第十一章 柱函数

- §11.1 柱函数的定义
- §11.2 柱函数的重要性质

§11.1柱函数的定义

- 柱函数

第一类柱函数：贝塞耳函数

第二类柱函数：诺伊曼函数

第三类柱函数：汉克尔函数

贝赛尔方程 $$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y(x)=0$$

贝塞耳函数

定义 $$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k-\nu}$$

当 ν 不为整数时，$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和J-v(x)线性无关

当 ν 为整数时，$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和J-v(x)线性相关

$$\mathrm{J}_{-m}(x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(x)$$

递推关系：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(x)\right]=-x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$$

$$\nu\mathrm{J}_{\nu}(x)+x\mathrm{J}_{\nu}'(x)=x\mathrm{J}_{\nu-1}(x)$$
$$-\nu\mathrm{J}_{\nu}(x)+x\mathrm{J}_{\nu}'(x)=-x\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x)+\mathrm{J}_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}\mathrm{J}_{\nu}(x)$$
$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x)-\mathrm{J}_{\nu+1}(x)=2\mathrm{J}_{\nu}'(x)$$

$$\mathrm{J}_0'(x)=-\mathrm{J}_1(x) \qquad \left[x\mathrm{J}_1(x)\right]'=x\mathrm{J}_0(x)$$

诺伊曼函数

定义 $$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{\cos(\nu\pi)\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

当$\boldsymbol{v}$为整数时 $$\mathrm{N}_\nu(x)=\lim_{\nu\to m}\frac{\cos(\nu\pi)\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\ (m\text{为整数})$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(x)}{\partial \nu}-\frac{1}{\cos\nu\pi}\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=m}$$

递推关系：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{N}_\nu(x)\right]=x^\nu \mathrm{N}_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} \mathrm{N}_\nu(x)\right]=-x^{-\nu} \mathrm{N}_{\nu+1}(x)$$

汉克尔函数

定义 $\mathrm{H}_{\nu}^{(1)}(x)=\mathrm{J}_{\nu}(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{N}_{\nu}(x)$ ——第一类 v 阶汉克尔函数

$\mathrm{H}_{\nu}^{(2)}(x)=\mathrm{J}_{\nu}(x)-\mathrm{i}\,\mathrm{N}_{\nu}(x)$ ——第二类 v 阶汉克尔函数

递推关系：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\nu}\mathrm{H}_{\nu}^{(1)}(x)\right]=x^{\nu}\mathrm{H}_{\nu-1}^{(1)}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\nu}\mathrm{H}_{\nu}^{(2)}(x)\right]=x^{\nu}\mathrm{H}_{\nu-1}^{(2)}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}\mathrm{H}_{\nu}^{(1)}(x)\right]=-x^{-\nu}\mathrm{H}_{\nu+1}^{(1)}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}\mathrm{H}_{\nu}^{(2)}(x)\right]=-x^{-\nu}\mathrm{H}_{\nu+1}^{(2)}(x)$$

柱函数定义

满足以下两个递推关系的特殊函数，称为柱函数。

记为 $z_\nu(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu z_\nu(x)\right]=x^\nu z_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} z_\nu(x)\right]=-x^{-\nu} z_{\nu+1}(x)$$

定理11.1 任意 ν 阶柱函数都是 ν 阶贝塞耳方程的解。

ν 阶贝塞耳方程的通解式为：

$$y(x)=CJ_\nu(x)+DJ_{-\nu}(x) \qquad (\nu\neq \text{整数})$$

$$y(x)=CJ_\nu(x)+DN_\nu(x) \qquad (\nu\text{为任意实数})$$

$$y(x)=CH_\nu^{(1)}(x)+DH_\nu^{(2)}(x) \qquad (\nu\text{为任意实数})$$

§11.2柱函数的重要性质

- **1. 柱函数的奇异性**

$$J_{\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k-\nu}$$

当$x\to 0$ $J_0(x)\to 1, J_{\nu}(x)\to 0 \quad (\nu>0)$

$$J_{-\nu}(x)\to\infty \quad (\nu>0)$$

可见，

$J_{-\nu}(x)\ (\nu>0), N_{\nu}(x), H_{\nu}^{(1)}(x)$和$H_{\nu}^{(2)}(x)$在原点***x*=0**处发散

$J_{\nu}(x)$在全复平面内收敛

$J_{-\nu}(x)\ \ (\nu>0), N_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x)$和$H_\nu^{(2)}(x)$

