《高等数学Ⅰ、Ⅱ》（上）期末复习题（4）答案

大题	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

得 分	

1．已知$f'(3)=2$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$___$-1$___.

2．设$f(x)$是连续函数，且$f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，$f(x)=$__$x-1$_____.

3. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$____$\dfrac{1}{3}$_____.

4．函数$f(x)=(x-1)\cos x-\sin x$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值是__$-\sin 1$_____.

5. 双曲线$xy=4$在$(2,2)$处的曲率为____$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$___.

6．曲线 $y=e^x(x^2-x)$ 上有___2____个拐点.

7．广义积分$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx=$ ________$\dfrac{1}{2}$__________.

8. 方程 $y'+2xy=4x$ 的通解是____ $y=ce^{-x^2}+2$__________________.

9. 设$y=f(\sin x)$，f可微，则$dy=$_$f'(\sin x)\cos x dx$______.

10.$\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{\sin x}{x^8+1}+x^2\right)dx=$____$\dfrac{2}{3}$___.

二、选择题（每题 3 分，共 12 分）

得 分	

11、设有下列 4 个条件：

（1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；（2） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

（3） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导；（4） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

则这 4 个条件之间的正确关系是（ B ）

（A）$(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)\Rightarrow(2)$　　（B）$(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)\Rightarrow(2)$

（C）$(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$　　（D）$(1)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(2)$

12.曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

（A）没有渐近线　　（B）仅有水平渐近线
（C）仅有铅直渐近线　　（D）既有水平渐近线又有铅直渐近线

13． 设$f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则（ D ）

(A)x=0,x=1 都是 $f(x)$ 的第一类间断点；

(B) x=0,x=1 都是 $f(x)$ 的第二类间断点；

(C) x=0 是 $f(x)$ 的第一类间断点，x=1 是 $f(x)$ 的第二类间断点；

(D) x=0 是 $f(x)$ 的第二类间断点，x=1 是 $f(x)$ 的第一类间断点。

14. 设$\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt,\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,则当$x\to 0$时，$\alpha(x)$是$\beta(x)$的

（ D ）

（A）高阶无穷小；　　（B）低阶无穷小；

（C）等价无穷小；　　（D）同阶但不等价的无穷小。

三、计算题（每题 5 分，共 30 分）

得 分	

15．计算极限： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\cot^2 x}$

解：原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{\tan^2 x}}$ $\quad ------2$分

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{6}} \qquad -------3\text{分}$$

16.设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2$ $\quad ---------3$分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{6t^2+11t+5}{t}$ $\quad ---------2$分

17.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}-x+y^3=0$ 所确定，求 $y'(0)$

解：当 $x=0$ 时, $y=-1$ $\quad ------1$分

$$e^{xy}(y+xy')-1+3y^2y'=0$$

$$y'=\frac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2} \qquad ------3\text{分}$$

$$y'\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=\frac{2}{3} \qquad ------1\text{分}$$

18．求函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ 的单调区间与凹凸区间。

解：定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ---------1分

令$f'(x)=(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}=0$,得驻点$x=1$

$f''(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\neq 0$ ---------2分

所以$f(x)$的单增区间为$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$,
单减区间为$(0,1)$;
$f(x)$的凸区间为$(-\infty,0)$，凹区间为$(0,+\infty)$---------2分

19． 求$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

解：原式$=\int\arctan\sqrt{x}d(2\sqrt{x})$ --------3分

$=2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}-\int\frac{1}{1+x}dx$

$=2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}-\ln|1+x|+c$--------2分

20.设$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x<0\\ xe^{-x^2} & x\geq 0\end{cases}$,求$\int_0^2 f(x-1)dx$

解：令 $u=x-1$

$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(u)du$ …………2分

$=\int_{-1}^0(1+u^2)du+\int_0^1 ue^{-u^2}du$

$=\frac{11}{6}-\frac{1}{2e}$ …………3分

四、解答题（每题 6 分，共 18 分）

得 分	

21. 设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，当$x=-1$时，有极大值5，当$x=1$时，有极小值1，求a, b, c, d的值

解：$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ------2分

$$由\begin{cases}f(-1)=5\\f(1)=1\\f'(-1)=0\\f'(1)=0\end{cases}即\begin{cases}-a+b-c+d=5\\a+b+c+d=1\\3a-2b+c=0\\3a+2b+c=0\end{cases}得\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\\d=3\end{cases}$$ ---------4分

22．求曲线$x=y^2$及$y=x-2$所围成的平面图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解：由$\begin{cases}x=y^2\\y=x-2\end{cases}$得交点（1,-1），（4,2），……………………………1 分

所求面积$A=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy=\dfrac{9}{2}$…………………………3 分

所求体积$V=\int_0^4\pi x dx-\int_2^4\pi(x-2)^2dx=\dfrac{16}{3}\pi$. ……………………………2 分

23. 求微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解。

解：特征方程：$\lambda^2-4=0$，$\lambda_1=-2,\lambda_2=2$

$y''-4y=$ e^{2x} 的通解：$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$ （3 分）

特解待定形式：$y^*=xe^{2x}a$，代入原方程得$a=\dfrac{1}{4}$。 （2 分）

非齐次方程的通解为$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\dfrac{x}{4}e^{2x}$ （1 分）

五、证明题（每题 5 分，共 10 分）

得 分	

24. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，（0,1）内可导，且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$,。

证明：在$(0,1)$内至少存在一点c,使$f'(c)=0$

证:因为函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，

所以由积分中值定理知，在$\left[\frac{2}{3},1\right]$内存在一点$c_1$,

使$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(c_1)$ ---------2分

所以$f(c_1)=f(0)$

由罗尔定理知，在$(0,c_1)\subset(0,1)$内至少存在一点c,

使$f'(c)=0$ ---------3分

25. 设$f(x)$为可导函数,$f'(0)=a$ （a 为常数），

又对任意$x,y\in(-\infty,+\infty)$均有$f(x+y)=f(x)+f(y)$

证明：$f(x)=ax$

证法一：$f(0)=0$ ------1分

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$$ --------2分

所以 $f(x)=ax+c$

由$f(0)=0$得$c=0$

所以$f(x)=ax$ --------2分

证法二：因为$f(x+y)=f(x)+f(y)$

两边对y求导，x看作常数，得

$f'(x+y)=f'(y)$

令$y=0$,得$f'(x)=f'(0)=a$ --------3分

由$f(0)=0$得$c=0$

所以$f(x)=ax$ --------2分