第六章 Fourier变换

- §6.1 Fourier级数
- §6.2 Fourier积分变换
- *§6.3 δ函数及其Fourier积分变换

§6.1 Fourier级数

❖ 狄利克雷定理

设$f(x)$是周期为$2l$（$l>0$）的函数，即$f(x+2l)=f(x)$。若$f(x)$满足狄利克雷条件：

（i） $f(x)$连续或在每一周期中只有有限个第一类间断点（间断点处函数的跳跃度为有限值）；

（ii） $f(x)$每一周期中只有有限个极值。

那么$f(x)$可展开成如下三角函数级数

$$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=\begin{cases} f(x) & \text{(连续点处)} \\ \dfrac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] & \text{(间断点处)} \end{cases}$$

基本函数族：

$$1, \quad \cos\frac{\pi x}{l}, \ \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \ \cos\frac{k\pi x}{l}, \ldots$$

$$\sin\frac{\pi x}{l}, \ \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \ \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots$$

是正交的，**其中任意两个函数的乘积在一个周期上的积分等于零**，即

$$\begin{cases} \int_{-l}^{l} 1\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad (k\neq 0) \\ \int_{-l}^{l} 1\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x = 0 \\ \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad (k\neq n) \\ \int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x = 0 \qquad (k\neq n) \\ \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x = 0 \end{cases}$$

$$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=\begin{cases} f(x) & \text{(连续点处)} \\ \dfrac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] & \text{(间断点处)} \end{cases}$$

利用三角函数正交性，可得

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\ldots,+\infty)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\ldots,+\infty)$$

❖ 函数的周期性延拓

（ i ）奇延拓

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(0,l) \\ -f(-x) & x\in(-l,0) \end{cases}$$

（ ii ）偶延拓

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(0,l) \\ f(-x) & x\in(-l,0) \end{cases}$$

例6.3 将函数$f(x)=x$, $x\in(0,l)$进行奇延拓和偶延拓，然后再展开为Fourier级数。

解：1）奇延拓$F_1(x)=x$，$x\in(-l,l)$

$$设\ F_1(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F_1(x)dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}xdx=0$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F_1(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}$$

$$所以\quad f(x)=x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l},x\in(0,l)$$

2）偶延拓$F_2(x)$＝｜x｜，$x\in$（$-l,l$）

设 $F_2(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F_2(x)dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|x|dx=\frac{l}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F_2(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|x|\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\frac{2l}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F_2(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|x|\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0$$

所以

$$f(x)=x=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l},x\in(0,l)$$

§6.2 Fourier积分变换

- Fourier积分变换的定义

$$\bar{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

$$\bar{f}(\omega)=F\left[f(x)\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

$$f(x)=F^{-1}\left[\bar{f}(\omega)\right]$$

例6.4 试求如下指数衰减函数的Fourier积分变换

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-\beta x}, & x\ge 0,\beta>0\end{cases}$$

解：$$\bar{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta x}e^{-i\omega x}dx\neq$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bullet\frac{1}{\beta+i\omega}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\bullet\frac{e^{i\omega x}}{\beta+i\omega}d\omega=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ e^{-\beta x}, & x>0\end{cases}$$

Fourier积分变换的重要性质

(i)线形关系

$$F\left[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\right]=\alpha F\left[f_1(x)\right]+\beta F\left[f_2(x)\right]$$

$$F^{-1}\left[\alpha\bar{f}_1(\omega)+\beta\bar{f}_2(\omega)\right]=\alpha F^{-1}\left[\bar{f}_1(\omega)\right]+\beta F^{-1}\left[\bar{f}_2(\omega)\right]$$

(ii)延迟定理 $F\left[f(x\pm x_0)\right]=\bar{f}(\omega)e^{\pm i\omega x_0}$

(iii)位移定理 $F\left[e^{\pm i\omega x_0}f(x)\right]=\bar{f}(\omega\mp\omega_0)$

(iv)微分定理 $$F\left[f'(x)\right]=\mathrm{i}\omega\bar{f}(\omega)$$

(v)积分定理 $$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\bar{f}(\omega)$$

(vi)卷积定理

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-\xi)f_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_1(x)*f_2(x)\right]$$

$$=\bar{f}_1(\omega)\cdot\bar{f}_2(\omega)$$

$$F\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\omega-\omega')f_2(\omega')\mathrm{d}\omega'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_1(\omega)*f_2(\omega)$$

*§6.3 δ函数及其Fourier积分变换

- δ函数的形式定义

（i） $$\delta(x-x_0)=\begin{cases}+\infty, & x-x_0=0\\ 0, & x-x_0\neq 0\end{cases}$$

（ii） $$\int_a^b \delta(x-x_0)dx=1 \quad (a<x_0<b)$$

或 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)dx=1 \quad (x_0\text{为已知实数})$$

本章作业 6-3; 6-6(1)(3);

补充作业1：将函数$f(x)=x$, $x\in(0, l)$ 按下列边界要求展开为Fourier级数。

1）$f(0)=f(l)=0$　　2）$f(0)=f'(l)=0$

3）$f'(0)=f(l)=0$　　4）$f'(0)=f'(l)=0$

补充作业2：证明

(1)延迟定理 $F\left[f(x\pm x_0)\right]=\bar{f}(\omega)e^{\pm i\omega x_0}$　　请1班同学证明

(2)位移定理 $F\left[e^{\pm i\omega x_0}f(x)\right]=\bar{f}(\omega\mp\omega_0)$　　请2班同学证明

(3)微分定理 $F\left[f'(x)\right]=i\omega\bar{f}(\omega)$　　请3班同学证明

1）$f(0)=f(l)=0$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}$$

$$\boxed{f(x)=x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l},x\in(0,l)}$$

2）$f(0)=f'(l)=0$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2l(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$$

$$\boxed{f(x)=x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2l(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l},x\in(0,l)}$$

3）$f'(0)= f(l)=0$ $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2l(-1)^l}{(n+\frac{1}{2})\pi}-\frac{2l}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$$

$$\boxed{f(x)=x=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2l(-1)^l}{(n+\frac{1}{2})\pi}-\frac{2l}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right]\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l},\ x\in(0,l)}$$

4）$f'(0)= f'(l)=0$ $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l x\,\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2l}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$$

$$\boxed{f(x)=x=\frac{l}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ x\in(0,l)}$$