

# 微分

Seiro Ito

Institute of Developing Economies, Japan

Fall, 2024

Department of International Exchange, Sacred Heart University

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

- ☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。



微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

- ☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。
- ☞ 遠隔教育時間を増やす: 教室に来られない生徒の人的資本が増えるが、教室に来られる生徒の対面での人的資本蓄積が減る。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

- ☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。
- ☞ 遠隔教育時間を増やす: 教室に来られない生徒の人的資本が増えるが、教室に来られる生徒の対面での人的資本蓄積が減る。
- ☞ 雇用時間を増やす: 収入が増えるが、支払う労働費用も増える。

微分 differentiation とは関数の傾きなどを知る手法です。

傾きを知りたい理由は、関数が最大/最小になる点を知りたいからです。

- 生涯効用を最大化する子ども期の教育年数は何年か。[効用関数]
- 教育の純便益 (=便益-費用) 関数を最大化する遠隔教育時間は何時間か。[純便益関数]
- 企業の利潤を最大化する雇用時間は何時間か。[利潤関数]

多くの場合、変数を変化させると便益と費用が逆の方向に動くトレードオフがあります。関数は単調に増えたり減ったりする単調関数ではありません。よって、変数の値を適切に選ぶ必要があります。

- ☞ 教育年数を増やす: 人的資本が増えるが、収入を得る期間が減る。
- ☞ 遠隔教育時間を増やす: 教室に来られない生徒の人的資本が増えるが、教室に来られる生徒の対面での人的資本蓄積が減る。
- ☞ 雇用時間を増やす: 収入が増えるが、支払う労働費用も増える。

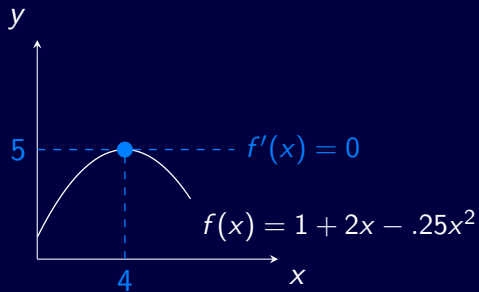
関数が最大化する点は、関数が水平になる点=関数の傾きがゼロになる点です。

以下は  $y = f(x)$  という 1 変数  $x$  の関数  $f(x)$  を描いています。

微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

以下は  $y = f(x)$  という 1 変数  $x$  の関数  $f(x)$  を描いています。

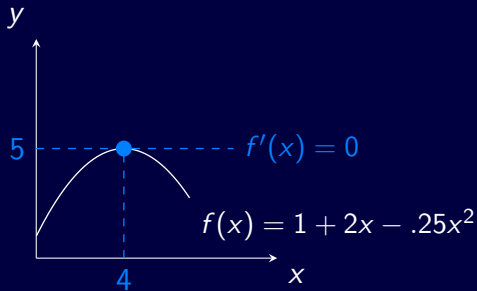


微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

以下は  $y = f(x)$  という 1 変数  $x$  の関数  $f(x)$  を描いています。

関数の微分は  $f'(x)$  と表記しますが、その意味は  $x$  での  $f(x)$  の傾きのことです。



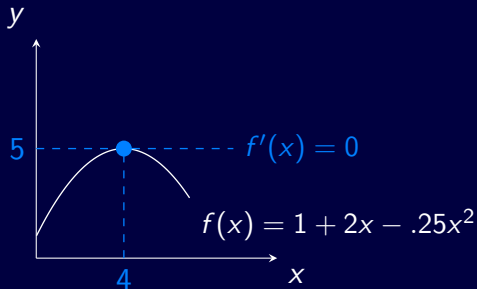
微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

以下は  $y = f(x)$  という 1 変数  $x$  の関数  $f(x)$  を描いています。

関数の微分は  $f'(x)$  と表記しますが、その意味は  $x$  での  $f(x)$  の傾きのことです。

微分とは変数  $x$  が僅かに変化したときの関数  $f$  の反応を計算したものです。  
微分してゼロとなる地点とは、傾きがゼロ  $f'(x) = 0$  となる  $x$  のことを指します。



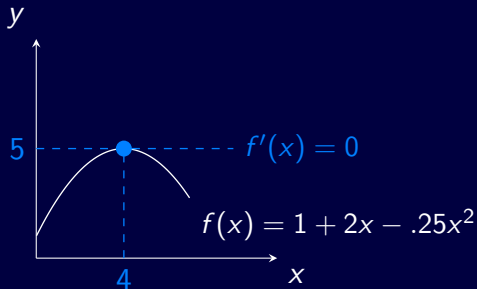
微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

以下は  $y = f(x)$  という 1 変数  $x$  の関数  $f(x)$  を描いています。

関数の微分は  $f'(x)$  と表記しますが、その意味は  $x$  での  $f(x)$  の傾きのことです。

微分とは変数  $x$  が僅かに変化したときの関数  $f$  の反応を計算したもののだからです。  
微分してゼロとなる地点とは、傾きがゼロ  $f'(x) = 0$  となる  $x$  のことを指します。



$$f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$$

▶ 微分公式  $f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

微分の定義

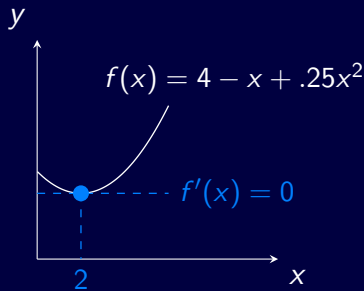
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



以下は  $y = f(x)$  という 1 変数  $x$  の関数  $f(x)$  を描いています。

関数の微分は  $f'(x)$  と表記しますが、その意味は  $x$  での  $f(x)$  の傾きのことです。

微分とは変数  $x$  が僅かに変化したときの関数  $f$  の反応を計算したものです。  
微分してゼロとなる地点とは、傾きがゼロ  $f'(x) = 0$  となる  $x$  のことを指します。



$$f'(x) = 4 - x + .25x^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$$

注意:  $f'(x) = 0$  が最大値を与えない場合

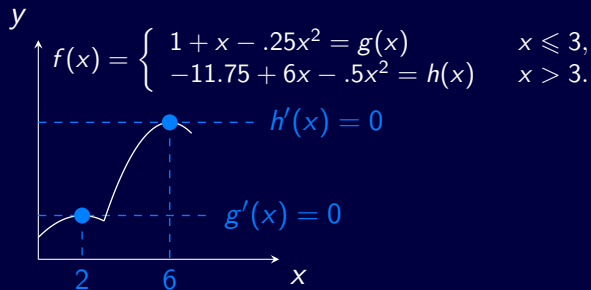
注意:  $f'(x) = 0$  が最大値を与えない場合

①  $f'(x) = 0$  が最小値である場合

注意:  $f'(x) = 0$  が最大値を与えない場合

①  $f'(x) = 0$  が最小値である場合

②  $f'(x) = 0$  がほかにも存在し、そちらの方が大きい場合



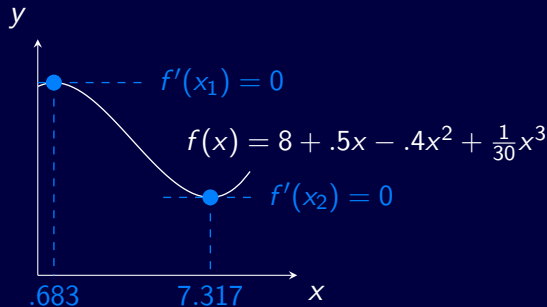
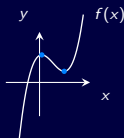
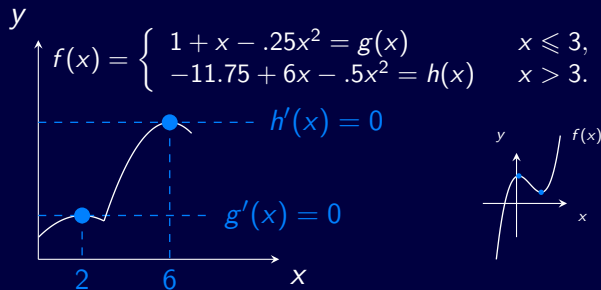
$$g'(x) = 1 - .5x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$h'(x) = 6 - x = 0 \Rightarrow x = 6$$

▶ 微分公式  $f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

注意:  $f'(x) = 0$  が最大値を与えない場合

- ①  $f'(x) = 0$  が最小値である場合
- ②  $f'(x) = 0$  がほかにも存在し、そちらの方が大きい場合
- ③  $f'(x) = 0$  という点はあるけれども、関数に最大と最小がない場合



$$g'(x) = 1 - .5x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$h'(x) = 6 - x = 0 \Rightarrow x = 6$$

▶ 微分公式  $f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= .5 - .8x + .1x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 4 \pm 10\sqrt{.11}. \end{aligned}$$

