第十二章 变形贝塞耳方程

- §12.1 虚宗量贝塞耳方程
- §12.2 球贝塞耳方程

§12.1虚宗量贝塞耳方程

❖ 虚宗量贝塞耳方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-(1+\frac{\nu^2}{x^2})y=0 \qquad (\nu\ge 0)$$

作变量代换 $x=-it$

贝塞耳方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+(1-\frac{\nu^2}{t^2})y=0 \qquad (\nu\ge 0)$$

$$\mathrm{J}_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{ix}{2})^{2k+\nu}$$

$$=i^\nu\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$$

定义

虚宗量贝塞耳函数

$$\mathrm{I}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\quad(\nu\ge 0)$$

$$\mathrm{I}_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}\quad(\nu\ge 0)$$

$$\mathrm{J}_\nu(ix)=i^\nu\mathrm{I}_\nu(x)\qquad \mathrm{J}_{-\nu}(ix)=i^{-\nu}\mathrm{I}_{-\nu}(x)$$

当 ν 不为整数时，$\mathrm{I}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{I}_{-\nu}(x)$ 线性无关

当 ν 为整数时， $\mathrm{I}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{I}_{-\nu}(x)$ 相等

$$\mathrm{I}_{-n}(x)=\mathrm{I}_n(x)\qquad (n\text{为整数})$$

定义

虚宗量汉克尔函数

$$\mathrm{K}_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)\right]$$

当*v*为整数时， $$\mathrm{K}_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)\right]$$

*v*阶虚宗量贝塞耳方程的通解为：

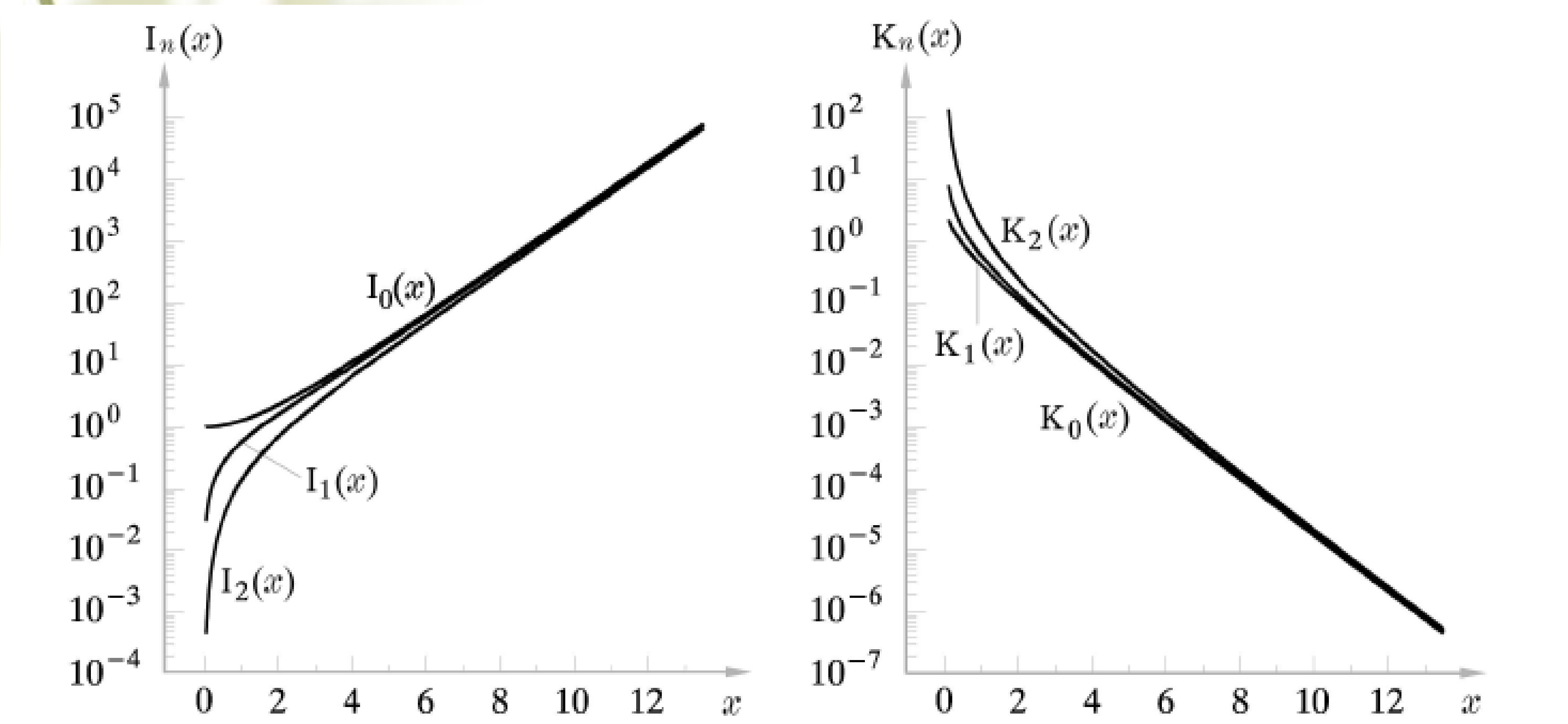
$$y(x)=C\mathrm{I}_\nu(x)+D\mathrm{K}_\nu(x)$$

