第一篇 复变函数论

第三章 复变函数的幂级数展开

- §3.1 复变函数项级数及其收敛性
- §3.2 泰勒级数展开
- §3.3 洛朗级数展开

数学物理方程

§3.1复变函数项级数及其收敛性

- 补充：复数项级数

形如 $w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 的表达式被称为**复数项级数**，其中$\boldsymbol{w_n}$是复数。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 的前**n**项和 $S_n = \sum_{j=1}^{n} w_j$ 有极限，则称该级数**收敛**，且称此极限值为该无穷级数的和；否则称为**发散**。

收敛的充分必要条件

设 $w_n = u_n + \mathrm{i}v_n \ (n=1,2,\cdots)$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 收敛的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，其中 $\boldsymbol{u}_{\mathbf{n}}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathbf{n}}$ 皆为实数。

绝对收敛与条件收敛

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 是收敛的,称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 是绝对收敛的

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 是发散的，而 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 是收敛的

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 是条件收敛的，

❖ 复变函数项级数的定义

设 $f_k(z)\,(k=1,2,3,\ldots)$ 是区域***D***中的复变函数,如下表达式

$$f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)+\ldots+f_k(z)+\ldots$$

称为复变函数项级数,记为 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$,称 $S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_n(z)$ 为级数的前**n**项部分和.

级数收敛和发散的定义

若对于$z_0 \in D$,极限$\lim_{n\to+\infty} S_n(z_0)$存在,则称级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$z_0$处收敛;

若极限$\lim_{n\to+\infty} S_n(z_0)$不存在,则称级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$z_0$处发散.

若$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(z)|$收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$z_0$处绝对收敛。

点收敛

若级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在区域D中所有点收敛，则称级数在区域D中收敛。

区域收敛

对应于区域D中不同的点，级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$一般收敛于不同的值。

假设对应于点$z\in D$，级数收敛于$f(z)$，即

$$f(z)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$$

那么$f(z)$称为级数的和函数。

❖ 幂级数的定义

形如$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ 的级数称为以z_0为中心的幂级数，常数$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$，称为该幂级数的系数。

阿贝尔定理

若 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$在某点$z_1$处收敛，则该幂级数在满足$|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 的圆域内将处处绝对收敛；

若 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ 在某点z_1处发散，则该幂级数在满足$|z-z_0|>|z_1-z_0|$ 的圆域外处处发散。

收敛半径与收敛圆

根据阿贝尔定理，对于任意幂级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ 总是存在一个圆周$|z-z_0|=R \quad (0 \le R < \infty)$，

使得幂级数在此圆域内处处收敛，在此圆域外则处处发散。

圆域$|z-z_0|<R$称为幂级数的收敛圆，

R称为幂级数的收敛半径。

收敛半径的求法

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

D'Alembert公式

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

Cauchy 公式

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

例3.1 求 $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \cdot 2^k \cdot z^{2k}$ 的收敛半径R。

解：设 $z^2 = t$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \cdot 2^k \cdot z^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \cdot 2^k \cdot t^k$$

其系数$a_k = (-1)^2 \cdot 2^k$

对于t而言，收敛半径 $R' = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{2}$

对于z而言，收敛半径$R = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{例3.2}}$ 求 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$ 的收敛半径*R*。

解：$R=\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(k+1)!}{k!}\right|=+\infty$

$\boxed{\text{例3.3}}$ 求 $\sum_{k=0}^{+\infty}k^k\cdot z^k$ 的收敛半径*R*。

解：$R=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$

幂级数在收敛圆内的性质 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$

（i）解析性

（ii）可导性，求导后收敛半径不变

$$f'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k k(z-z_0)^{k-1}$$

（iii）可积性，积分后收敛半径不变

$$\int_l f(z)dz=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_l (z-z_0)^k dz$$

例3.4 分别求出幂级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot z^{k-1}$ 和 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k}$ 在收敛圆内的和函数。

解： $$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots z^k+\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\,(\text{收敛圆域为}|z|<1)$$