🔍  $f(x) = 8 + .5x - .4x^2 + \frac{1}{30}x^3$  のような 3 次関数は、最大値やと最小値が存在しません。最大値は無限大ですが、最大とか最小とかは有限の値のみに使います。よって、この関数には最大値も最小値も存在しないのです。しかし、極小値 (局所的な最小値 local minimum) や極大値 (局所的な最大値 local maximum) は存在します。右図の  $x = 7.317$  は極小値、 $x = .683$  は極大値です。いずれも  $f'(x) = 0$  が成り立ちます。

㊦  $f(x) = 8 + .5x - .4x^2 + \frac{1}{30}x^3$  のような 3 次関数は、最大値やと最小値が存在しません。最大値は無限大ですが、最大とか最小とかは有限の値のみに使います。よって、この関数には最大値も最小値も存在しないのです。しかし、極小値 (局所的な最小値 local minimum) や極大値 (局所的な最大値 local maximum) は存在します。右図の  $x = 7.317$  は極小値、 $x = .683$  は極大値です。いずれも  $f'(x) = 0$  が成り立ちます。

㊦ 以下では、関数が最大値 (最小値) をもち、かつ、現在検討している  $f'(x) = 0$  が関数の最大値 (最小値) であると仮定し、そこでの数学的特徴を考えていきます。

㊦  $f'(x) = 0$  が最大値 (最小値) である確証を得るためには、一般的には関数をグラフにして全体を見渡す必要があります。

- ㇏ 一般に、 $f'(x) = 0$  だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分  $f'(x)$  [=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。



- ㊦ 一般に、 $f'(x) = 0$  だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分  $f'(x)$  [=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ㊦ 傾きの変化は  $f'(x)$  をさらに微分した2階微分で計算できます。

- ㊦ 一般に、 $f'(x) = 0$  だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分  $f'(x)$  [=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ㊦ 傾きの変化は  $f'(x)$  をさらに微分した2階微分で計算できます。
  - ㊦ 2階微分は**加速度**を表します。

- ㊦ 一般に、 $f'(x) = 0$  だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分  $f'(x)$  [=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ㊦ 傾きの変化は  $f'(x)$  をさらに微分した 2 階微分で計算できます。
  - ㊦ 2 階微分は**加速度**を表します。
  - ㊦ 2 階微分 (加速度) が負とは、最初の図の  $x > 4$  [“最大値の右側”] 部分のように 1 階微分が負の関数では、傾きが率を高めて負値で小さくなっていく (絶対値では大きくなっていく) ことを意味します。よって、最大値の場合、2 階微分は負  $f''(x) < 0$  です。

- ㊦ 一般に、 $f'(x) = 0$  だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分  $f'(x)$  [=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ㊦ 傾きの変化は  $f'(x)$  をさらに微分した 2 階微分で計算できます。
  - ㊦ 2 階微分は**加速度**を表します。
  - ㊦ 2 階微分 (加速度) が負とは、最初の図の  $x > 4$  [“最大値の右側”] 部分のように 1 階微分が負の関数では、傾きが率を高めて負値で小さくなっていく (絶対値では大きくなっていく) ことを意味します。よって、最大値の場合、2 階微分は負  $f''(x) < 0$  です。
  - ㊦ 1 階微分が正の関数では、2 階微分が負とは、正の傾きが率を高めて小さくなっていく (傾きは正のままゼロに近づいていく) ことを意味します。

- ㊦ 一般に、 $f'(x) = 0$  だけでは最大値か最小値か判定できません。最初の図で分かるように、最大値であれば最大値から外れると値が減っていきます。極値 (最大値か最小値) なので関数の変化分  $f'(x)$  [=傾き] はゼロですが、傾きの変化は負値になります。
- ㊦ 傾きの変化は  $f'(x)$  をさらに微分した 2 階微分で計算できます。
  - ㊦ 2 階微分は **加速度** を表します。
  - ㊦ 2 階微分 (加速度) が負とは、最初の図の  $x > 4$  [“最大値の右側”] 部分のように 1 階微分が負の関数では、傾きが率を高めて負値で小さくなっていく (絶対値では大きくなっていく) ことを意味します。よって、最大値の場合、2 階微分は負  $f''(x) < 0$  です。
  - ㊦ 1 階微分が正の関数では、2 階微分が負とは、正の傾きが率を高めて小さくなっていく (傾きは正のままゼロに近づいていく) ことを意味します。
- ㊦ 最大値ならば  $f''(x) < 0$ 、最小値ならば  $f''(x) > 0$  というように、2 階微分の符号で判定をします。ただし、2 階微分がゼロ (=その地点で関数が線形=傾きが変わらない) の場合は、最大値か最小値か判定できません。



☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$

☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2, f'(x) = 2 - .5x$



☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 - .5x$ ,  $f''(x) = -.5 < 0$ .

☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 - .5x$ ,  $f''(x) = -.5 < 0$ . よって、  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0$  が示す点は最大化点。

☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 - .5x$ ,  $f''(x) = -.5 < 0$ . よって、  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0$  が示す点は最大点。  $f(x)$  を最大化する  $x$  は  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$ .

- ☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 - .5x$ ,  $f''(x) = -.5 < 0$ . よって、  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0$  が示す点は最大点。  $f(x)$  を最大化する  $x$  は  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$ .
- ☞  $f(x) = 1 + 2x + .25x^2$

- ☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 - .5x$ ,  $f''(x) = -.5 < 0$ . よって、  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0$  が示す点は最大点。  $f(x)$  を最大化する  $x$  は  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$ .
- ☞  $f(x) = 1 + 2x + .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 + .5x$

- ☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 - .5x$ ,  $f''(x) = -.5 < 0$ . よって、  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0$  が示す点は最大点。  $f(x)$  を最大化する  $x$  は  
 $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$ .
- ☞  $f(x) = 1 + 2x + .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 + .5x$ ,  $f''(x) = .5 > 0$ .

- ☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 - .5x$ ,  $f''(x) = -.5 < 0$ . よって、 $f'(x) = 2 - .5x = 0$  が示す点は最大点。  $f(x)$  を最大化する  $x$  は  $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$ .
- ☞  $f(x) = 1 + 2x + .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 + .5x$ ,  $f''(x) = .5 > 0$ . よって、 $f'(x) = 2 + .5x = 0$  が示す点は最小点。

- ☞  $f(x) = 1 + 2x - .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 - .5x$ ,  $f''(x) = -.5 < 0$ . よって、 $f'(x) = 2 - .5x = 0$  が示す点は最大化点。  $f(x)$  を最大化する  $x$  は  $f'(x) = 2 - .5x = 0 \Rightarrow x = 4$ .
- ☞  $f(x) = 1 + 2x + .25x^2$ ,  $f'(x) = 2 + .5x$ ,  $f''(x) = .5 > 0$ . よって、 $f'(x) = 2 + .5x = 0$  が示す点は最小化点。  $f(x)$  を最小化する  $x$  は  $f'(x) = 2 + .5x = 0 \Rightarrow x = -4$ .



例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

$x$  での接線の傾きは  $-4x + 4$  です。仮に  $x = 2$  だとしたら、接線の傾きは  $f'(2) = -4 * 2 + 4 = -4$  です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる  $x$  を求めます。

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

$x$  での接線の傾きは  $-4x + 4$  です。仮に  $x = 2$  だとしたら、接線の傾きは  $f'(2) = -4 * 2 + 4 = -4$  です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる  $x$  を求めます。これはこの方程式を  $x$  について解けば得られます。

$$x = 1.$$

2 階条件

$$f''(x) = -4 < 0$$

なので最大化点です。最大化された値  $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$ 。

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

$x$  での接線の傾きは  $-4x + 4$  です。仮に  $x = 2$  だとしたら、接線の傾きは  $f'(2) = -4 * 2 + 4 = -4$  です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる  $x$  を求めます。これはこの方程式を  $x$  について解けば得られます。

$$x = 1.$$

2 階条件

$$f''(x) = -4 < 0$$

なので最大化点です。最大化された値  $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$ 。

次の例は 1 次関数 (直線) です。

$$f(x) = 1 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2.$$

例を考えます。2 次関数 (放物線) です。

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -4x + 4.$$

$x$  での接線の傾きは  $-4x + 4$  です。仮に  $x = 2$  だとしたら、接線の傾きは  $f'(2) = -4 * 2 + 4 = -4$  です。最大化点を知るためには、接線の傾きがゼロの場所を探します。つまり、

$$f'(x) = -4x + 4 = 0$$

を成立させる  $x$  を求めます。これはこの方程式を  $x$  について解けば得られます。

$$x = 1.$$

2 階条件

$$f''(x) = -4 < 0$$

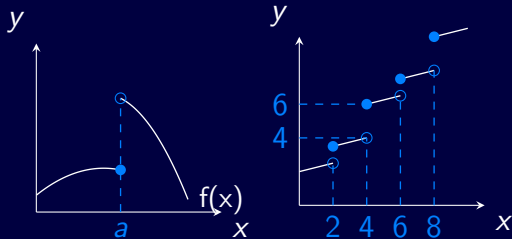
なので最大化点です。最大化された値  $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$ 。

