成都理工大学专业基础课

数学物理方程

主讲教师： 陈小凤

数学物理方程

数学物理方程是物理学、天文学、地质学、地球物理学、大气科学、空间科学类、力学、电子信息科学类、材料科学类和环境科学类等专业的重要基础课。

包括两部分：

- 复变函数
- 数学物理方程

复变函数

在许多工程技术领域（如电磁场理论、量子力学、固体物理、材料物理、流体力学等）经常遇到复变量的函数。

复变函数理论研究复变量之间的对应关系，它是实变函数理论在复数域中的推广，因此两者之间有许多相近之处，这有助于我们学习比较，但在学习中更要注意它们之间的不同之处。

➢ 数学物理方程

数学物理方程（简称数理方程）是指从物理学及其它各门自然科学、技术科学中所导出的函数方程，主要指偏微分方程和积分方程.

数学物理方程所研究的内容和所涉及的领域十分广泛，它深刻地描绘了自然界中的许多物理现象和普遍规律.

要想探索自然界的奥秘就得解微分方程。

—牛顿

数学物理方程的类型和所描述的物理规律

多数为二阶线性偏微分方程

- 振动与波（振动波，电磁波）传播满足**波动方程**
- 热传导问题和扩散问题满足**热传导方程**
- 静电场和引力势满足**拉普拉斯方程或泊松方程**

三类典型的数学物理方程

三类典型的数学物理方程

双曲型方程

波动方程为代表

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u=f(x,y,z,t)$$

抛物型方程

热传导方程为代表

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2 u=f(x,y,z,t)$$

椭圆型方程

泊松方程为代表

$$\nabla^2 u=f(x,y,z)$$

$$f(x,y,z)=0$$

退化为拉普拉斯方程

如何学好数学物理方程？

1、 掌握先行课相关知识，打好基础

普物——重点：力学、电学、热学

高数——重点：微积分、常微分方程解法

必须记住普物、高数中的一些常用定律和重要结论。

2、 珍视课堂，专心听讲，积极思维

有些知识点必须靠面对面的传授，面对面的交流。

3、 勤于练习，勤于思考，勤于质疑

- 及时复习，“子曰，学而时习之，不亦乐乎”
- 通过做练习才能发现问题，练好基本功
- 多想，多问。

- 伽利略观察比萨教堂的吊灯，发现了单摆在小振幅情况下振动周期相同；

- 斐塞司博士因为一只晒太阳睡懒觉的猫而发明了闻名世界的日光疗法，获得了诺贝尔医学奖；
- 德国科学家魏格纳看地图，发现大西洋两岸的地形好象是互补的，证实了一个崭新的理论：大陆板块漂移说。

“求学问，先学问，只学答，非学问。”——李振道

4、 善于总结、善于分析、善于对比

小结，能使知识条理化，系统化，融会贯通。在小结中，要善于对比加深印象。

5、 乐于交流，乐于讨论，乐于创新

"倘若你有一个Apple,我也有一个Apple,而我们彼此交换这些Apple,那么你和我仍然是各有一个。但是,倘若你有一种Idea,我也有一种Idea,而我们彼此交换这些Idea,那么,我们每人将有两种Idea。"

——萧伯纳

6、 学会举一反三，由树木见森林

7、 熟记重要公式，简化求解过程

8、 勤奋学习，树立信心，水到渠成

成功＝天资＋机遇＋勤奋+信心

成功有三个境界，一是“昨夜秋风凋碧树，独上西楼，望尽天涯路”，二是“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”，三是“众里寻他千百度，回头蓦见，那人正在灯火阑珊处”。

——王国维

第一篇 复变函数论

第一章 复数与复变函数

- §1.1 复数和复平面的基本概念
- §1.2 复平面区域与边界的定义
- §1.3 初等复变函数
- §*1.4 复变函数多值性的讨论

§1.1 复数和复平面的基本概念

❖ 复数的概念

复数

形如$z=x+iy$的数被称为复数，其中$x, y \in R$。$x=\mathrm{Re}z$，$y=\mathrm{Im}z$分别为z的实部和虚部，i为虚数单位，其意义为$i^2=-1$