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)'=1+2z+\ldots kz^{k-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{+\infty} z^{k-1}(|z|<1)$$

$$f_1(z)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot z^{k-1}=\frac{1}{(1-z)^2}\quad(|z|<1)$$

$$\int_0^z\frac{1}{1-z}dz=\int_0^z 1dz+\int_0^z zdz+\int_0^z z^2dz+\ldots\int_0^z z^k dz\ldots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k}$$

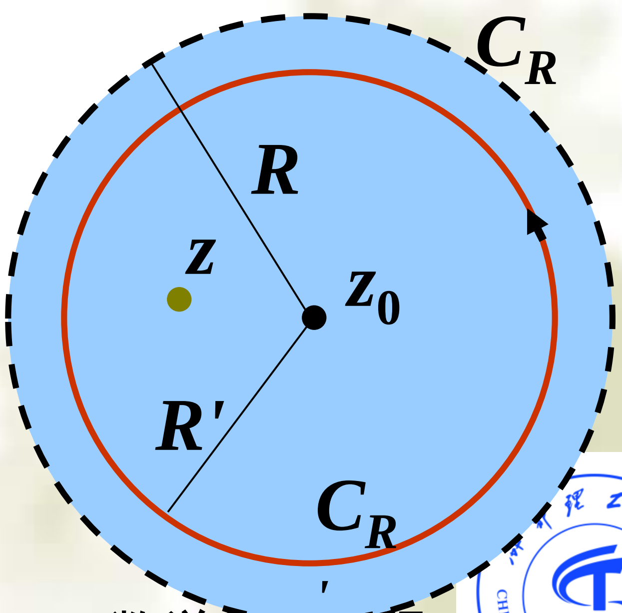
$$f_2(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k}=\int_0^z\frac{1}{(1-z)}\mathrm{d}z=-\ln(1-z)\quad(|z|<1)$$

§3.2泰勒级数展开

- **Taylor定理**

设函数 $f(z)$以z_0的领域U(z_0,R)中解析，那么$f(z)$在该领域中可展开为如下幂级数：

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$



$$\text{其中 } a_k=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_{C_{R'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$$

证明：$f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad \left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-(z-z_0)/(\xi-z_0)}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi\right](z-z_0)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\right](z-z_0)^k$$

例3.5 将 $f(z)$=sin z在z=0点的Taylor级数展开

解：$f(z)=\sin z,\ f(0)=0;\quad f'(z)=\cos z,\ f'(0)=1;$

$$f''(z)=-\sin z,\ f(0)=0;\quad f'''(z)=-\cos z,\ f'''(0)=-1;$$

$$f^{(2m)}(z)=(-1)^m\sin z,\ f^{(2m)}(0)=0;$$

$$f^{(2m+1)}(z)=(-1)^m\cos z,\ f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m;$$

$$f(z)=\sin z=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1}$$

$$=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7\ldots+\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1}+\ldots$$

例3.6 将 $f(z)=\ln(1+z)$在$z=0$点的Taylor级数展开

解：$f(z)=\ln(1+z),\ f(0)=\ln 1=0;$

$$f'(z)=\frac{1}{1+z},\ f(0)=1;$$

$$f^{(k)}(z)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+z)^k}\qquad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k$$

$$=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k\ldots$$

例3.7 将 $f(z)=\arctan z$在$z=0$处展开成Taylor级数

解：设 $\arctan z = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ $(\arctan z)' = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$

$(\arctan z)' = \dfrac{1}{1+z^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m z^{2m}$ $\sum_{k=0}^{+\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m z^{2m}$

1）当k为奇数时 $a_{2m+1} = \dfrac{(-1)^m}{2m+1}$ $(m=0,1,2\ldots)$

2）当k为偶数时 $a_{2m} = 0$ $(m=0,1,2\ldots)$

$$\arctan z = a_0 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} z^{2m+1}$$ (其中$a_0 = \arctan 0 = 0$)

举例

函数 $f(z)=e^z$ 在$z=0$点的Taylor级数展开

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots\frac{z^k}{k!}\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$$