次の例は 1 次関数 (直線) です。

$$f(x) = 1 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2.$$

$1 + 2x$  は 2 の傾きで増えます。直線なので接線は関数そのものです。よって、接線の傾きは関数の傾きと同じ 2 です。直線なので最大化点は存在しません。よって、微分してゼロと置いても、 $x = \dots$  と解くことはできません。

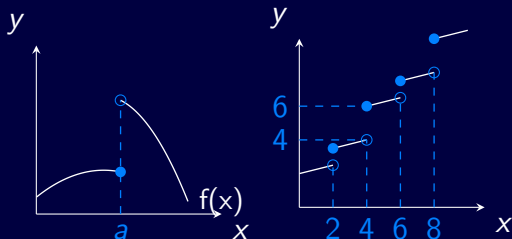
## 参考: 微分できない場合 1



$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 6 \\ \lim_{x \uparrow 4} f(x) = 4 \end{array} \right\} \text{非連続的ジャンプ}$$

## 参考: 微分できない場合 1

微分は関数の微小な変化を扱います。よって、(対象とする変数  $x$  の範囲で) 関数が連続で滑らかでないと適用できません。

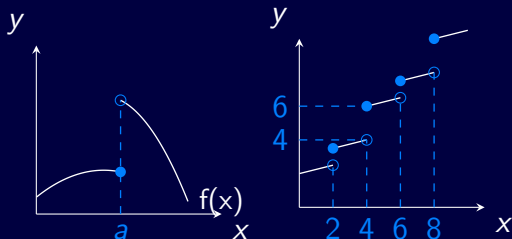


$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 6 \\ \lim_{x \uparrow 4} f(x) = 4 \end{array} \right\} \text{非連続的ジャンプ}$$

## 参考: 微分できない場合 1

微分は関数の微小な変化を扱います。よって、(対象とする変数  $x$  の範囲で) 関数が連続で滑らかでないとは適用できません。

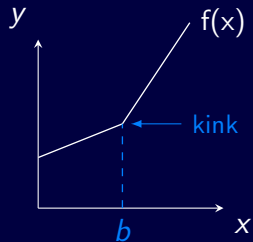
$x = a$  で非連続である (ジャンプがある) と、 $a$  の前 (左) の関数の値と  $a$  の後 (右) の関数の値が異なります。行き着く先  $x = a$  で関数の値 = 極限の値 = 極値、が一致しないと、 $x = a$  で極値が存在しない、と言います。 $x = a$  での微小な変化は、 $a$  での関数の極値を扱うので、極値が存在しないと議論できません。



$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 6 \\ \lim_{x \uparrow 4} f(x) = 4 \end{array} \right\} \text{非連続的ジャンプ}$$

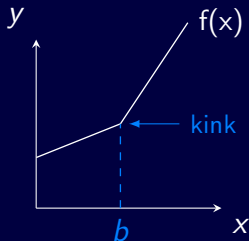


## 参考: 微分できない場合 2



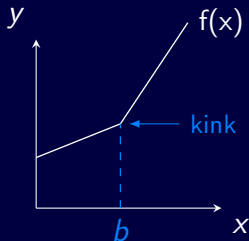
## 参考: 微分できない場合 2

$x = b$  が尖っている (=滑らかでない) と、接線の傾きが左から  $b$  に近づく場合と右から  $b$  に近づく場合で異なるため、 $x = b$  での微小な変化の大きさが右と左で変わります。接線の傾きを 1 つに決められないために  $x = b$  で微分できません。下記の関数はそれ以外の点では微分可能です。



## 参考: 微分できない場合 2

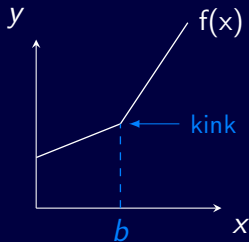
$x = b$  が尖っている (=滑らかでない) と、接線の傾きが左から  $b$  に近づく場合と右から  $b$  に近づく場合で異なるため、 $x = b$  での微小な変化の大きさが右と左で変わります。接線の傾きを 1 つに決められないために  $x = b$  で微分できません。下記の関数はそれ以外の点では微分可能です。



- $b$  での左部分での微分を左右からの微分 left differentiation と呼びます。  $b$  での右部分での微分を右からの微分 right differentiation と呼びます。

## 参考: 微分できない場合 2

$x = b$  が尖っている (=滑らかでない) と、接線の傾きが左から  $b$  に近づく場合と右から  $b$  に近づく場合で異なるため、 $x = b$  での微小な変化の大きさが右と左で変わります。接線の傾きを 1 つに決められないために  $x = b$  で微分できません。下記の関数はそれ以外の点では微分可能です。



- $b$  での左部分での微分を左右からの微分 left differentiation と呼びます。  $b$  での右部分での微分を右からの微分 right differentiation と呼びます。
- 微分できない点なのに、右からの微分とか左からの微分とかいう用語法は、厳密には矛盾しています。詳しい事情は知りません。

## 1 変数関数 $f(x)$ の微分の公式

$$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

水平線の傾きは 0

$$f(x) = bx^n \Rightarrow f'(x) = bnx^{n-1}$$

指数関数、 $n = 1$  は線形関数

$$f(x) = \frac{b}{x^n} = bx^{-n} \Rightarrow f'(x) = -bnx^{-n-1}$$

分数は指数関数の一種

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

和の微分公式

$$f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

積の微分公式

$$f(x) = g\{h(x)\} \Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x)$$

チェーンルール

$$f(x) = b \ln x \Rightarrow f'(x) = b \frac{1}{x}$$

対数関数の微分公式

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow f'(x) = abe^{bx}$$

自然指数関数の微分公式

▶ 戻る

参考: なぜ  $f'(x) = bnx^{n-1}$ ?

証明ではないですが、定義を使って計算すると公式の正しさが確認できます。微分の定義は以下です。関数の変化 (率の極限) を求めています。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

参考: なぜ  $f'(x) = bnx^{n-1}$ ?

証明ではないですが、定義を使って計算すると公式の正しさが確認できます。微分の定義は以下です。関数の変化 (率の極限) を求めています。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$f(x) = a + bx + cx^2$  で考えます。  $f'(x) = bnx^{n-1} = b + 2cx$ 。定義を使うと

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a + b(x+h) + c(x+h)^2 - (a + bx + cx^2)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a + b(x+h) + c(x^2 + 2hx + h^2) - (a + bx + cx^2)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{bh + 2chx + h^2}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} b + 2cx + h, \\ &= b + 2cx. \end{aligned}$$

参考: なぜ  $f'(x) = bnx^{n-1}$ ?

証明のスケッチ:  $f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n$  で考えます。  
 $f'(x) = b + 2cx + \cdots + dnx^{n-1}$ 。定義を使うと

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a + b(x+h) + c(x+h)^2 + \cdots + d(x+h)^n - (a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{a + b(x+h) + c(x^2 + 2hx + h^2) + \cdots + d(x^n + nhx^{n-1} + \cdots + h^n)}{h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a + bx + cx^2 + \cdots + dx^n}{h} \right), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{bh + 2chx + ch^2 + \cdots + d(nhx^{n-1} + nh^2x^{n-2} + \cdots + h^n)}{h}, \\ &= b + 2cx + \cdots + dnx^{n-1}. \end{aligned}$$



## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- ①  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- ②  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- ①  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- ②  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$
- ③ 両方を乗じた  $g'(h)h'(x)$  が全体  $f(x)$  の微分となる

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- ①  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- ②  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$
- ③ 両方を乗じた  $g'(h)h'(x)$  が全体  $f(x)$  の微分となる

$x$  が変化

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$
$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- 1  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- 2  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$
- 3 両方を乗じた  $g'(h)h'(x)$  が全体  $f(x)$  の微分となる

$x$  が変化  $\rightarrow h$  が変化

$h'(x)$

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- ①  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- ②  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$
- ③ 両方を乗じた  $g'(h)h'(x)$  が全体  $f(x)$  の微分となる

$$x \text{ が変化} \underbrace{\rightarrow h \text{ が変化}}_{h'(x)} \rightarrow \underbrace{g \text{ が変化}}_{g'(h)}$$



## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$  の場合

$$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h), h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- 1  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- 2  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$
- 3 両方を乗じた  $g'(h)h'(x)$  が全体  $f(x)$  の微分となる

$$x \text{ が変化} \xrightarrow{\underbrace{\hspace{1cm}}_{h'(x)}} h \text{ が変化} \xrightarrow{\underbrace{\hspace{1cm}}_{g'(h)}} g \text{ が変化}$$

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$  の場合

$$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + x - 1) + 1$$

$$g'(h) = 2, h'(x) = 4x + 1$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h), h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- 1  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- 2  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$
- 3 両方を乗じた  $g'(h)h'(x)$  が全体  $f(x)$  の微分となる

$$x \text{ が変化} \xrightarrow{\underbrace{\hspace{1cm}}_{h'(x)}} h \text{ が変化} \xrightarrow{\underbrace{\hspace{1cm}}_{g'(h)}} g \text{ が変化}$$

