第九章 二阶线性常微分方程的级数解法

- ❖ § 9.1 常微分方程在常点邻域中的级数解法
- ❖ § 9.2 常微分方程在正则奇点邻域中的级数解法



二阶线性常微分方程的标准形式为:

$$\frac{d^{2}w(z)}{dz^{2}} + p(z)\frac{dw(z)}{dz} + q(z)w(z) = 0$$

常点和奇点

若常微分方程的系数p(z)和q(z)在点z₀的一个领域内解析,那么z₀称为常微分方程的常点,否则称为奇点。

正则奇点

若z₀是常微分方程的奇点,但z₀ 是p(z)不高于一阶的极点,是q(z)不高于二阶的极点,那么z₀称为常微分方程的正则奇点。

§ 9. 1常微分方程在常点邻域中的级数解法

$$\frac{d^{2}w(z)}{dz^{2}} + p(z)\frac{dw(z)}{dz} + q(z)w(z) = 0$$

定程9.1

若zo是常微分方程的常点,并且具有初值条件

$$w(z_0) = c_0, w'(z_0) = c_1$$
 $(c_0, c_1$ 为已知复数)

那么常微分方程在zo的领域中存在唯一的解析解。

将w(x),p(x),q(x)展开为以z₀为中心的泰勒级数

$$p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k$$

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

代入方程式,则

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n(z-z_0)^{n-1}$$

$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-z_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = 0$$

利用级数公式
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k) x^n$$



进行合并, 然后合并同幂次系数, 可得以下递推关系

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{n-k}c_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}c_{k} = 0$$

$$(n=0,1,2,...)$$

整理得到

$$c_{n+2} = -\frac{\sum_{k=0}^{n} [(k+1)a_{n-k}c_{k+1} + b_{n-k}c_{k}]}{(n+1)(n+2)} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

CERTAIN 1956 RECT

例9.1 采用级数解法求解Legendre方程。

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \mu y = 0(\mu 为常参数)$$

解:
$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, q(x) = \frac{\mu}{1-x^2}$$

X=0为常点,设解为: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

代入方程,则

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty}c_nn(n-1)x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{+\infty}c_nnx^{n-1}+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n=0$$
 数学物理方程



合并同幂次项,并比较系数得:

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \mu}{(n+2)(n+1)} c_n \quad (n = 0,1,2,...)$$

利用递推关系,可以得到所有 c_{2k} , c_{2k+1} ,

特解
$$y_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k} x^{2k} \qquad y_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

通解
$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

收敛半径
$$R = \left[\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+2}} \right| \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{n(n+1) - \mu} \right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

§ 9. 2常微分方程在正则奇点邻域 中的级数解法 定程9.2

若zo是常微分方程的正则奇点,那么常微分方程在zo的领域中 存在两个线性无关的正则解,形式如下:

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k (c_0 \neq 0, \rho_1, c_k$$
为待定常数)

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (z - z_0)^k (d_0 \neq 0, \rho_2, d_k$$
为待定常数)

或者
$$w_2(z) = Aw_1(z)\ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(z-z_0)^k$$

 $(d_0 \neq 0, \rho_2, d_k$ 为待定常数)

根据定理**9.2**,可设:
$$w(z) = (z - z_0)^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n (c_0 \neq 0)$$

根据正则奇点定义:
$$(z-z_0)p(z) = \sum_{\substack{k=0 \ +\infty}}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$$(z-z_0)^2 p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-z_0)^k$$

代入方程:

$$(z-z_0)^2 \frac{d^2w(z)}{dz^2} + (z-z_0)^2 p(z) \frac{dw(z)}{dz} + (z-z_0)^2 q(z)w(z) = 0$$

可得:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\rho+n)(\rho+n-1)(z-z_0)^{\rho+n} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\rho+n)(z-z_0)^{\rho+n}$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^{\rho+n} = 0 \qquad (c_0 \neq 0)$$



上式合并同幂次项后得到:

$$c_{n}(\rho+n)(\rho+n-1) + \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}[a_{k}(\rho+n-k) + b_{k}] = 0$$

$$(n = 0,1,2,3...)$$

取**n=0**
$$c_0 \rho(\rho - 1) + c_0 (a_0 \rho + b_0) = 0$$
 $(c_0 \neq 0)$

$$\rho^2 + (a_0 - 1)\rho + b_0 = 0$$
 (a,b为已知常数)

指标方程,或判定方程

$$\rho_1 = \frac{1 - a_0}{2} + \sqrt{(\frac{1 - a_0}{2})^2 - b_0} \qquad \rho_2 = \frac{1 - a_0}{2} - \sqrt{(\frac{1 - a_0}{2})^2}$$
数学物理方程

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k (c_0 \neq 0, \rho_1, c_k)$$
 特定常数)

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (z - z_0)^k (d_0 \neq 0, \rho_2, d_k$$
为待定常数)

或者
$$w_2(z) = Aw_1(z)\ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_0)^k$$

 $(d_0 \neq 0, \rho_2, d_k$ 为待定常数)

