理论力学

第一章

关于本课程

- 专业必修课
- 考查方式：作业、考试
- 考试方式：闭卷

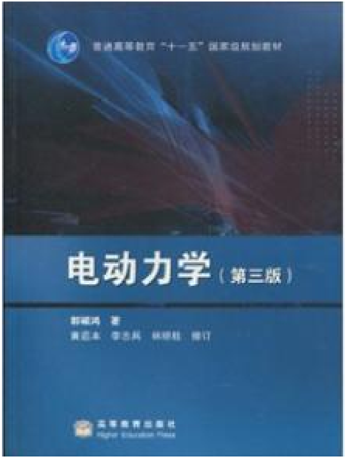
教材

《理论力学教程》

周衍柏

高等教育出版社

参考书：狭义相对论部分



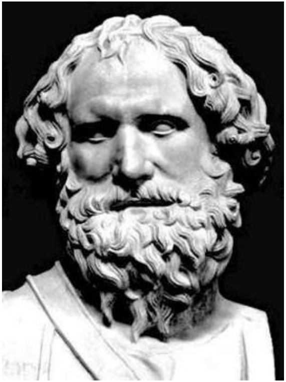
《电动力学》

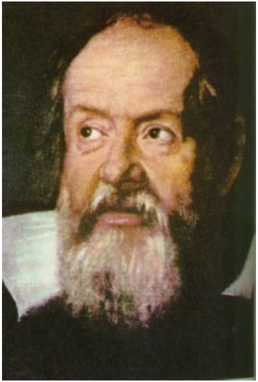
郭硕鸿

高等教育出版社

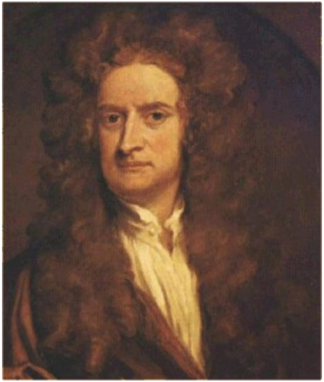
理论力学在科学中的位置

力学人物

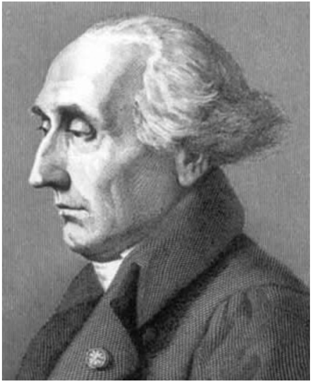

Figure： 阿基米德


Figure： 伽利略

力学人物

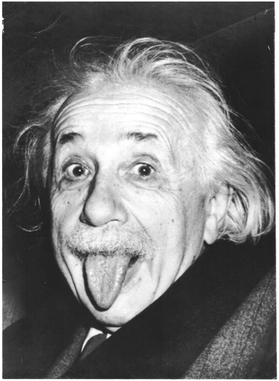


Figure：牛顿



Figure：拉格朗日

力学人物



Figure： 爱因斯坦

质点运动学：质点在空间中的位置的描述

- 什么是质点?
- "参考系" 和 "坐标系"
- 三维空间中，点用直角坐标系描述

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

也可以用“矢量”的形式（对应“标量”）

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

- 注意：当我们需要手写的时候 $\mathbf{v} = \vec{v}, \mathbf{i} = \vec{i}\ \ldots$

运动学方程与轨道

- 运动学方程：描述质点在时刻 t 上所处空间位置的方程
  - $x = r\sin(\omega t), \quad y = r\cos(\omega t), \quad 0 < t < T$
  - $x = at, \quad y = b, \quad 0 < t < T$
- 轨道方程：用运动学方程消去时间 t 得到的空间关系式。质点在给定时间范围内所处点的集合
- 比起运动学方程，部分信息可能丢失
- 直线运动、曲线运动，和参考系有关

