



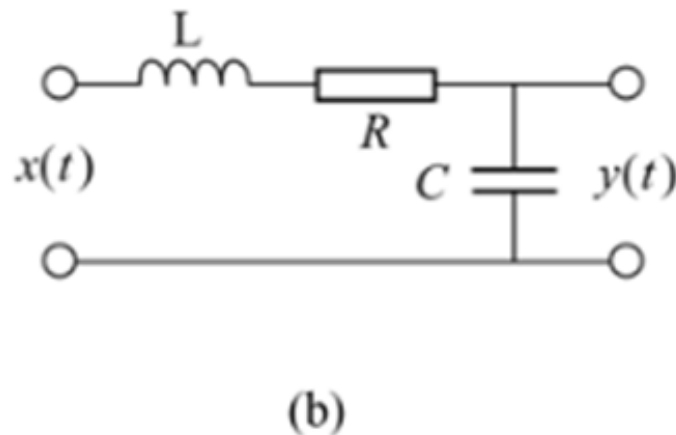
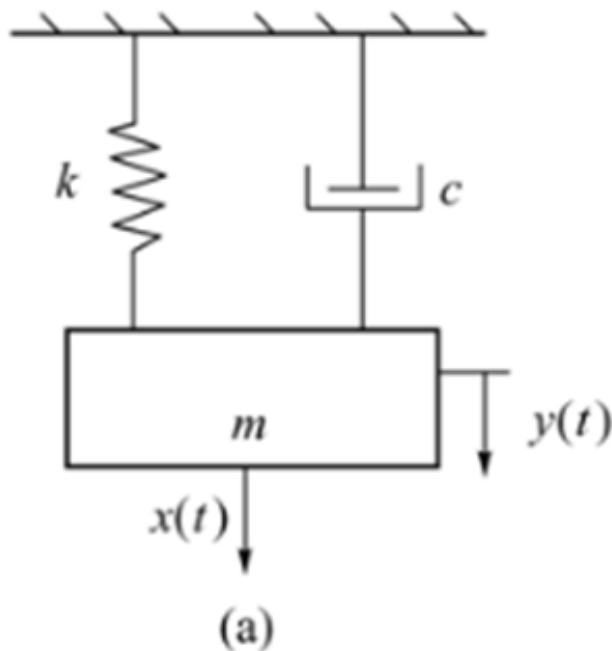
# 测试系统的特性分析

General Characteristics of  
Measurement Systems



## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

### 1. 传递函数



很多传感器如振动传感器、压力传感器和加速度传感器都包含有运动质量 $M$ ，弹性元件和阻尼器。



## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = x(t)$$

$$\begin{aligned} K &= 1/k \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \zeta &= \frac{c}{2\sqrt{km}} \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$H(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

**K=1:**

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

### 2. 频率响应函数

$s=j\omega$ :

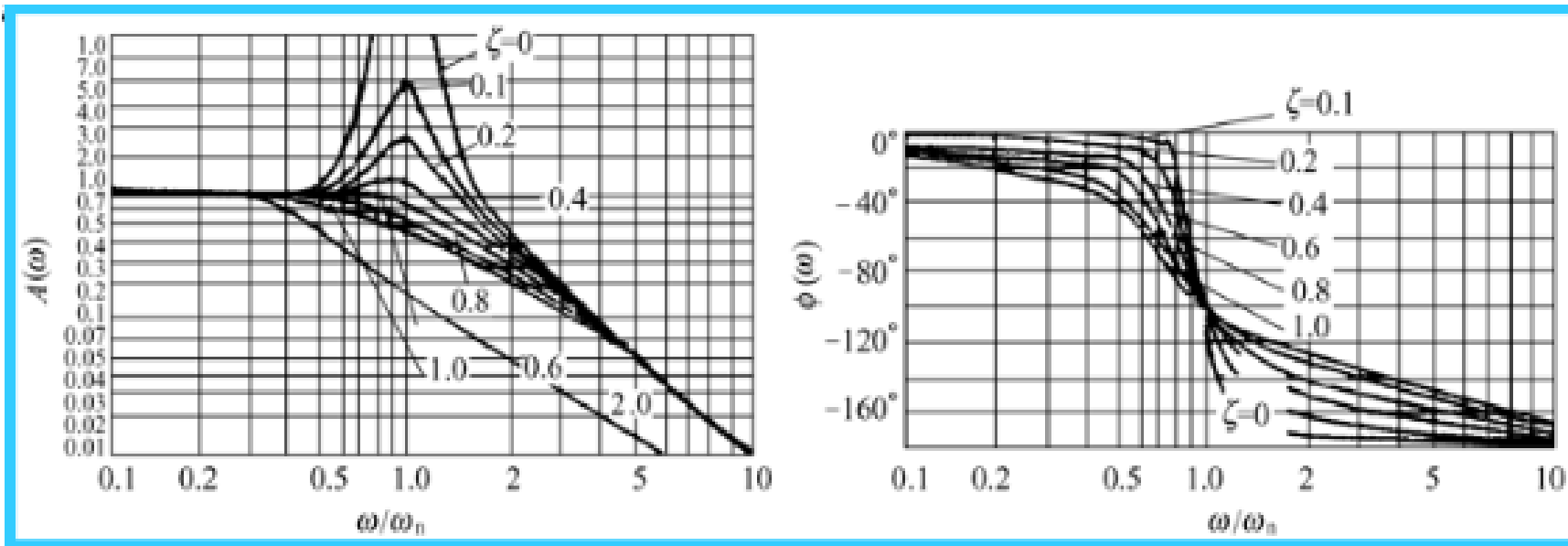
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, & \omega \leq \omega_n \\ -\arctan \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} - \pi, & \omega > \omega_n \end{cases}$$