共轭复数

$\bar{z}=x-iy$

复数相等

$z_1=z_2$，当且仅当$\mathrm{Re}z_1=\mathrm{Re}z_2$且$\mathrm{Im}z_1=\mathrm{Im}z_2$

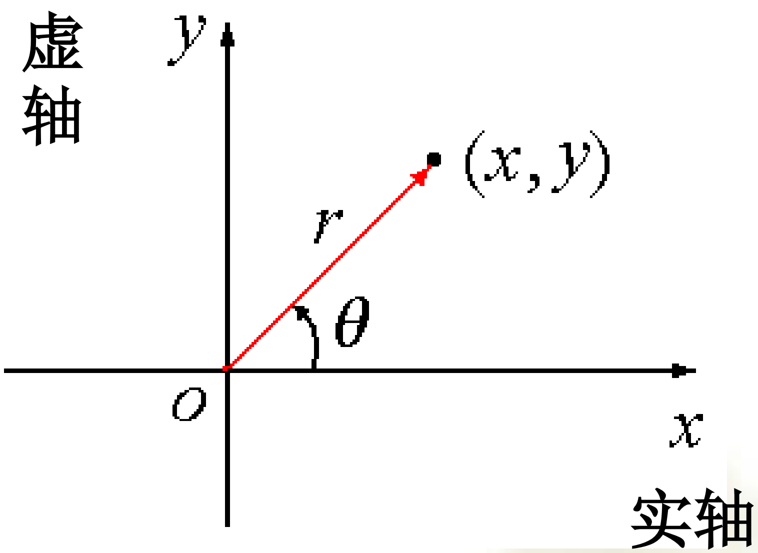
复数不能比较大小

复平面

复数与平面向量一一对应

复数z=x+iy

z平面



模 $|z| \equiv \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

幅角 $\theta = 2k\pi + \arg z \equiv \mathrm{Arg} z$

主幅角 $0 \le \arg z < 2\pi$

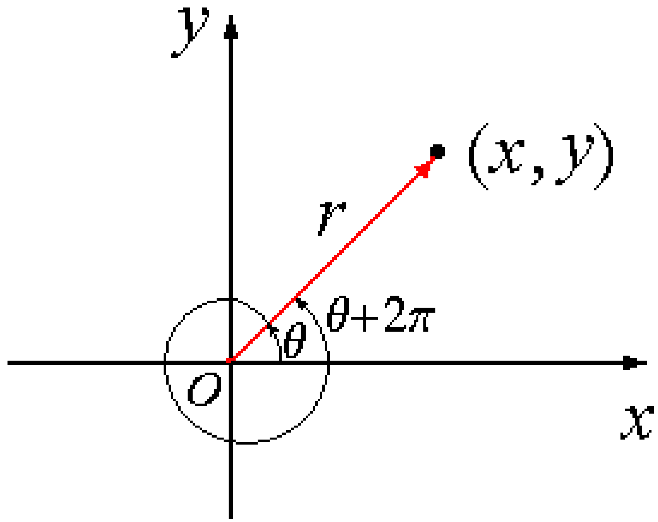
或 $-\pi \le \arg z < \pi$

关系：

$$x = \rho \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\theta$$

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$



z= ρ (cos θ +isin θ)

欧拉公式:

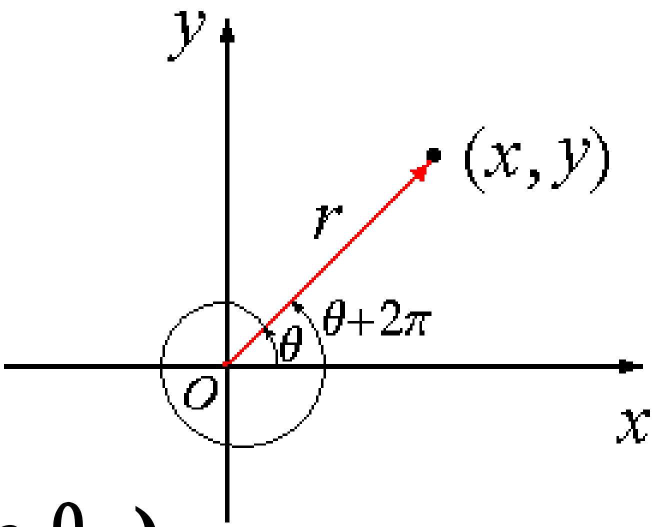
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

z= ρ exp(i θ)