位移，速度，加速度

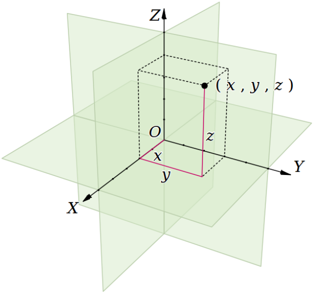
- 位移 $\Delta\mathbf{r}$ ：给定时间范围内，从初始位置 A 到末了位置 B 之间的连线所成的矢量。
  - 注意：路程 s 和位移的量值 $|\Delta\mathbf{r}|$ 有所区别
- 时刻 t 的瞬时速度：

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

- 加速度

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$

直角坐标系下速度加速度的表达



- 在直角坐标系下，速度加速度的计算各个分量相互独立－－－正交
- 坐标

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

直角坐标系下速度加速度的表达

- 速度

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

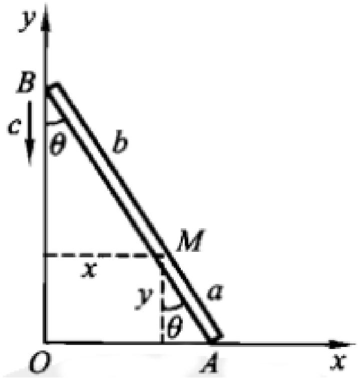
$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

- 加速度

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

直角坐标系下速度加速度的表达



椭圆规端点 A 和 B，分别沿垂直直线导轨 Ox 和 Oy 运动。B 端运动为匀速 c

求：椭圆规上点 M 的轨道方程，速度，加速度

假设 $MA = a$，$MB = b$，初始时刻 $\angle OBA = \theta$

极坐标系

- 具有特定的中心的情况下采用
- 坐标

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}$$

这里 $\mathbf{i}$ 是中心指向坐标点的单位矢量。什么是单位矢量?

- 极坐标系下的速度

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\mathbf{i})$$

这里 r 和 $\mathbf{i}$ 都随时间变化，所以 $\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{i} + r\,\dot{\mathbf{i}}$

- $\dot{\mathbf{i}}$ 是什么？怎么求?

极坐标系

- 重要关系：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\mathbf{j} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{j}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\mathbf{i}$$

- 极坐标系下的速度：

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{i} + r\dot{\theta}\mathbf{j}$$

  - 径向速度和横向速度

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta}$$

极坐标系

- 极坐标系下的加速度：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\,\mathbf{i}\,) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\dot{\theta}\,\mathbf{j}\,)
\end{aligned}
$$

极坐标系

- 极坐标系下的加速度：

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\,\mathbf{i}\,) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\dot{\theta}\,\mathbf{j}\,)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\mathbf{i}\,) = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\mathbf{i} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{j}$$

- 极坐标系下的加速度：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\,\mathbf{i}\,) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\dot{\theta}\,\mathbf{j}\,)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\mathbf{i}\,) &= \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\mathbf{i} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{j} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\mathbf{j}\,) &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\mathbf{j} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\mathbf{j}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{j} + r\ddot{\theta}\mathbf{j} - r\dot{\theta}^2\mathbf{i}
\end{aligned}
$$

极坐标系

- 所以，加速度：

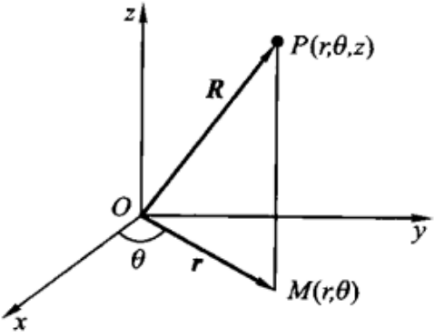
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{i} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{j}$$

- 对应的径向和横向分量：

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}$$

其他形式的坐标系

- 柱坐标



- 球坐标
- ....