在原点**x=0**处发散

$J_\nu(x)$ 在全复平面内收敛

在研究圆柱内部问题时，有自然边界条件

“解在圆柱轴上（**ρ=0**，即**x=0**）应为有限”

按照这个条件，应舍弃

$$J_{-\nu}(x)\ \ (\nu>0), N_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x)\text{和}H_\nu^{(2)}(x)$$

只要$J_\nu(x)\quad (\nu\geq 0)$

❖ 2．柱函数的零点特征

当**x>0**时，$J_{\pm\nu}(x)$和$N_{\nu}(x)$ 均为实变函数，且为衰减振荡型的函数函数曲线与**x**轴有无穷多交点，因此都有无穷多个正实数零点。

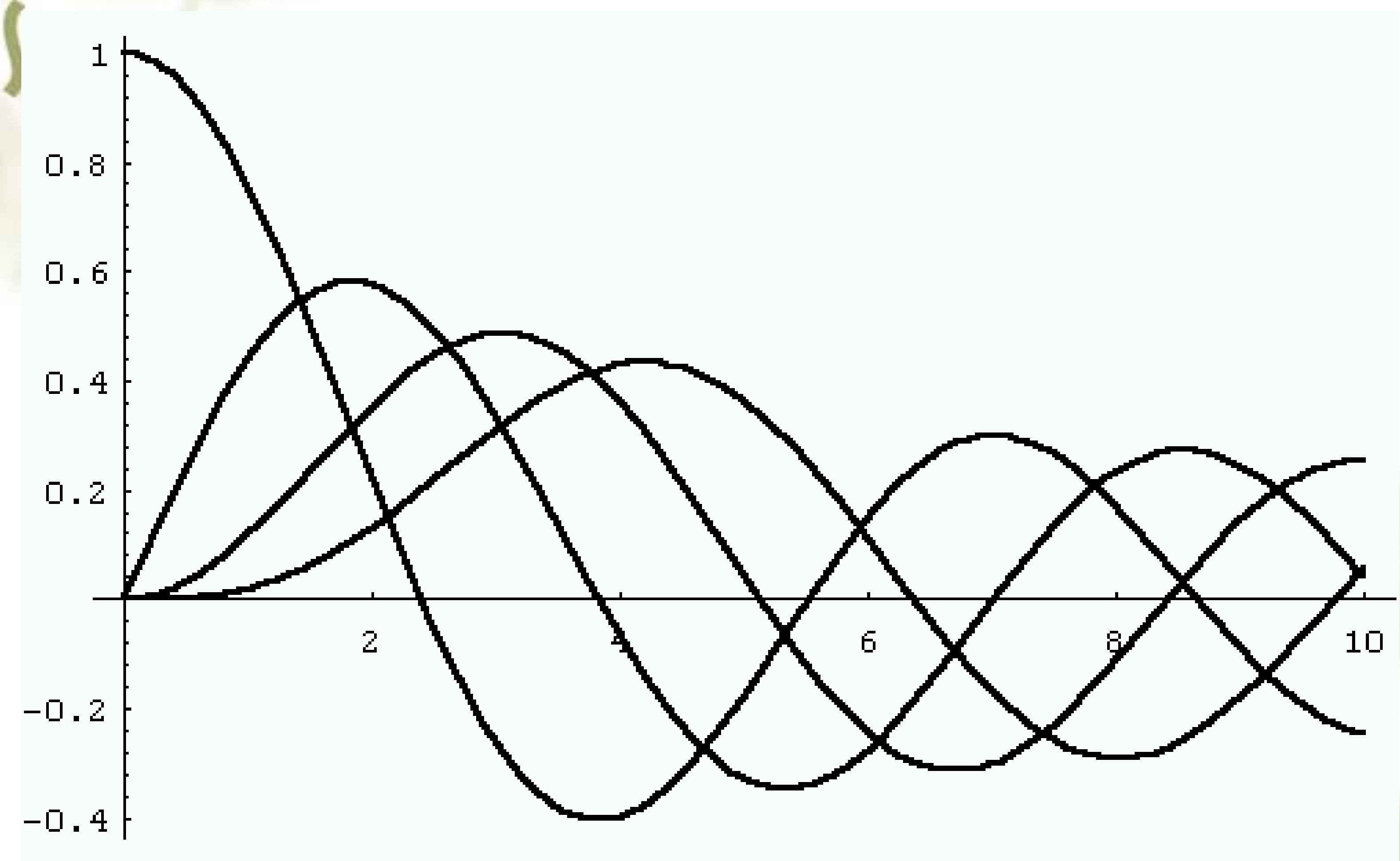
$H_{\nu}^{(1)}(x)$和$H_{\nu}^{(2)}(x)$没有实数零点。

