第 7 章 一维有限区间中的波动方程部分习题及简答

7-1 求解下列本征值问题

（1）$X''(x)+\lambda X(x)=0$；$X'(0)=X(l)=0$

（2）$X''(x)+2aX'(x)+\lambda X(x)=0$；$X(0)=X(l)=0, 0<a<\sqrt{\lambda}$

补充：（3）$X''(x)+\lambda X(x)=0$；$X'(0)=X'(l)=0$

解：（1）$\begin{cases}\lambda_n=[\dfrac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}]^2\\ X_n(x)=\cos\dfrac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x\end{cases}$ $n=0,1,2....$

（2）首先解方程的特征根 $r^2+2ar+\lambda=0$，$r=-a\pm i\sqrt{\lambda-a^2}$

通解：$X(x)=e^{-ax}(C_1\cos\sqrt{\lambda-a^2}x+C_2\sin\sqrt{\lambda-a^2}x)$

代入初始条件可得：$\begin{cases}C_1=0\\ C_2e^{-al}\sin\sqrt{\lambda-a^2}l=0\end{cases}$，$\Rightarrow\sqrt{\lambda-a^2}l=n\pi$

$$\begin{cases}\lambda_n=a^2+(\dfrac{n\pi}{l})^2\\ X_n(x)=e^{-ax}\sin\dfrac{n\pi}{l}x\end{cases}\quad n=1,2....$$

（3）$\begin{cases}\lambda_n=(\dfrac{n\pi}{l})^2\\ X_n(x)=\cos\dfrac{n\pi}{l}x\end{cases}$ $n=0,1,2....$

7-2 长为 l 的两端固定弦由于受到风力作用，在初始时刻（t=0）形成了如下图所示的抛物线形状（h 已知），并且处于瞬时静止状态，试求解风力撤销后弦的自由振动问题。

解：所求定解问题为$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ \ x\in(0,l),t>0\\ u|_{x=0}=0,\qquad u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=-\dfrac{4h}{l^2}x(x-l),\ \ u_t|_{t=0}=0\end{cases}$

由分离变量法，可得通解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

代入初始条件，

$$u\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=-\frac{4h}{l^2}x(x-l),$$

$$u_t\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

可得：$A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l-\frac{4h}{l^2}x(x-l)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx=\frac{16h}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]$，　$B_n=0$

所以，原定解问题的解为：$u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16h}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

或$u(x,t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{32h}{[(2k+1)\pi]^3}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}t\right)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}x\right)$,

7-3 设均匀细杆一端固定，一端自由，已知初始条件$u\big|_{t=0}=kx,u_t\big|_{t=0}=0,$，求解杆的纵自由振动问题。

解:所求的定解问题为：$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ \ x\in(0,l),t>0\\ u\big|_{x=0}=0,\qquad u_x\big|_{x=l}=0\\ u\big|_{t=0}=kx,\ \ u_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$

由分离变量法可得，通解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})a\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x\right)$$

代入初始条件，

$$u\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}=kx,$$

$$u_t\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}=0$$

解得：$A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l kx\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}dx=\frac{2kl(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$，　$B_n=0$

所以，原定解问题的解为：$u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2lk(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi at}{l}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$

7-4 长为 l 的弦两端固定，弦中张力为 T，有一外力作用于距一端为 x_0 的点上，已知垂直于弦的分力为 F_0.若外力突然撤销，试求解弦的自由振动问题。

解：所求定解问题为：$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad x\in(0,l), t>0 \\ u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\begin{cases} \dfrac{F(l-x_0)}{T_0 l}x, x\in[0,x_0] \\ \dfrac{Fx_0}{T_0 l}(l-x), x\in[x_0,l] \end{cases}, \quad u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$

由分离变量法，可得通解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

代入初始条件，

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\begin{cases} \dfrac{F(l-x_0)}{T_0 l}x, x\in[0,x_0] \\ \dfrac{Fx_0}{T_0 l}(l-x), x\in[x_0,l] \end{cases}, \quad u_t|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

可得：

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^{x_0}\frac{F(l-x_0)}{T_0 l}x\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx+\int_{x_0}^{l}\frac{Fx_0}{T_0 l}(l-x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx=\frac{2F_0 l}{n^2\pi^2 T}\sin\frac{n\pi}{l}x_0,$$

$$B_n=0$$

所以，原定解问题的解为：$u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2F_0 l}{n^2\pi^2 T}\sin\frac{n\pi}{l}x_0\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