极坐标系

例: 极坐标下，某点的运动方程为

$$r = e^{ct}, \quad \theta = b\,t$$

这里 b , c 都是不随时间变化的常数，求其运动的速度和加速度

法向加速度，切向加速度

- 特殊的极坐标系:
  - $\mathbf{i}$ 为沿轨道切向，并指向位移 s 增加方向
  - $\mathbf{j}$ 为沿轨道法向并指向轨道凹侧的方向
- 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}\theta} &= \mathbf{j}\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{j}}{\mathrm{d}\theta} &= -\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = v\mathbf{i} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}$$

这里面 s 是位移

- 加速度可以表示为

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

法向加速度，切向加速度

- 注意我们有关系式

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}\theta} = \mathbf{j} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \rho$$

所以加速度可以表示为：

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{j}$$

切向加速度和法向加速度分别为：

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned}$$

例: 一质点按照圆滚线 $s = 4a\sin\theta$ （圆在直线上纯滚动时，圆边缘上一点的轨迹）的曲线运动，如果 $\dot{\theta}$ 为一常数，其加速度为一常数，试证明之。

θ 为某点 P 切线与水平线（ x 轴）之间的夹角

s 为 P 点与曲线最低点之间的曲线弧长

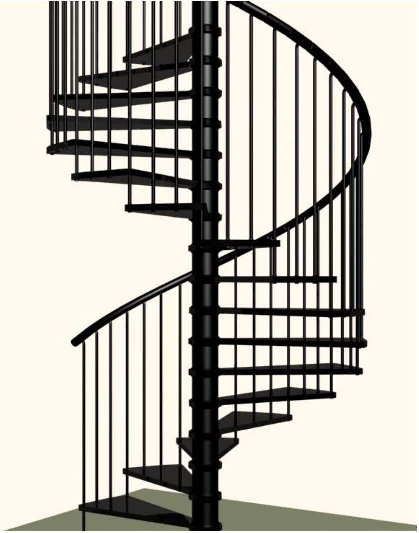
法向加速度，切向加速度

例: 质点沿螺旋线

$$x = 2\sin(4t)\,, \qquad y = 2\cos(4t)\,, \qquad z = 4t$$

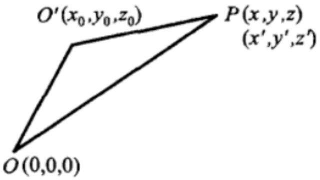
求速度，加速度和轨道曲率半径

例



平动参考系下的速度

- 绝对速度（绝对“静止”的参考系）
- 相对速度
- 牵连速度



参考系中的坐标有关系：

$$x = x_0 + x' \qquad y = y_0 + y' \qquad z = z_0 + z'$$

求对时间的微商得到：

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{x}' \qquad \dot{y} = \dot{y}_0 + \dot{y}' \qquad \dot{z} = \dot{z}_0 + \dot{z}'$$

即绝对速度：

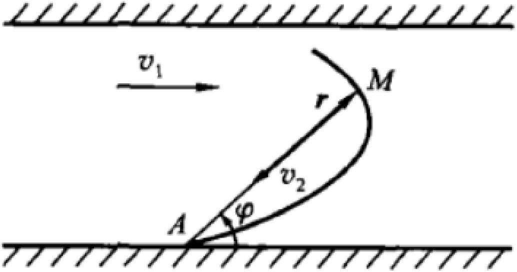
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