## 2.4.4 二阶系统动态特性分析



- 当 $\omega \ll \omega_n$ ,  $A(\omega) \approx 1$ ; 当 $0.6 < \zeta < 0.8$ 时,  $A(\omega)$ 接近于1的频率范围最大, 相位特性接近直线, 即此时系统的稳态误差较小;
- 当 $\zeta = 0$ , 在 $\omega = \omega_n$ 处,  $A(\omega) \rightarrow \infty$ , 出现谐振, 为避免此现象, 加大 $\zeta$ ;
- 当 $\omega = \omega_n$ 时, 输出-输入的相位差为 $90^\circ$ , 利用这一特点可以测量系统的固有频率 $\omega_n$ 。



## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

□ 在动态测试时，必须了解测试系统的可用频率范围，与系统固有频率 $\omega_n$ 和阻尼比 $\zeta$ 有关。

——固有频率 $\omega_n$ 越小，其可用频率范围越窄；反之，其可用频率范围越宽。

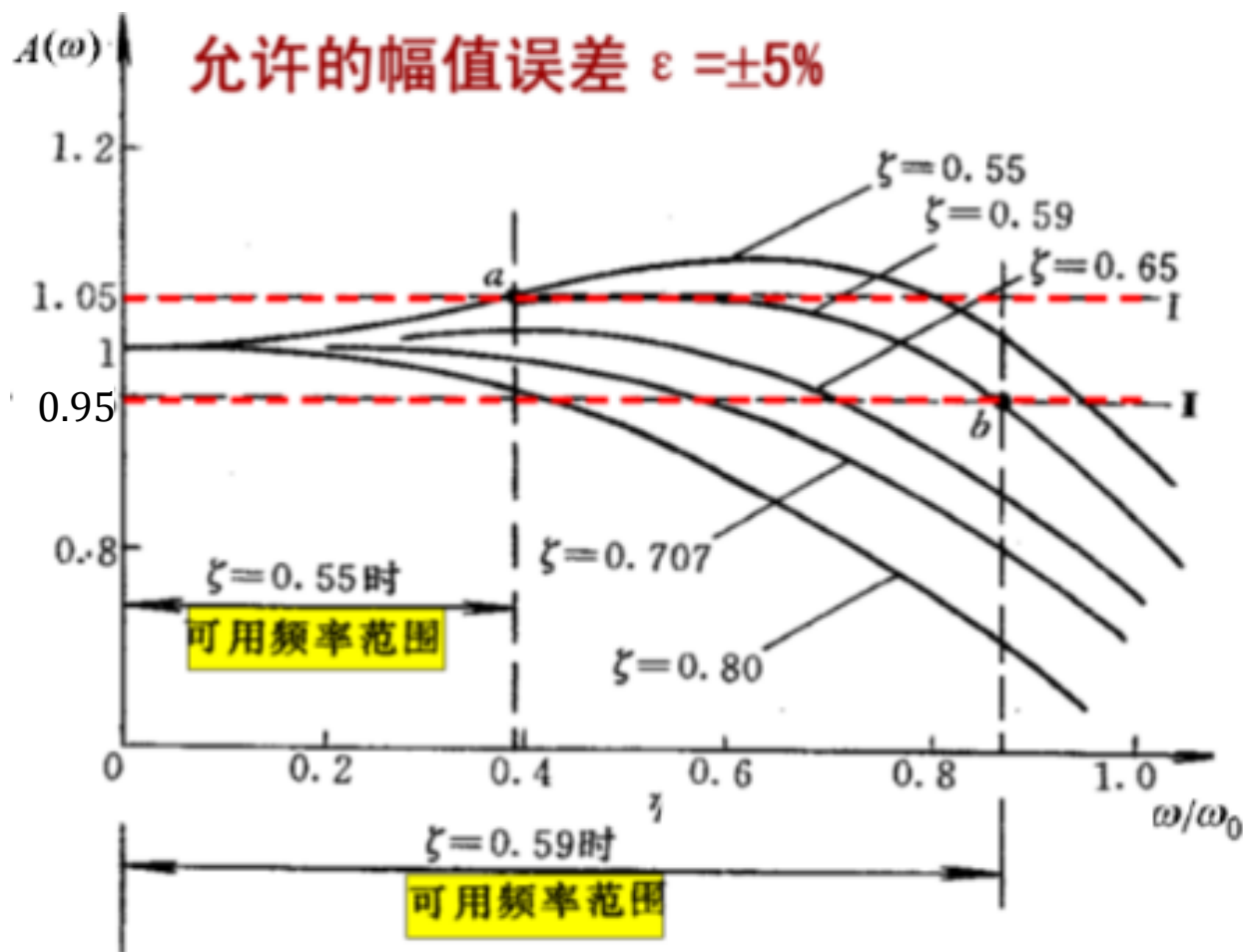
——推荐采用  $\zeta$  值在0.7左右， $\omega_n > (3-5) \omega_{\max}$ ，系统幅频特性工作在平直段，相频特性工作在直线段，从而使测量的失真最小。

