第十三章 拉普拉斯方程

- §13.1 直角坐标系中拉普拉斯方程的解法
- §13.2 球坐标系中拉普拉斯方程的解法
- §13.3 柱坐标系中拉普拉斯方程的解法

数学物理方程的三种类型

（1）波动方程

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)\ \ (a\text{为波速})$$

（2）输运方程

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}-D\nabla^2 u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)\ \ (D>0)$$

（3）稳定场方程

$$\nabla^2 u(x,y,z)=f(x,y,z)$$

$$\nabla^2 u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

泊松方程

$$\nabla^2 u(x,y,z) = 0$$

拉普拉斯算子

拉普拉斯方程

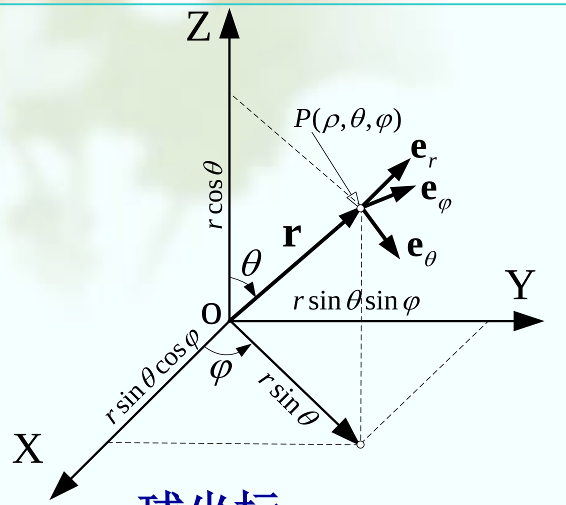
直角坐标系 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

球坐标系

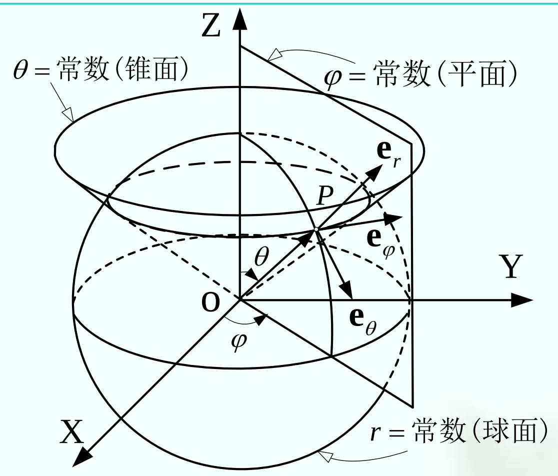
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

柱坐标系 $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

补充：球坐标系(r,θ,φ)



球坐标

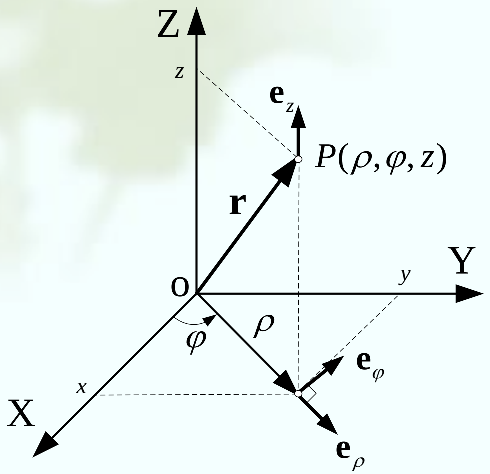


球坐标系的三个正交面

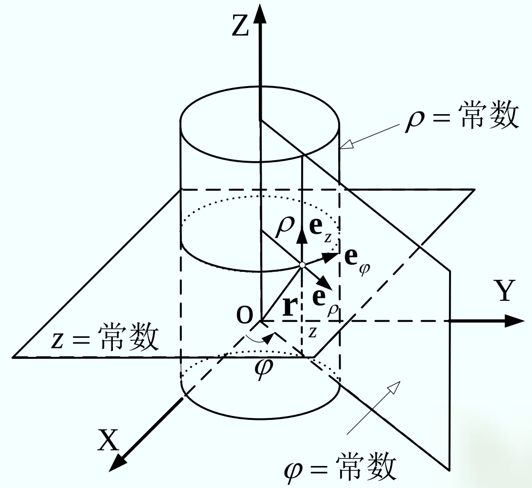
球坐标与直角坐标之间的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\arccos(z/r) \\ \varphi=\operatorname{arc}tg(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\le r<+\infty \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\theta\le\pi \end{cases}$$

补充：圆柱坐标系(ρ, φ, z)