注意

两个复数相等当且仅当模相等且幅角相差2*k* π

❖ 复数的表示



代数表示： $z=x+iy$

三角表示： $z=\rho\ (\cos\theta\ +i\sin\theta\ )$

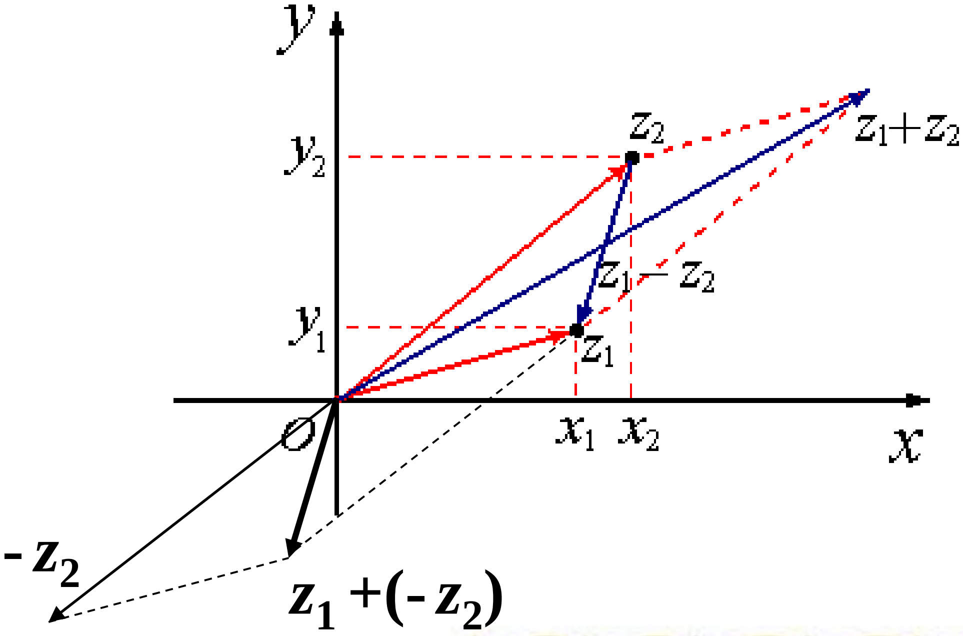
指数表示： $z=\rho\ \exp(i\theta\ )$

❖ 复数的运算

设$z_1=x_1+iy_1$和 $z_2=x_2+iy_2$是两个复数

加减运算

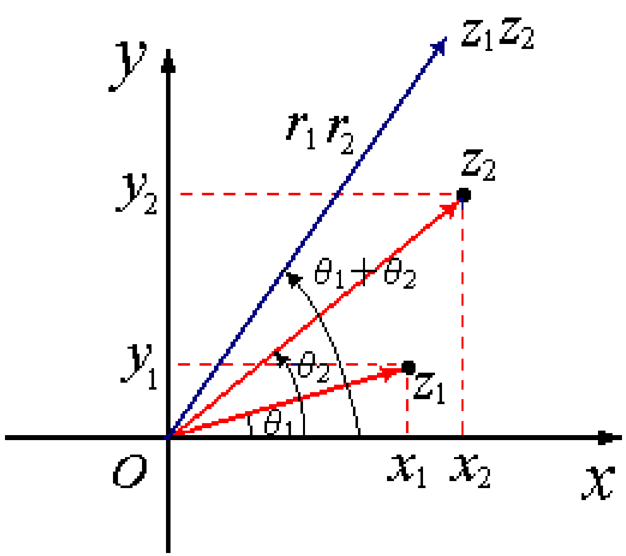
$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2)$$



复数加减法满足平行四边形法则，或三角形法则

乘法运算

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
&= \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \\
&= \rho_1 \rho_2 \exp[\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}
$$



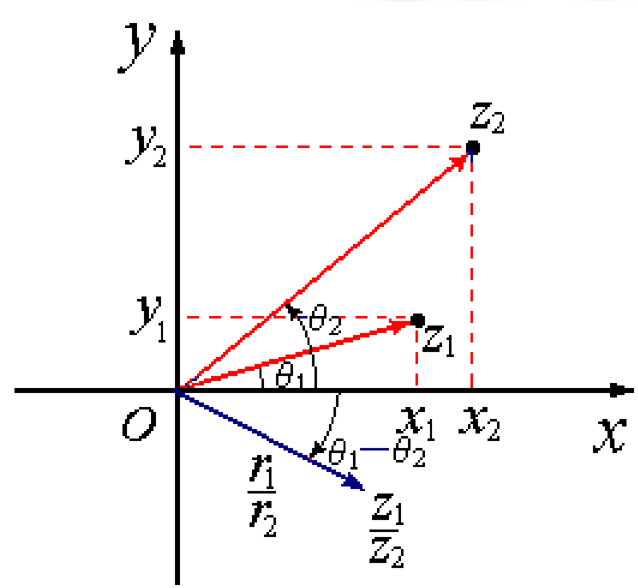
两个复数相乘等于它们的模相乘，幅角相加

除法运算

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\exp[\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)]$$



