数值计算方法

第二章　非线性方程求根

ruiluo@outlook.com

单变量非线性方程

- 单变量非线性方程

$$f(x) = 0$$

其中$x \in R$, $f(x) \in C[a,b]$。这里C表示在区间上连续

- 有根区间, 逐次搜索
- 确定根所在的区间,进行根的隔离
- 通过数值方法,近似求解,并保证精度要求

求有根区间

例： 求 $f(x) = x^3 - 10x^2 + 30x - 25 = 0$ 的有根区间

求有根区间

例： 求 $f(x) = x^3 - 10\,x^2 + 30\,x - 25 = 0$ 的有根区间

$f(x)$ 连续，所以可以通过检测 $x = 0, 1, 2, \cdots, 6$ 上函数的正负来初步确定函数的有根区间

二分法

- 逐次搜索法：将区间$[a,b]$ 分成若干小的子区间，由零点定理确定根所在的子区间，不断细分直到满足精度要求
- 二分法（逐次搜索法的一种）：
  1. 有根区间$[a,b]$令为有根区间$[a_0,b_0]$,$i=0$
  2. 考察有根区间$[a_i,b_i]$，取中点$x_i=(a_i+b_i)/2$，
  3. 根据$f(x_i)$，$f(a_i)$，$f(b_i)$的符号，判断根在$[a_i,x_i]$还是$[x_i,b_i]$内
  4. 将折半过后的有根区间作为$[a_{i+1},b_{i+1}]$
  5. 重复步骤2 − 4，直到达到求解精度
- 二分法的优点是算法简单，且总是收敛的
- 缺点是事先要确定有根区间，且收敛较慢，且不能用于求复根或偶数重根

例： 求方程 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在区间 $[1.0, 1.5]$ 内的一个实根,要求准确到小数点后的第2 位

不动点迭代法(简单迭代法)

- 将方程$f(x)=0$改写成等价的形式:

$$x = g(x)$$

- 若x^* 满足$f(x^*)=0$,则$x^* = g(x^*)$,反之亦然。称x^*为函数$g(x)$ 的一个不动点。
- 选择一个初始近似值x_0 ,将它代入上式右端，即可求得:

$$x_1 = g(x_0)$$

可以如此反复迭代计算:$x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$
- 如果有

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

则认为算法收敛

不动点迭代法(简单迭代法)

例：求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近的根

不动点迭代法(简单迭代法)

例：求方程 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的根

解：将原方程写成

$$x = \sqrt[3]{x+1}$$

的形式。所以迭代形式应为：

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}$$

不动点迭代法(简单迭代法)

例：求方程 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的根

解：将原方程写成

$$x = \sqrt[3]{x+1}$$

的形式。所以迭代形式应为：

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}$$

0	1.50000
1	1.35721
2	1.33086
3	1.32588
4	1.32494
5	1.32476
6	1.32473
7	1.32472
8	1.32472

不动点迭代法(简单迭代法)

采用迭代形式 $x_{k+1} = x_k^3 - 1$ 能不能行?

不动点迭代法(简单迭代法)

- 求解方程

$$f(x) = x - x^{1/3} - 2 = 0$$

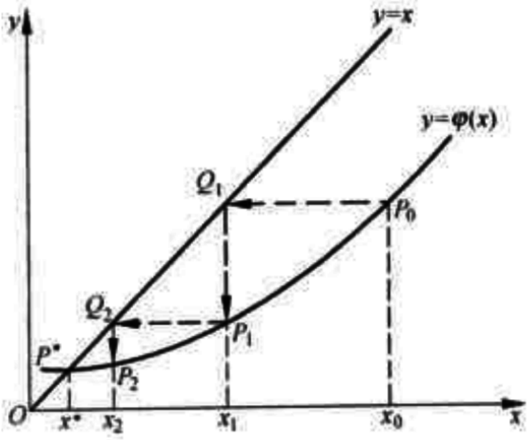
在3.5附近的根

- 求解格式可以有：
  - $g_1(x) = x^{1/3} + 2$
  - $g_2(x) = (x-2)^3$
  - $g_3(x) = \frac{6+2x^{1/3}}{3-x^{-2/3}}$