**选择、设计测试系统时尤为重要！**



## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

不同阻尼比对可用频率范围的影响





## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

### 3. 对阶跃输入信号的响应

$$X(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

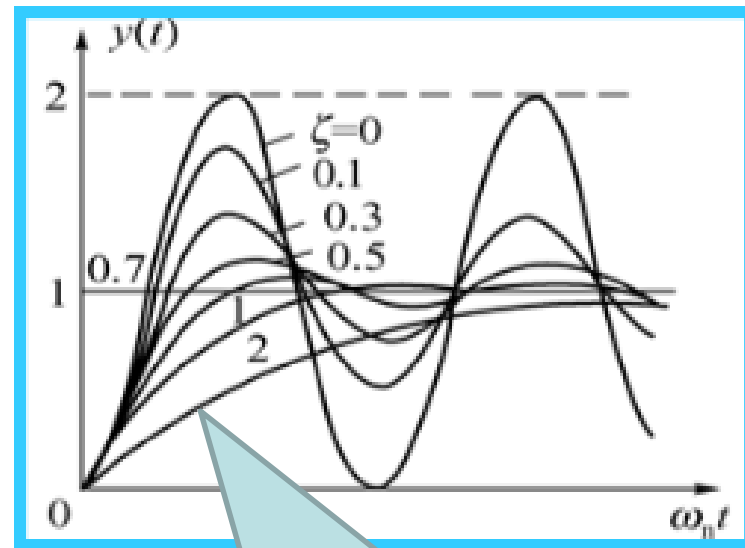
$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} & (\zeta > 1) \\ 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} & (\zeta = 1) \\ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi_2) & (0 \leq \zeta < 1) \end{cases}$$





## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

- $\zeta < 1$  时，出现衰减正弦振荡；  
 $\zeta \geq 1$  时，不出现振荡。无论哪种情况，输出都要经过一定的时间才能达到阶跃输入值，这个过程称为动态过渡过程；



- 不同的  $\zeta$  取值对应不同的响应曲线， $\zeta$  值过大，终值的时间都过长。为了提高响应速度， $\zeta$  值一般在 0.0~0.8 之间；

$\zeta$  和  $\omega_n$  是二阶系统重要的特性参数。

- 二阶系统的阶跃响应速度随固有角频率  $\omega_n$  的变化而变化。当  $\zeta$  一定时， $\omega_n$  越大，则响应速度越快； $\omega_n$  越小，则响应速度越慢。



## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

欠阻尼系统：

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

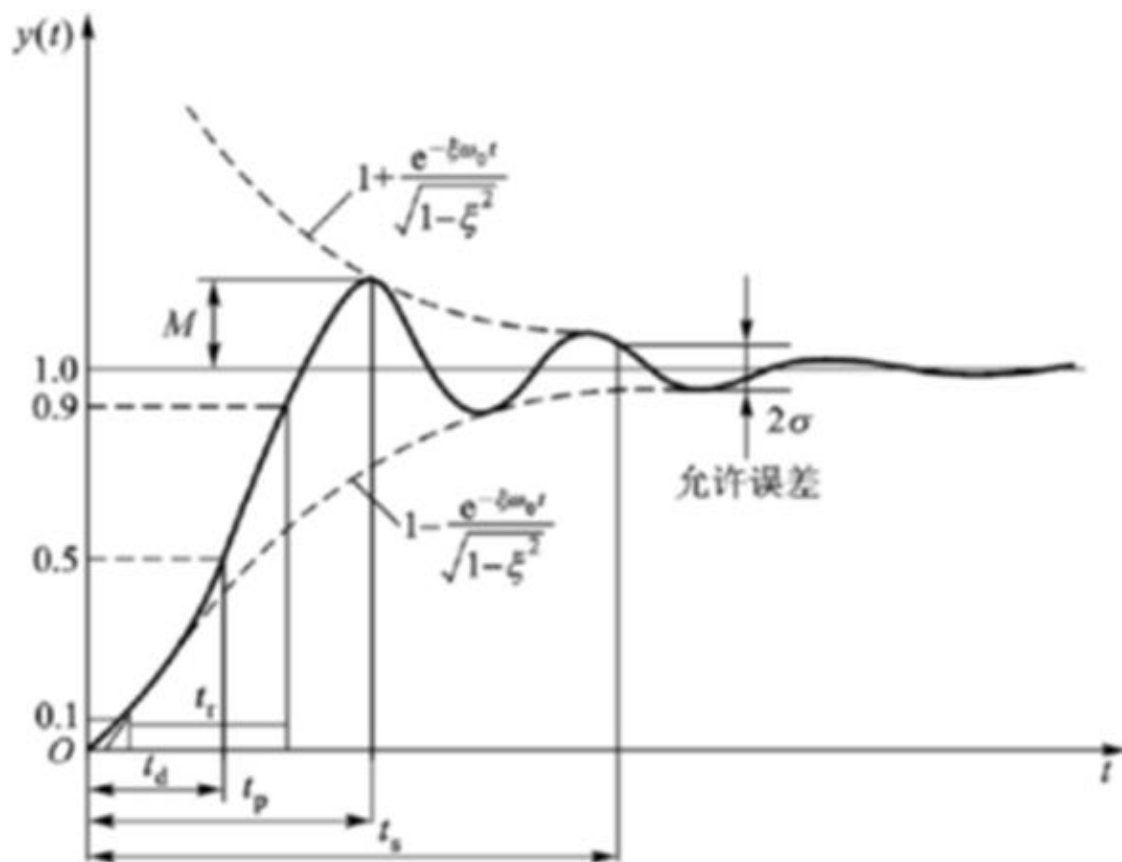
$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

