# 第十章 勒让德多项式

- §10.1 勒让德多项式的定义
- §10.2 勒让德多项式的重要性质
- §10.3 缔合勒让德函数

# §10.1勒让德多项式的定义

❖ 勒让德方程的本征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\mu y(x)=0 \quad (\mu\text{为待定参数}) \\ x\in[-1,1]\text{时，方程的解取有限值。（自然边界条件）} \end{cases}$$

递推关系 $c_{n+2}=\dfrac{n(n+1)-\mu}{(n+2)(n+1)}c_n \quad (n=0,1,2,\ldots)$

特解 $y_0=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_{2k}x^{2k} \quad y_1=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}$

收敛半径 $R=[\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+2}}\right|]^{\frac{1}{2}}=[\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+2)(n+1)}{n(n+1)-\mu}]^{\frac{1}{2}}=1$

取 $\mu_l=l(l+1) \qquad (l=0,1,2\ldots)$

退化为最高次幂为$l$的多项式

若$l$为偶数，$y_0(x)$退化为$l$次多项式， $y_1(x)$仍为无穷级数

若$l$为奇数，$y_1(x)$退化为$l$次多项式， $y_0(x)$仍为无穷级数

$$y_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]} c_{l-2r}x^{l-2r} \qquad (l=0,1,2\ldots)$$

上式中，$\left[\frac{l}{2}\right]$表示不大于$\frac{l}{2}$的最大整数。

系数 $c_{l-2r}$ 满足如下递推关系：

$$c_n=-\frac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)}c_{n+2} \qquad (n=l-2,l-4,\ldots 1,\text{或}0)$$

# 本征值问题

$$\begin{cases}(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\mu y(x)=0 \quad (\mu\text{为待定参数}) \\ x\in[-1,1]\text{时，方程的解取有限值。} \quad (\text{自然边界条件})\end{cases}$$

**本征值** $\mu_l = l(l+1) \qquad (l=0,1,2\ldots)$

**本征解** $y_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]} c_{l-2r}x^{l-2r} \qquad (l=0,1,2\ldots)$

其中，$c_n=-\dfrac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)}c_{n+2} \quad (n=l-2,l-4,\ldots 1,\text{或}0)$

## ❖ L阶勒让德多项式的定义

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]} c_{l-2r}\cdot x^{l-2r} \qquad c_l=\frac{(2l)!}{2^l(l)!^2} \qquad (l=0,1,2\ldots)$$

系数 $c_{l-2r}$ 满足如下递推关系：

$$c_n=-\frac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)}c_{n+2} \qquad (n=l-2,l-4,\ldots 1,\text{或}0)$$

$$c_{l-2}=-\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}\bullet c_l=(-1)\frac{(2l-2)!}{2^l(l-1)!(l-2)!}$$

.......

$$c_{l-2r}=(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} \qquad (r=0,1,2\ldots[\frac{l}{2}])$$