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- 1  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- 2  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$
- 3 両方を乗じた  $g'(h)h'(x)$  が全体  $f(x)$  の微分となる

$$x \text{ が変化} \xrightarrow{\underbrace{\hspace{1cm}}_{h'(x)}} h \text{ が変化} \xrightarrow{\underbrace{\hspace{1cm}}_{g'(h)}} g \text{ が変化}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$  の場合  
 $f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1$   
 $g'(h) = 2, h'(x) = 4x + 1$  なので、  
 $f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$

## チェーンルール

$$f(x) = g\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h)h'(x).$$

$f(x)$  が  $g\{h(x)\}$  という  $g(h)$ ,  $h(x)$  の二重の関数になっている場合:

- 1  $h$  を変数のように考えて  $g(h)$  を  $h$  で微分:  $g'(h)$
- 2  $h(x)$  を  $x$  で微分:  $h'(x)$
- 3 両方を乗じた  $g'(h)h'(x)$  が全体  $f(x)$  の微分となる

$$x \text{ が変化} \xrightarrow{\underbrace{\hspace{1cm}}_{h'(x)}} h \text{ が変化} \xrightarrow{\underbrace{\hspace{1cm}}_{g'(h)}} g \text{ が変化}$$

$g(h) = 2h + 1, h(x) = 2x^2 + x - 1$  の場合

$$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1$$

$g'(h) = 2, h'(x) = 4x + 1$  なので、

$$f'(x) = g'(h)h'(x) = 2 \times (4x + 1) = 8x + 2.$$

$$f(x) = g\{h(x)\} = 2(2x^2 + 1x - 1) + 1 = 4x^2 + 2x - 1$$

だから、微分すると  $f'(x) = 8x + 2$  で同じになることが確認できる。

$f(l) = \beta u\{h(l) + Rs\}$  で  
 $f(l) = \beta u\{c_2(l)\} = g\{c_2(l)\}$ 、つまり、  
 $g(c_2) = \beta u(c_2)$ ,  $c_2(l) = h(l) + Rs$  とおく

$$g'(c_2) = \beta u'(c_2), \quad c_2'(l) = h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned} f(l) &= g\{c_2(l)\}, \\ f'(l) &= g'(c_2)c_2'(l), \\ &= \beta u'(c_2)h'(l), \\ &= \beta u'\{h(l) + Rs\}h'(l). \end{aligned}$$

$f(l) = \beta u\{h(l) + Rs\}$  で  
 $f(l) = \beta u\{c_2(l)\} = g\{c_2(l)\}$ 、つまり、  
 $g(c_2) = \beta u(c_2)$ ,  $c_2(l) = h(l) + Rs$  とおく

$$g'(c_2) = \beta u'(c_2), \quad c_2'(l) = h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned} f(l) &= g\{c_2(l)\}, \\ f'(l) &= g'(c_2)c_2'(l), \\ &= \beta u'(c_2)h'(l), \\ &= \beta u'\{h(l) + Rs\}h'(l). \end{aligned}$$

$g, h$  を微分して乗じてても手数は変わらない  
ですが、計算の誤りが減ります。

$f(l) = \beta u\{h(l) + Rs\}$  で  
 $f(l) = \beta u\{c_2(l)\} = g\{c_2(l)\}$ 、つまり、  
 $g(c_2) = \beta u(c_2)$ ,  $c_2(l) = h(l) + Rs$  とおく

$$g'(c_2) = \beta u'(c_2), \quad c_2'(l) = h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned} f(l) &= g\{c_2(l)\}, \\ f'(l) &= g'(c_2)c_2'(l), \\ &= \beta u'(c_2)h'(l), \\ &= \beta u'\{h(l) + Rs\}h'(l). \end{aligned}$$

$g, h$  を微分して乗じても手数は変わらない  
ですが、計算の誤りが減ります。

2 変数の関数

$u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を  
2 変数  $l, s$  で最大化

$f(l) = \beta u\{h(l) + Rs\}$  で  
 $f(l) = \beta u\{c_2(l)\} = g\{c_2(l)\}$ 、つまり、  
 $g(c_2) = \beta u(c_2)$ ,  $c_2(l) = h(l) + Rs$  とおく

$$g'(c_2) = \beta u'(c_2), \quad c_2'(l) = h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned} f(l) &= g\{c_2(l)\}, \\ f'(l) &= g'(c_2)c_2'(l), \\ &= \beta u'(c_2)h'(l), \\ &= \beta u'\{h(l) + Rs\}h'(l). \end{aligned}$$

$g, h$  を微分して乗じても手数は変わらない  
ですが、計算の誤りが減ります。

2 変数の関数

$u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を  
2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく



$f(l) = \beta u\{h(l) + Rs\}$  で  
 $f(l) = \beta u\{c_2(l)\} = g\{c_2(l)\}$ 、つまり、  
 $g(c_2) = \beta u(c_2)$ ,  $c_2(l) = h(l) + Rs$  とおく

$$g'(c_2) = \beta u'(c_2), \quad c_2'(l) = h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned} f(l) &= g\{c_2(l)\}, \\ f'(l) &= g'(c_2)c_2'(l), \\ &= \beta u'(c_2)h'(l), \\ &= \beta u'\{h(l) + Rs\}h'(l). \end{aligned}$$

$g, h$  を微分して乗じてても手数は変わらない  
ですが、計算の誤りが減ります。

2 変数の関数

$u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を  
2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$F(l, s) = u\{c_1(l, s)\} + \beta u\{c_2(l, s)\}$ 、つまり、  
 $c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s$ ,  
 $c_2(l, s) = h(l) + Rs$

$f(l) = \beta u\{h(l) + Rs\}$  で  
 $f(l) = \beta u\{c_2(l)\} = g\{c_2(l)\}$ 、つまり、  
 $g(c_2) = \beta u(c_2)$ ,  $c_2(l) = h(l) + Rs$  とおく

$$g'(c_2) = \beta u'(c_2), \quad c_2'(l) = h'(l).$$

チェーンルール

$$\begin{aligned}
 f(l) &= g\{c_2(l)\}, \\
 f'(l) &= g'(c_2)c_2'(l), \\
 &= \beta u'(c_2)h'(l), \\
 &= \beta u'\{h(l) + Rs\}h'(l).
 \end{aligned}$$

$g, h$  を微分して乗じてても手数は変わらない  
 ですが、計算の誤りが減ります。

2 変数の関数

$u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を  
 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$F(l, s) = u\{c_1(l, s)\} + \beta u\{c_2(l, s)\}$ 、つまり、  
 $c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s$ ,  
 $c_2(l, s) = h(l) + Rs$

$$\begin{aligned}
 F_l(l, s) &= u'(c_1) c_{1l}(l, s) + \beta u'(c_2) c_{2l}(l, s) = 0, \\
 F_s(l, s) &= u'(c_1) c_{1s}(l, s) + \beta u'(c_2) c_{2s}(l, s) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = -\beta \frac{c_{2l}(l, s)}{c_{1l}(l, s)},$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = -\beta \frac{c_{2s}(l, s)}{c_{1s}(l, s)}.$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0,$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0, \quad \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0, \quad \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0,$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}}, \\ \frac{\partial F(l, s)}{\partial s} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.\end{aligned}$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}}, \\ \frac{\partial F(l, s)}{\partial s} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.\end{aligned}$$

$$c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s$$



$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.$$

$$c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1,$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.$$

$$c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1,$$

$$c_2(l, s) = h(l) + Rs$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.$$

$$c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1,$$

$$c_2(l, s) = h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R.$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.$$

$$c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1,$$

$$c_2(l, s) = h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R.$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}}$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(l, s)}{\partial l} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}}, \\ \frac{\partial F(l, s)}{\partial s} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(l, s) &= w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1, \\ c_2(l, s) &= h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R. \end{aligned}$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}}$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(l, s)}{\partial l} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}}, \\ \frac{\partial F(l, s)}{\partial s} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(l, s) &= w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1, \\ c_2(l, s) &= h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R. \end{aligned}$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}} = -\beta \frac{h'(l)}{-w} = \beta \frac{h'(l)}{w},$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.$$

$$c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1,$$

$$c_2(l, s) = h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R.$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}} = -\beta \frac{h'(l)}{-w} = \beta \frac{h'(l)}{w},$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}}$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(l, s)}{\partial l} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}}, \\ \frac{\partial F(l, s)}{\partial s} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(l, s) &= w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1, \\ c_2(l, s) &= h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} &= \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}} = -\beta \frac{h'(l)}{-w} = \beta \frac{h'(l)}{w}, \\ \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} &= \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}} \end{aligned}$$