圆柱坐标ρ, φ, z



柱坐标系的三个正交面

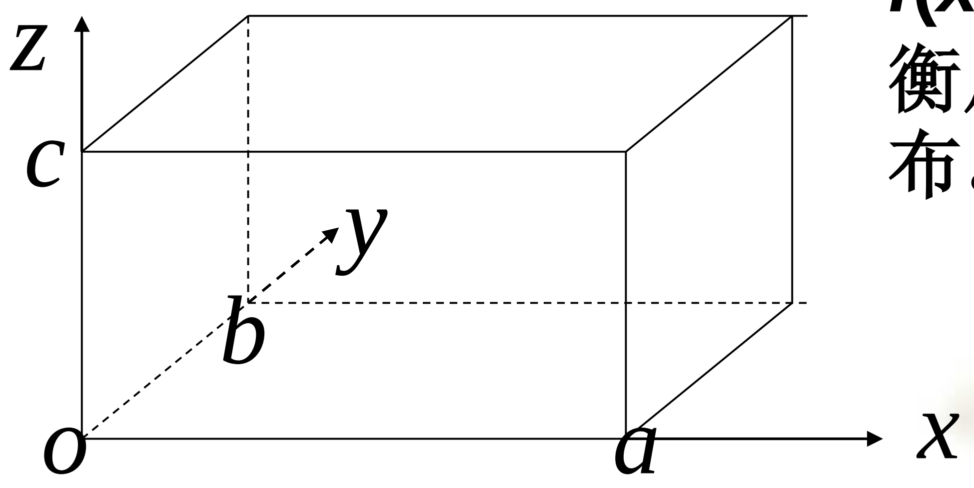
柱坐标与直角坐标之间的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\left(y/x\right) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le \rho < +\infty \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

§13.1直角坐标系中拉普拉斯方程的解法

例13.1

图**13.1**表示一长宽高分别***a*,*b*,*c***的长方形容器，假设其中装有均匀的物质，并保持其所有侧面和下底面的温度为**0**，上底面温度分布为***f*(*x*,*y*)**，试问达到热平衡后容器内的温度分布。



解： 设$u(x,y,z)$为容器内的稳定温度分布，则定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 u(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u(0,y,z)=0,u(a,y,z)=0\\ u(x,0,z)=0,u(x,b,z)=0\\ u(x,y,0)=0,u(x,y,c)=f(x,y)\end{cases}$$

采用分离变量法，设$u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$

代入方程，得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}=0$$

令 $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda_1, \dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda_2,$

则　　　　　　　　　　　　　　　　边界条件

$$\begin{cases} X''+\lambda_1 X=0 \\ Y''+\lambda_2 Y=0 \\ Z''-(\lambda_1+\lambda_2)Z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X(0)=0, X(a)=0, \\ Y(0)=0, Y(b)=0, \\ Z(0)=0, Z(c)=f(x,y) \end{cases}$$

求解X(x),Y(y)的本征值问题得

$$\begin{cases} \lambda_{1m}=\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2, X_m(x)=\sin\dfrac{m\pi}{a}x \qquad (m=1,2,3\ldots) \\ \lambda_{2n}=\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2, Y_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{b}x \qquad (n=1,2,3\ldots) \end{cases}$$

将λ_{1m}和λ_{2n}代入关于**Z(z)**的方程，得

$$Z''_{mn}(z)-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]Z_{mn}(z)=0$$

$$Z_{mn}(z)=A_{mn}\cosh(k_{mn}z)+B_{mn}\sinh(k_{mn}z)$$

其中，

$$k_{mn}=\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\quad (m,n=1,2,3\ldots)$$

所以，定解问题的通解为

$$u(x,y,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left[A_{mn}\cosh(k_{mn}z)+B_{mn}\sinh(k_{mn}z)\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

利用边界条件确定常数 A_{mn}和B_{mn}

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=0 \\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\left[A_{mn}\cosh(k_{mn}c)+B_{mn}\sinh(k_{mn}c)\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y) \end{cases}$$

所以， $A_{mn}=0$

$$B_{mn}=\frac{\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sinh(k_{mn}\mathrm{c})}$$

$$(m,n=1,2,3\ldots)$$

课堂练习 ❖ 矩形域上的边值问题

散热片的横截面为一矩形**$x\in[0,a]$，$y\in[0,b]$**，它的一边 **$y=b$** 处于较高的温度，其它三边保持零度。求横截面上的稳恒的温度分布

所求定解问题为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \\ u(x,0)=0, u(x,b)=U, & x\in[0,a] \\ u(0,y)=u(a,y)=0, & y\in[0,b] \end{cases}$$

$$u(x,y)=\frac{4}{\pi}U\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{\sinh\left(\dfrac{2n+1}{a}\pi y\right)}{\sinh\left(\dfrac{2n+1}{a}\pi b\right)}\sin\left(\frac{2n+1}{a}\pi x\right)$$