□ 当 $\zeta = 0$ 时，系统以 $\omega_n$ 的频率产生无衰减振荡。



## 2.4.4 二阶系统动态特性分析

### 阶跃响应曲线—时域性能指标



响应时间  $t_s$

峰值时间  $t_p$

延迟时间  $t_d$

上升时间  $t_r$

超调量  $M$



## 例 题

**例** 有一个二阶的力传感器，其固有频率为 $800\text{rad/s}$ ，阻尼比 $\zeta$ 为 $0.14$ 。

(1) 使用该传感器测量频率为 $400\text{rad/s}$ 正弦变化的力时，其振幅产生多大误差，相位偏移多少？

(2) 若该系统的阻尼比 $\zeta=0.6$ ， $\zeta=0.9$ 时，其振幅又分别产生多大误差，相位偏移分别为多少？



## 2.5 二阶系统动态特性分析

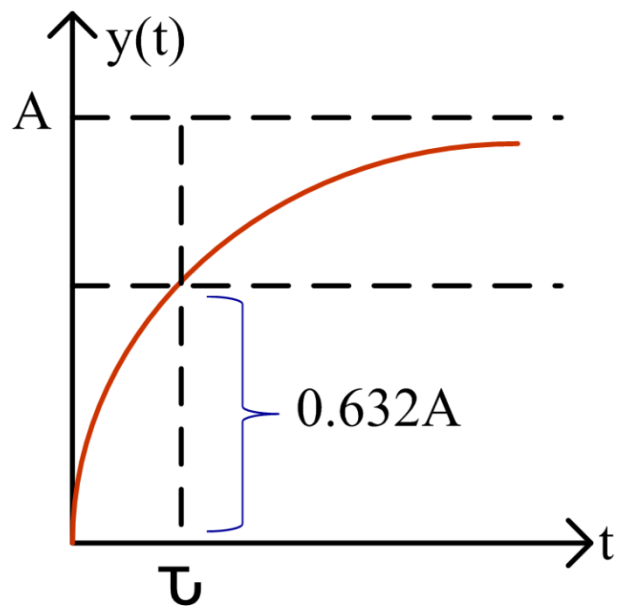
2.5.1 阶跃响应法

