第三章　多维随机变量及其分布

§3.1　1．盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球。以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数，求 X 和 Y 的联合分布律。

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{C_3^2 C_2^2}{C_7^4}$	C_2^1/C_7^4
1	0	$\frac{C_3^1 C_2^1}{C_7^4}$	$\frac{C_3^2 C_2^1 C_2^1}{C_7^4}$	C_2^1/C_7^4
2	$\frac{1}{C_7^4}$	$\frac{C_3^1 C_2^1}{C_7^4}$	$\frac{C_3^2}{C_7^4}$	0

即

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	3/35	2/35
1	0	6/35	12/35	2/35
2	1/35	6/35	3/35	0

2．已知随机变量 X 和 Y 的联合分布律为

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	a	$\frac{1}{24}$
2	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

（1）求 a，b 应满足的条件；

$$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{24}+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1 \Rightarrow a+b=\frac{11}{24}$$

（2）若 $P\{X\le 2.5，Y\le 1.5\}=\frac{3}{8}$，求 a，b。

$$P\{X\le 2.5, Y\le 1.5\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{8}+a=$$

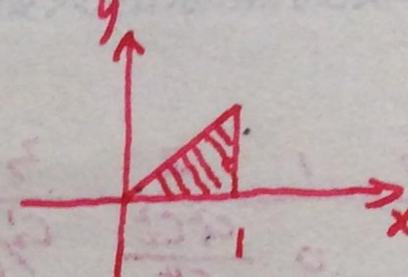
3．设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} kx^2y, & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（1）求系数 k；

$$\int_0^1 dx\int_0^x kx^2y\,dy=\int_0^1 \frac{k}{2}x^4\,dx$$

$$=\frac{k}{10}=1$$

$$\therefore k=10$$

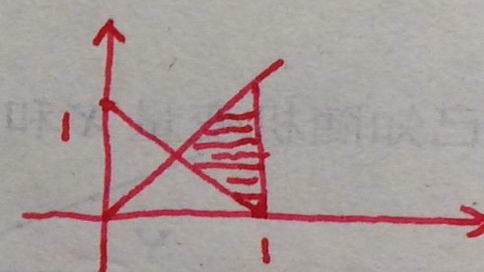


（2）求 $P\{X+Y\ge 1\}$。

$$P\{X+Y\ge 1\}=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_{1-x}^x 10x^2y\,dy$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 (10x^3-5x^2)\,dy$$

$$=\frac{85}{96}$$



4. 已知二维随机变量（X, Y）的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1） 求（X, Y）的分布函数 $F(x, y)$；

$$F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x 2xe^{-x^2}dx\int_0^y 2ye^{-y^2}dy=(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}) & x>0,\ y>0\\ 0 & 其它.\end{cases}$$

（2）求 $P\{X\le 2,\ Y<+\infty\}$。

$$P\{X\le 2, Y<+\infty\}=F(2,+\infty)=1-e^{-4}$$

5．设随机变量（X，Y）的分布函数为

$$F(x, y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

（1）求常数 A，B，C；

$$\begin{cases} F(-\infty, +\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)C=0 \\ F(+\infty, -\infty)=AB\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{\pi^2},\ B=C=\frac{\pi}{2}$$

（2）求概率密度 $f(x, y)$。

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{2}{4+x^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$$

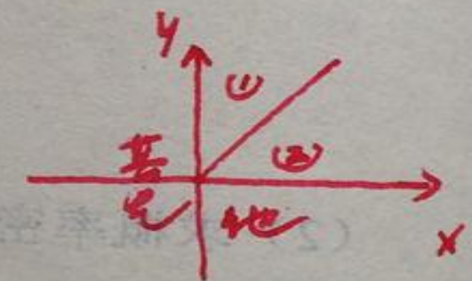
3.2 6. 5件同类产品装在甲、乙两个盒中，甲盒装 2 件，乙盒装 3 件，每件产品是合格品的概率都是 0.4，现随机地取出一盒，以 X 表示取得的产品数，Y 表示取得的合格品数，写出（X, Y）的联合分布律，并写出边缘分布律。