§13.2球坐标系中拉普拉斯方程的解法

球坐标系下，拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

- 求解的基本步骤

第一步：求满足方程的变量分离的解

设 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$

代入方程，得

径向坐标方程

$$r^2R'' + 2rR' - \mu R = 0 \qquad (\mu\text{为待定参数})$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \mu Y = 0$$

球函数方程

第二步：用分离变量法求解球函数方程

设 $Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 代入方程，得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) + (\mu - \frac{\lambda}{\sin^2\theta})\Theta = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \lambda\Phi = 0 \qquad (\lambda\text{为待定参数})$$

本征值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases}$

周期性边界条件

本征值 $\lambda = m^2 \quad (m = 0,1,2\ldots)$

本征函数 $\Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi$

将本征值代入Θ（θ）的方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) + (\mu - \frac{m^2}{\sin^2\theta})\Theta = 0 \quad (m = 0,1,2\ldots)$$

令 $x = \cos\theta$ 方程变为

缔合勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + (\mu - \frac{m^2}{1-x^2})\Theta = 0 \quad (-1 \le x \le 1)$$

本征值 $\mu_l = l(l+1)$　　（l为非负整数且$l \geq m$）

本征解 $\mathrm{P}_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[P_l(x)\right]$

所以，球函数的通解为：

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left[A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi\right]$$

也可以表示为：

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = A_{lm}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$(l = 0,1,2\ldots;m = -l,-l+1\ldots0,1\ldots l)$$

标准球函数

归一化条件

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 1$$

对应的系数为：$A_{lm} = \left[\dfrac{2l+1}{4\pi}\cdot\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}$

前三阶标准球函数的具体表达式

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{20}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi) = \pm\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{10}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi) = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$$

第三步：求解径向坐标方程

将 $\mu_l = l(l+1) \quad (l = 0,1,2\ldots)$ 代入径向坐标方程

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0$$

通解为：$R(r) = C_l r^l + \dfrac{D_l}{r^{l+1}} \quad (l = 0,1,2\ldots)$

拉普拉斯方程在球坐标系中的通解为

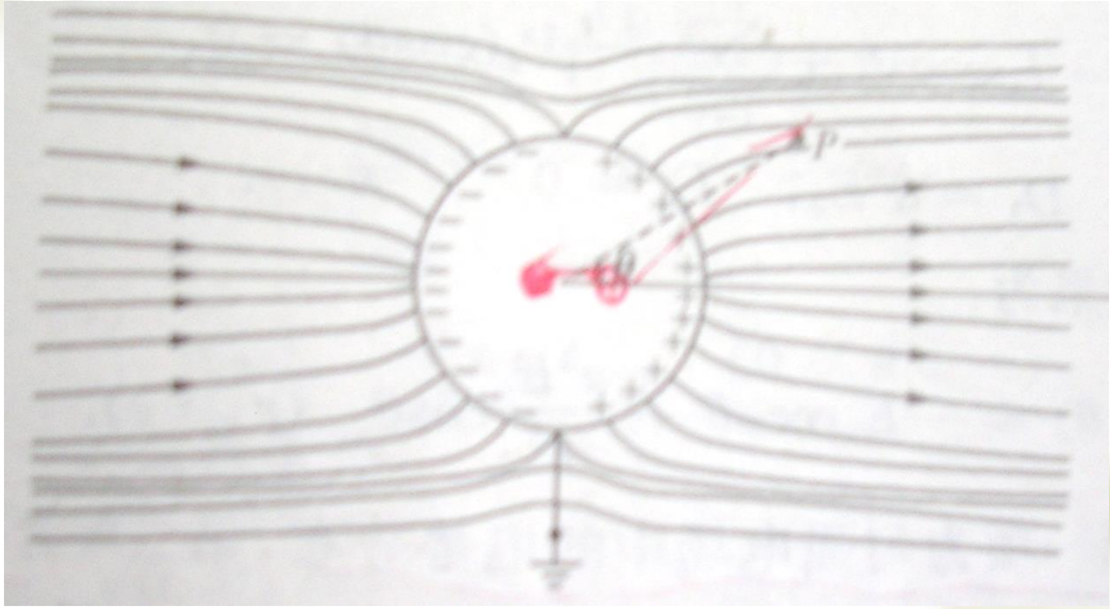
$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi\right)$$

或用标准球函数表示

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

例13.2

在均匀电场E_0中放置一接地的导体球，球半径为a，试求出球外电势的分布。



解：所求定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\\ u\big|_{r=a}=0, u\big|_{r\to+\infty}=-E_0 r\cos\theta\end{cases}$$