例: 某人以 $4\,\mathrm{km/h}$ 的速度向正东方向前进，感觉风从正北方向吹来。如果速率提高一倍（方向不变），则感到风从东北方向吹来。

求风速和风向。

例: 需要把小船M用绳拉回岸边，假设水流速度 v_1 按河宽不变化，拉绳速度 v_2 也恒定。

求小船轨迹。（小船可以看做一个质点）



平动参考系下的加速度

同样对

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

求对时间的微分得到

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\mathbf{v}}'$$

就是

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$$

平动参考系下的加速度

同样对

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

求对时间的微分得到

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\mathbf{v}}'$$

就是

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$$

- 绝对加速度
- 相对加速度
- 牵连加速度

质点运动定律

- 牛顿第一定律：任何一个物体在不受外力或受平衡力的作用时，总是保持静止状态或匀速直线运动状态，直到有作用在它上面的外力迫使它改变这种状态为止

质点运动定律

- 牛顿第一定律：任何一个物体在不受外力或受平衡力的作用时，总是保持静止状态或匀速直线运动状态，直到有作用在它上面的外力迫使它改变这种状态为止
- 牛顿第二定律：物体的加速度跟物体所受的合外力成正比，跟物体的质量成反比，加速度的方向跟合外力的方向相同

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

质点运动定律

- 牛顿第一定律：任何一个物体在不受外力或受平衡力的作用时，总是保持静止状态或匀速直线运动状态，直到有作用在它上面的外力迫使它改变这种状态为止
- 牛顿第二定律：物体的加速度跟物体所受的合外力成正比，跟物体的质量成反比，加速度的方向跟合外力的方向相同

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

- 牛顿第三定律：两个物体之间的作用力和反作用力，在同一直线上，大小相等，方向相反

$$\mathbf{F_2} = -\mathbf{F_1}$$

相对性原理

- 惯性参考系:牛顿运动定律成立的参考系
- 非惯性参考系:牛顿运动定律不成立的参考系

相对性原理

- 惯性参考系:牛顿运动定律成立的参考系
- 非惯性参考系:牛顿运动定律不成立的参考系
- 力学相对论性原理:不能借助实验的方式来判别一个惯性参考系是静止还是做匀速直线运动

相对性原理

- 惯性参考系:牛顿运动定律成立的参考系
- 非惯性参考系:牛顿运动定律不成立的参考系
- 力学相对论性原理:不能借助实验的方式来判别一个惯性参考系是静止还是做匀速直线运动
- 爱因斯坦相对论性原理

质点运动微分方程

- 牛顿第二定律：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

在直角坐标系下

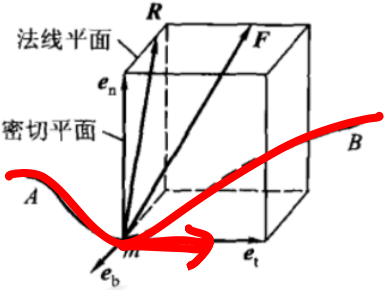
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \end{aligned}$$

在极坐标系下

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) \\ m(r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}) &= F_\theta(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) \end{aligned}$$

质点运动微分方程

非自由质点，约束运动



$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F_t \\
m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + F_R \\
0 &= F_b + R_b \\
\frac{1}{\rho} &= \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

[redacted]

[redacted]

非惯性系动力学（一）

非惯性系下的加速度有关系式：

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'$$

代入牛顿第二定律：

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

等效

我们可以得到

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_0 + m\mathbf{a}'$$

但是，我们常常使用的形式是：

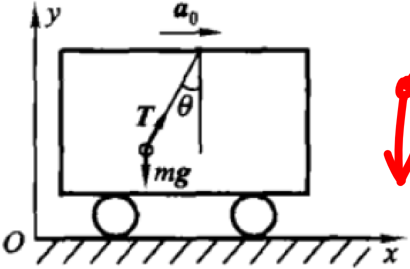
$$\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}_0) = m\mathbf{a}'$$

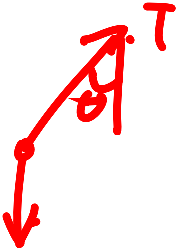
- **惯性力** 在非惯性参考系下，参考系想对于静止参考系的加速度的作用效果可以看作是一种“有效”的力作用与该非惯性参考系下的物体上
- 这样做可以简化问题