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}\cdot x^{l-2r}$$

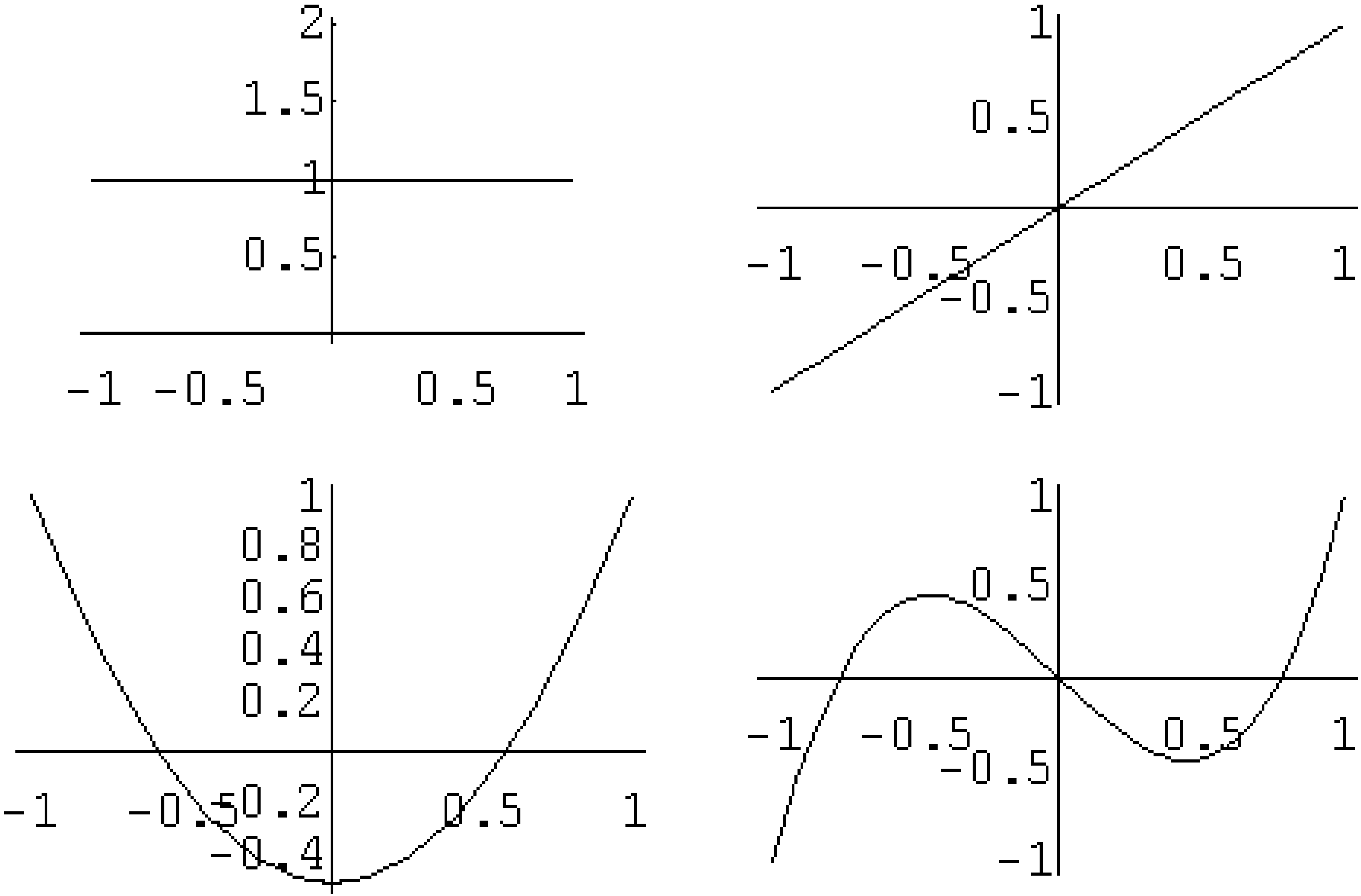
$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

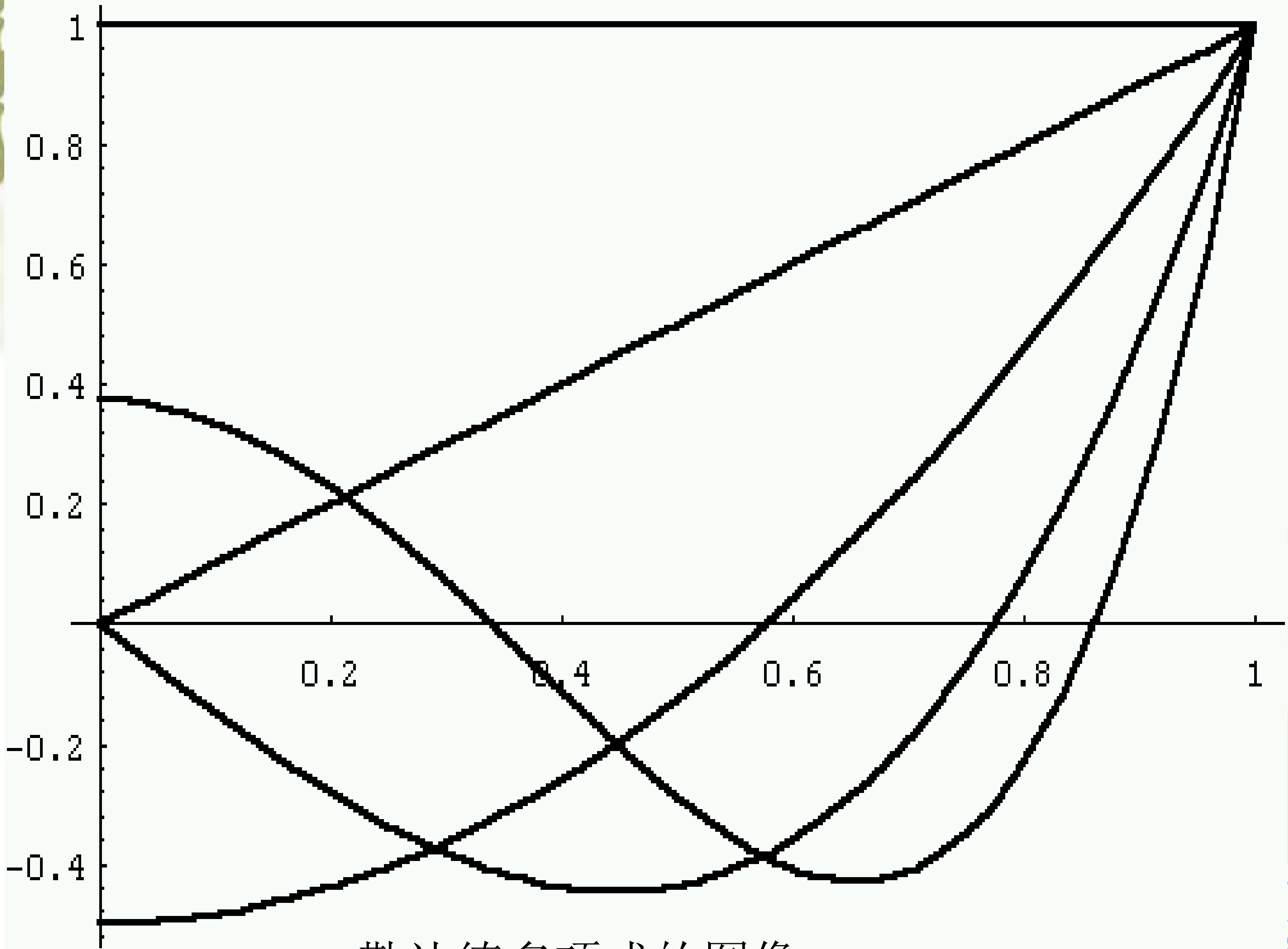
$$P_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$