边界条件具有轴对称性，电势分布与 ϕ无关。

本征值m=0

通解为 $$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}(C_l r^l+\frac{D_l}{r^{l+1}})\mathrm{P}_l(\cos\theta)\quad(r\geq a)$$

代入边界条件 $$u\big|_{r\to+\infty}=\sum_{l=0}^{+\infty}C_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=-E_0 r\cos\theta$$

解得 $$C_1=-E_0, C_l=0\ (l\neq 1)$$

代入通解式 $u(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{D_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$

代入边界条件

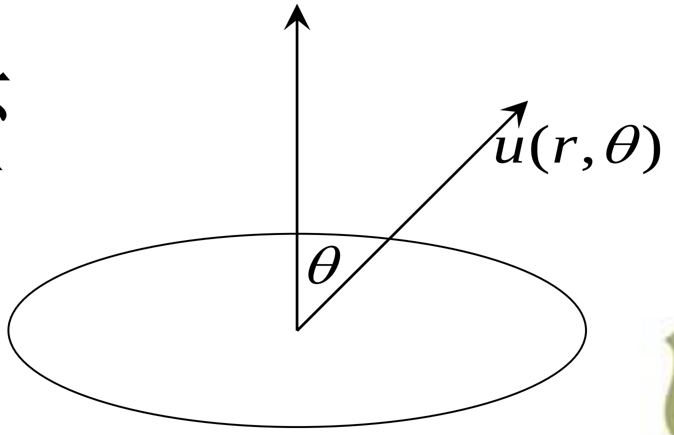
$$u\big|_{r=a}=-E_0 a\cos\theta+\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{D_l}{a^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

解得 $D_1=a^3E_0, D_l=0\ (l\neq 1)$

因此，最终结果为

$$u(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\frac{a^3E_0}{r^2}\cos\theta\quad (r\geq 0)$$

例13.3 半径为a的圆形金属环上均匀带电 $4\pi\varepsilon_0 q$ 试求金属环的电势分布。



解：所求定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 u_{内}=0 & (r<a)\\ u\big|_{r\to 0}=\text{有限值}\end{cases}\qquad \begin{cases}\nabla^2 u_{外}=0 & (r>a)\\ u\big|_{r\to +\infty}=0\end{cases}$$

衔接条件 $u_{内}\big|_{r\to a}=u_{外}\big|_{r\to a}(0\le\theta\le\pi)$

轴线上θ=0的边界条件 $u(r,0)=\dfrac{q}{\sqrt{a^2+r^2}}(0\le r\le+\infty)$

通解为 $$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}C_l r^l \mathrm{P}_l\cos(\theta)\quad (r<a)$$

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{D_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l\cos(\theta)\quad (r>a)$$

根据衔接条件得 $$\sum_{l=0}^{+\infty}C_l a^l \mathrm{P}_l\cos(\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}(D_l/a^{l+1})\mathrm{P}_l\cos(\theta)$$

所以， $$C_l a^l=\frac{D_l}{a^{l+1}}=A_l\quad (A_l\text{为待定常数})$$

代入通解式 $$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}A_l(r/a)^l \mathrm{P}_l\cos(\theta)\quad (r<a)$$

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}A_l(a/r)^{l+1}\mathrm{P}_l\cos(\theta)\quad (r>a)$$

由轴线边界条件 $u\big|_{\theta=0}=\sum_{l=0}^{+\infty}A_l(r/a)^l=\dfrac{q}{\sqrt{a^2+r^2}}=\dfrac{q}{a}\left[1+(\dfrac{r}{a})^2\right]^{1/2}$

$$=\frac{q}{a}\left[1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(\frac{r}{a})^{2k}\right]$$

比较两边系数得 $A_0=\dfrac{q}{a},A_{2k}=\dfrac{q}{a}(-1)^k\cdot\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!},A_{2k+1}=0$

$$(k=1,2,3\ldots)$$

最终结果为

$$u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{q}{a}\left[1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(\dfrac{r}{a})^{2k}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)\right] & (r<a)\\[2ex] \dfrac{q}{a}\left[\dfrac{a}{r}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(\dfrac{a}{r})^{2k+1}\mathrm{P}_{2k}(\cos\theta)\right] & (r>a)\end{cases}$$

§13. 3柱坐标系中拉普拉斯方程的解法

柱坐标系下，拉普拉斯方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

- 求解的基本步骤

第一步：求满足方程的变量分离的解

设 $u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$

可得： $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$

$$\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}) + \frac{\rho^2}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = \lambda$$