函数 $f(z)=\cos z$ 在$z=0$点的Taylor级数展开

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}\ldots\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

§3.3洛朗级数展开

- 补充：问题的提出

已知结果：当 $f(z)$在圆$|z-z_0|<R$内解析，**Taylor**定理告诉我们，$f(z)$必可展开成幂级数。

问题是：当 $f(z)$在圆$|z-z_0|<R$内有奇点时，能否展开成幂级数或展开成类似于幂级数的形式。

❖ 双边幂级数

$$\cdots + a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+ a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

$$\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 被称为双边幂级数的正幂部分

$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n$ 被称为双边幂级数的负幂部分

❖ 收敛环的确定

设正幂部分的收敛半径为R_2；而负幂部分在变换$\zeta=1/(z-z_0)$下的级数的收敛半径为$1/R_1$，则其在$|z-z_0|>R_1$外收敛。

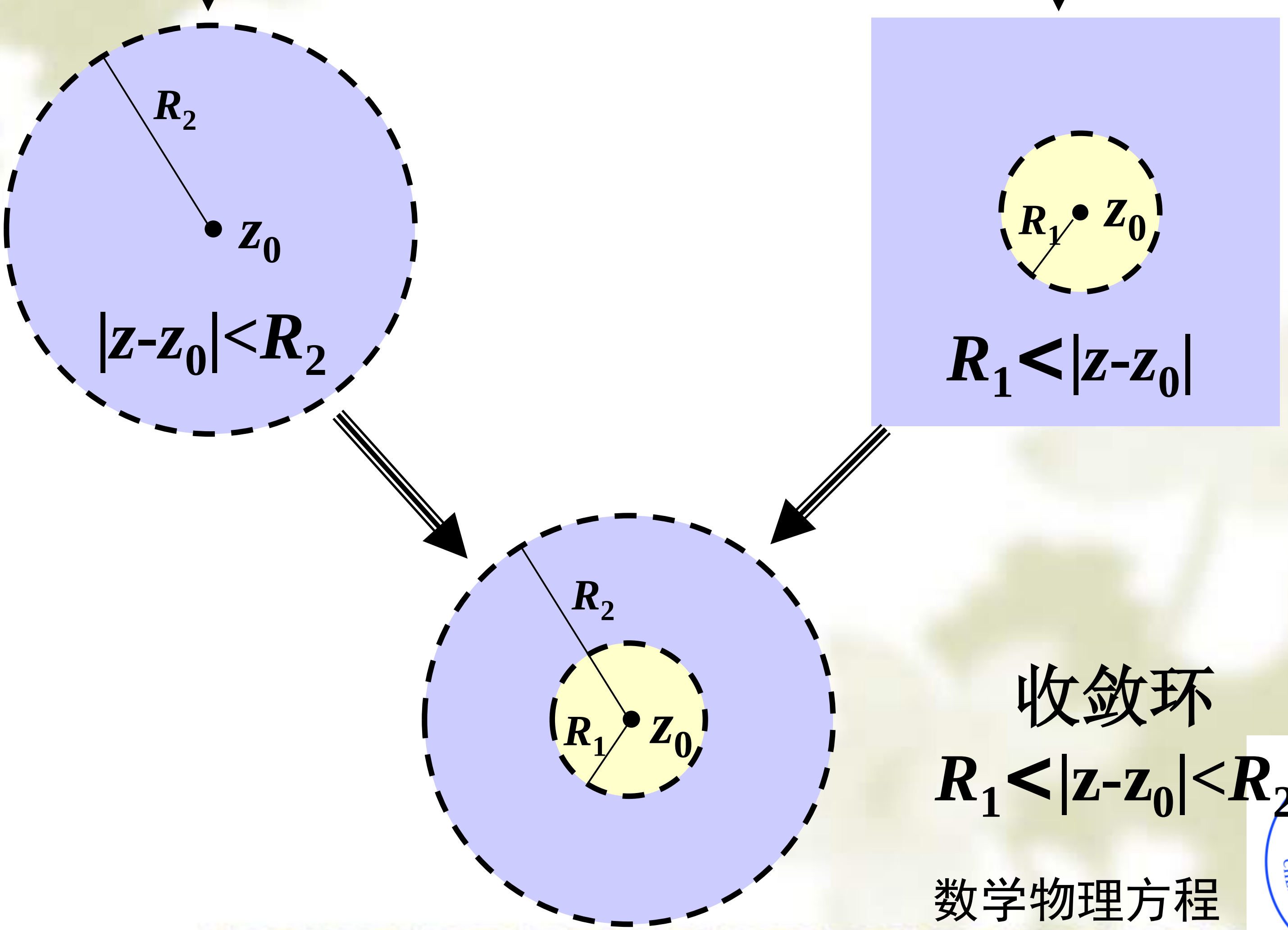
如果$R_1<R_2$，那么双边幂级数就在环状域$R_1<|z-z_0|<R_2$内收敛，所以$R_1<|z-z_0|<R_2$给出了双边幂级数的环状收敛域，称为收敛环。

