

## 数值计算方法 要点例题汇总

### 第一章 引论

要点：绝对误差、相对误差和误差传播的计算

例题（误差传播） 课时02

例题：

某圆柱体高度测量结果是  $H = 6.0 \pm 0.2 \text{ cm}$   
直径测量结果是  $D = 5.0 \pm 0.1 \text{ cm}$   
求其体积  $V$  的绝对误差和相对误差

其他：数值计算的几个注意（近数相减、大数吃小数等）

### 第二章 非线性方程求根

重点：牛顿迭代法、收敛阶的计算

例题（牛顿法） 课时05

例：用牛顿迭代法计算方程

$$x - \cos x = 0$$

的实根，要求精确到

$$|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$$

例题（收敛阶） 课时06

例：牛顿法解  $x^2 - 2 = 0$  是几阶收敛的？

其他：二分法、牛顿法的改进（牛顿下山、弦割法）、艾特肯加速

### 第三章 线性代数方程组的解法

重点：范数、雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法、谱半径、收敛条件

例题（范数） 课时10

例1：计算向量  $x = (1, 3, -5)^T$ ， $p = 1, 2, \infty$  三种范数

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

求  $\|A\|_1$  ,  $\|A\|_2$  ,  $\|A\|_\infty$  和  $\|A\|_F$

例题（迭代法） 课时12

用 Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

例题（谱半径） 课时12

例：求  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$  的谱半径。

判断  $A = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & 0 \\ -0.3 & 0 & -0.3 \\ 0 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}$  的谱半径的范围。

例题（收敛条件） 课时13

考察线性方程组  $AX = b$  的采用 Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法的收敛情况

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其他：Cramer 规则、高斯消元法、Doolittle 分解、追赶法

## 第四章 插值和拟合

要点：拉格朗日插值多项式（事后误差）、牛顿基本插值多项式、曲线拟合的最小二乘法、梯度下降算法优化

例题（拉格朗日）课时14

**例题** 有数据

$x$	...	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	...
$e^x$	...	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487	...

用线性插值和抛物线插值求  $e^{0.285}$  的数值并估计截断误差。

例题（事后误差）课时15

例：计算  $\sqrt{7}$  的数值，并估计事后误差

例题（牛顿）课时16

例：求通过点

$x_0 = -2$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$f(x_0) = 1$	$f(x_1) = 1$	$f(x_2) = 2$	$f(x_3) = 1$

牛顿插值多项式

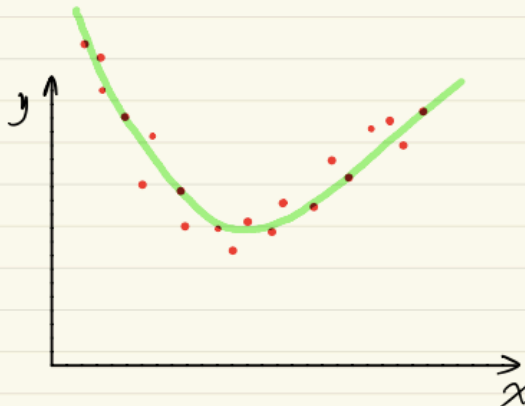
作业（最小二乘）

作业：已知有  $n$  个数据点

$(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$

现准备用函数  $y = ax + \frac{b}{x}$

做拟合。试确定其中系数  $a$  和  $b$  的表达式（用  $n, x_i, y_i$  表示出来）



例题（梯度下降）课时19

例：  $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 + x_1 + 2x_2$

其他：差商、分段低次插值（龙格现象）、三次样条插值、二阶埃尔米特插值、双线性插值

## 第五章 数值微分与数值积分

要点：复合梯形公式、复合辛普森公式、积分误差估计、龙贝格算法

例题（积分）课时23

例：用复合梯形公式和复合辛普森公式求  $\int_0^1 e^x dx$

例题（误差估计）课时23

例：利用误差公式估算 使用辛普森公式计算  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  时的区间个数为多少时能满足误差小于  $0.5 \times 10^{-6}$ .

例题（龙贝格算法）课时24

例：用龙贝格法求  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  值

其他：二点公式、三点公式、偏微分数值、牛顿-科茨公式、二重积分问题

## 第六章 微分方程数值解

要点：欧拉方法、预报校正、RK方法、Adams方法、偏微分方程

例题（欧拉）课时25

例：用欧拉法求  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} & x \in [-1, 1] \\ y(x=-1) = 1 \end{cases}$  的数值解

RK方法的讲解 课时27

例题（Adams）课时28

例：用二阶 Adams 公式计算  $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} & x \in [-1, 1] \\ y(x=-1) = 1 \end{cases} \quad h=0.01$

其他：隐式欧拉方法、变步长方法、收敛性和稳定性、一阶方程组、高阶微分方程、打靶法、有限差分法

## 第七章 机器学习

要点：无

其他：神经网络、感知器模型、分批次梯度下降算法、过拟合现象、卷积神经网络