第九章 二阶线性常微分方程的级数解法

- §9.1 常微分方程在常点邻域中的级数解法
- §9.2 常微分方程在正则奇点邻域中的级数解法

数学物理方程

二阶线性常微分方程的标准形式为：

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2}+p(z)\frac{dw(z)}{dz}+q(z)w(z)=0$$

常点和奇点

若常微分方程的系数p(z)和q(z)在点z_0的一个领域内解析，那么z_0称为常微分方程的常点，否则称为奇点。

正则奇点

若z_0是常微分方程的奇点，但z_0 是p(z)不高于一阶的极点，是q(z)不高于二阶的极点，那么z_0称为常微分方程的正则奇点。

§9.1常微分方程在常点邻域中的级数解法

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2}+p(z)\frac{dw(z)}{dz}+q(z)w(z)=0$$

定理9.1

若z_0是常微分方程的常点，并且具有初值条件

$w(z_0)=c_0, w'(z_0)=c_1$ (c_0, c_1为已知复数)

那么常微分方程在z_0的领域中存在唯一的解析解。

将w(x),p(x),q(x)展开为以z_0为中心的泰勒级数

$$p(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k \quad q(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k$$

$$w(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$$

代入方程式，则

$$\sum_{n=2}^{+\infty}c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}c_n n(z-z_0)^{n-1}$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=0$$

利用级数公式 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^k\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k)x^n$

进行合并，然后合并同幂次系数，可得以下递推关系

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{n-k}c_{k+1}+\sum_{k=0}^{n}b_{n-k}c_k=0$$

$$(n=0,1,2,\ldots)$$

整理得到

$$c_{n+2}=-\frac{\sum_{k=0}^{n}[(k+1)a_{n-k}c_{k+1}+b_{n-k}c_k]}{(n+1)(n+2)} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

例9.1 采用级数解法求解Legendre方程。

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\mu y=0(\mu\text{为常参数})$$

解：$$p(x)=-\frac{2x}{1-x^2},q(x)=\frac{\mu}{1-x^2}$$

X=0为常点，设解为： $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$

代入方程，则

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty}c_nn(n-1)x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{+\infty}c_nnx^{n-1}+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n=0$$

合并同幂次项，并比较系数得：

$$c_{n+2}=\frac{n(n+1)-\mu}{(n+2)(n+1)}c_n \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

利用递推关系，可以得到所有c_{2k}, c_{2k+1}，

特解 $$y_0=\sum_{k=0}^{+\infty}c_{2k}x^{2k} \qquad y_1=\sum_{k=0}^{+\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}$$

通解 $$y(x)=y_0(x)+y_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{+\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}$$

收敛半径 $$R=[\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+2}}\right|]^{\frac{1}{2}}=[\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+1)-\mu}]^{\frac{1}{2}}=1$$

§9.2常微分方程在正则奇点邻域中的级数解法

定理9.2

若z_0是常微分方程的正则奇点，那么常微分方程在z_0的领域中存在两个线性无关的正则解，形式如下：

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z-z_0)^k(c_0\neq 0,\rho_1,c_k\text{为待定常数})$$

$$w_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{+\infty}d_k(z-z_0)^k(d_0\neq 0,\rho_2,d_k\text{为待定常数})$$

或者 $$w_2(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{+\infty}d_k(z-z_0)^k$$

$$(d_0\neq 0,\rho_2,d_k\text{为待定常数})$$

根据定理9.2，可设：$w(z)=(z-z_0)^{\rho}\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\ (c_0\neq 0)$

根据正则奇点定义：
$$(z-z_0)p(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$$
$$(z-z_0)^2p(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k$$

代入方程：
$$(z-z_0)^2\frac{d^2w(z)}{dz^2}+(z-z_0)^2p(z)\frac{dw(z)}{dz}+(z-z_0)^2q(z)w(z)=0$$

可得：
$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(\rho+n)(\rho+n-1)(z-z_0)^{\rho+n}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k\bullet\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(\rho+n)(z-z_0)^{\rho+n}$$
$$+\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k\bullet\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^{\rho+n}=0\qquad(c_0\neq 0)$$

上式合并同幂次项后得到：

$$c_n(\rho+n)(\rho+n-1)+\sum_{k=0}^{n} c_{n-k}[a_k(\rho+n-k)+b_k]=0$$

$$(n=0,1,2,3\ldots)$$

取**n=0** $\quad c_0\rho(\rho-1)+c_0(a_0\rho+b_0)=0 \quad (c_0\neq 0)$

$$\rho^2+(a_0-1)\rho+b_0=0 \quad (a,b\text{为已知常数})$$

指标方程，或判定方程

$$\rho_1=\frac{1-a_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-a_0}{2}\right)^2-b_0} \qquad \rho_2=\frac{1-a_0}{2}-\sqrt{\left(\frac{1-a_0}{2}\right)^2-b_0}$$

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z-z_0)^k\ (c_0\neq 0,\rho_1,c_k\text{为待定常数})$$

$$w_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{+\infty}d_k(z-z_0)^k\ (d_0\neq 0,\rho_2,d_k\text{为待定常数})$$