7-5 长为 l 的均匀细杆，一端固定，另一端受纵向力 F_0.作用而伸长，试求解外力撤销后杆的自由振动问题。

解：所求定解问题为：$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad x\in(0,l), t>0 \\ u|_{x=0}=0, \qquad u_x|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\dfrac{F_0}{SY}x, \quad u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$

由分离变量法可得，通解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})a\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x\right)$$

代入初始条件，

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}=kx\,,$$

$$u_t|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}=0$$

解得：$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{F_0}{SY}x\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}dx=\frac{F_0}{SY}\frac{2l(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$，　　$B_n=0$

所以，原定解问题的解为：$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{F_0}{SY}\frac{2l(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi at}{l}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$

补充作业 1： $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u_x|_{x=0}=0;u_x|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=\varphi(x);u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$

解:由分离变量法可得通解为：$u(x,t)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t)\cos\frac{n\pi}{l}x$

代入初始条件，

$$\begin{cases}u|_{t=0}=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)\\ u_t|_{t=0}=B_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\cos\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)\end{cases}$$ 解得：

$$\begin{cases}A_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\mathrm{d}x\\ B_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(x)\mathrm{d}x\end{cases},\quad\begin{cases}A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\\ B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\end{cases}$$

7-6 求解以下定解问题。$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=A\phi(x)\sin\omega t,\quad x\in(0,l),t>0\\ u_x|_{x=0}=0,\qquad u_x|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=\phi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$

解:根据边界条件，设方程的傅里叶级数形式解为：$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$

相应地将非齐次项和初始条件也展开成相同形式的 Fourier 级数：

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}\,,\qquad\psi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

其中，$\begin{cases}A_0=\frac{1}{l}\int_0^l\phi(x)\mathrm{d}x\\ B_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(x)\mathrm{d}x\end{cases},\quad\begin{cases}A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\\ B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\end{cases}$

代入方程和初始条件可得:

$$\begin{cases} T_0''(t) = A_0 A\sin\omega t \\ T_0(0) = A_0, T_0'(0) = B_0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} T_n''(t) + (n\pi a/l)^2 T_n(t) = A_n A\sin\omega t \\ T_n(0) = A_n, T_n'(0) = B_n \end{cases}$$

解得：$T_o(t) = -\dfrac{A_0 A}{\omega^2}\sin\omega t + A_0 + (B_0 + \dfrac{A_0 A}{\omega})t$

$$T_n(t) = \frac{A_n A}{(\omega^2 - n^2\pi^2 a^2/l^2)}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} - \sin\omega t\right) + A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}B_n\sin\frac{n\pi at}{l}$$

所以，原定解问题的解为：

$$u(x,t) = -\frac{A_0 A}{\omega^2}\sin\omega t + A_0 + (B_0 + \frac{A_0 A}{\omega})t$$
$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{A_n A}{(\omega^2 - n^2\pi^2 a^2/l^2)}\left(\frac{\omega l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l} - \sin\omega t\right) + A_n\cos\frac{\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right]\cos\frac{n\pi x}{l}$$

补充作业 2： 求解定解问题 $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cos\dfrac{\pi x}{l}\sin\omega t \\ u_x\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

解：解:根据边界条件，设方程的傅里叶级数形式解为：$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$

相应地将非齐次项和初始条件也展开成相同形式的 Fourier 级数：

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

其中，$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x \\ B_0 = \dfrac{1}{l}\int_0^l \psi(x)\mathrm{d}x \end{cases}$，$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ B_n = \dfrac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \end{cases}$

代入方程和初始条件可得:

$$\begin{cases} T_0''(t) = 0 \\ T_0(0) = A_0, T_0'(0) = B_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T_1''(t) + (\pi a/l)^2 T_1(t) = A\sin\omega t \\ T_1(0) = A_1, T_1'(0) = B_1 \end{cases} \quad \begin{cases} T_n''(t) + (n\pi a/l)^2 T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = A_n, T_n'(0) = B_n \end{cases}$$

解得：$T_o(t) = A_0 + B_0 t$，

$$T_1(t) = \frac{A}{(\omega^2 - \pi^2 a^2/l^2)}\left(\frac{\omega l}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{l} - \sin\omega t\right) + A_1\cos\frac{\pi at}{l} + \frac{l}{\pi a}B_1\sin\frac{\pi at}{l}$$

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}B_n\sin\frac{n\pi at}{l}$$

所以，原定解问题的解为：

$$u(x,t)=\frac{A}{(\omega^2-\pi^2a^2/l^2)}(\frac{\omega l}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{l}-\sin\omega t)\cos\frac{\pi x}{l}+A_0+B_0t+$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos\frac{\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}B_n\sin\frac{n\pi at}{l})\cos\frac{n\pi x}{l}$$