不动点迭代法(简单迭代法)

k	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
0	3	3	3
1	3.4422495703	1	3.5266442931
2	3.5098974493	-1	3.5213801474
3	3.5197243050	-27	3.5213797068
4	3.5211412691	-24389	3.5213797068
5	3.5213453678	$-1.45107e+13$	
6	3.5213747615	$-3.05539e+39$	
7	3.5213789946	$-2.85233e+118$	
8	3.5213796042	$-\inf$	
9	3.5213796920	$-\inf$	
10	3.5213797047	$-\inf$	
11	3.5213797065	$-\inf$	

迭代法的几何意义



还有三种情况参看教材，图2－4

迭代法收敛的充分条件

定理1

设$g(x) \in [a,b]$ 满足以下两个条件:

1. 对任意$x \in [a,b]$,有$g(x) \in [a,b]$;
2. 存在常数L , $0 < L < 1$,使对任意$x, y \in [a,b]$,有

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

则

1. $x = g(x)$ 在$[a,b]$ 上存在唯一实根x^*
2. 对任意初值$x_0 \in [a,b]$, 由$x_{k+1} = g(x_k)$ 得到的迭代序列$\{x_k\}$ 收剑到$x = g(x)$ 在$[a,b]$ 的唯一实根x^*
3. 并有误差估计:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

迭代法收敛的充分条件:局部收敛性

- 迭代序列$\{x_k\}$ 对于任何初始值$x_0 \in [a,b]$ 都收敛，这种收敛性通常称为**全局收敛性**。这种情况常常不易检验，通常只在不动点x^* 的邻近考察其收敛性
- 设$g(x)$ 有不动点x^*，如果存在x^* 的某个邻域$S = \{x| \ |x - x^*| \le \delta\}$，对任意$x_0 \in S$，迭代$x_{k+1} = g(x_k)$ 产生的序列$\{x_k\} \in S$，且收敛到x^*，则称迭代法**局部收敛**

定理2
设x^* 为$x = g(x)$ 的不动点，$g'(x)$ 在x^* 的某个邻域连续，且$|g'(x)| < 1$，则迭代法$x_{k+1} = g(x_k)$局部收敛

迭代法收敛的充分条件

例：方程 $x = e^{-x}$ 有唯一实根位于 $(0,1)$，试分析迭代过程

$$x_{k+1} = e^{-x_k}$$

的收敛性

牛顿迭代法

- **基本思想**：将非线性方程 $f(x)=0$ 逐步归结为某种线性方程求解

- 将 $f(x)$ 在 x_k 处做Taylor展开，保留一阶（线性）项，则 $f(x)=0$ 近似写作：

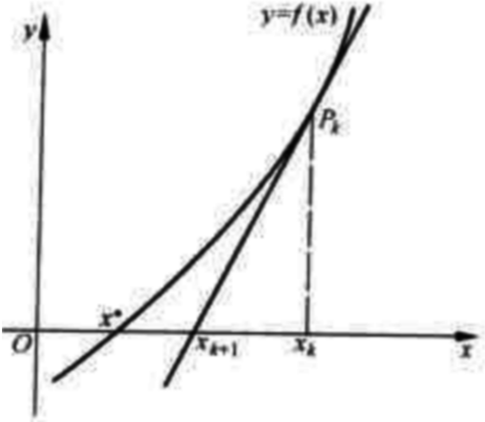
$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