2.5.2 频率响应法



## 2.5.1 阶跃响应法

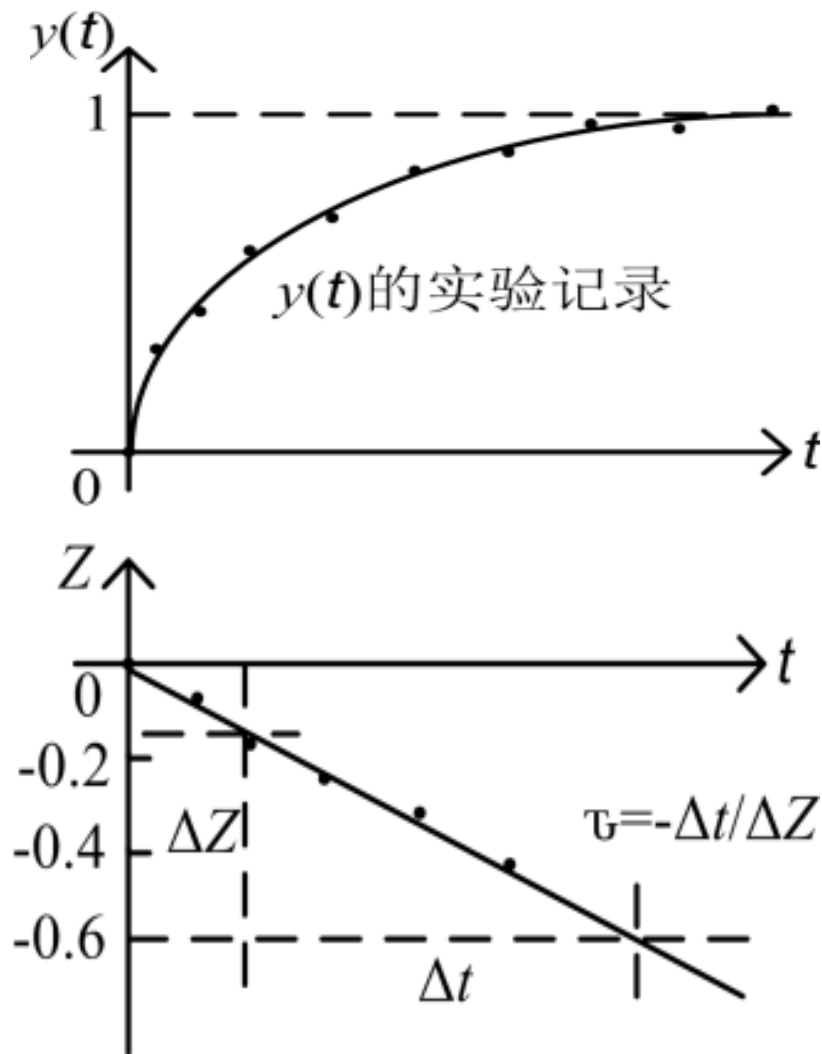
### 1. 一阶系统



$$t = \tau,$$

$$y(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.632A$$

方法一

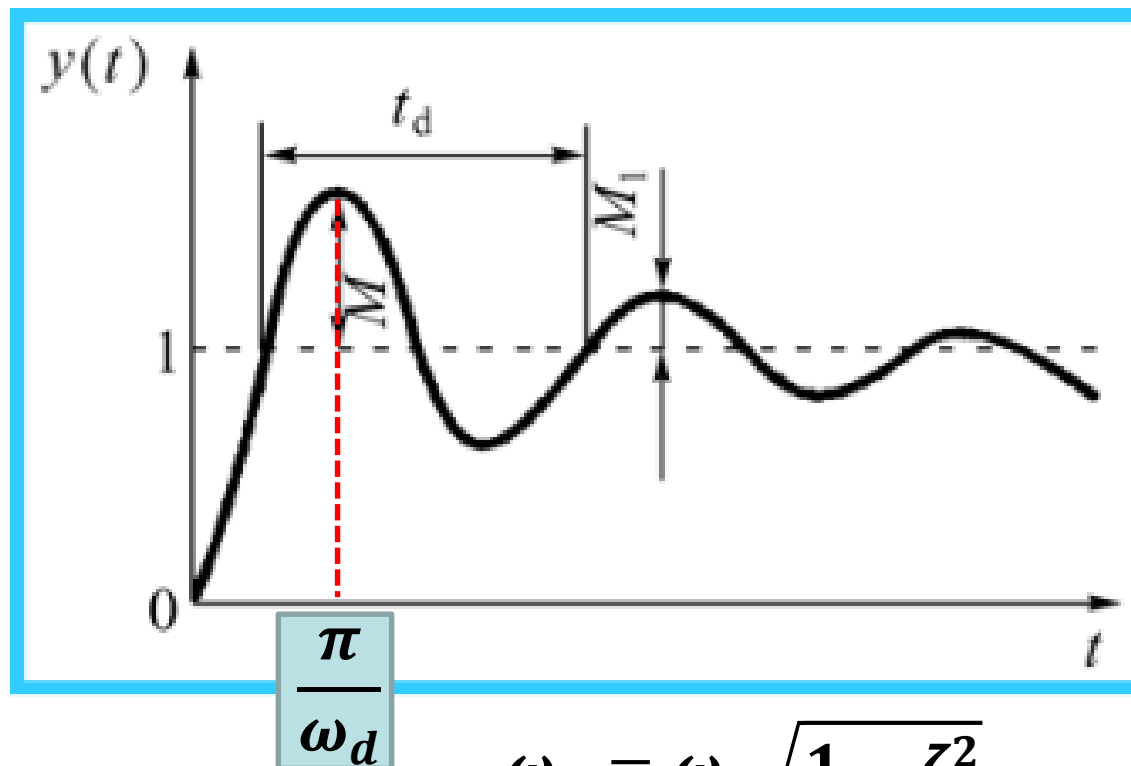


方法二



## 2.5.1 阶跃响应法

### 2. 二阶系统



$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

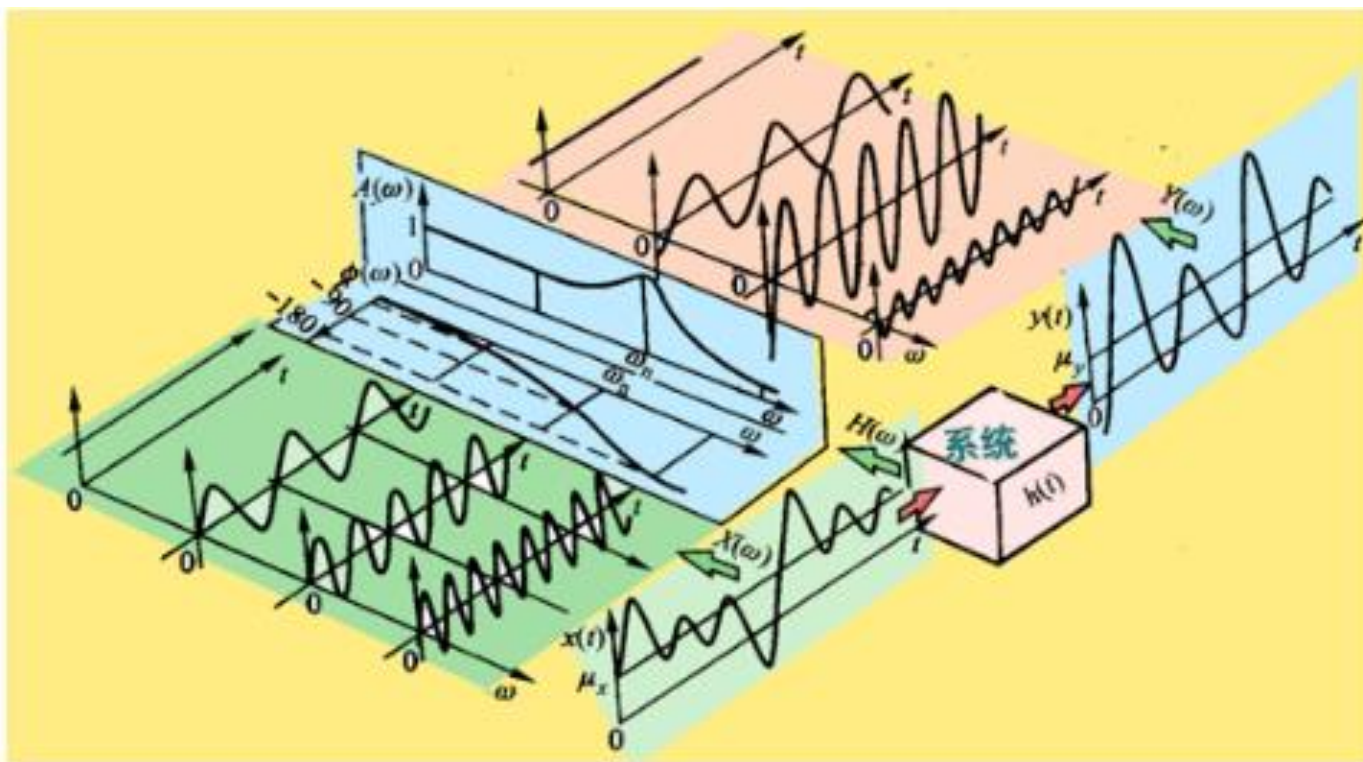
$$M = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi}{t_d \sqrt{1 - \zeta^2}}$$