在研究圆柱问题时，有齐次柱侧面边界条件

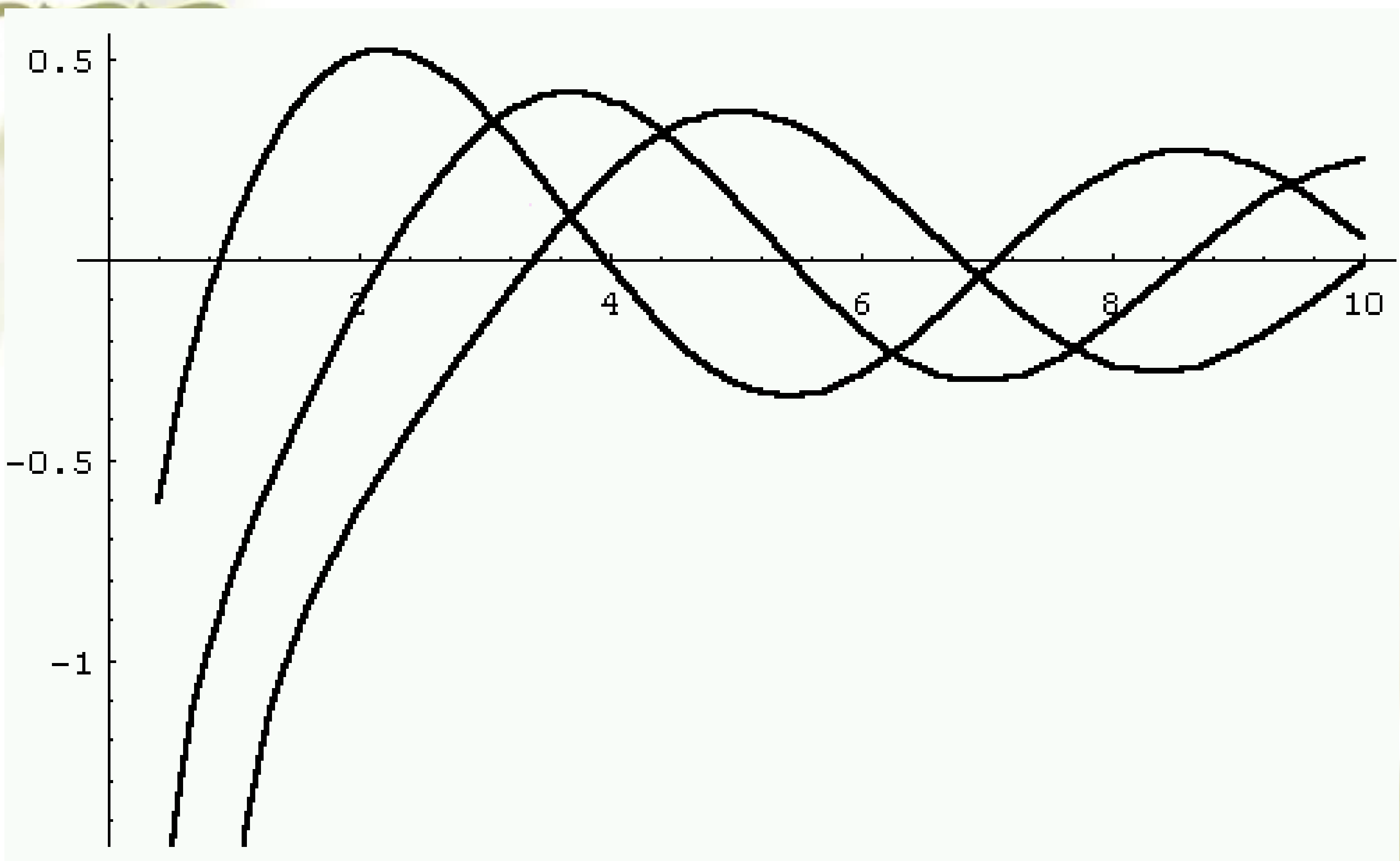
$$\alpha u+\beta\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}=0$$