7-8 长为 L 的均匀纵杆，一端自由，另一端受纵向力 $F(t)=F_0\sin\omega t$ 作用，假设杆开始时刻(t=0)处于静止状态，试求解杆的受迫振动问题。

解：所求定解问题为：
$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u_x\big|_{x=0}=0;u_x\big|_{x=l}=A\sin\omega t\ \ (A=\dfrac{F_0}{YS})\\ u\big|_{t=0}=0;u_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

设方程的解为：$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ 适当选择 $w(x,t)$，使 $v(x,t)$满足齐次边界条件。

方法 1、令 $\begin{cases}w_x(x,t)=A(t)x+B(t)\\ w_x\big|_{x=0}=0,\quad w_x\big|_{x=l}=A\sin\omega t\end{cases}$ 解得：$w(x,t)=\dfrac{A}{2l}x^2\sin\omega t$

则：$u(x,t)=v(x,t)+\dfrac{A}{2l}x^2\sin\omega t$，那么 $v(x,t)$满足的定解问题为：

$$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=\dfrac{A}{l}(a^2+\dfrac{\omega^2x^2}{2})\sin\omega t\\ v_x\big|_{x=0}=0;v_x\big|_{x=l}=0\\ v\big|_{t=0}=0;v_t\big|_{t=0}=-\dfrac{A\omega}{2l}x^2\end{cases}$$

根据边界条件，可设 $v(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$

相应地，$x^2=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}B_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}$，其中，$B_0=\dfrac{1}{l}\int_0^l x^2\mathrm{d}x=\dfrac{l^2}{3}$，$B_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\dfrac{4l^2(-1)^n}{n^2\pi^2}$

所以，代入方程和初始条件，可以得：

$$\begin{cases}T_0''(t)=\dfrac{A}{l}(a^2+\dfrac{\omega^2B_0}{2})\sin\omega t\\ T_0(0)=0,T_0'(0)=-\dfrac{A\omega}{2l}B_0\end{cases},\quad \begin{cases}T_n''(t)+(n\pi a/l)^2T_n(t)=\dfrac{A\omega^2\cdot B_n}{2l}\sin\omega t\\ T_n(0)=0,T_n'(0)=-\dfrac{A\omega}{2l}B_n\end{cases}$$

解得：$T_o(t)=(\dfrac{Aa^2}{l\omega})t-\dfrac{A}{l\omega^2}(a^2+\dfrac{\omega^2B_0}{2})\sin\omega t$

采用 laplace 变换，求解 $T_n(t)$,

$$p^2\overline{T}_n(p)+\frac{A\omega}{2l}B_n+(n\pi a/l)^2\overline{T}_n(p)=\frac{A\omega^2\cdot B_n}{2l}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$p^2\overline{T}_n(p)+(n\pi a/l)^2\overline{T}_n(p)=\frac{A\omega^2\cdot B_n}{2l}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{A\omega}{2l}B_n=-\frac{A\omega\cdot B_n}{2l}\frac{p^2}{p^2+\omega^2}$$

$\overline{T}_n(p)=\dfrac{A\omega\cdot B_n}{2l}\cdot\dfrac{1}{[\omega^2-(n\pi a/l)^2]}[\dfrac{(n\pi a/l)^2}{p^2+(n\pi a/l)^2}-\dfrac{\omega^2}{p^2+\omega^2}]$，所以，反演可得：

$$T_n(t)=\frac{A\omega\cdot B_n}{2l}\cdot\frac{1}{[\omega^2-(n\pi a/l)^2]}(\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}-\omega\sin\omega t)$$

所以，

$$v(x,t)=(\frac{Aa^2}{l\omega})t-\frac{A}{l\omega^2}(a^2+\frac{\omega^2B_0}{2})\sin\omega t+\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{A\omega\cdot B_n}{2l}\cdot\frac{1}{[\omega^2-(n\pi a/l)^2]}(\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}-\omega\sin\omega t)]\cos\frac{n\pi x}{l}$$

又因为 $w(x,t)=\dfrac{A}{2l}x^2\sin\omega t=\dfrac{A}{2l}B_0\sin\omega t+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A}{2l}B_n\sin\omega t\cos\dfrac{n\pi x}{l}$