两个复数相除等于它们的模相除，幅角相减

乘方运算

设 $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$

$$z^n = \rho^n(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$$

$$= \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

$$= \rho^n e^{\mathrm{i}n\theta}$$

开方运算

设 $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

（k=0，1，2，…，n-1，n为自然数）

上式中k每取一值对应一根，共有n个根。

补充：$\boxed{\text{共轭运算}}$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

例1.1 计算复数 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$

解： $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$ 所以

$$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi/6+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi/6+2k\pi}{3})$$

（**k**＝0，1，2），对应三个根

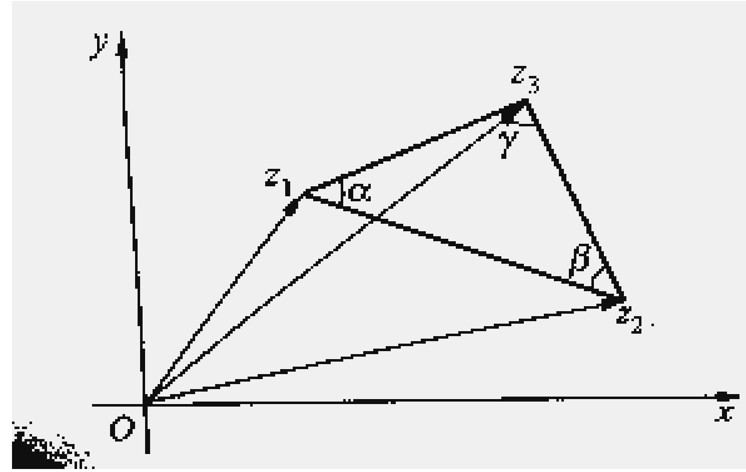
$$z_1=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{18})$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{13\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{18})$$

$$z_3=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{25\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{18})$$

例1.2（略）

试利用复数证明三角形的内角和等于 π



证明： 如图

$$\alpha = \angle z_2 z_1 z_3 = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\beta = \angle z_1 z_2 z_3 = \arg\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \qquad \gamma = \angle z_1 z_3 z_2 = \arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

所以

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\cdot\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\cdot\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \arg(-1) = \pi$$

课堂练习

设$z_1=5-i5, z_2=-3+i4$,求$\dfrac{z_1}{z_2}$和$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$