$Y \backslash X$	2	3	$p_{i\cdot}$
0	0.18	0.108	0.288
1	0.24	0.216	0.456
2	0.08	0.144	0.224
3	0	0.032	0.032
$p_{\cdot j}$	0.5	0.5	

7. 设（X，Y）的分布函数为

$$F(x,\ y)=\begin{cases}1-e^{-x}-xe^{-y}, & y\ge x>0,\\ 1-e^{-y}-ye^{-x}, & x>y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（1）求边缘分布函数 $F_X(x)$，$F_Y(y)$；



$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（2）求（X，Y）的概率密度。

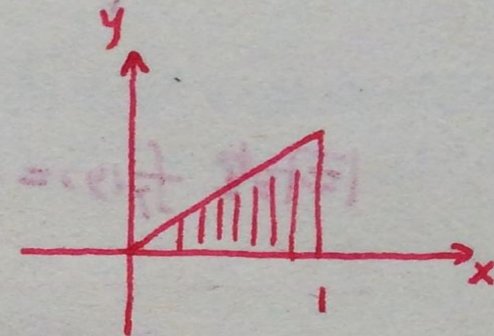
$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{cases}e^{-x}-e^{-y} & y\geq x>0\\ ye^{-x} & x>y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\geq x>0\\ e^{-x}, & x>y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

8．设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}k(1-x)y, & 0<x<1,\ 0<y<x,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1）求常数 k；



$$\int_0^1 (1-x)\,dx\int_0^x ky\,dy=\int_0^1 \frac{k}{2}(x^2-x^3)\,dx$$

$$=\frac{k}{24}=1$$

$$\therefore k=24$$

（2）求 X，Y 的概率密度。

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x 24(1-x)y\,dy=12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 24(1-x)y\,dx=12y(1-y)^2, & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

解:3 9. 已知随机变量（X, Y）的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases} ke^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

（1）确定 k;

$$F(+\infty,+\infty)=k\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-y}dy=k=1$$

即 $k=1$

（2）求边缘概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy = e^{-x} & x>0 \\ 0 & 其它\end{cases}$$

同理 $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & 其它\end{cases}$

（3）X 和 Y 是否独立？

$f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$

10. 已知 X 与 Y 的分布律分别为

X	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{XY=0\}=1$。

（1）求（X，Y）的联合分布律；

$p\{XY=0\}=1 \Rightarrow p\{XY\neq 0\}=0$

$\therefore$

$Y \backslash X$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	x_1	x_2	x_3	$1/2$
1	0	x_4	0	$1/2$
$p_{i\cdot}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

$\Rightarrow x_1=\frac{1}{4}\quad x_3=\frac{1}{4}\quad x_4=\frac{1}{2}\quad x_2=0$

（2）问 X 和 Y 是否独立？

$\because P\{X=-1, Y=0\} \neq P\{X=-1\} \cdot P\{Y=0\}$

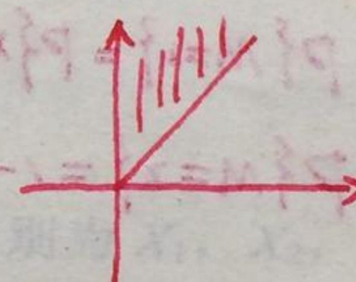
$\therefore X \cdot Y$ 不相互独立.