$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(l, s)}{\partial l} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}}, \\ \frac{\partial F(l, s)}{\partial s} &= \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0, & \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} &= -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(l, s) &= w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1, \\ c_2(l, s) &= h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} &= \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}} = -\beta \frac{h'(l)}{-w} = \beta \frac{h'(l)}{w}, \\ \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} &= \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}} = -\beta \frac{R}{-1} = \beta R. \end{aligned}$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.$$

$$c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1,$$

$$c_2(l, s) = h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R.$$

$$wR = h'(l).$$

$F(l, s)$  を 2 変数  $l, s$  で最大化すると、この条件が成り立っていないなければならない

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}} = -\beta \frac{h'(l)}{-w} = \beta \frac{h'(l)}{w},$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}} = -\beta \frac{R}{-1} = \beta R.$$

$F(l, s) = u\{w(24 - l) + A - s\} + \beta u\{h(l) + Rs\}$  を 2 変数  $l, s$  で最大化

1.  $l$  について偏微分してゼロとおく    2.  $s$  について偏微分してゼロとおく

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial l} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}},$$

$$\frac{\partial F(l, s)}{\partial s} = \frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}}.$$

$$c_1(l, s) = w(24 - l) + A - s, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l} = -w, \quad \frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s} = -1,$$

$$c_2(l, s) = h(l) + Rs, \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l} = h'(l), \quad \frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s} = R.$$

$$wR = h'(l).$$

$F(l, s)$  を 2 変数  $l, s$  で最大化すると、この条件が成り立っていないなければならない  
限界収益が時間の 2 使途で同じ

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial l}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial l}} = -\beta \frac{h'(l)}{-w} = \beta \frac{h'(l)}{w},$$

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}}{\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}} = -\beta \frac{\frac{\partial c_2(l, s)}{\partial s}}{\frac{\partial c_1(l, s)}{\partial s}} = -\beta \frac{R}{-1} = \beta R.$$

純便益＝粗便益-費用です。

純便益＝粗便益-費用です。粗便益も費用も  $x$  の関数だとしましょう。粗便益  $b(x)$ 、費用  $c(x)$  と関数表記します。

純便益＝粗便益-費用です。粗便益も費用も  $x$  の関数だとしましょう。粗便益  $b(x)$ 、費用  $c(x)$  と関数表記します。経済学では2階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

純便益＝粗便益-費用です。粗便益も費用も  $x$  の関数だとしましょう。粗便益  $b(x)$ 、費用  $c(x)$  と関数表記します。経済学では2階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

☞  $\in$  は “is in”, “belongs to” と読みます。

純便益=粗便益-費用です。粗便益も費用も  $x$  の関数だとしましょう。粗便益  $b(x)$ 、費用  $c(x)$  と関数表記します。経済学では2階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

☞  $\in$  は “is in”, “belongs to” と読みます。

☞  $\mathbb{R}_+$  は0を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。



純便益=粗便益-費用です。粗便益も費用も  $x$  の関数だとしましょう。粗便益  $b(x)$ 、費用  $c(x)$  と関数表記します。経済学では2階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

☞  $\in$  は “is in”, “belongs to” と読みます。

☞  $\mathbb{R}_+$  は0を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all  $x \in \mathbb{R}_+$ 」とは「for all  $x$  in the set of all positive real numbers」( $x$  は正の実数すべての集合、もしくは、 $x$  は正の実数であれば何でもよい) と読みます。

純便益=粗便益-費用です。粗便益も費用も  $x$  の関数だとしましょう。粗便益  $b(x)$ 、費用  $c(x)$  と関数表記します。経済学では2階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

☞  $\in$  は “is in”, “belongs to” と読みます。

☞  $\mathbb{R}_+$  は0を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all  $x \in \mathbb{R}_+$ 」とは「for all  $x$  in the set of all positive real numbers」( $x$ は正の実数すべての集合、もしくは、 $x$ は正の実数であれば何でもよい) と読みます。つまり、 $x$ が正の実数であれば、1階微分と2階微分の符号がこのようになる、と書いています。

純便益＝粗便益-費用です。粗便益も費用も  $x$  の関数だとしましょう。粗便益  $b(x)$ 、費用  $c(x)$  と関数表記します。経済学では2階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

☞  $\in$  は “is in”, “belongs to” と読みます。

☞  $\mathbb{R}_+$  は0を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all  $x \in \mathbb{R}_+$ 」とは「for all  $x$  in the set of all positive real numbers」( $x$  は正の実数すべての集合、もしくは、 $x$  は正の実数であれば何でもよい) と読みます。つまり、 $x$  が正の実数であれば、1階微分と2階微分の符号がこのようになる、と書いています。

☞ 例として  $x$  は時間や生産量と考え、正の実数しか取り得ない状況を考えます。

純便益＝粗便益-費用です。粗便益も費用も  $x$  の関数だとしましょう。粗便益  $b(x)$ 、費用  $c(x)$  と関数表記します。経済学では2階微分の符号を以下のように仮定することが多いです。

$$b'(x) > 0, \quad b''(x) < 0, \quad c'(x) > 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

☞  $\in$  は “is in”, “belongs to” と読みます。

☞  $\mathbb{R}_+$  は0を含む正の実数 (real numbers) 全ての集合のことです。

よって、「for all  $x \in \mathbb{R}_+$ 」とは「for all  $x$  in the set of all positive real numbers」( $x$  は正の実数すべての集合、もしくは、 $x$  は正の実数であれば何でもよい) と読みます。つまり、 $x$  が正の実数であれば、1階微分と2階微分の符号がこのようになる、と書いています。

☞ 例として  $x$  は時間や生産量と考え、正の実数しか取り得ない状況を考えます。

経済学では  $b'(x)$  を**限界便益** **marginal benefits**、 $c'(x)$  を**限界費用** **marginal costs** と呼びます。

純便益  $= b(x) - c(x)$  を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

純便益  $= b(x) - c(x)$  を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

👉 限界便益=限界費用

純便益  $= b(x) - c(x)$  を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

🔍 限界便益=限界費用

一階微分がゼロ (一階条件 first order condition) だけだと最小値かもしれません。2階微分が負 (最大値の二階条件 second order condition for the maximum) か確認します。

$$b''(x) - c''(x) < 0. \quad \Leftarrow \quad b''(x) < 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

純便益  $= b(x) - c(x)$  を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

🔍 限界便益=限界費用

一階微分がゼロ (一階条件 first order condition) だけだと最小値かもしれません。2階微分が負 (最大値の二階条件 second order condition for the maximum) か確認します。

$$b''(x) - c''(x) < 0. \quad \Leftarrow \quad b''(x) < 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

🔍  $x$  は正の実数なので 0 という下限値があります。ここでは関数の最大値が下限値  $x = 0$  ではない、と (説明なく) 仮定しています。実は、最大値が  $x = 0$  の場合、一階条件は  $b'(x) - c'(x) \leq 0$  となるのですが、この点は後で説明します。



純便益  $= b(x) - c(x)$  を最大化するには、微分してその値をゼロとおきます。つまり、最大値では

$$b'(x) - c'(x) = 0$$

が成り立っています。これが成り立たないところは最大値ではありません。

### ☞ 限界便益=限界費用

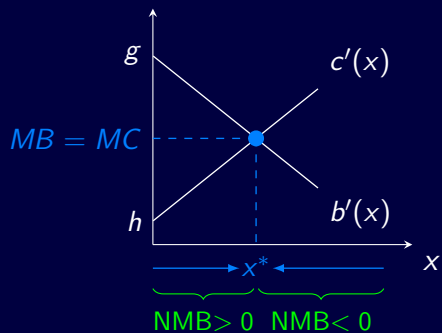
一階微分がゼロ (一階条件 first order condition) だけだと最小値かもしれません。2階微分が負 (最大値の二階条件 second order condition for the maximum) か確認します。

$$b''(x) - c''(x) < 0. \quad \Leftarrow \quad b''(x) < 0, \quad c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+.$$

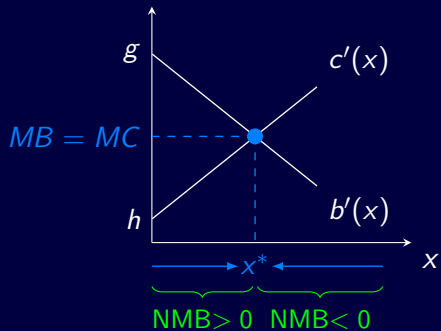
- ☞  $x$  は正の実数なので 0 という下限値があります。ここでは関数の最大値が下限値  $x = 0$  ではない、と (説明なく) 仮定しています。実は、最大値が  $x = 0$  の場合、一階条件は  $b'(x) - c'(x) \leq 0$  となるのですが、この点は後で説明します。
- ☞ 最大化問題が解を持つように、以下も成り立つと仮定します。この意味は後で図を使って説明します。

$$[b'(x) \text{ の } Y \text{ 切片}] \lim_{x \rightarrow 0} b'(x) = g, \quad [c'(x) \text{ の } Y \text{ 切片}] \lim_{x \rightarrow 0} c'(x) = h, \quad g > h.$$