非惯性系动力学（一）

例：

火车在水平轨道上做向右的匀加速直线运动，加速度大小为 a_0 ，车顶用线悬挂一小球，小球处于静止状态，悬线与垂直方向夹角为 θ 。求 θ 大小。





功和能

- 功：力乘以质点在力的方向上的位移：

$$W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F|\Delta r|\cos\theta$$

$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$ 为标积

- 如果质点按照曲线运动

$$W = \int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}\mathrm{d}s\cos\theta$$

直角坐标系下，可以写成分量的形式

$$W = \int_A^B F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z$$

功和能

- 若一个力有多个分量，求功的时候可以分别求各个分量做的功，再求和

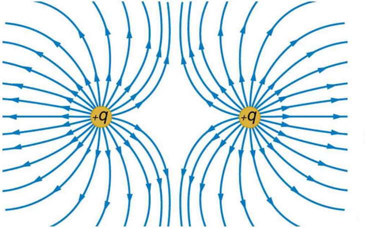
$$
\begin{aligned}
W &= \int_A^B \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
&= \int_A^B (\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+\cdots+\mathbf{F_n})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
&= \int_A^B \mathbf{F_1}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}+\int_A^B \mathbf{F_2}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}+\cdots+\int_A^B \mathbf{F_n}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

- 功的单位：焦尔 J，电子伏特 eV 等
- 功率：力做功的快慢

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

功和能

- 力场，若质点的受力只和坐标有关



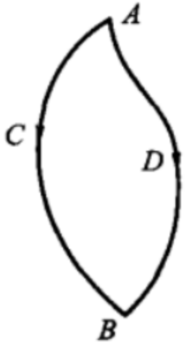
$$\mathbf{F} = -\Delta V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- 功

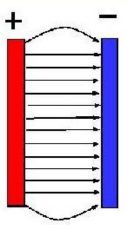
$$\mathrm{d}W = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$

功和能



- 保守力:沿任何闭合路径运动一周，力所做的功为 0。
- 非保守力（涡旋力）：对质点做功和路径有关，沿闭合路径运动一周，做功不为0
- 耗散力：类似摩擦力所做的功，总是做负功而消耗能量

保守力



- 电子在电压恒定的电容两平板之间运动，请问电场力是保守力吗？该力的力势如何表示？
- 如果电压随时间逐步加强，这样的电场力是保守力吗？

势能

- 保守力场中，

$$W = -(V_B - V_A)$$

- 势能是相对的，零势能点的问题，规范问题
- 判断力是否是保守力

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

示例：渐变磁场、粒子加速器

例

设作用在某质点上的力为：

$$F_x = x + 2y + z + 5\,,\quad F_y = 2x + y + z\,,\quad F_z = x + y + z - 6$$

求此质点沿螺旋线

$$x = \sin\theta\,,\qquad y = \cos\theta\,,\qquad z = 7\theta$$

从 $\theta = 0$ 运动到 $\theta = 2\pi$ 时，力所做的功

例

设作用在某质点上的力为：

$$F_x = x + 2y + z + 5\,, \quad F_y = 2x + y + z\,, \quad F_z = x + y + z - 6$$

求此质点沿螺旋线

$$x = \sin\theta\,, \qquad y = \cos\theta\,, \qquad z = 7\theta$$

从 $\theta = 0$ 运动到 $\theta = 2\pi$ 时，力所做的功

如果：

$$F_x = 2x - 3y + 4z - 5\,, \quad F_y = z - x + 8\,, \quad F_z = x + y + z + 16$$

动量定律和动量守恒定律

- 牛顿第二定律也可以写做

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

  常常称为动量定律

- 上面的公式还可以写成：

$$\mathrm{d}\mathbf{p} = \mathrm{d}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}\mathrm{d}t$$