2
1.5
1
0.5
-1 -0.5 0.5 1
1
0.5
-1 -0.5 0.5 1
-0.5
-1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-1 -0.5 0.5 1
-0.2
-0.4
1
0.5
-1 -0.5 0.5 1
-0.5
-1

勒让德多项式的图像




勒让德多项式的图像

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}\cdot x^{l-2r}$$

现计算 $P_l(0)$

**当$l$=2$n$+1时，** $P_{2n+1}(0)$ **只含有x的奇次幂项，没有常数项，因此**

$$P_{2n+1}(0)=0$$

**当$l$=2$n$时，** $P_{2n}(0)$ **含有常数项，因此**

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

多项式奇偶性

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x)$$

## ❖ 勒让德多项式的其它表示式

**（1）微分表示式** ——**Rodrigues公式**

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \qquad x\in[-1,+1]$$

证明：根据二项式定理 $(x^2-1)^l=\sum_{r=0}^{l}\frac{(-1)^r l!}{r!(l-r)!}x^{2l-2r}$

$$\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l=\frac{1}{2^l l!}\sum_{r=0}^{l}\frac{(-1)^r l!}{r!(l-r)!}\frac{d^l}{dx^l}x^{2l-2r}$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\sum_{r=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^r l!}{r!(l-r)!}(2l-2r)(2l-2r-1)\ldots(l-2r+1)x^{l-2r}$$

$$=\sum_{r=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^r l!(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}$$

## （2） 积分表示式

——Schlafli积分

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz$$

若积分路径C取为：以$z_0$=x为圆心，半径等于$\sqrt{|x^2-1|}$的圆周

采用参数法计算，则

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\bullet\cos\varphi\right]^l d\varphi$$

令 $x=\cos\theta,\theta\in[0,\pi]$

——Laplace积分

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^l \mathrm{d}\varphi$$

## (3)Laplace积分表示式

$$\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^l\,\mathrm{d}\varphi$$

令 $\theta=0$和$\pi$ 即 $x=\cos\theta=\pm1$

则 $\mathrm{P}_l(1)=1,\mathrm{P}_l(-1)=(-1)^l$

$$\left|\mathrm{P}_l(x)\right|\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi\right|d\varphi\le1$$

# §10.2勒让德多项式的重要性质

- **1. 母函数** $G(x,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\mathrm{P}_l(x)z^l$