再进行分离变量，得

$$Z'' - \mu Z = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}) + (\mu - \frac{\lambda}{\rho^2})R = 0$$

由周期性边界条件 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$

本征值 $\lambda = m^2 \quad (m = 0,1,2\ldots)$

本征函数 $\Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi$

根据 μ 的不同取值范围，分别讨论

（1） μ <0 $Z(z)=C\cos\sqrt{-\mu}z+D\sin\sqrt{-\mu}z$

令 $x=\sqrt{-\mu}\rho\ (x>0)$ $\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x})-(1+\frac{m^2}{x^2})R=0$

为m阶虚宗量贝塞耳方程，其通解为 $R(x)=\alpha \mathrm{I}_m(x)+\beta \mathrm{K}_m(x)$

通解为：$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{+\infty}(\alpha_m \mathrm{I}_m(\sqrt{-\mu}\rho)+\beta_m \mathrm{K}_m(\sqrt{-\mu}\rho))$

$$(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\cos\sqrt{-\mu}z+D_m\sin\sqrt{-\mu}z)$$

不能满足齐次侧面条件，即 $R(\sqrt{-\mu}\rho_0)\neq 0$ $R'(\sqrt{-\mu}\rho_0)\neq 0$

能满足圆柱上下底面都是齐次的边界条件。

（2） μ =0 $Z(z)=C+Dz$

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-m^2R=0 \qquad R(\rho)=\begin{cases}\alpha+\beta\ln\rho & (m=0)\\ \alpha\rho^m+\dfrac{\beta}{\rho^m} & (m\neq 0)\end{cases}$$

欧拉方程

通解为：$u(\rho,\varphi,z)=(\alpha_0+\beta_0\ln\rho)(C_0+D_0z)+$

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(\alpha_m\rho^m+\frac{\beta_m}{\rho^m})(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m+D_mz)$$

在自然边界条件的限制下，$\boldsymbol{\beta_m}=0$ $\qquad R(\rho)=\alpha\rho^m$

不能满足齐次柱侧面边界条件，也不能满足圆柱上下底面都是齐次的边界条件。

（3） μ >0 $$Z(z)=C\cosh\sqrt{\mu}z+D\sinh\sqrt{\mu}z$$

令 $x=\sqrt{\mu}\rho\,(x>0)$ $$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x})+(1-\frac{m^2}{x^2})R=0$$

为m阶贝塞耳方程，其解为$R(x)=\alpha \mathrm{J}_m(x)+\beta \mathrm{N}_m(x)$

通解为：$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{+\infty}(\alpha_m \mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\rho)+\beta_m \mathrm{N}_m(\sqrt{\mu}\rho))$$

$$(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\cosh\sqrt{\mu}z+D_m\sinh\sqrt{\mu}z)$$

R(x)能够满足第一、二、三类圆柱侧面齐次边界条件。

但Z(z)为指数型函数，不能满足圆柱上、下底面都是齐次的边界条件。

总结:

（1） μ <0 $u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{+\infty}(\alpha_m \mathrm{I}_m(\sqrt{-\mu}\rho)+\beta_m \mathrm{K}_m(\sqrt{-\mu}\rho))$

$$(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\cos\sqrt{-\mu}z+D_m\sin\sqrt{-\mu}z)$$

（2） μ =0

$$u(\rho,\varphi,z)=(\alpha_0+\beta_0\ln\rho)(C_0+D_0z)+$$

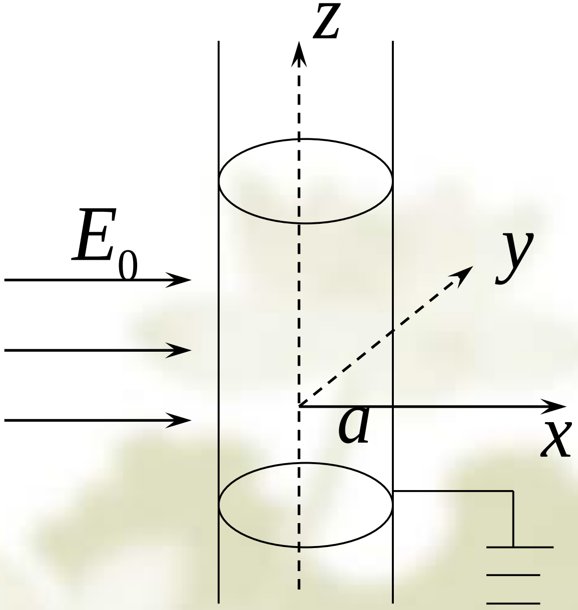
$$\sum_{m=1}^{+\infty}(\alpha_m\rho^m+\frac{\beta_m}{\rho^m})(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m+D_mz)$$

