第四章 留数定理及其应用

- §4.1留数定理
- *§4.2运用留数计算实变积分

§4. 1 留数定理

留数的定义

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则由Laurent定理知：在 $z=z_0$ 点的某个去心邻域内 $f(z)$ 可展开成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k,$$

则称 $f(z)$的Laurent级数中$(z - z_0)^{-1}$的系数a_{-1}为 $f(z)$ 在 z_0 点的留数（也称残数），记为

$$\operatorname{Res} f(z_0) \quad 或 \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

设 $f(z)$ 在去心邻域 $\overset{\frown}{U}(z_0,\delta)$ 中解析，C为 $\overset{\frown}{U}(z_0,\delta)$ 内包围，z_0 点的闭合曲线，方向为逆时针，则

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \oint_C (z-z_0)^k dz = 2\pi i a_{-1}$$

所以，$\mathrm{Res} f(z_0) = a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

❖ 留数的计算方法

(1) 一般方法：利用留数的定义来求留数

(2) 根据孤立奇点的类型来计算留数

(A) 可去奇点 $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$

(B) m 级极点 $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}$

(C) 本性奇点 按第一种方法来计算

求留数举例

例1　求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^n-1}$ 在 **z=1** 处的留数

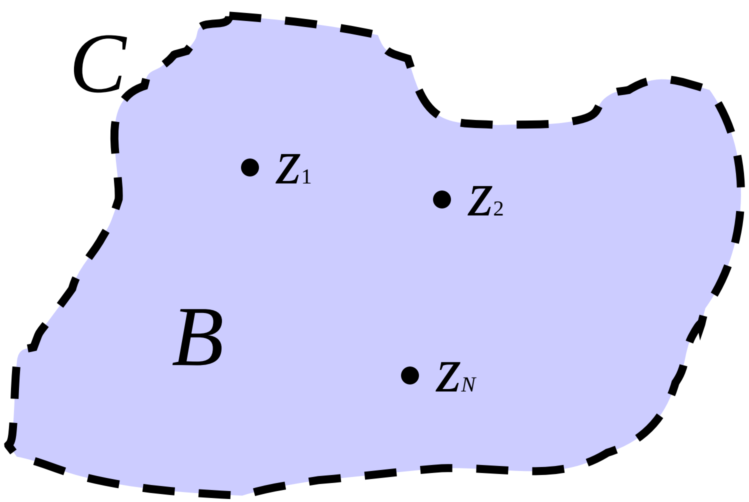
例2　试确定函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的极点，并求 **$f(z)$** 在这些极点处的留数

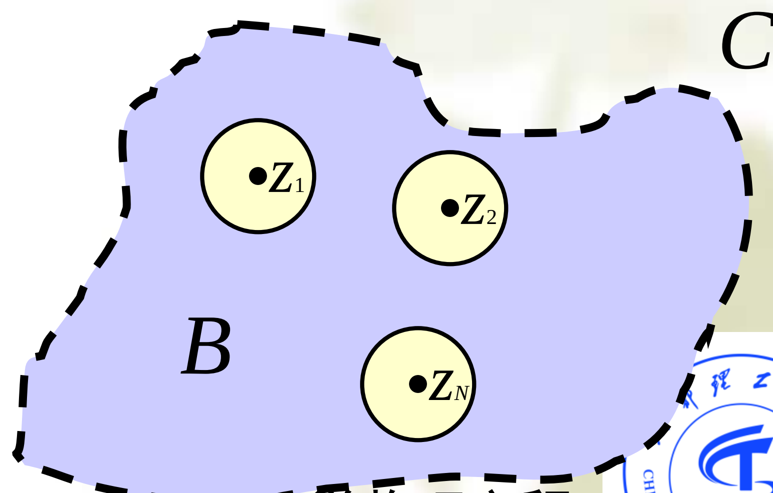
例3　试确定函数 $f(z)=\dfrac{z+2i}{z^5+4z^3}$ 的极点，并求 **$f(z)$** 在这些极点处的留数

❖ 留数定理

设函数 $f(z)$ 在闭合回路C所围成的区域B内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \ldots, z_N$ 外解析，并且直到边界连续，则有

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res} f(z_j)$$





❖ 留数定理的应用

例4.1 计算积分 $\oint_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}$ $(C:|z-2|=2,$逆时针$)$.

解： $z_1=1, z_2=2$ 皆为一阶极点，并且都被包围于C中

$$\oint_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)} = 2\pi i[\operatorname{Res} f(z_1)+\operatorname{Res} f(z_2)]$$

$$= 2\pi i[\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)+\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)]$$

$$= 2\pi i[\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-2}+\lim_{z\to 2}\frac{z}{z-1}]$$

$$= 2\pi i$$

例4.2 计算积分$\oint_C \frac{\sin z dz}{(2z-\pi)(z-\pi)^2}$ $(C:|z|=2\pi,逆时针).$

解：$z_1=\frac{\pi}{2}, z_2=\pi$ 皆为一阶极点，并且都被包围于C中

$$\mathrm{Res}\, f(\frac{\pi}{2})=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[(z-\frac{\pi}{2})\cdot\frac{\sin z}{(2z-\pi)(z-\pi)^2}\right]=\frac{2}{\pi^2}$$

$$\mathrm{Res}\, f(\pi)=\lim_{z\to\pi}\left[(z-\pi)\cdot\frac{\sin z}{(2z-\pi)(z-\pi)^2}\right]=\lim_{z\to\pi}\frac{\sin z}{(2z-\pi)(z-\pi)}$$

$$=\lim_{z\to\pi}\frac{\cos z}{2(z-\pi)+(2z-\pi)}=-\frac{1}{\pi}$$

$$\oint_C \frac{\sin z dz}{(2z-\pi)(z-\pi)^2}=2\pi i[\mathrm{Res}\, f(\frac{\pi}{2})+\mathrm{Res}\, f(\pi)]=\frac{2i}{\pi}(2-\pi)$$

例4.3 计算积分 $\oint_C \tan z dz \quad (C:|z| = n\pi(n\text{为正整数}),\text{逆时针}).$

解：$f(z) = \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ 的奇点为：$z_k = (k+\dfrac{1}{2})\pi \quad (k = 0,\pm1,\pm2\ldots)$

皆为一阶极点，被包围于C中的奇点对应于：

$$k = -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots n-1,$$

$$\operatorname{Res} f(z_k) = \lim_{z\to(k+\frac{1}{2})\pi} [z-(k+\tfrac{1}{2})\pi]\cdot\frac{\sin z}{\cos z}$$

$$= \lim_{z\to(k+\frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{\sin z + [z-(k+\frac{1}{2})\pi]\cos z}{-\sin z} = -1$$

$$\oint_C \tan z dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^{n-1} \operatorname{Res} f(z_k) = 2\pi i\cdot(-2n) = -4n\pi i$$

例4.4 计算积分 $\oint_C \frac{\cos z}{z^3}dz \quad (C:|z|=1.\text{逆时针})$

解： $z=0$ 是三阶极点，并且被包围于C中

$$\mathrm{Res}f(0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}[z^3f(z)]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}(\cos z)=-\frac{1}{2}$$

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^3}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}f(0)=-\pi i$$

*§4.2 运用留数计算实变积分

本节不要求

本章作业

4-1(1)(3)(5);

4-2(3)(4);