证明

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{l=0}^{+\infty}a_l(x)z^l$$

$$a_l=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(1-2xz+z^2)^{-1/2}}{z^{l+1}}\mathrm{d}z \qquad (C\text{包围原点})$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

$$=\mathrm{P}_l(x)$$

## ❖ 2．递推公式

由公式$G(x,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\mathrm{P}_l(x)z^l$

两边对z求导，然后同时乘以$(1-2xz+z^2)$

$$(x-z)\sum_{l=0}^{+\infty}\mathrm{P}_l(x)z^l=(1-2xz+z^2)\sum_{l=1}^{+\infty}l\mathrm{P}_l(x)z^{l-1}$$

合并同幂次项，比较 $z^l$ 项的系数得到

$$(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)-(2l+1)x\mathrm{P}_l(x)+l\mathrm{P}_{l-1}(x)=0$$

由公式 $G(x,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\mathrm{P}_l(x)z^l$

两边对 $x$ 求导，然后同时乘以 $(1-2xz+z^2)$，得到

$$z\sum_{l=0}^{+\infty}\mathrm{P}_l(x)z^l=(1-2xz+z^2)\sum_{l=0}^{+\infty}\mathrm{P}_l'(x)z^l$$

合并同幂次项，比较 $z^{l+1}$ 项的系数得到

$$\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-2x\mathrm{P}_l'(x)+\mathrm{P}_{l-1}'(x)\quad(l\geq 1)$$

由递推公式

$$(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)-(2l+1)x\mathrm{P}_l(x)+l\mathrm{P}_{l-1}(x)=0$$

两边对 $x$ 求导，然后与上式联立，消去 $x\mathrm{P}_l'(x)$ 项，得到

$$(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x)\quad(l\geq 1)$$

## ❖ 3．正交完备性

**回顾三角函数的正交性**

$$1,\quad \cos\frac{\pi x}{l},\quad \cos\frac{2\pi x}{l},\ldots,\quad \cos\frac{k\pi x}{l},\ldots,\sin\frac{\pi x}{l},\quad \sin\frac{2\pi x}{l},\ldots,\quad \sin\frac{k\pi x}{l},\ldots$$

是正交的，即

$$\begin{cases}
\int_{-l}^{l} 1\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x=0 \quad (k\neq 0) \qquad \int_{-l}^{l} 1\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x=0 \\
\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x=0 \quad (k\neq n) \\
\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x=0 \quad (k\neq n) \\
\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x=0
\end{cases}$$

如果函数 $f(x)$ 满足迭利克雷的条件，则有

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中，

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\ldots,+\infty)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\ldots,+\infty)$$

# Legendre多项式的正交完备性

**定理10.1** 全部勒让德多项式构成了正交完备系。

正交性

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)dx = 0 \qquad (k \neq l)$$

完备性 如果函数 ***f* (*x*)** 满足迭利克雷的条件，则有

$$f(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} c_l \mathrm{P}_l(x)$$

广义Fourier级数

$$c_l = \frac{1}{N_l^2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_l(x)dx \qquad (l = 0,1,2\ldots)$$

勒让德多项式的模 $N_l=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left|\mathrm{P}_l(x)\right|^2\mathrm{d}x}$

$$N_l^2=\int_{-1}^{1}\left|\mathrm{P}_l(x)\right|^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}$$

$$\begin{cases} N_l=\sqrt{2/(2l+1)} \\ c_l=\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \end{cases}$$

或 $$f(\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}c_l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \qquad (l=0,1,2\ldots)$$

# 补充练习：

以勒让德多项式为基，在[-1,1]上把f(x)=2x³+3x+4展开为广义Fourier级数 。

解：$2x^3+3x+4=c_0\mathrm{P}_0(x)+c_1\mathrm{P}_1(x)+c_2\mathrm{P}_2(x)+c_3\mathrm{P}_3(x)$

$$=c_0\cdot 1+c_1\cdot x+c_2\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)+c_3\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$=(c_0-\frac{1}{2}c_2)+(c_1-\frac{3}{2}c_3)x+\frac{3}{2}c_2x^2+\frac{5}{2}c_3x^3$$

比较左右两端，得 $c_0=4,\ \ c_1=\dfrac{21}{5},\ \ c_2=0,\ \ c_3=\dfrac{4}{5}$

因此， $2x^3+3x+4=4\mathrm{P}_0(x)+\dfrac{21}{5}\mathrm{P}_1(x)+\dfrac{4}{5}\mathrm{P}_3(x)$