（3） μ >0

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{+\infty}(\alpha_m \mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\rho)+\beta_m \mathrm{N}_m(\sqrt{\mu}\rho))$$

$$(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\cosh\sqrt{\mu}z+D_m\sinh\sqrt{\mu}z)$$

例13.4 设有一半径为a的无穷长接地圆柱形导体，处于匀强电场E_0中，匀强电场方向垂直于圆柱轴线，如图所示，试求圆柱外的电势分布。



解：所求定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \cancel{\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = 0 \\ \qquad (\rho \geq a) \\ u\big|_{\rho=a} = 0, \ \lim\limits_{\rho\to+\infty} u = -\rho E_0 \cos\varphi \end{cases}$$

令 $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$

则 $\Phi'' + m^2\Phi = 0 \quad (m = 0,1,2,\ldots)$

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2} + \rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} - m^2R = 0$$

（1）当m=0时， $\Phi_0(x) = $ 常数

$R(\rho) = C_0 + D_0\ln\rho$（$C_0, D_0$为待定常数）

（2）当m不等于0时，

$$\Phi_m(\rho) = A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi \quad (m = 1,2,3\ldots)$$

$$R(\rho) = C_m\rho^m + \frac{D_m}{\rho^m}$$

所以，通解为：

$$u(\rho,\varphi) = C_0 + D_0\ln\rho + \sum_{m=1}^{+\infty}(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi)\left(C_m\rho^m + \frac{D_m}{\rho^m}\right)$$

代入边界条件得：

$$u\big|_{\rho=a}=C_0+D_0\ln a+\sum_{m=1}^{+\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\left(C_m a^m+\frac{D_m}{a^m}\right)=0$$

所以， $C_0=-D_0\ln a \qquad D_m=-C_m a^{2m}$

$$u(\rho,\varphi)=D_0\ln\frac{\rho}{a}+\sum_{m=1}^{+\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\left(\rho^m-\frac{a^{2m}}{\rho^m}\right)$$

当ρ→∞时，$u(\rho,\varphi)\to E_0\rho\cos\varphi$

比较系数得：$D_0=0 \qquad A_1=-E_0$

$A_m=0\ \ (m\neq 1) \qquad B_m=0$

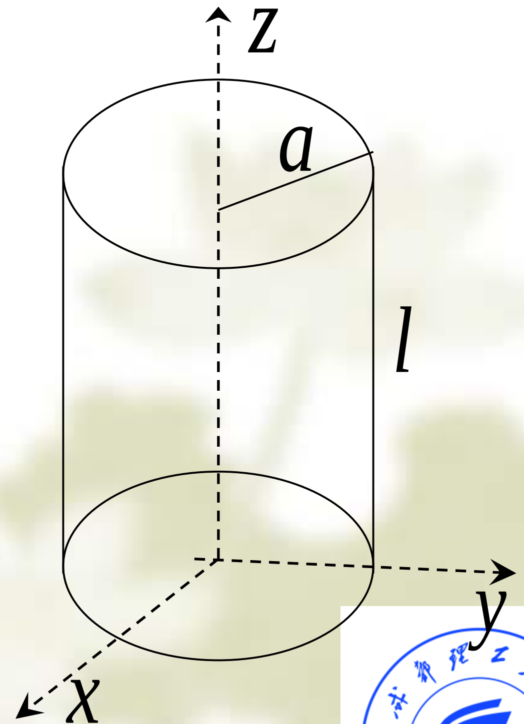
原问题的解：

$$u(\rho,\varphi)=-E_0\rho\cos\varphi+\frac{a^2E_0}{\rho}\cos\varphi$$

例13.5 设半径为a高为l的均匀圆柱体，上底面温度保持为 $T_0(1-\rho^2/a^2)$ ，下底面及侧面温度保持为零度。如图所示，试求圆柱体中稳定温度分布。

解：所求定解问题为

$$
\begin{cases}
\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \cancel{\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\
\qquad (\rho \le a) \\
u\big|_{\rho=a} = 0, u\big|_{\rho<a} = \text{有限值} \\
u\big|_{z=a} = 0, u\big|_{z=l} = T_0(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}) \quad (0 \le \rho \le a)
\end{cases}
$$