定程9.3

假设指标方程的两个根Re ρ_1 Re ρ_2 。当(ρ_1 $-\rho_2$)不为整数时,常微分方程的第二个特解具有第一种形式,当(ρ_1 $-\rho_2$)为整数时,常微分方程的第二个特解具有第二种形式。

399.2

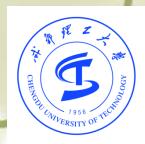
利用级数法求解 v 阶Bessel方程

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx} + (1 - \frac{v^2}{x^2})y(x) = 0 \quad (v为非负实数)$$

解:
$$p(x) = \frac{1}{x}, q(x) = 1 - \frac{v^2}{x^2}$$

X=0为正则奇点,指标方程 $\rho^2 - \nu^2 = 0$ 为

设特解为:
$$y_1(x) = x^{\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (c_0 \neq 0)$$



代入方程并化简得:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n+\nu)(n+\nu-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (n+\nu)x^n + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0$$

合并同幂次项得:

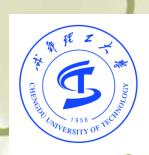
$$(2\nu+1)c_1x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[c_n(n+\nu)(n+\nu-1) + c_n(n+\nu) - c_n\nu^2 + c_{n-2} \right] x^2 = 0$$

因为 $\mathbf{v} \ge 0$,所以 $c_1 = 0$

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(n+v)^2 - v^2} = -\frac{c_{n-2}}{n(n+2v)}$$

所以

$$c_{2k+1} = 0$$
 $(k = 0,1,2,...)$



$$c_{2k} = -\frac{c_{2(k-1)}}{2^2 k(k+\nu)} = (-1)^k \cdot \frac{c_0}{2^{2k} k! (k+\nu)(k+\nu-1)...(\nu+1)}$$

$$(k=1,2,3...)$$

引进函数
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

利用性质
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
 则有

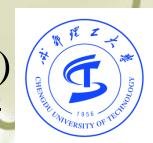
$$\Gamma(k+\nu+1) = (k+\nu)\Gamma(k+\nu)$$

$$= (k+\nu)(k+\nu-1)\Gamma(k+\nu-1)$$

$$= (k+\nu)(k+\nu-1)...(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

所以有

$$c_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{c_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(k+\nu+1)} \qquad (k=0,1,2,...)$$
 数学物理方程



所以得到v阶bessel方程的一个特解为:

$$y_1(x) = c_0 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

讨论

(i)
$$\rho_1 - \rho_2 = 2\nu$$
 不等于整数 $y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ $(d_0 \neq 0)$

$$d_{2k+1} = 0$$
 $(k = 0,1,2,...)$

$$d_{2k} = -\frac{d_{2(k-1)}}{2^2 k(k-\nu)} = (-1)^2 \cdot \frac{d_0 \Gamma(1-\nu)}{2^{2k} k! \Gamma(k-\nu+1)} \qquad (k = 0,1,2...)$$

若1-v<0,
$$\Gamma(1-\nu) = \frac{1}{1-\nu}\Gamma(2-\nu) = \frac{1}{1-\nu}\frac{1}{2-\nu}\Gamma(3-\nu) = \dots$$



±v阶Bessel函数的定义为:

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} (\frac{x}{2})^{2k+\nu}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

在2v≠整数情况下,v阶Bessel方程的通解为:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = CJ_{\nu}(x) + DJ_{-\nu}(x)$$



(ii)
$$\rho_1 - \rho_2 = 2\nu = 2m + 1 \ (m = 0,1,2,...)$$

(半奇数阶Bessel方程)

$$y_1(x) = C\mathbf{J}_{m+\frac{1}{2}}(x)$$

$$y_2(x) = AJ_{m+\frac{1}{2}}(x)\ln x + x^{-(m+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad (d \neq 0)$$

代入方程,得到 A=0

$$y_2(x) = DJ_{-m-\frac{1}{2}}(x)$$

所以通解为:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = CJ_{m+\frac{1}{2}}(x) + DJ_{-m-\frac{1}{2}}(x)$$

$$(m = 0, 1, 2, ...)$$



(iii)
$$\rho_1 - \rho_2 = 2\nu = 2m \ (m = 0,1,2,...)$$
 (整数阶Bessel方程)

设
$$y_2(x) = AJ_m(x) \ln x + x^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad (d \neq 0)$$

代入方程,得到 $y_2(x) = DN_m(x)$

所以通解为:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = CJ_m(x) + DN_m(x)$$

 $(m = 0, 1, 2, ...)$



其中,

$$\mathbf{N}_{m}(x) = \left[\frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2) - \frac{1}{\pi}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}... + \frac{1}{m})\right] \mathbf{J}_{m}(x) - \frac{(m-1)!2^{m}}{\pi d_{0}} y_{2}(x)$$

$$= \frac{2}{\pi} (\gamma + \ln \frac{x}{2}) J_m(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!} (\frac{x}{2})^{-m+2n} -$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n-m}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}\right) \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

补充
$$N_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$N_{m}(x) = \lim_{v \to m} \frac{J_{v}(x)\cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_{v}(x)}{\partial v} - \frac{1}{\cos v\pi} \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v} \right]$$

本章作业

9-1; 9-4;