$$\mathrm{K}_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(ix)$$

虚宗量汉克尔函数与第一类汉克尔函数只相差一个常数因子

虚宗量贝塞耳函数曲线图



不能满足齐次柱侧面边界条件 $\alpha u + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} = 0$

§12.2球贝塞耳方程

- 球贝塞耳方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(1-\frac{l(l+1)}{x^2})y=0 \qquad (l=01,2...)$$

令 $y(x)=x^{-1/2}v(x)$

半奇数阶贝塞耳方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}+(1-\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{x^2})v(x)=0$$

所以球贝塞耳方程的两个特解为

$$x^{-1/2}\mathrm{J}_{l+1/2}(x)\text{和}x^{-1/2}\mathrm{N}_{l+1/2}(x)$$

定义

$$\mathrm{j}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{l+1/2}(x)$$ ——球贝塞耳函数

（第一类球贝塞耳函数）

$$\mathrm{n}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{l+1/2}(x)$$ ——球诺伊曼函数

（第二类球贝塞耳函数）

球贝塞耳方程的通解为： $y(x)=C\mathrm{j}_l(x)+D\mathrm{n}_l(x)$

定义

$$\mathrm{h}_l^{(1)}(x)=\mathrm{j}_l(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{n}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{H}_{l+1/2}^{(1)}(x)$$

第一类球汉克尔函数

$$\mathrm{h}_l^{(1)}(x)=\mathrm{j}_l(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{n}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{H}_{l+1/2}^{(1)}(x)$$

第二类球汉克尔函数

第三类球贝塞耳函数

第一类球贝塞耳函数

$$\mathrm{j}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{l+1/2}(x)$$

第二类球贝塞耳函数

$$\mathrm{n}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{l+1/2}(x)$$

第三类球贝塞耳函数

$$\mathrm{h}_l^{(1)}(x)=\mathrm{j}_l(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{n}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{H}_{l+1/2}^{(1)}(x)$$

$$\mathrm{h}_l^{(1)}(x)=\mathrm{j}_l(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{n}_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{H}_{l+1/2}^{(1)}(x)$$

递推关系

$$\frac{\psi_{l+1}(x)}{x^{l+1}}=-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\psi_l(x)}{x^l}\right]$$

球贝塞耳函数的渐近行为

当$x\to\infty$时 $$\mathrm{j}_l(x)\to\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{l+1}{2}\pi\right)$$

$$\mathrm{n}_l(x)\to\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{l+1}{2}\pi\right)$$

$$\mathrm{h}_l^{(1)}(x)\to\frac{1}{x}e^{\mathrm{i}\left(x-\frac{l+1}{2}\pi\right)}$$

$$\mathrm{h}_l^{(2)}(x)\to\frac{1}{x}e^{-\mathrm{i}\left(x-\frac{l+1}{2}\pi\right)}$$