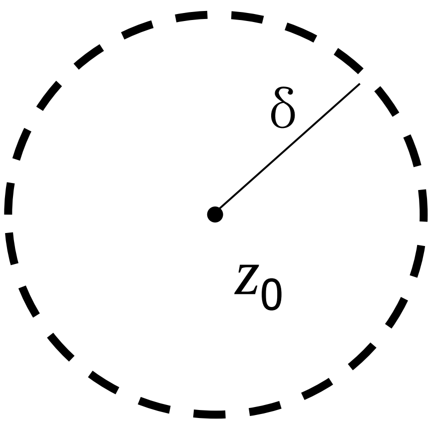
求$(1+i)^{100}$和$\sqrt[4]{1+i}$

§1.2 复平面区域与边界的定义

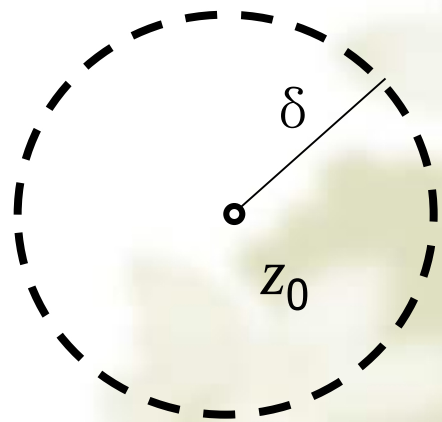
定义1：邻域

δ-领域： 满足条件$|z-z_0|<\delta$的所有复数的集合。记为 $U(z_0,\delta)$

δ-去心邻域： 满足条件$0<|z-z_0|<\delta$的所有复数的集合。$\overset{\frown}{U}(z_0,\delta)$



$|z-z_0|<\delta$

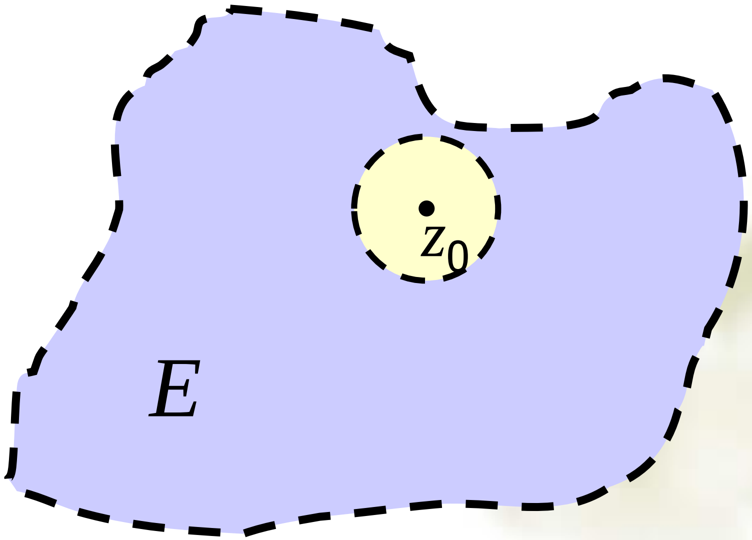


$0<|z-z_0|<\delta$

定义2：开集

设E为一平面点集，$z_0 \in E$，并且存在$\delta>0$，使得 $U(z_0,\delta)\subset E$ 那么称z_0为E的内点。

如果E内的每一个点都是它的内点，那么称E为开集。

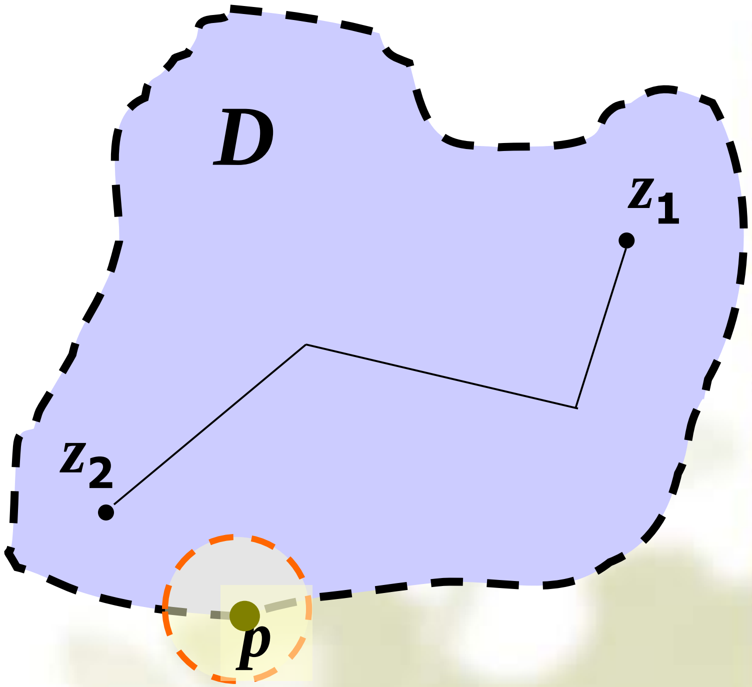


定义3：区域

平面点集*D*称为一个区域，如果它满足下列两个条件：
1. ***D***是开集；**2.** ***D***是连通的。

定义4：边界和闭区域

设*D*为复平面上的一个区域，如果点 *p*不属于*D*，但是在 *p* 的任何邻域内都包含有*D*中的点，这样的点 *p*称为*D*的边界点。*D*的边界点之全体称为*D*的边界。