## 补充例题

计算定积分 $\int_{-1}^{+1} xP_k(x)P_l(x)dx \quad (k,l\text{为自然数})$

解：利用递推公式

$$(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)-(2l+1)x\mathrm{P}_l(x)+l\mathrm{P}_{l-1}(x)=0$$

$$\int_{-1}^{+1} xP_k(x)P_l(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2k+1}[(k+1)P_{k+1}(x)+kP_{k-1}(x)]P_l(x)dx$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\int_{-1}^{+1}P_{k+1}(x)P_l(x)dx+\frac{k}{2k+1}\int_{-1}^{+1}P_{k-1}(x)P_l(x)dx$$

$$\int_{-1}^{+1} xP_k(x)P_l(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2k}{(2k+1)(2k-1)}, l = k-1 \\ \dfrac{2(k+1)}{(2k+3)(2k+1)}, l = k+1 \\ 0, l \neq k-1, k+1 \end{cases}$$

# §10.3缔合勒让德函数

缔合勒让德方程 $$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}-2x\frac{dw}{dx}+\left[\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right]w=0$$

自然边界条件 解在闭区间[-1,1]中取有限值

当**m**＝**0**时，为勒让德方程 $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\mu y=0$$

对**x**求导，得到 $$(1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3}-4x\frac{d^2y}{dx^2}+(\mu-2)\frac{dy}{dx}=0$$

再对**x**求导 $$(1-x^2)\frac{d^4y}{dx^3}-6x\frac{d^3y}{dx^3}+(\mu-2)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

经过m次求导后，则

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}-2(m+1)x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+[\mu-m(m+1)]\frac{d^m y}{dx^m}=0$$

设$w(x)=(1-x^2)^{m/2}\bullet\dfrac{d^m y}{dx^m}$　　即 $\dfrac{d^m y}{dx^m}=(1-x^2)^{m/2}w(x)$

代入上式得到 $(1-x^2)\dfrac{d^2w}{dx^2}-2x\dfrac{dw}{dx}+\left[\mu-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right]w=0$

勒让德方程的特解 $y_0=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_{2k}x^{2k}$　　$y_1=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}$

缔合勒让德方程的特解

$$w_0(x)=(1-x^2)^{m/2}\bullet\frac{d^m y_0(x)}{dx^m}\qquad w_1(x)=(1-x^2)^{m/2}\bullet\frac{d^m y_1(x)}{dx^m}$$

# 本征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)\dfrac{d^2w}{dx^2}-2x\dfrac{dw}{dx}+\left[\mu-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right]w=0 \\ \text{解在闭区间}[-1,\,1]\text{中取有限值} \end{cases}$$

**本征值** $\mu_l = l(l+1) \qquad (l=0,1,2\ldots)$

**本征函数** $\mathrm{P}_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^m}{dx^m}\left[\mathrm{P}_l(x)\right] \quad (m\le l) \quad (l=0,1,2..)$

缔合勒让德函数

若**m**为偶数,$\mathrm{P}_l^m(x)$为多项式

若**m**为奇数,$\mathrm{P}_l^m(x)$不是多项式

## 前几阶缔合勒让德函数的具体代数式

$$P_1^0(x) = P_1(x) = x$$

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}$$

$$P_2^0(x) = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_3^0(x) = P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_3^3(x) = 15x(1-x^2)^{3/2}$$

# ❖ 缔合勒让德函数的性质

（1）微分表示式

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

（2）递推关系

$$(2l+1)xP_l^m(x)=(l+m)P_{l-1}^m(x)+(l-m+1)P_{l+1}^m(x)$$

（3）正交性

$$\int_{-1}^{+1}P_k^m(x)P_l^m(x)dx=0\qquad(l\neq k)$$

（4）模

$$N_l^m=\left[\int_{-1}^{1}\left|P_l^m(x)\right|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

补充：广义Fourier级数

$$f(x)=\sum_{l=m}^{\infty}f_lP_l^m(x)$$

## ❖ 缔合勒让德函数定义的推广

考察缔合勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}-2x\frac{dw}{dx}+\left[\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right]w=0$$

方程中只出现$m^2$，而并不出现$m$，因此当把正整数**m**换成**-m**时，方程并不改变，同样应为方程的解，即

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=\frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l$$

－**m**阶缔合勒让德函数定义

$\mathrm{P}_l^m(x)$ 和 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 存在关系：

由于满足自然边界条件的解只能有一个，所以

$$\frac{\mathrm{P}_l^m(x)}{\mathrm{P}_l^{-m}(x)}=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l\cdot l}\bullet\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \Bigg/ \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^l\cdot l}\bullet\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l=\text{常数}$$

最高次幂的系数之比 $=(-1)^m\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}$

于是得：$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x)$$

# 本章作业

10-2(1)(2);

10-3

10-4(1)(3);

10-5(1)(2)