- 或者积分形式

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathrm{d}t$$

动量定律和动量守恒定律

- 冲量：外力对质点动量的改变量

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \mathrm{d}t$$

- 动量守恒，当 $I = 0$ 时，

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{C}$$

- 如果 $\mathbf{F} \neq 0$，但是直角坐标系下某个（或某两个）分量上为零，则在这个（两个）分量上满足动量守恒

力矩和角动量

- 矢量和矢量矩（有矢量有中心点）。力是矢量，也可以定义他的矢量矩－－力矩

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

（见下页图）

- $\mathbf{M}$ 有方向，垂直与 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{r}$ 所在的平面，其大小容易写成

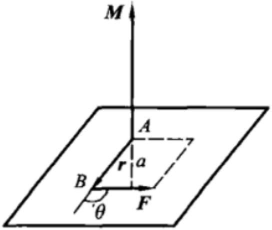
$$M = rF\sin\theta = aF$$

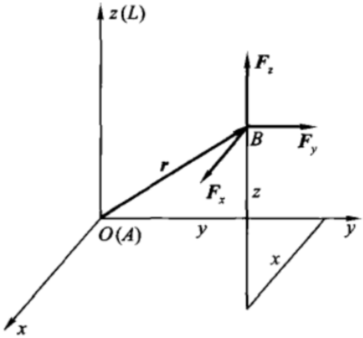
a 是从中心到力的作用线的垂线距离

- 力矩的作用点
- 角动量（动量矩）

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

力矩和角动量





角动量定律和角动量守恒定律

- 运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}=\mathbf{F}$$

- 用位失乘以方程两边

$$m\left(\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

利用微分关系

$$\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)-\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$$

得到角动量方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

角动量定律和角动量守恒定律

- 角动量方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}$$

- 或者写成积分形式

$$\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}\mathrm{d}t$$

其中 $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}\mathrm{d}t$ 叫冲量矩

- 如果力矩为0（$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$），则角动量守恒

$$\mathbf{J} = \text{constant}$$

例：如果一质点收到的力，恒通过某一点，证明该质点无论初始速度方向大小如何，一定在一个平面上运动。

动能定理

由牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}=\mathbf{F}$$

两边同乘以$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$得

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

我们需要

$$m\,\mathrm{d}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

动能定理

有关系：

$$\mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{v} = v\mathbf{i}\cdot \mathrm{d}(v\mathbf{i}) = v\mathbf{i}\cdot (\mathrm{d}v)\mathbf{i} + v\mathbf{i}\cdot v\mathrm{d}\mathbf{i}$$

$\mathrm{d}\mathbf{i}$ 方向为 $\mathbf{j}$ 而 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$ 所以上式

$$= v\mathrm{d}v = \mathrm{d}(\frac{1}{2}v^2)$$

可以简化为

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

动能定理

$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ 是 $\mathbf{F}$ 对质点做的功。做功让质点运动状态的改变可以引入一个量来描述:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

就是大家很熟悉的“动能”。我们可以将

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

写成积分的形式

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

等号左边是“质点动能的改变量” ΔT

能量守恒定律

若F为保守力，必然存在对应的势能

$$F = -\nabla V$$

动能的改变量可以写成

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = V(x_0, y_0, z_0) - V(x, y, z)$$

或

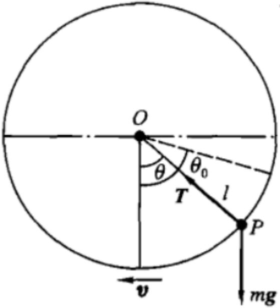
$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = V(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}mv_0^2$$

即可定义

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = E \qquad\qquad T + V = E$$