$MC, MB$

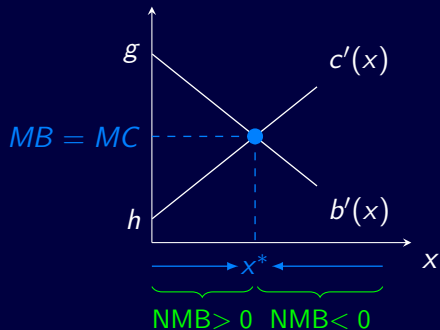


MC, MB



 Second order conditions:  $b''(x) < 0, c''(x) > 0$

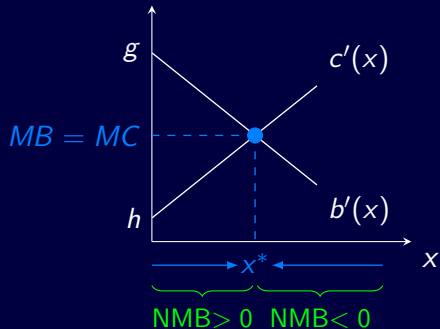
MC, MB



📌 Second order conditions:  $b''(x) < 0, c''(x) > 0$

📌  $b''(x)$  は  $b'(x)$  の  $x$  に対する傾きです。  
 $b''(x) < 0$  なので  $b'(x)$  は右下がりです。

MC, MB

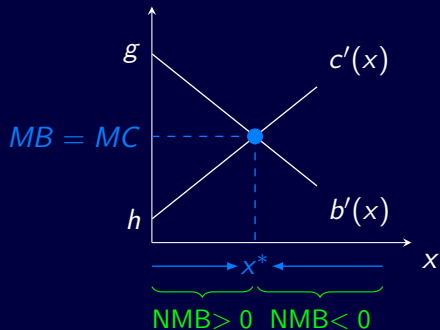


Second order conditions:  $b''(x) < 0, c''(x) > 0$

$b''(x)$  は  $b'(x)$  の  $x$  に対する傾きです。  
 $b''(x) < 0$  なので  $b'(x)$  は右下がりです。

この図で限界便益と限界費用の差  $b'(x) - c'(x)$ 、つまり、縦方向の長さが限界純便益 net marginal benefits (NMB) です。限界純便益とは、 $x$  を変化することによる純便益変化の大きさです。

MC, MB



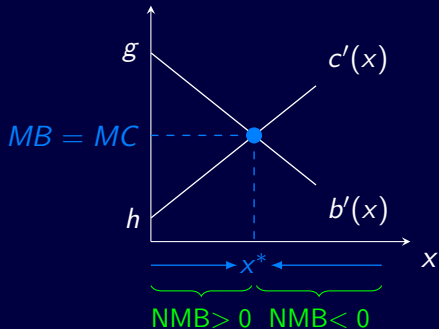
Second order conditions:  $b''(x) < 0, c''(x) > 0$

$b''(x)$  は  $b'(x)$  の  $x$  に対する傾きです。  
 $b''(x) < 0$  なので  $b'(x)$  は右下がりです。

この図で限界便益と限界費用の差  $b'(x) - c'(x)$ 、つまり、縦方向の長さが限界純便益 net marginal benefits (NMB) です。限界純便益とは、 $x$  を変化することによる純便益変化の大きさです。

最大値の二階条件 (限界便益-限界費用は  $x$  が増えると減る) が満たされているので、限界純便益が正であれば、 $x$  を増やすと純便益が増えます。限界純便益が負であれば、 $x$  を減らすと純便益が増えます。

MC, MB



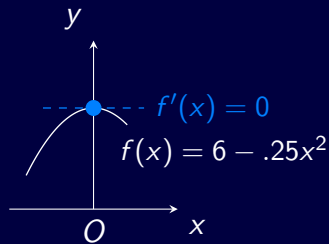
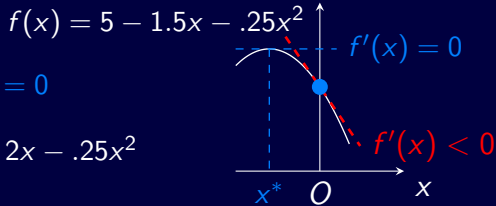
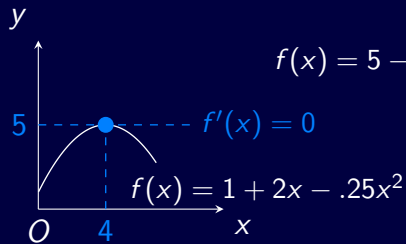
Second order conditions:  $b''(x) < 0, c''(x) > 0$

$b''(x)$  は  $b'(x)$  の  $x$  に対する傾きです。  
 $b''(x) < 0$  なので  $b'(x)$  は右下がりです。

この図で限界便益と限界費用の差  $b'(x) - c'(x)$ 、つまり、縦方向の長さが限界純便益 net marginal benefits (NMB) です。限界純便益とは、 $x$  を変化することによる純便益変化の大きさです。

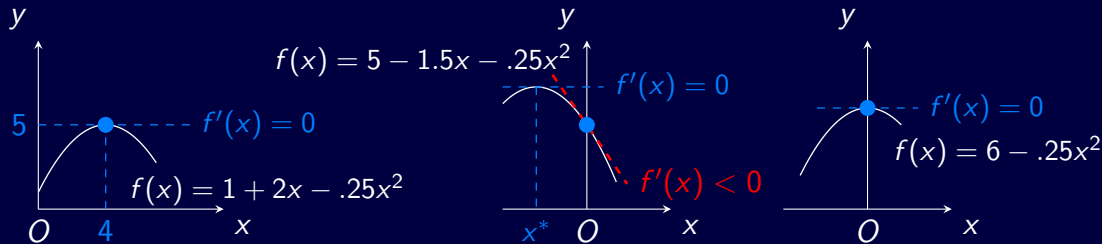
最大値の二階条件 (限界便益-限界費用は  $x$  が増えると減る) が満たされているので、限界純便益が正であれば、 $x$  を増やすと純便益が増えます。限界純便益が負であれば、 $x$  を減らすと純便益が増えます。

$$\left. \begin{array}{ll} b''(x) < 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+ & [\Leftrightarrow b'(x) \text{ は減少関数}], & \lim_{x \rightarrow 0} b'(x) = g, \\ c''(x) > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}_+ & [\Leftrightarrow c'(x) \text{ は増加関数}], & \lim_{x \rightarrow 0} c'(x) = h, \end{array} \right\} \begin{array}{l} g > h \\ \text{なので } x \text{ が正の領域で} \\ \text{交点がある} \end{array}$$



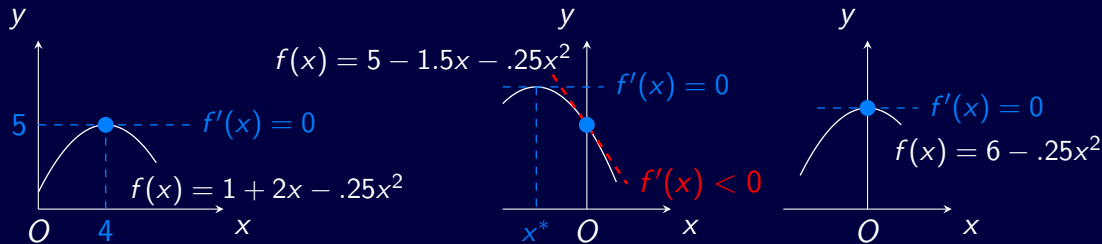
$x = 0$  が最大値となる場合は上図の右 2 つのケースです。





$x = 0$ が最大値となる場合は上図の右2つのケースです。

- 中央の図は最大値を与える  $x$  が負です。 $x$  は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は  $x$  が取り得る最も小さい値の  $0$  となります。

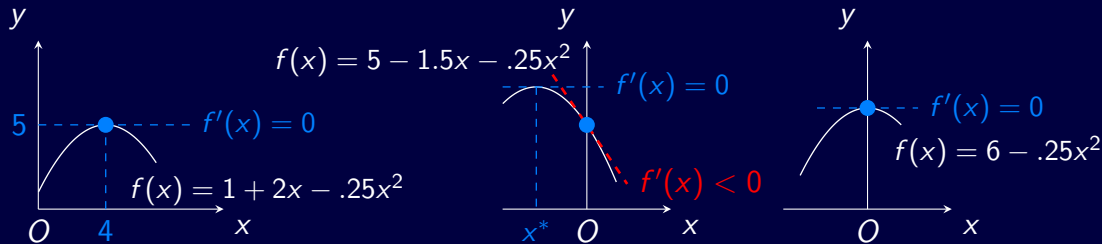


$x = 0$  が最大値となる場合は上図の右 2 つのケースです。

- 中央の図は最大値を与える  $x$  が負です。 $x$  は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は  $x$  が取り得る最も小さい値の 0 となります。