令 $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$

则 $Z'' - \mu Z = 0$ $\quad R'' + \frac{1}{\rho}R' + \mu R = 0$

取μ>0，对应的通解为：

$$Z(z) = C\cosh\sqrt{\mu}z + C\sinh\sqrt{\mu}z \quad (\mu > 0)$$

$$R(x) = AJ_0(x) + BN_0(x) \quad (x = \sqrt{\mu}\rho)$$

根据自然边界条件和柱侧面齐次边界条件得

$$B = 0, J_0(\sqrt{\mu}a) = 0$$

设 $x_n^{(1)}$ 代表$J_0(x)$的第n个正实数零点，那么待定参数 μ 为

$$\mu_m = \left[\frac{x_n^{(0)}}{a}\right]^2 \quad (n = 1,2,3\ldots)$$

本征函数 $R_n(\rho)=A_n J_0(\rho x_n^{(0)}/a) \quad (n=1,2,3\ldots)$

定解问题的通解为：

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[C_n\cosh(zx_n^{(0)}/a)+D_n\sinh(zx_n^{(0)}/a)\right]\mathrm{J}_0(\rho x_n^{(0)}/a)$$

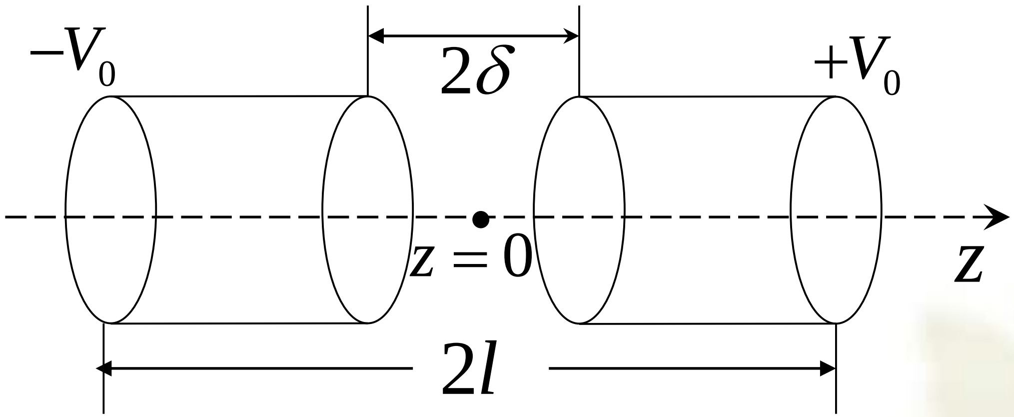
再根据上下底面的边界条件确定常数**C_n,D_n**

$$\begin{cases} C_n=0(n=1,2,3\ldots) \\ \sum_{n=1}^{+\infty}D_n\sinh(lx_n^{(0)}/a)\cdot J_0(\rho x_n^{(0)}/a)=T_0[1-(\rho/a)^2] \end{cases}$$

经计算： $$D_n=\frac{4T_0\mathrm{J}_2[x_n^{(0)}]}{(x_n^{(0)})^2\sinh(x_n^{(0)}l/a)\mathrm{J}_1^2(x_n^{(0)})}$$

最终结果 $$u(\rho,z)=4T_0\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{J}_2[x_n^{(0)}]\sinh(x_n^{(0)}z/a)\mathrm{J}_0[x_n^{(0)}\rho/a]}{(x_n^{(0)})^2\sinh(x_n^{(0)}l/a)\mathrm{J}_1^2(x_n^{(0)})}$$

例13.6 电子光学透镜中某一部件由两个半径为a的中空导体圆柱面组成，它们的电势分别为＋V和－V。在圆柱中间缝隙的边缘电势可近似表示为$u=V_0\sin(\pi z/2\delta)$， 圆柱两端面处的边界条件可近似表示为$u\big|_{z=l}=V_0$，$u\big|_{z=-l}=-V_0$，



解：根据题意，可以得到定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\\ u\big|_{z=l}=V_0,u\big|_{z=-l}=-V_0\\ u\big|_{\rho=a}=\begin{cases}-V_0 & (-l\le z\le-\delta)\\ V_0\sin(\pi z/2\delta) & (-\delta\le z\le\delta)\\ +V_0 & (\delta\le z\le l)\end{cases}\end{cases}$$

设 $u=u_1+u_2$

分别满足如下定解问题：

$$\begin{cases}\nabla^2 u_1 = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_1}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}=0\\ u_1\big|_{z=l}=V_0,\ u_1\big|_{z=-l}=-V_0\\ u_1\big|_{\rho=a}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla^2 u_2 = \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_2}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}=0\\ u_2\big|_{z=l}=0,\ u_2\big|_{z=-l}=0\\ u_2\big|_{\rho=a}=\begin{cases}-V_0 & (-l\le z\le-\delta)\\ V_0\sin(\pi z/2\delta) & (-\delta\le z\le\delta)\\ +V_0 & (\delta\le z\le l)\end{cases}\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\nabla^2 u_1 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \cancel{\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\
u_1\big|_{z=l} = V_0, u_1\big|_{z=-l} = -V_0 \\
u_1\big|_{\rho=a} = 0
\end{cases}
$$