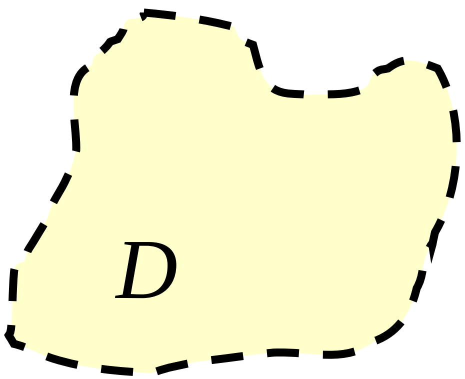


区域*D*连同它的边界一起构成闭区域，记为 $\overline{D}$

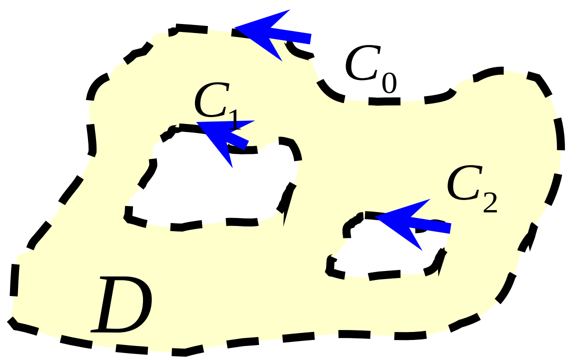
定义5：单连通域与多连通域

若在区域*D*内作任意闭合曲线，曲线所包围的所有点都属于*D*，那么*D*称为单连通区域，否则，*D*称为复连通区域。

规定：若观察者沿边界线走时，区域总保持在观察者的左边，那么观察者的走向为边界线的正向；反之，则称为边界线的负向。



单连通域



多连通域

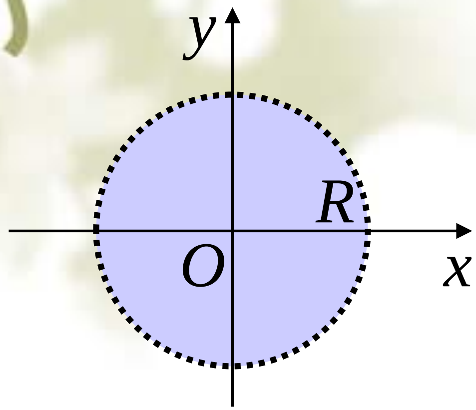
逆时针方向 C_n

顺时针方向 C_n^-

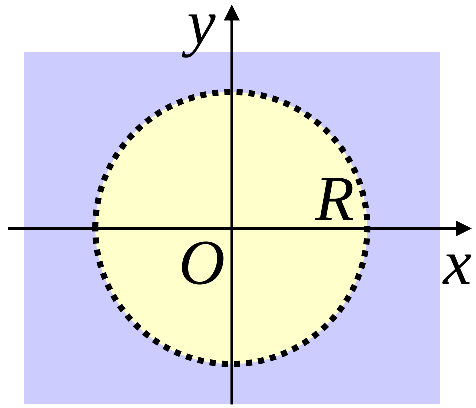
$$C = C_0 + C_1^- + C_2^-$$

课堂练习1

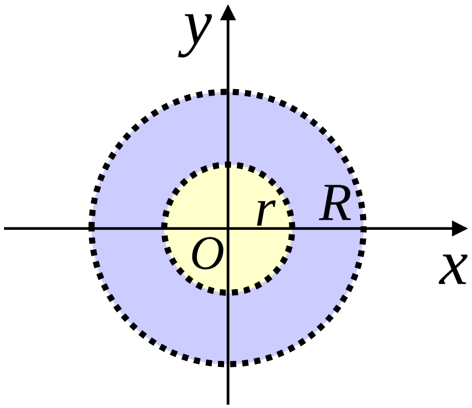
用复数表示出下列点集



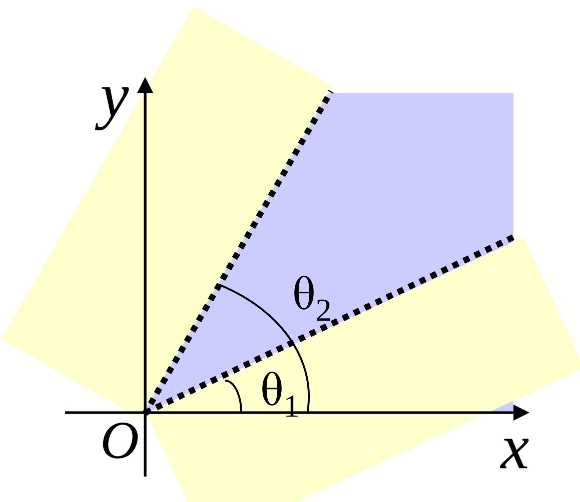
$|z|<R$



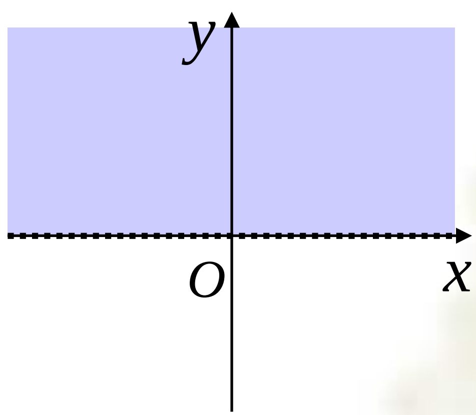