☞  $x$  が負値を取れない状況: 「非負制約 nonnegativity constraint がある」

非負制約が bind していると最大値での接線  $f'(x)$  の傾きが負になります。



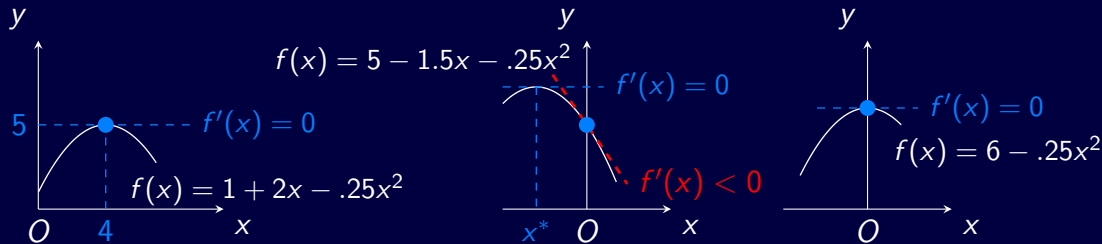
$x = 0$ が最大値となる場合は上図の右2つのケースです。

- 中央の図は最大値を与える  $x$  が負です。 $x$  は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は  $x$  が取り得る最も小さい値の  $0$  となります。

☞  $x$  が負値を取れない状況: 「非負制約 nonnegativity constraint がある」

非負制約が bind していると最大値での接線  $f'(x)$  の傾きが負になります。

- 右の図は  $x = 0$  のときに関数が最大化されている場合です。この状況では非負制約を考えずに最大化問題を  $f'(x) = 0$  で解いても  $x^* = 0$  となります。



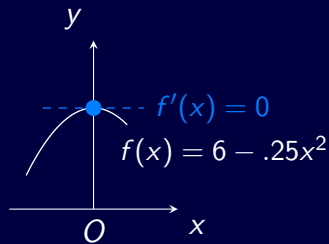
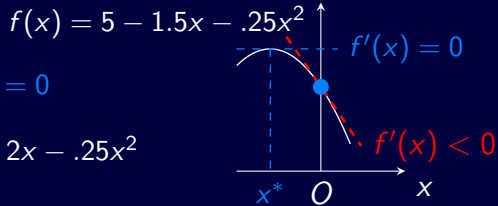
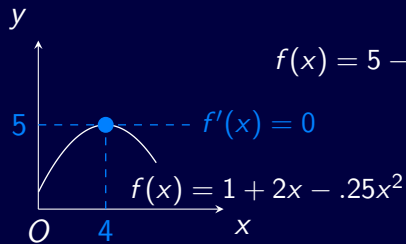
$x = 0$ が最大値となる場合は上図の右2つのケースです。

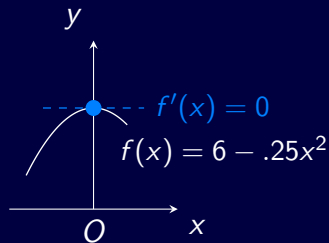
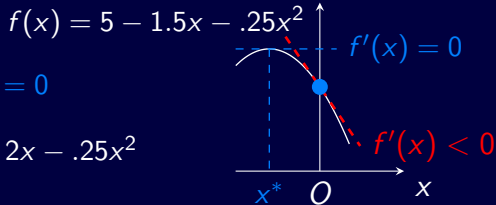
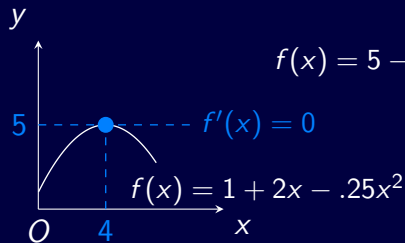
- 中央の図は最大値を与える  $x$  が負です。 $x$  は時間ですから、負の時間など無いので、最大化点は  $x$  が取り得る最も小さい値の  $0$  となります。

☞  $x$  が負値を取れない状況: 「非負制約 nonnegativity constraint がある」

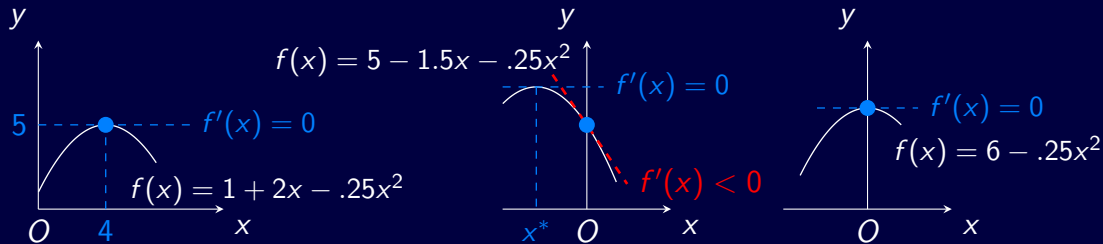
非負制約が **bind** していると最大値での接線  $f'(x)$  の傾きが**負**になります。

- 右の図は  $x = 0$  のときに関数が最大化されている場合です。この状況では非負制約を考えずに最大化問題を  $f'(x) = 0$  で解いても  $x^* = 0$  となります。
- 左の図は非負制約が縛りを課さない (bind しない、nonbinding) ケースです。

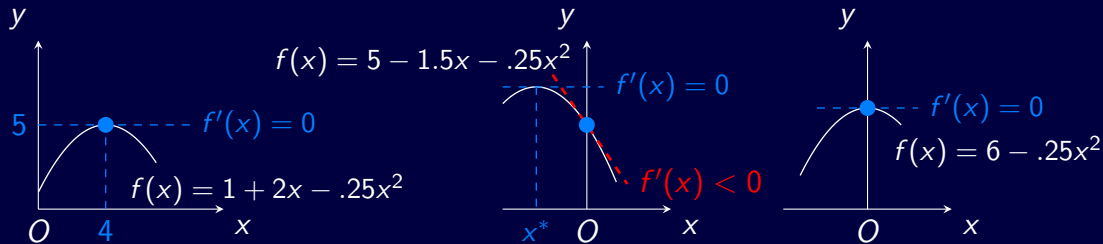




☞ 非負制約付きの最大化問題の解は、関数の形状によって上図3つのいずれかになります。



- ☞ 非負制約付きの最大化問題の解は、関数の形状によって上図3つのいずれかになります。
- ☞ 非負制約が bind していれば接線の傾きは負、bind していなければゼロなので、非負制約付き最大化問題の解では、目的関数 (純便益関数) の傾きが負かゼロ、つまり、非正であること、 $f'(x) \leq 0$  が必要です (これが非負制約付き最大化問題の一階条件 first order condition です)。



- ☞ 非負制約付きの最大化問題の解は、関数の形状によって上図3つのいずれかになります。
- ☞ 非負制約が bind していれば接線の傾きは負、bind していなければゼロなので、非負制約付き最大化問題の解では、目的関数 (純便益関数) の傾きが負かゼロ、つまり、非正であること、 $f'(x) \leq 0$  が必要です (これが非負制約付き最大化問題の一階条件 first order condition です)。



交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L).$$

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7 \left( \frac{K}{L} \right)^{.3}$$

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7 \left( \frac{K}{L} \right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$  は  $\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$  の簡易表示です。一般に、 $F_L(K, L)$  は  $K$  と  $L$  の関数です。 $F(K, L)$  が連続して微分可能と仮定すると、 $F_L(K, L)$  を  $L$  で微分すると  $F_{LL}(K, L)$ 、 $K$  で微分すると  $F_{LK}(K, L)$  が得られます。

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7 \left( \frac{K}{L} \right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$  は  $\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$  の簡易表示です。一般に、 $F_L(K, L)$  は  $K$  と  $L$  の関数です。 $F(K, L)$  が連続して微分可能と仮定すると、 $F_L(K, L)$  を  $L$  で微分すると  $F_{LL}(K, L)$ 、 $K$  で微分すると  $F_{LK}(K, L)$  が得られます。

$F_{LK}(K, L)$  は  $L$  に関する微分  $F_L(K, L)$  を  $K$  で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7 \left( \frac{K}{L} \right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$  は  $\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$  の簡易表示です。一般に、 $F_L(K, L)$  は  $K$  と  $L$  の関数です。 $F(K, L)$  が連続して微分可能と仮定すると、 $F_L(K, L)$  を  $L$  で微分すると  $F_{LL}(K, L)$ 、 $K$  で微分すると  $F_{LK}(K, L)$  が得られます。

$F_{LK}(K, L)$  は  $L$  に関する微分  $F_L(K, L)$  を  $K$  で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。 $F_{LK} = F_{KL}$  であることが証明できます。

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7 \left( \frac{K}{L} \right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$  は  $\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$  の簡易表示です。一般に、 $F_L(K, L)$  は  $K$  と  $L$  の関数です。 $F(K, L)$  が連続して微分可能と仮定すると、 $F_L(K, L)$  を  $L$  で微分すると  $F_{LL}(K, L)$ 、 $K$  で微分すると  $F_{LK}(K, L)$  が得られます。