该方程的根 x 作为迭代的 x_{k+1} 则得到：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

即**牛顿迭代法**

牛顿迭代法的几何意义



牛顿迭代法

例：用牛顿迭代法计算方程

$$x - \cos x = 0$$

的实根，要求精确到

$$|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$$

牛顿迭代法的收敛条件

定理3

对于方程 $f(x)=0$ ，若存在区间 (a,b) ,使

1. 区间 (a,b) 上存在方程的单根 x^*
2. $f''(x)$ 在区间 (a,b) 内连续

则牛顿迭代法在 x^* 局部收敛

定理4

对方程$f(x)=0$,若存在区间$[a,b]$,使

- $f''(x)$ 在$[a,b]$ 上连续
- $f(a)f(b)<0$
- 对任意$x\in[a,b]$,都有$f'(x)\neq 0$
- $f''(x)$ 在$[a,b]$ 上保号

则当初值 $x_0\in[a,b]$ 且 $f(x_0)f''(x_0)>0$ 时,牛顿迭代法产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上的唯一实根 x^*

牛顿法

- 牛顿法的优点是收敛快
- 缺点(1)：每步迭代要计算 $f(x_k)$和$f'(x_k)$,计算量较大且有时 $f'(x_k)$ 计算较困难
- 缺点(2)：初始近似 x_0 只在根 x 附近才能保证收敛,如 x_0 给的不合适可能不收敛

牛顿下山法

迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

λ 称为下山因子，目的为了保证收敛，其在每一步中可不同，收敛的目的要求 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$

弦割法

思路：近似表示一阶微分

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots$$

弦割法

思路：近似表示一阶微分

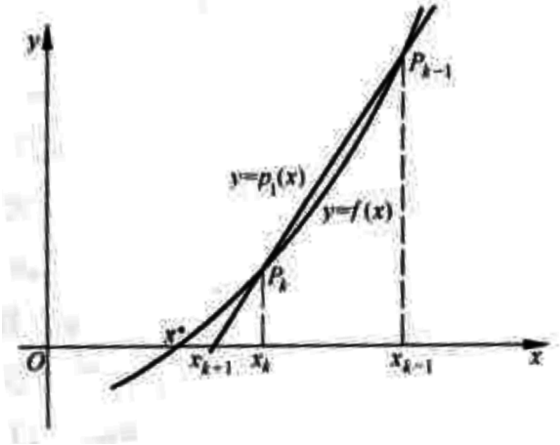
$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots$$

好处：避免了求微分

弦割法



非线性方程组求根

非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

可以写成

$$F(X)=0$$

的形式，其中

$$F\equiv\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}^T,\qquad X\equiv\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}^T$$

我们可以写出相关的Jacobi矩阵

$$F'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ h \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

仿造牛顿迭代法的方式，可以得到方程组的迭代公式

$$X_{k+1} = X_k - [F'(X_k)]^{-1} \cdot F(X_k)$$

收敛阶

一个迭代格式是 p 阶收敛的，它应该满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x^*-x_{k+1}|}{|x^*-x_k|^p}=c$$

定理： 设 x^* 是方程 $x=g(x)$ 的根，
$g(x), g'(x), \cdots, g^{(p)}(x)$ 在 x^* 的邻近连续

- 当 $0<|g(x^*)|<1$ 时,迭代法是线性收敛的
- 当 $g'(x^*)=0,\ g''(x^*)\neq 0$ 时,迭代法是平方收敛的

对线性收敛速度的迭代格式，可有近似：

$$\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} \approx \frac{x^* - x_{k+2}}{x^* - x_{k+1}}$$

容易解出

$$x^* \approx x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

这样求解出来的 x^* 可以作为一个很好的近似：

$$\tilde{x} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

艾特肯方法

所以，迭代格式可以是：

$$\begin{cases} y_k = g(x_k) \\ z_k = g(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{cases}$$

- 这里调用了两次 $g(x)$ ，仍然可以降低计算量（迭代次数可大幅减小）
- 注意：对线性收敛的迭代格式$g(x)$适用
- 思考：若 $g(x)$ 是平方收敛的，迭代格式如何?