## 2.5.2 频率响应法

依次用不同频率  $f_i$  的简谐信号去激励被测系统，同时测出激励和系统的**稳态输出**的幅值、相位，得到幅频特性和相频特性曲线。

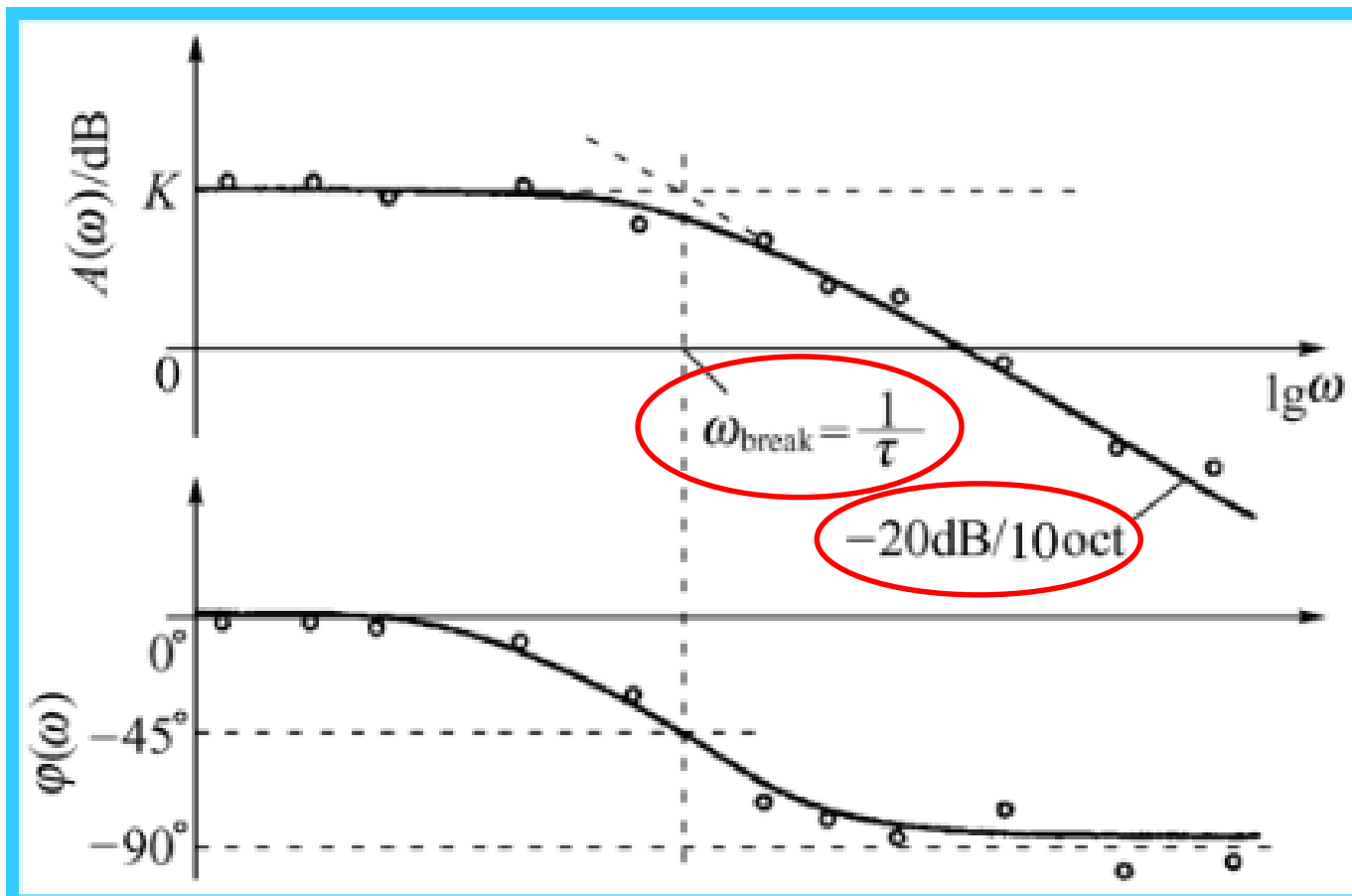






## 2.5.2 频率响应法

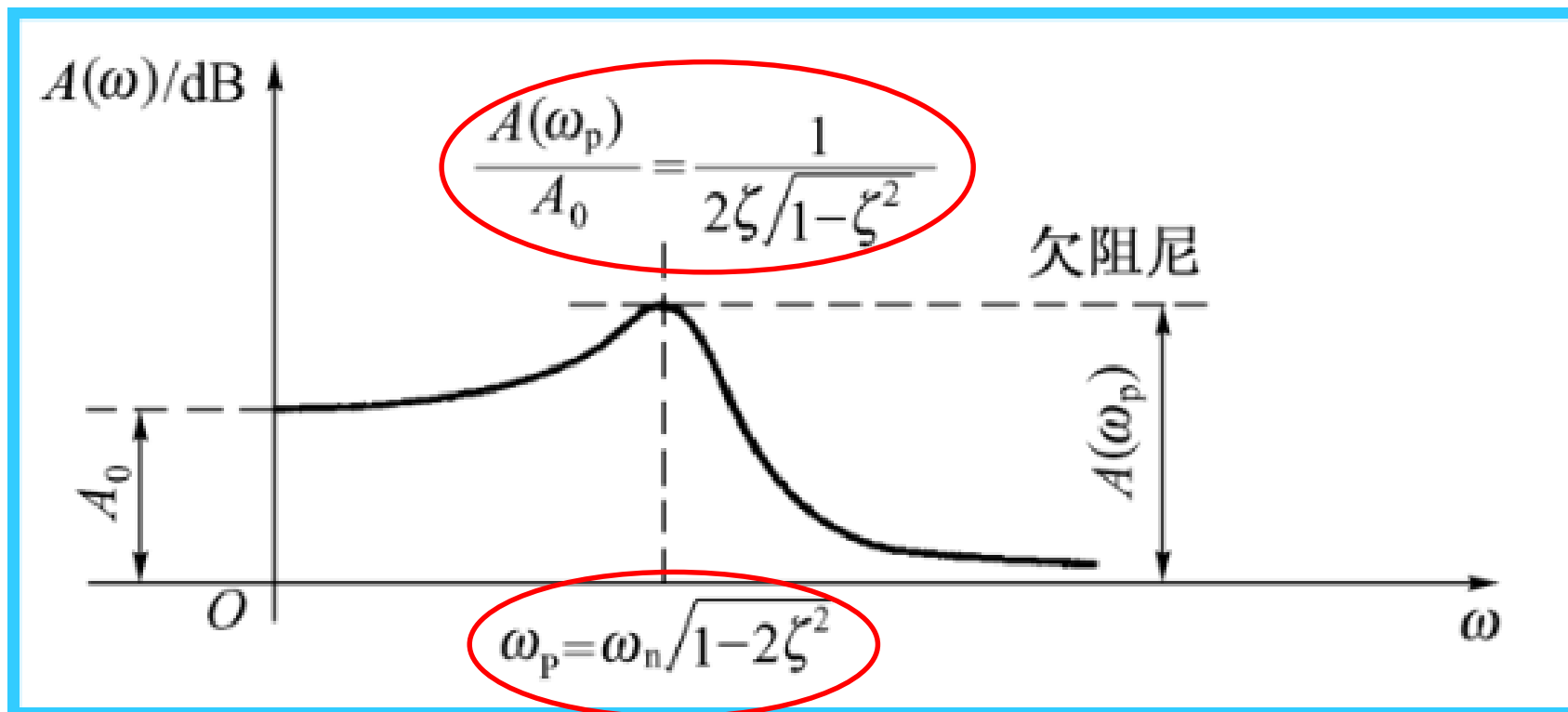
### 1. 一阶系统





## 2.5.2 频率响应法

### 2. 二阶系统





# 本章小结

**本章内容：**围绕测试结果能否正确反映被测信号这一测试中最重要的问题，探讨测试装置的静态、动态特性和不失真测试条件。

1. 非线性度、灵敏度、迟滞、重复性含义；
2. 系统不失真测试条件；
3. 一阶系统动态特性分析；
4. 二阶系统动态特性分析；
5. 系统特性参数的确定。