$F_{LK}(K, L)$  は  $L$  に関する微分  $F_L(K, L)$  を  $K$  で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。 $F_{LK} = F_{KL}$  であることが証明できます。

$F_{LK}(K, L)$  は  $F_L(K, L)$  が  $K$  とともに変化する方向 (正=増える、負=減る) です。

交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7 \left( \frac{K}{L} \right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$  は  $\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$  の簡易表示です。一般に、 $F_L(K, L)$  は  $K$  と  $L$  の関数です。 $F(K, L)$  が連続して微分可能と仮定すると、 $F_L(K, L)$  を  $L$  で微分すると  $F_{LL}(K, L)$ 、 $K$  で微分すると  $F_{LK}(K, L)$  が得られます。

$F_{LK}(K, L)$  は  $L$  に関する微分  $F_L(K, L)$  を  $K$  で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。 $F_{LK} = F_{KL}$  であることが証明できます。

$F_{LK}(K, L)$  は  $F_L(K, L)$  が  $K$  とともに変化する方向 (正=増える、負=減る) です。

多くの生産関数は  $F_{LK}(K, L) > 0$  です。資本  $K$  が増えると労働の限界生産性  $F_L(K, L)$  は増えることが多いからです。



交差微分 cross derivatives: 資本と労働を要素とする生産関数を考えます。

$$Y = AF(K, L). \quad Y = K^{.3}L^{.7}$$

$L$ について微分すると

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = A \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = AF_L(K, L). \quad F_L = .7 \left( \frac{K}{L} \right)^{.3}$$

$F_L(K, L)$  は  $\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$  の簡易表示です。一般に、 $F_L(K, L)$  は  $K$  と  $L$  の関数です。 $F(K, L)$  が連続して微分可能と仮定すると、 $F_L(K, L)$  を  $L$  で微分すると  $F_{LL}(K, L)$ 、 $K$  で微分すると  $F_{LK}(K, L)$  が得られます。

$F_{LK}(K, L)$  は  $L$  に関する微分  $F_L(K, L)$  を  $K$  で (交差して) 微分するので、交差微分といいます。 $F_{LK} = F_{KL}$  であることが証明できます。

$F_{LK}(K, L)$  は  $F_L(K, L)$  が  $K$  とともに変化する方向 (正=増える、負=減る) です。

多くの生産関数は  $F_{LK}(K, L) > 0$  です。資本  $K$  が増えると労働の限界生産性  $F_L(K, L)$  は増えることが多いからです。 $F_{LK} = .7 * .3 \frac{1}{K^{.7}L^{.3}} > 0$ .  $F_L$  は  $K$  の増加関数。

おまけ: 全微分=関数のすべての変数について微分すること  
資本と労働を要素とする生産関数を考えましょう。

$$Y = AF(K, L).$$

全微分すると (積の公式)

$$dY = F(K, L)dA + A\frac{\partial F}{\partial K}dK + A\frac{\partial F}{\partial L}dL.$$

両辺をそれぞれ  $Y$  と  $AF(K, L)$  で割ると

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \frac{F_K dK}{F(K, L)} + \frac{F_L dL}{F(K, L)}.$$

おまけ:  $Y = AF(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  をコブ・ダグラス型生産関数といいます。最もよく使われる生産関数形の1つです。

$$Y = AF(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad F_K = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}, \quad F_L = (1 - \alpha) K^\alpha L^{-\alpha},$$
$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \alpha K^{-1} dK + (1 - \alpha) L^{-1} dL = \frac{dA}{A} + \alpha \frac{dK}{K} + (1 - \alpha) \frac{dL}{L}.$$
$$\hat{Y} = \hat{A} + \alpha \hat{K} + (1 - \alpha) \hat{L}.$$

労働生産性  $y = \frac{Y}{L}$  の変化率を計算します。

$$y = \frac{Y}{L} = AK^\alpha L^{-\alpha} = A \left( \frac{K}{L} \right)^\alpha = Ak^\alpha, \quad k = \frac{K}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dA}{A} + \alpha \frac{dk}{k}.$$
$$\hat{y} = \hat{A} + \alpha \hat{k}.$$

よって、労働生産性の成長率は TFP 成長率と  $\alpha \times$  労働 1 単位あたり資本成長率 (= 資本深化) に分解できます。

おまけ: コブ・ダグラス型生産関数の  $\alpha$  は資本分配率パラメタといい、資本分配率 ( $= rK/pY$ ) に等しくなる、と示すことができます。

## 利潤最大化問題

$$\max_{\{K,L\}} \pi = pAK^{\alpha}L^{1-\alpha} - rK - wL, \quad \alpha \in (0,1).$$

$K$  についての FOC は

$$pA\alpha K^{\alpha-1}L^{\alpha} - r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = MPK = \alpha \frac{pAK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = \alpha \frac{pY}{K}.$$

よって、 $\alpha$  は資本報酬/収入の比に等しい。

$$\alpha = \frac{rK}{pY}.$$

別の言い方をすれば、コブ・ダグラス型生産関数では、資本報酬  $= \alpha \times$  収入が成り立つ。

おまけ:  $L$  についての FOC は

$$pA(1-\alpha)K^\alpha L^{\alpha-1} - w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = MPL = (1-\alpha) \frac{pAK^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = (1-\alpha) \frac{pY}{L}.$$

$1-\alpha$  は労働分配率に等しくなります。

$$1-\alpha = \frac{wL}{pY}.$$

FOCs を  $K, L$  について解くと

$$K^* = \alpha \frac{pY}{r}, \quad L^* = (1-\alpha) \frac{pY}{w}.$$

解  $K^*, L^*$  を目的関数 (利潤) に代入すると、最大化された利潤は 0 であることが分かります。

$$\pi^* = pY - r\alpha \frac{pY}{r} - w(1-\alpha) \frac{pY}{w} = pY - pY = 0.$$

コブ・ダグラス型生産関数では、価格  $p, w, r$  を所与とした完全競争下の利潤最大化では、収入  $pY$  は資本と労働に完全分配されて利潤が 0 になります。

おまけ:  $A$  が誤差付きの  $\tilde{A}$  として測定されるとき

$$\tilde{A} = a + bA.$$

$a, b$  は変化しない定数だとします。TFP 成長率は  $\frac{dA}{A}$  として計算されます。ここで計測されるのは  $\tilde{A}$  なので、 $\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}}$  を計算することになります。微分すると定数は 0 になるので

$$d\tilde{A} = b dA.$$

よって

$$\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}} = \frac{bdA}{a + bA} = \frac{dA}{\frac{a}{b} + A}.$$

つまり、 $a = 0$  であれば  $\frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}} = \frac{dA}{A}$  です。

## まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき  $f'(x) = 0$ 、その方程式で  $x$  について解く。

## まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき  $f'(x) = 0$ 、その方程式で  $x$  について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。



## まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき  $f'(x) = 0$ 、その方程式で  $x$  について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [ $f''(x)$  の符号] で最大値か最小値か判明する。

## まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき  $f'(x) = 0$ 、その方程式で  $x$  について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [ $f''(x)$  の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。

## まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき  $f'(x) = 0$ 、その方程式で  $x$  について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [ $f''(x)$  の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。

## まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき  $f'(x) = 0$ 、その方程式で  $x$  について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [ $f''(x)$  の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。
  - ☞ 限界便益=限界費用は限界便益線と限界費用線が交差する点。

## まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき  $f'(x) = 0$ 、その方程式で  $x$  について解く。
  - 👉 微分できない関数もある。
  - 👉 2 階条件 [ $f''(x)$  の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - 👉 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。
  - 👉 限界便益=限界費用は限界便益線と限界費用線が交差する点。
  - 👉 交差するためには、限界便益が右下がり、限界費用が右上がり、 $x$  が小さいときに限界便益  $>$  限界費用、という条件が必要。

## まとめ

- 関数を最大化 (最小化) するには微分してゼロとおき  $f'(x) = 0$ 、その方程式で  $x$  について解く。
  - ☞ 微分できない関数もある。
  - ☞ 2 階条件 [ $f''(x)$  の符号] で最大値か最小値か判明する。
  - ☞ 微分できて 2 階条件が最大化 (最小化) であっても、他に最大化点 (最小化点) がある可能性がある。一般にはグラフ化して確認する必要がある。
- 純便益関数の最大化で、純便益関数が便益関数-費用関数と 2 つに分離できる場合は、最大化点は限界便益=限界費用が成立する点。
  - ☞ 限界便益=限界費用は限界便益線と限界費用線が交差する点。
  - ☞ 交差するためには、限界便益が右下がり、限界費用が右上がり、 $x$  が小さいときに限界便益  $>$  限界費用、という条件が必要。
- $x$  に非負制約があるとき、 $x = 0$  が最大化点の場合もある。その場合は  $f'(0) \leq 0$  が成立している。