如果$R_1>R_2$，那么双边幂级数处处发散。

正幂部分 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

负幂部分 $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n$

$\zeta = \dfrac{1}{z-z_0}$



收敛环

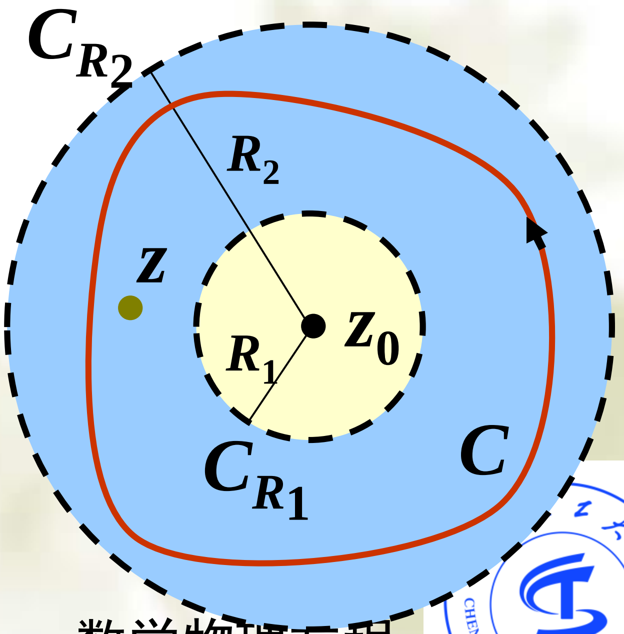
$R_1<|z-z_0|<R_2$

❖ Laurent定理

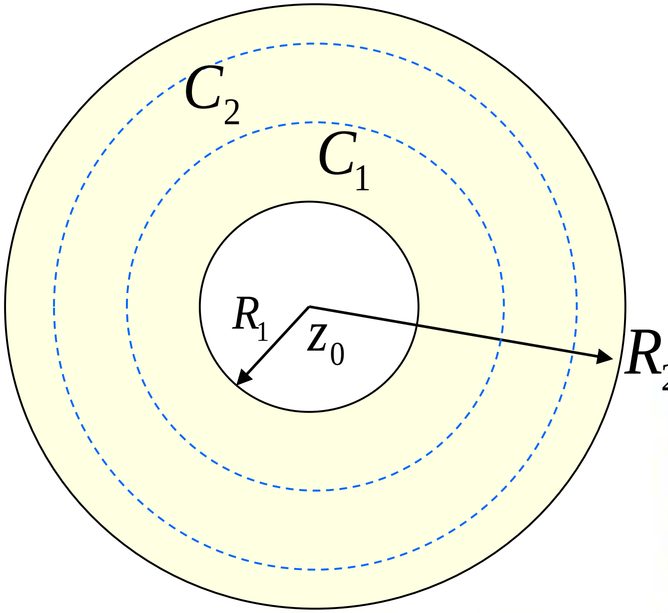
设函数 $f(z)$ 在以z_0为中心的圆环区域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则$f(z)$可在该环域内展开为如下双边级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$其中\ a_k=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$