$|z|>R$



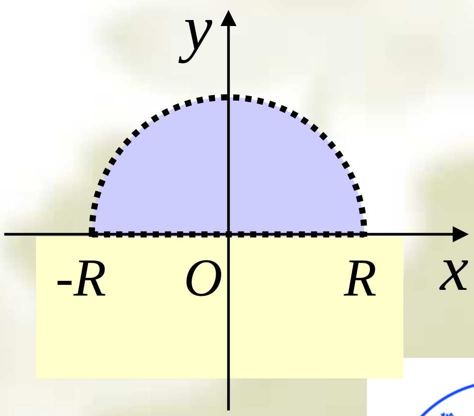
$r<|z|<R$



$\theta_1 < \arg z < \theta_2$



$\operatorname{Im} z > 0$



$|z|<R, \operatorname{Im} z > 0$

课堂练习2 在复平面表示出满足下列条件的点集

$$|z| \le 2$$

$$|z-a| = |z-b| \quad (a,b\text{为复常数})$$

$$|z| + \operatorname{Re} z \le 1$$

$$\alpha < \arg z < \beta, a < \operatorname{Re} z < b \quad (\alpha,\beta,a,b\text{为实常数})$$

§1.3 初等复变函数

❖ 复变函数的定义

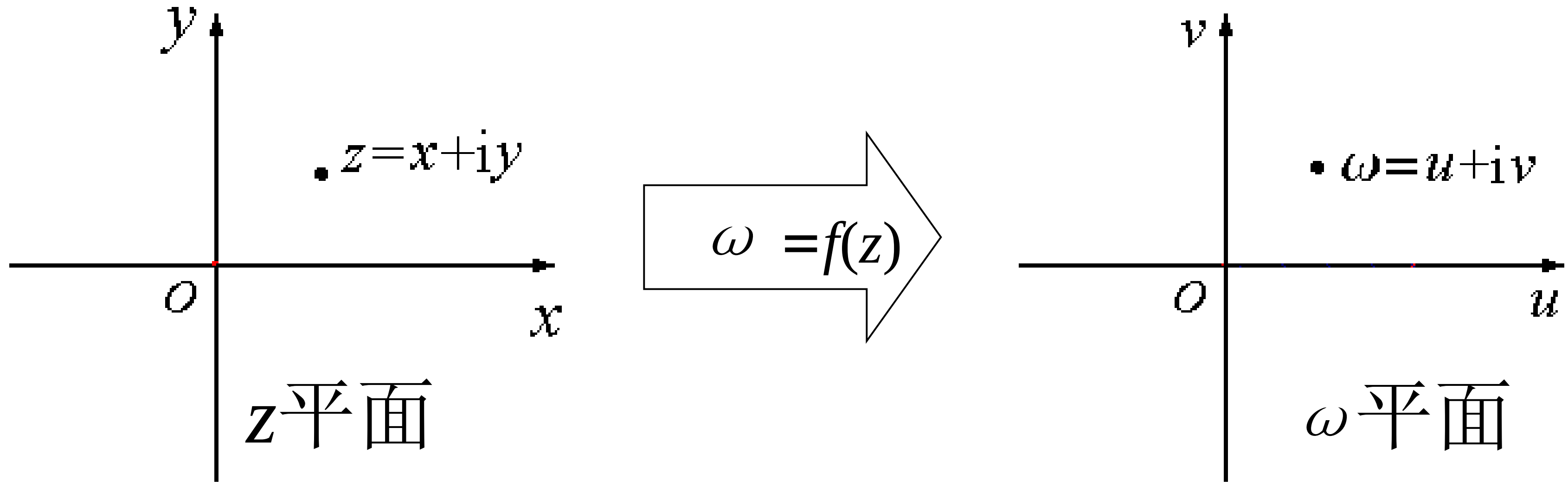
设E是一个复数$z=x+iy$的集合。如果有一个确定的法则存在，按照这一法则，对于集合E中的每一个复数z，有一个或多个复数$w=u+iv$与之对应，那么称复变数w是复变数z的函数，或复变函数，记为$w=f(z)$。