通解：$u_1(\rho, z) = (A\cosh kz + B\sinh kz)\mathrm{J}_0(k\rho)$

本征值 $k_n = \dfrac{x_n^{(0)}}{a}$ 本征函数 $R_n(\rho) = \mathrm{J}_0(\dfrac{\rho x_n^{(0)}}{a})$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$

所以，

$$
u_1(\rho, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cosh(\frac{x_n^{(0)}}{a} z) + B_n \sinh(\frac{x_n^{(0)}}{a} z)]\mathrm{J}_0(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho)
$$

再利用上下底面的边界条件

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cosh(\frac{x_n^{(0)}}{a}l)-B_n\sinh(\frac{x_n^{(0)}}{a}l)]\mathrm{J}_0(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho)=-V_0\\ \sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cosh(\frac{x_n^{(0)}}{a}l)+B_n\sinh(\frac{x_n^{(0)}}{a}l)]\mathrm{J}_0(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho)=+V_0\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cosh(\frac{x_n^{(0)}}{a}l)\mathrm{J}_0(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho)=0 \Longrightarrow A_n=0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\sinh(\frac{x_n^{(0)}}{a}l)\mathrm{J}_0(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho)=+V_0$$

$$B_n=\frac{1}{\sinh[x_n^{(0)}l/a]}\bullet\frac{\int_0^a V_0J_0[\rho x_n^{(0)}/a]\rho d\rho}{\int_0^a\{J_0[\rho x_n^{(0)}/a]\}^2\rho d\rho}$$

$$=\frac{2V_0}{x_n^{(0)}\sinh[x_n^{(0)}l/a]\mathrm{J}_1(x_n^{(0)})}$$

$$u_1(\rho, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2V_0 \sinh[z x_n^{(0)}/a] \mathrm{J}_0(\rho x_n^{(0)}/a)}{x_n^{(0)} \sinh[x_n^{(0)} l/a] \mathrm{J}_1(x_n^{(0)})}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u_2 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \cancel{\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ u_2\big|_{z=l} = 0, u_2\big|_{z=-l} = 0 \\ u_2\big|_{\rho=a} = \begin{cases} -V_0 & (-l \le z \le -\delta) \\ V_0 \sin(\pi z/2\delta) & (-\delta \le z \le \delta) \\ +V_0 & (\delta \le z \le l) \end{cases} \end{cases}$$

$$u_2\big|_{\rho\to 0} = \text{有限值}$$

对应于μ<0

本征值问题：

$$\begin{cases} Z''(z)+k^2 Z(z)=0 \qquad (\mu=-k^2) \\ Z\big|_{z=-l}=0, Z\big|_{z=l}=0 \end{cases}$$

本征值 $k_n=\dfrac{n\pi}{l}$ 本征函数 $Z_n=\sin\dfrac{n\pi z}{l}$ (注意 : $Z_0=0$)

通解： $u_2(\rho,z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\dfrac{n\pi z}{l}\mathrm{I}_0(\rho\dfrac{n\pi}{l})$

利用侧面柱面边界条件确定系数C_n

$$\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\,\mathbf{sin}\frac{n\pi z}{l}\mathbf{I}_0(\frac{n\pi z}{l})=\begin{cases}-V_0 & (-l\le z\le-\delta) \\ V_0\,\mathbf{sin}\dfrac{\pi z}{2\delta} & (-l\le z\le-\delta) \\ +V_0 & (-l\le z\le-\delta)\end{cases}$$

所以，$C_n = \dfrac{2V_0}{n\pi I_0(n\pi a/l)} \cdot [\dfrac{l^2\cos(n\pi\delta/l)}{l^2-(2n\delta)^2} + (-1)^{n+1}]$

所以，

$$u_2 = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{l^2\cos(n\pi\delta/l)}{l^2-(2n\delta)^2} + (-1)^{n+1}]\frac{\mathrm{I}_0(n\pi\rho/l)}{\mathrm{I}_0(n\pi a/l)}\sin(\frac{n\pi z}{l})$$

$$u_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cosh(\frac{x_n^{(0)}}{a}z) + B_n\sinh(\frac{x_n^{(0)}}{a}z)]\mathrm{J}_0(\frac{x_n^{(0)}}{a}\rho)$$

综合两个定解问题的结果，最终解为

$$u(\rho,z) = u_1(\rho,z) + u_2(\rho,z)$$

本章作业

13-1; 13-2; 13-3(给出定解问题);
13-4 (给出定解问题);

13-8; 13-9; 13-10(1);