原定解问题的解为：$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

$=(\dfrac{Aa^2}{l\omega})t-\dfrac{A}{l\omega^2}a^2\sin\omega t+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[\dfrac{AB_n n\pi a}{2l^2[\omega^2-(n\pi a/l)^2]}(\omega\sin\dfrac{n\pi at}{l}-\dfrac{n\pi a}{l}\sin\omega t)]\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ 代入：

将 $A=\dfrac{F_0}{YS}$， $B_n=\dfrac{4l^2(-1)^n}{n^2\pi^2}$ 的值可得最终的解为：

$$u(x,t)=(\frac{F_0a^2}{SYl\omega})t-\frac{F_0a^2}{SYl\omega^2}\sin\omega t+\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{2F_0(-1)^n}{YSn\pi[\omega^2-(n\pi a/l)^2]}(\omega\sin\frac{n\pi at}{l}-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t)]\cos\frac{n\pi x}{l}$$

解法 2：令 w(x,t)满足：$\begin{cases}w_{tt}-a^2w_{xx}=0\\ w_x\big|_{x=0}=0,\quad w_x\big|_{x=l}=A\sin\omega t\end{cases}$，设 $w(x,t)=X(x)\sin\omega t$

则：$\begin{cases}X''(x)+\dfrac{\omega^2}{a^2}X(x)=0\\ X'(0)=0,\ X'(l)=A\end{cases}$ 解得：$X(x)=-\dfrac{Aa}{\omega\sin\frac{\omega l}{a}}\cos\dfrac{\omega x}{a}$，

则：$w(x,t)=-\dfrac{Aa}{\omega\sin\frac{\omega l}{a}}\cos\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t$

那么 $u(x,t)=v(x,t)-\dfrac{Aa}{\omega\sin\frac{\omega l}{a}}\cos\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t$，那么 $v(x,t)$满足的定解问题为：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v_x\big|_{x=0} = 0; v_x\big|_{x=l} = 0 \\ v\big|_{t=0} = 0; v_t\big|_{t=0} = \dfrac{Aa}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cos\dfrac{\omega x}{a} \end{cases}$$

:由分离变量法可得 v(x,t)通解为： $v(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos\frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l} t) \cos\frac{n\pi}{l} x$

代入初始条件，

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\dfrac{\mathrm{n}\pi}{l} x = 0 \\ u_t\big|_{t=0} = B_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\pi a}{l} B_n \cos\dfrac{n\pi}{l} x = \dfrac{Aa}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cos\dfrac{\omega x}{a} \end{cases}$$ 解得： $A_0 = 0, A_n = 0$

将函数 $\cos\frac{\omega x}{a}$ 展开可得：

$$\cos\frac{\omega x}{a} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{a \sin\frac{\omega l}{a}}{\omega l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega a \sin\frac{\omega l}{a} (-1)^n}{l[\omega^2 - (\frac{n\pi a}{l})^2]} \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$B_0 = \dfrac{Aa}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cdot b_0$， $B_n = \dfrac{l}{n\pi a} \cdot \dfrac{Aa}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cdot b_n$

所以，可得： $v(x,t) = \dfrac{Aa}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cdot b_0 t + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{l}{n\pi a} \cdot \dfrac{Aa}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cdot b_n \sin\dfrac{n\pi a}{l} t \cos\dfrac{n\pi}{l} x$

又因为：

$$w(x,t) = -\frac{Aa}{\omega \sin\frac{\omega l}{a}} \cos\frac{\omega x}{a} \sin \omega t = -\frac{Aa}{\omega \sin\frac{\omega l}{a}} \sin \omega t [b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{l}]$$

所以， $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

$$= \frac{Aa}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cdot b_0 t - \frac{Aa \cdot b_0}{\omega \sin\frac{\omega l}{a}} \sin \omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} [\frac{l}{n\pi a} \cdot \frac{Aa}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cdot b_n \sin\frac{n\pi a}{l} t - \frac{Aa \cdot b_n}{\omega \sin\frac{\omega l}{a}} \sin \omega t] \cos\frac{n\pi}{l} x$$

将： $A = \dfrac{F_0}{YS}$， $b_0 = \dfrac{a \sin\frac{\omega l}{a}}{\omega l}, b_n = \dfrac{2\omega a \sin\frac{\omega l}{a} (-1)^n}{l[\omega^2 - (\frac{n\pi a}{l})^2]}$ 代入可得：

$$u(x,t)=\frac{F_0a^2}{YS\omega l}\cdot t-\frac{F_0a^2}{YS\omega^2 l}\sin\omega t+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2F_0a(-1)^n}{n\pi YS[\omega^2-(\frac{n\pi a}{l})^2]}[\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t]\cos\frac{n\pi}{l}x$$