界費用、という条件が必要。
- $x$ に非負制約があるとき、$x = 0$ が最大化点の場合もある。その場合は $f'(0) \leqslant 0$ が成立している。