变量z为自变量；w为因变量；数集E为定义域；w的所有取值构成的数集$\{w \mid w=f(z), z\in E\}$为值域

说明1

如果z的一个值对应着w的唯一一个值，那么我们称$f(z)$是单值函数；如果z的一个值对应着多个w的值，那么我们称$f(z)$是多值函数。

说明2 复变函数$w=f(z)$可以看作是z平面到w平面上的一个映射。



复变函数$w=f(z)$可以写成$w=u(x,y)+iv(x,y)$，

其中$z=x+iy$

❖ 几类基本初等函数

幂函数　　**n为正整数**

$$z^n=\rho^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\rho^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=\rho^n e^{\mathrm{i}n\theta}$$

指数函数　$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$　　$z=x+\mathrm{i}y$

$$\left|e^z\right|=e^x,\ \mathrm{Arg}e^z=y$$

性质　$y=0$时, $e^z=e^x$; $x=0$时, $e^{iy}=\cos y+i\sin y$

周期性　$\exp(z+\mathrm{i}2\pi)=\exp(z)$

可加性　$\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\exp(z_2)$

三角函数

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

性质

周期性

$$\sin(z+2k\pi) = \sin z$$

$$\cos(z+2k\pi) = \cos z$$

无界性 设 $z = iy$ $\quad \lim\limits_{y\to\infty}|\sin iy| = \lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{2}\left|e^{-y} - e^{y}\right| = \infty$

双曲函数

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

$$\tanh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$$

性质

1. 以2πi为周期

2. 与正弦函数、余弦函数的关系

$$\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z \qquad \cos(\mathrm{i}z) = \cosh z$$

根式函数

设 $z=\rho e^{i\theta}$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

其中$z=\rho e^{i\theta}$， $k=0,1,\ldots,n-1$ θ是主幅角

注意 **根式函数是多值函数**

对数函数 设 $z=\rho e^{i\theta}$

$$\mathrm{Lnz}=\ln|z|+\mathrm{iArgz}=\ln\rho+\mathrm{i}(\theta+2k\pi),$$

其中, θ是z的主幅角, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

性质1 $w=\mathrm{Lnz}$:给定一个z值，有无穷多个w值

$\mathrm{lnz}=\ln|z|+\mathrm{i}\theta$被称为Lnz的主值

性质2 恒等式 $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Lnz}_1+\mathrm{Lnz}_2$

$$\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\mathrm{Lnz}_1-\mathrm{Lnz}_2$$

$$e^{\mathrm{Lnz}}=z$$

注意 符号lnz与ln|z|，以及Lnz的区别

一般幂函数

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z}$$

$$(z \neq 0, \alpha\text{为复数})$$

性质 多值函数

只有α为整数时，才是单值函数。

课堂练习：

1. 计算Ln2， Ln(-1)， Ln(-i)， Ln(1+i)
2. 求解sinz=0,sinz=2的全部根

$$z = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$z = -\mathrm{i}\ln(2 \pm \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

反三角函数 （了解）

$$\mathrm{Arccos}z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\mathrm{Arcsin}z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\mathrm{Arctan}z = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$$

例1.3 （略） 求 2^{1+i} 的值

例1.4 （略） 求 $\arccos 2$ 的值

例1.5 （略）

举例说明等式 $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 \cdot z_2}$ 可能不成立。

§1.4 复变函数多值性的讨论

本节不要求

本章作业

1-1(1)(2)(3);

1-2(1)(3);

1-3(1)(2);

1-7(1)(3)

第一章课后作业：

1-1试求出下列复数的代数式：

（1）$(1-i)^2-(1+i)^2$　　（2）$\dfrac{2-i}{1+i}$

（3）$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$

1-2试求出下列复数的三角式和指数式：

（1）$-2+2\sqrt{3}i$　　（3）$(\sqrt{3}+i)^{-2}$

1-3试求下列复数的值（复数的标准形式）

（1）$\sqrt[4]{-1}$　　（2）$\sqrt[5]{1}$

1-7试求下列函数值

（1）$\sin(1-5i)$　　（3）$\mathrm{Ln}\, i^i$