当$x\to 0$时 $\mathrm{j}_l(x)$ 取有限值

$\mathrm{n}_l(x)$ $\mathrm{h}_l^{(1)}(x)$ $\mathrm{h}_l^{(2)}(x)$ 发散

球贝塞耳函数曲线图

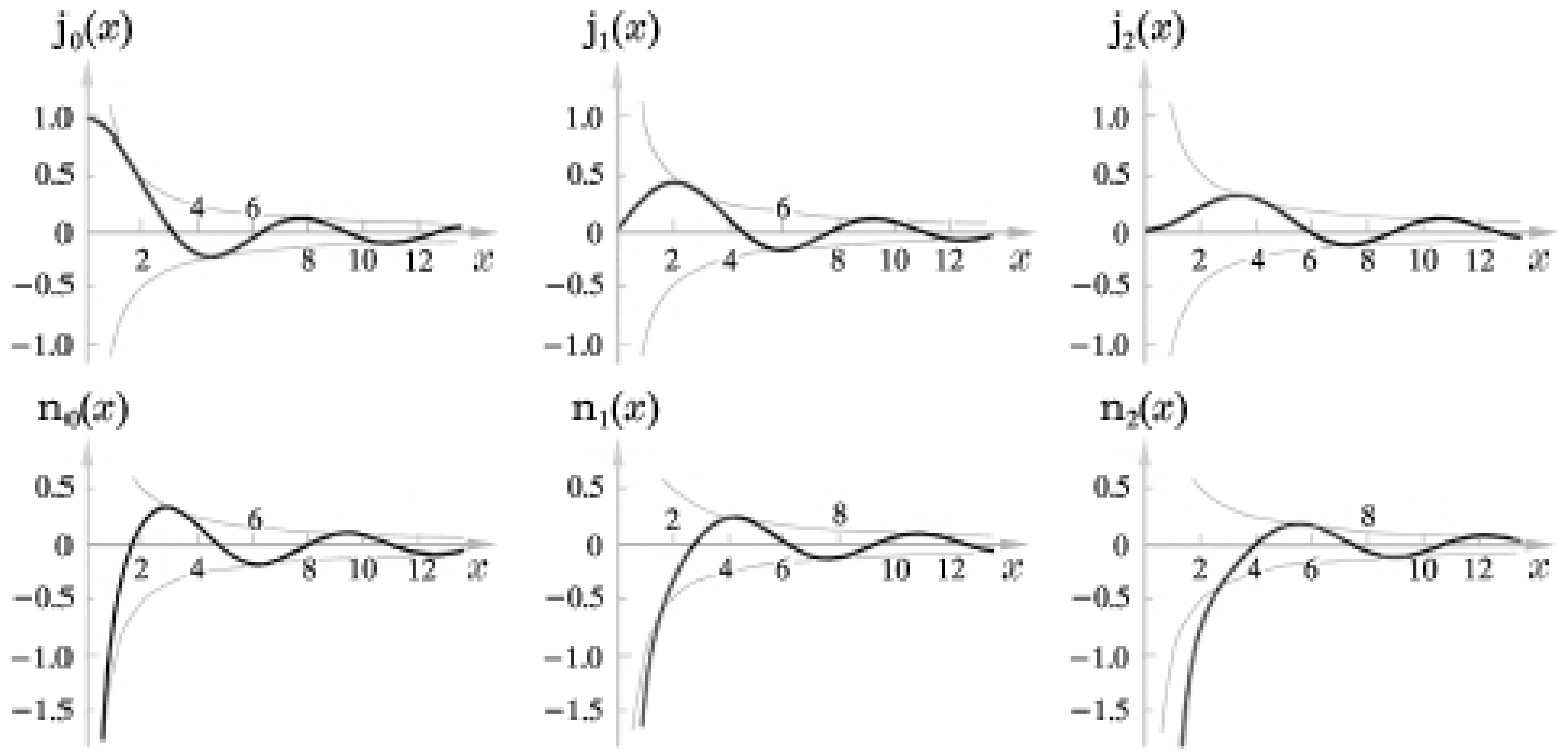


图 24.1　球 Bessel 函数 $j_l(x)$ 和球 Neumann 函数 $n_l(x)$. 细灰线是它们的渐近线 $y = \pm 1/x$

课堂练习：

求出前2阶球Bessel函数和球Neumann函数

数学物理方程

前几阶球贝赛尔函数和球诺伊曼函数的表达式

$$\mathrm{j}_0(x)=\frac{1}{x}\sin x$$

$$\mathrm{j}_1(x)=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x)$$

$$\mathrm{j}_2(x)=\frac{1}{x^3}[3(\sin x-x\cos x)-x^2\sin x]$$

$$\mathrm{n}_0(x)=-\frac{1}{x}\cos x$$

$$\mathrm{n}_1(x)=-\frac{1}{x^2}(\cos x+x\sin x)$$

$$\mathrm{n}_2(x)=-\frac{1}{x^3}[3(\cos x+x\sin x)-x^2\cos x]$$

前几阶球汉克尔函数的表达式

$$h_0^{(1)}(x)=-\frac{i}{x}e^{ix}$$

$$h_1^{(1)}(x)=(-\frac{i}{x^2}-\frac{1}{x})e^{ix}$$

$$h_2^{(1)}(x)=(-\frac{3i}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{i}{x})e^{ix}$$

$$h_0^{(2)}(x)=-\frac{i}{x}e^{-ix}$$

$$h_1^{(2)}(x)=(-\frac{i}{x^2}-\frac{1}{x})e^{-ix}$$

$$h_2^{(2)}(x)=(-\frac{3i}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{i}{x})e^{-ix}$$

本章作业

12-1