按照这个条件，应舍弃 $H_{\nu}^{(1)}(x)$和$H_{\nu}^{(2)}(x)$

只要 $J_{\pm\nu}(x)$和$N_{\nu}(x)$



贝塞尔函数的图象



诺伊曼函数的图象

❖ 3. 柱函数的渐近行为

当$|x|\to\infty$时 $J_\nu(x)\to\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos(x-\dfrac{\nu\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4})+O(x^{-3/2})$

$$N_\nu(x)\to\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+O(x^{-3/2})$$

$$H_\nu^{(1)}(x)\to\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp[i(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})]+O(x^{-3/2})$$

$$H_\nu^{(2)}(x)\to\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp[-i(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})]+O(x^{-3/2})$$

当$|x|\to\infty$时，上述几种柱函数全都→0

在研究圆柱外部问题时，有自然边界条件

“解在无限远处（ρ→∞，即x →∞ ）应为有限”

按照这个条件，$J_\nu(x), N_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x)$和$H_\nu^{(2)}(x)$都要保留。

❖ 4. $J_n(x)$ 的母函数（*n*为整数）

$$G(x)=e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\cdot z^n$$

证明 $$e^{xz/2}=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{l!}(\frac{x}{2})^l\cdot z^l \qquad e^{-xz/2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{x}{2})^k\cdot z^{-k}$$

$$e^{(x/2)(z-1/z)}=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!l!}(\frac{x}{2})^{l+k}\cdot z^{l-k}$$

令***l-k=n*** $$e^{(x/2)(z-1/z)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}(\frac{x}{2})^{2k+n}\cdot z^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)z^n$$

5. 贝塞耳函数的正交完备性

柱坐标系中，经常遇到的本征值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\dfrac{\mathrm{d}y(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]+\dfrac{\nu^2}{\rho}y(\rho)=\mu\rho y(\rho) \\ y(\rho)\text{在}(0,\rho)\text{中取有限值} \quad (\text{自然边界条件}) \\ \left(\alpha\dfrac{dy}{d\rho}+\beta y\right)_{\rho=\rho_0}=0 \qquad (\alpha^2+\beta^2\neq 0) \end{cases}$$

由变量代换，令 $\sqrt{\mu}\rho=x$ ，以上偏微分方程可化为

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y(x)=0 \quad (x=\sqrt{\mu}\rho,\nu\geq 0)$$

满足方程和自然边界条件的解为：$y(x)=\mathrm{J}_\nu(\sqrt{\mu}\rho)$

代入本征值问题的边界条件

$$\alpha\sqrt{\mu}J_\nu'(\sqrt{\mu}\rho_0)+\beta J_\nu(\sqrt{\mu}\rho_0)=0$$

本征值 $\mu_i(i=1,2,3\ldots)$ 本征函数 $J_\nu(\sqrt{\mu_i}\rho)$

(1)第一类边界条件 $J_\nu(\sqrt{\mu_i}\rho_0)=0$

(2)第二类边界条件 $J_\nu'(\sqrt{\mu_i}\rho_0)=0$

(3)第三类边界条件 $\alpha\sqrt{\mu_i}J_\nu'(\sqrt{\mu_i}\rho_0)+\beta J_\nu(\sqrt{\mu_i}\rho_0)=0$

正交关系

对应于不同本征值 $\mu_i (i=1,2,3...)$ 的**Bessel**函数$J_\nu(\sqrt{\mu_i}\rho)$ 满足

$$\int_0^{\rho_0} J_\nu(\sqrt{\mu_i}\rho) J_\nu(\sqrt{\mu_j}\rho)\rho d\rho = 0 \quad (i \neq j)$$

完备性

如果函数 $f(\rho)$ 满足迭利克雷的条件，则有

$$f(\rho) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i J_\nu(\sqrt{\mu_i}\rho)$$ ——傅立叶-贝塞耳级数

$$c_i = \frac{1}{N_i^2}\int_0^{\rho_0} f(\rho) J_\nu(\sqrt{\mu_i}\rho)\rho d\rho$$

其中，$N_i = \left[\int_0^{\rho_0} J_\nu^2(\sqrt{\mu_i}\rho)\rho d\rho\right]^{\frac{1}{2}}$ ——模

本章作业

11-1(1)(2)(3);

11-2(1)(2)(3);

11-6;