或者 $$w_2(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{+\infty}d_k(z-z_0)^k$$

$$(d_0\neq 0,\rho_2,d_k\text{为待定常数})$$

定理9.3

假设指标方程的两个根Reρ_1≥ Reρ_2。当（$\rho_1-\rho_2$）不为整数时，常微分方程的第二个特解具有第一种形式，当（$\rho_1-\rho_2$）为整数时，常微分方程的第二个特解具有第二种形式。

例9.2 利用级数法求解 ν阶Bessel方程

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y(x)=0\ (\nu\text{为非负实数})$$

解： $$p(x)=\frac{1}{x},q(x)=1-\frac{\nu^2}{x^2}$$

X=0为正则奇点，指标方程为 $\rho^2-\nu^2=0$

设特解为: $$y_1(x)=x^{\nu}\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n\ \ (c_0\neq 0)$$

代入方程并化简得：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(n+\nu)x^n + (x^2-\nu^2)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0$$

合并同幂次项得：

$$(2\nu+1)c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[c_n(n+\nu)(n+\nu-1)+c_n(n+\nu)-c_n\nu^2+c_{n-2}\right]x^2 = 0$$

因为**v**≧0，所以 $c_1 = 0$

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(n+v)^2 - v^2} = -\frac{c_{n-2}}{n(n+2v)}$$

所以

$$c_{2k+1} = 0 \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$c_{2k}=-\frac{c_{2(k-1)}}{2^2 k(k+\nu)}=(-1)^{k}\cdot\frac{c_0}{2^{2k}k!(k+\nu)(k+\nu-1)\dots(\nu+1)}$$

$$(k=1,2,3\dots)$$

引进函数 $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\ \ (\operatorname{Re}z>0)$

利用性质 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 则有

$$\Gamma(k+\nu+1)=(k+\nu)\Gamma(k+\nu)$$

$$=(k+\nu)(k+\nu-1)\Gamma(k+\nu-1)$$

$$=(k+\nu)(k+\nu-1)\dots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

所以有

$$c_{2k}=(-1)^k\cdot\frac{c_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}\qquad(k=0,1,2,\dots)$$

所以得到v阶bessel方程的一个特解为：

$$y_1(x)=c_0 2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$$

讨论

（ i ）$\rho_1-\rho_2=2\nu$ 不等于整数 $y_2(x)=x^{-\nu}\sum_{n=0}^{+\infty}d_n x^n \quad (d_0\neq 0)$

$$d_{2k+1}=0 \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$d_{2k}=-\frac{d_{2(k-1)}}{2^2 k(k-\nu)}=(-1)^2\cdot\frac{d_0\Gamma(1-\nu)}{2^{2k}k!\Gamma(k-\nu+1)} \quad (k=0,1,2\ldots)$$

若**1-v<0,** $\Gamma(1-\nu)=\frac{1}{1-\nu}\Gamma(2-\nu)=\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{2-\nu}\Gamma(3-\nu)=\ldots$

$$y_2(x)=d_0 2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k-\nu}$$

±v阶Bessel函数的定义为：

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k-\nu}$$

在2v≠ 整数情况下，v阶Bessel方程的通解为：

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)=CJ_\nu(x)+DJ_{-\nu}(x)$$

（ii）$\rho_1-\rho_2=2\nu=2m+1\ (m=0,1,2,\dots)$

（半奇数阶**Bessel**方程）

$$y_1(x)=C\mathrm{J}_{m+\frac{1}{2}}(x)$$

$$y_2(x)=A\mathrm{J}_{m+\frac{1}{2}}(x)\ln x+x^{-(m+1/2)}\sum_{n=0}^{+\infty}d_n x^n\quad(d\neq 0)$$

代入方程，得到 $A=0$

$$y_2(x)=D\mathrm{J}_{-m-\frac{1}{2}}(x)$$

所以通解为：

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)=C\mathrm{J}_{m+\frac{1}{2}}(x)+D\mathrm{J}_{-m-\frac{1}{2}}(x)$$

$$(m=0,1,2,\dots)$$

（iii）$\rho_1-\rho_2=2\nu=2m\ \ (m=0,1,2,\ldots)$（整数阶**Bessel**方程）

设 $$y_2(x)=A\mathrm{J}_m(x)\ln x+x^{-m}\sum_{n=0}^{+\infty}d_n x^n\quad (d\neq 0)$$

代入方程，得到 $y_2(x)=D\mathrm{N}_m(x)$

所以通解为：

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)=C\mathrm{J}_m(x)+D\mathrm{N}_m(x)$$
$$(m=0,1,2,\ldots)$$

其中，

$$\mathrm{N}_m(x)=\left[\frac{2}{\pi}(\gamma-\ln 2)-\frac{1}{\pi}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots+\tfrac{1}{m})\right]\mathrm{J}_m(x)-\frac{(m-1)!2^m}{\pi d_0}y_2(x)$$

$$=\frac{2}{\pi}(\gamma+\ln\frac{x}{2})J_m(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}(\frac{x}{2})^{-m+2n}-$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left[(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots+\tfrac{1}{n-m})+(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots+\tfrac{1}{n})\right](\frac{x}{2})^{-m+2n}$$

补充 $$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$\mathrm{N}_m(x)=\lim_{\nu\to m}\frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial\mathrm{J}_\nu(x)}{\partial\nu}-\frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\partial\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=m}$$

本章作业

9-1；9-4;