证明:



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^-+C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)}d\xi$$

1)沿C_1积分时, $|\xi-z_0|<|\xi-z_0|$

$$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-(\xi-z_0)/(z-z_0)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

2)沿C_2积分时, $|\xi-z_0|>|\xi-z_0|$

$$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-(z-z_0)/(\xi-z_0)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(\xi)(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(\xi)(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}d\xi$$

令k=-n-1

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi\right](z-z_0)^k+\sum_{k=-\infty}^{0}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi\right](z-z_0)^k$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi\right](z-z_0)^k=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$$

其中 $a_k=\dfrac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_{C_2}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi=\dfrac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_{C}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi$

注意 $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\neq\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Laurent级数展开的唯一性

Laurent级数中的z_0点可能是奇点，也可能不是奇点

例3.8 试求出函数 $f(z)=\dfrac{z}{(2-z)(3-z)}$

在下列环域中的洛朗级数。

（1）$2<|z|<3$;　　（2）$3<|z|<+\infty$.

解（1） $\left|\dfrac{2}{z}\right|<1, \left|\dfrac{z}{3}\right|<1$

$$f(z)=\frac{z}{2-z}-\frac{z}{3-z}=-\frac{1}{1-2/z}-\frac{z}{3}\cdot\frac{1}{1-z/3}$$

$$=-\left[1+\frac{2}{z}+(\frac{2}{z})^2+\ldots\right]-\frac{z}{3}\left[1+\frac{z}{3}+(\frac{z}{3})^2+\ldots\right]$$

$$=-1-2\cdot z^{-1}\ldots-2^k\cdot z^{-k}\ldots-\frac{z}{3}-\frac{z^2}{3^2}-\ldots$$

函数 $f(z)=\dfrac{z}{(2-z)(3-z)}$ 展开区域（2）$3<|z|<+\infty.$

（2）$\left|\dfrac{2}{z}\right|<1,\left|\dfrac{3}{z}\right|<1$

$$f(z)=\frac{z}{2-z}-\frac{z}{3-z}=-\frac{1}{1-2/z}+\frac{1}{1-3/z}$$

$$=-\left[1+\frac{2}{z}+(\frac{2}{z})^2+\ldots\right]+\left[1+\frac{3}{z}+(\frac{3}{z})^2+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}+\ldots\frac{3^k}{z^k}+\ldots$$

Laurent级数展开的唯一性

课堂练习

函数 $f(z)=\sin z/z$ 在$0<|z|<\infty$ 内的Laurent级数展开

❖ 孤立奇点

若z_0点是函数 $f(z)$ 的奇点，但$f(z)$在z_0的某一个去心邻域内$0<｜z－z_0｜<R$解析，则称点z_0是函数$f(z)$的孤立奇点。

孤立奇点的Laurent级数展开

在区域 $0<|z-z_0|<R$ 内的单值解析函数 $f(z)$ 可展开成

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中正幂部分$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 是该级数的解析部分

负幂部分 $\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n(z-z_0)^n$ 是该级数的主要部分

孤立奇点的分类

可去奇点： 主要部分(负幂项)不存在

m阶极点： 主要部分(负幂项)有m项

本性奇点： 主要部分(负幂项)有无穷多项

孤立奇点的等价命题

可去奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=l$

m阶极点$\Leftrightarrow f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),\varphi(z)$解析且$\varphi(z_0)\neq 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=a\ (a\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

本性奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为无穷

例3.9 试求出下列函数的奇点，并指出类型

（1）$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 奇点为：z=0, 可去奇点。

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4+\ldots$$

（2）$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

奇点为：$z_1=1, z_2=2$ 一阶极点。

$$\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=-1;\lim_{z\to2}(z-2)f(z)=1$$

（3） $f(z)=\exp\left(\frac{1}{z}\right)$

奇点为：z=0， 本性奇点

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^{k}=\sum_{k'=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k')!}\cdot z^{k'}$$

本章作业

3-2;

3-4(1)(2);

3-5(1)(2);

3-6(1)

3-7(1)(3)(4);