11．设 X，Y 分别表示甲、乙两个元件的寿命（单位：千小时），其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & y \le 0, \end{cases}$$

若 X 与 Y 独立，两个元件同时开始使用，求甲比乙先坏的概率。

$$P\{X<Y\} = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_x^{+\infty} 2e^{-2y} dy$$



$$= \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

§3.4 12. 设 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

随机变量 Y 与 X 的分布律相同且与 X 独立。求

（1） $Z = X + Y$ 的分布律；

Z	0	1	2	3	4
p_k	$1/36$	$4/36$	$10/36$	$12/36$	$9/36$

（2） $M=\max\{X,\ Y\}$ 的分布律；

$P\{M=0\}=P\{X=0, Y=0\}=\frac{1}{36}$

$P\{M=1\}=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=0, Y=1\}+P\{X=1, Y=0\}=\frac{8}{36}$

$P\{M=2\}=1-\frac{1}{36}-\frac{8}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

（3） $N=\min\{X,\ Y\}$ 的分布律。

$P\{N=2\}=P\{X=2, Y=2\}=\frac{9}{36}$

$P\{N=1\}=P\{X=2, Y=1\}+P\{X=1, Y=2\}+P\{X=1, Y=1\}=\frac{16}{36}$

$P\{N=0\}=1-\frac{9}{36}-\frac{16}{36}=\frac{11}{36}$

13．设 X，Y 的概率密度如下，且 X，Y 相互独立。

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

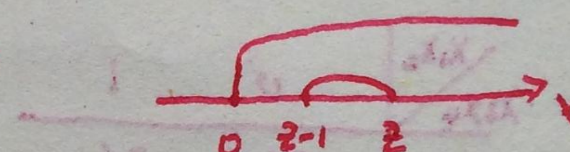
试求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

由卷积公式

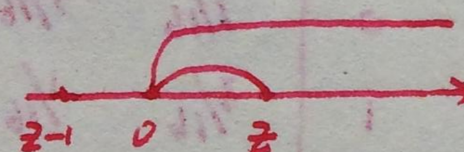
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dz$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 0<z-x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ z-1<x<z \end{cases}$$

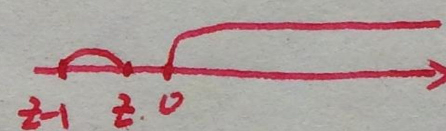
① $z-1\geq 0$，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} e^{-x}\cdot 2(z-x)\,dx = 2e^{-z}$



(2) $0<z<1$，$f_Z(z)=\int_{0}^{z} e^{-x}\cdot 2(z-x)\,dx = 2e^{-z}+2z-2$



(3) $z\leq 0$，$f_Z(z)=0$



$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases} 0 & z\leq 0 \\ 2e^{-z}+2z-2 & 0<z<1 \\ 2e^{-z} & z\geq 1 \end{cases}$$

14. 系统由 5 个元件串联而成，5 个元件的寿命分别为 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5，它们相互独立，且都服从参数 $\lambda=\frac{1}{2000}$ 的指数分布，求系统寿命大于 1 000 的概率。

设 $Z=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_5\}$

则 $F_Z(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]^5$

又∵ $F_{X_1}(z)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{z}{2000}}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$

∴ $P\{Z>1000\}=1-F_Z(1000)=[1-(1-e^{-\frac{1}{2}})]^5=e^{-\frac{5}{2}}$

15．已知随机变量 X_1，X_2，X_3，X_4 相互独立且同分布，每个 X_i 均服从 $b\left(1,\dfrac{1}{2}\right)(i=1,2,3,4)$，求 $Y=\begin{vmatrix} X_1 & X_3 \\ X_4 & X_2 \end{vmatrix}$ 的分布律。

解 $Y = X_1X_2 - X_3X_4$

由

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

⇒

X_1X_2	0	1
p_k	3/4	1/4

同理

X_3X_4	0	1
p_k	3/4	1/4

$X_3X_4 \backslash X_1X_2$	0	1
0	9/16	3/16
1	3/16	1/16

⇒

Y	-1	0	1
p_k	3/16	10/16	3/16

16．设 X 与 Y 是独立同分布的随机变量，它们都服从 $N(0,\ 1)$，试求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布函数与概率密度。

$$\varphi_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad \varphi_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\therefore \varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$$

1: $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$

2: $z\geq 0$ 时. $F_Z(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr$$

$$=1-e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{2}}, & z\geq 0\\ 0, & z<0\end{cases}\qquad f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}z e^{-\frac{z^2}{2}} & z\geq 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$