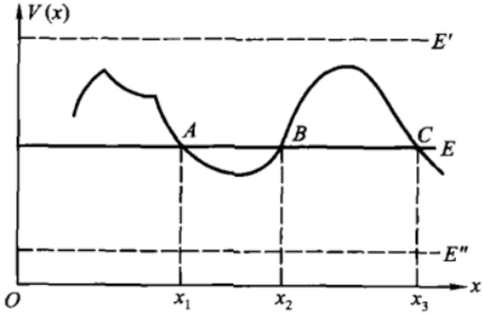
若存在耗散力，则机械能 E 逐步减小

能量守恒定律



例：将一重锤固定在O点，该重锤限制在一竖直平面运动。重锤从角度为 θ_0 的位置自由落下。用两种不同方法求重锤通过最低点的速度大小。

势能曲线



设质点具有总能 E ，考虑其在

$x < x_1$ $\quad$ $x_1, x < x_2$ $\quad$ $x_2 < x < x_3$ $\quad$ $x > x_3$

上的运动情况

有心力

- 力的方向总是指向某一特定中心
- 引力，斥力
- 力可以表示为

$$\mathbf{F} = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

两个分量有公式

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r = F(r) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta = 0 \end{cases}$$

有心力

其中，第二式可以写成

$$m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

即

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad \text{(constant)}$$

反映了角动量守恒。
在求解有心力的质点运动情况的时候用极坐标，方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \\ r^2\dot{\theta} = h \end{cases}$$

有心力

有心力沿曲线运动，做功

$$\begin{aligned}
W &= \int_A^B \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
&= \int_A^B F_r \mathrm{d}r + F_\theta r \mathrm{d}\theta \qquad\qquad (F_\theta = 0) \\
&= \int_A^B F_r \mathrm{d}r \\
&= \int_{r_1}^{r_2} F_r \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

有心力

有心力是保守力

$$F = -\nabla V = \frac{1}{2}m\left[(\dot r)^2 + (r\dot\theta)^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2}m(V_r^2 + V_\theta^2)$$

势能差

$$-(V_2 - V_1) = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\mathrm{d}r$$

机械能守恒在有心力的情况下

$$\frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + V(r) = E$$

$$(\dot r)^2$$

r关于theta的方程/函数

有角动量守恒 $r^2\dot{\theta} = h$，可令 $u = \frac{1}{r}$，所以有

$$\dot{\theta} = hu^2$$

我们来求

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\dot{\theta} \\
&= -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}
\end{aligned}$$

轨道微分方程 – – 比耐公式

带入

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

得到

$$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = -\frac{F}{m}$$

就是比耐公式

行星运动规律

有心力，引力，平方反比规律

$$F = -\frac{Gm_s m}{r^2} = -mk^2u^2$$ $= -G m_s m u^2$

这里

$$k^2 = Gm_s$$

代入比耐公式

$$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = k^2u^2$$

简单整理得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{k^2}{h^2}$$

该二阶微分方程的通解

$$u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{k^2}{h^2}$$

可得到轨道方程

$$r=\frac{1}{u}=\frac{h^2/k^2}{1+(Ah^2/k^2)\cos(\theta-\theta_0)}$$

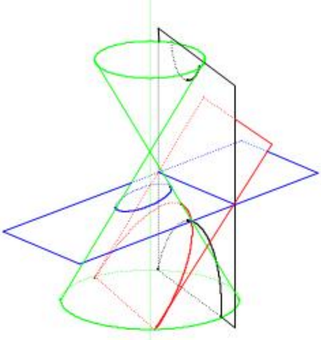
这里，θ_0 可通过极坐标的选择去掉。

这样类似

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta)}$$

的方程称为圆锥曲线

近日点和远日点



引力势能

有心力作用的质点只有沿轴向的位移对应做功

$$F=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

所以势能一定是只和 r 有关的，可以通过积分得到

$$V(r)=\int -F(r)\mathrm{d}r=\int \frac{k^2m}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{k^2m}{r}+C$$

一般令无穷远处（$r\rightarrow\infty$）势能为0，即 $C=0$

$$V(r)=-\frac{k^2m}{r}$$