第一篇 复变函数论

第二章 复变函数微积分

- §2.1 复变函数的极限与连续性
- §2.2 复变函数的解析性
- §2.3 复变函数积分的定义和性质
- §2.4 柯西定理和柯西积分公式

§2.1 复变函数的极限与连续性

- 复变函数的极限

若复变函数$w=f(z)$定义在z_0的去心邻域中有定义。并且对于任意给定的正实数 ε，总能找到正实数 δ，使得当$0<|z-z_0|<\delta$时，就有$|f(z)-w_0|<\varepsilon$，那么常复数w_0就称为$f(z)$当z趋向于z_0时的极限，记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$$

注意：复变函数极限存在的条件比实变函数极限存在的条件苛刻得多。

例2.1 设 $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}$

试证： 当z→ 0时，*f*(z)的极限不存在。

证： 设 $z=\rho e^{i\theta}$ $\bar{z}=\rho e^{-i\theta}$ $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}=e^{2i\theta}$

（1）当z沿x轴从右边趋近原点，则θ＝0，ρ→0，这时

$$f(z)=e^{2i\theta}\to 1$$

（2）当z沿y轴从上边趋近原点，则θ＝π/2，ρ→0，这时

$$f(z)=e^{2i\theta}\to -1$$

z→ 0时，*f*(z)的极限不存在

复变函数的连续性

若复变函数w=$f(z)$在点z_0的某一邻域中有定义，并且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$，那么称$f(z)$在点$z_0$处连续。

性质

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，在$z_0=x_0+iy_0$处连续，那么

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases} \text{均在}(x_0, y_0)\text{处连续}$$

§2.2 复变函数的解析性

- 导数的定义

设复变函数$w=f(z)$在区域D上有定义点z_0属于区域D，若极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，则称函数$f(z)$在z_0点处可导或可微，该极限值称为函数$f(z)$在z_0点处的导数或微商，记为

$$f'(z_0),\ \left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}\ \text{或}\ \left.\frac{df(z_0)}{dz}\right|$$

解析

只要函数在z_0的某个邻域中可导，则称$f(z)$在z_0处**解析**。

奇点

若$f(z)$在点z_0不解析，则称z_0为函数$f(z)$的**奇点**。

函数$f(z)$在区域D中处处可导等价于$f(z)$在区域D中处处解析

- 求导法则

$$[a_1 f_1(z) \pm a_2 f_2(z)]' = a_1 f_1'(z) \pm a_2 f_2'(z)$$

$(a_1, a_2$为复常数$)$

$$[f(z)\cdot g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{[g(z)]^2} \qquad (g(z)\neq 0)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\mathrm{d}z(f)/\mathrm{d}f} \qquad (z(f)\text{是}f(z)\text{的反函数})$$

$$\frac{\mathrm{d}F[f(z)]}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}F(f)}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$$

基本初等复变函数的求导公式

（1）三角函数 $(\sin z)' = \cos z$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

（2）指数函数 $(e^z)' = e^z$

（3）对数函数 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$

（4）一般幂函数 $(z^a)' = az^{a-1}$ （a为任意复常数）

补充：双曲函数 $(\sinh z)' = \cosh z$

$$(\cosh z)' = \sinh z$$

例2.4 试证复数函数$f(z)$=Rez在复平面上处处不可导。

证：设 $z=x+iy \quad f(z)=\mathrm{Re}(z)=x$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$$

1）若 $\Delta y\equiv 0,\Delta x\to 0$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

2）若 $\Delta x\equiv 0,\Delta y\to 0$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\dfrac{0}{0+\Delta y}=0$

❖ 柯西—黎曼（C-R）条件

若复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点$z=x+iy$可导，那么有

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}}$$

上式称为柯西—黎曼条件。简称（C-R条件）

证明： 1）若 $\Delta y \equiv 0, \Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y)+iv(x+\Delta x, y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

2）若 $\Delta x \equiv 0, \Delta y \to 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y)+iv(x, y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= -i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

极坐标下的Cauchy-Riemann条件

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

函数f(z)可导的充分必要条件：

函数*f*(*z*) 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$

存在，且连续，并且满足柯西-黎曼方程。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

C-R条件可作为复变函数*f*(*z*)导数的计算公式

1）在直角坐标系中，

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

2）在极坐标系中，

$$f'(z)=e^{-i\theta}[\frac{\partial u(\rho,\theta)}{\partial \rho}+i\frac{\partial v(\rho,\theta)}{\partial \rho}]=e^{-i\theta}[\frac{\partial v(\rho,\theta)}{\rho\partial \theta}-i\frac{\partial u(\rho,\theta)}{\rho\partial \theta}]$$

补充：解析函数的性质

性质1　若函数$f(z)=u+iv$在区域B上解析，则

$$u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$$

（C_1，C_2为常数）是B上的两组正交曲线族。

证明：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Longrightarrow \nabla u\cdot\nabla v=0$$

性质2

若函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$在区域B上解析，则u,v均为B上的调和函数。

即 $\nabla^2 u=0;\nabla^2 v=0$

证明：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{cases}\Longrightarrow\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

同理：$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

$u(x,y),v(x,y)$又称为共轭调和函数。

应用 若已知某解析函数的实部$u(x,y)$,，可求出相应的虚部$v(x,y)$。

思路： 二元函数$v(x,y)$的微分形式

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\Longrightarrow dv=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\Longrightarrow v(x,y)=\int dv$$

计算方法

（1）曲线积分法 （2）凑全微分法 （3）不定积分法

例2.5 已知解析函数***f(z)***的实部 $u(x,y)=x^2-y^2$

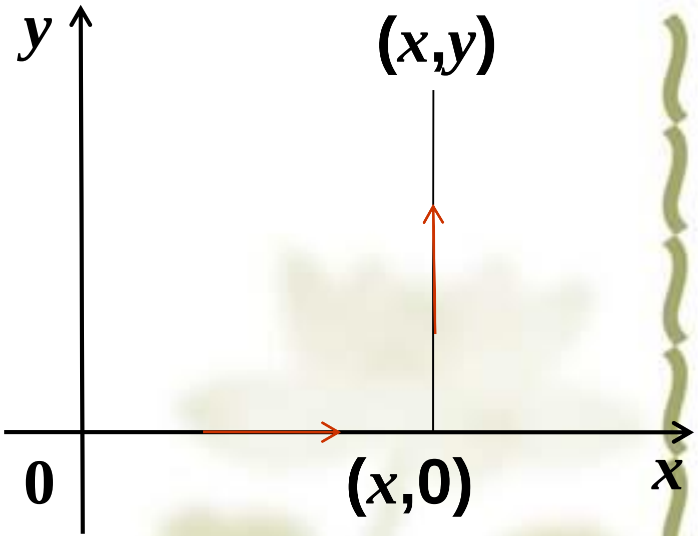
且***f*(0)=0**,试求出虚部和***f(z)*** 。

解: $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$ $\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$

$$dv(x,y)=2ydx+2xdy$$

（1）曲线积分法

$$v=\int^{(x,y)}2ydx+2xdy+C$$



选取如图所示积分路径

$$v=\int_{(0,0)}^{(x,0)}2ydx+2xdy+\int_{(x,0)}^{(x,y)}2ydx+2xdy+C$$

$$=2xy+C$$

（2）凑全微分显示法

$$dv(x,y)=2ydx+2xdy=d(2xy+C)$$

$$v(x,y)=2xy+C$$

（3）不定积分法

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x$$

$$v=\int 2xdy+\varphi(x)=2xy+\varphi(x) \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)$$

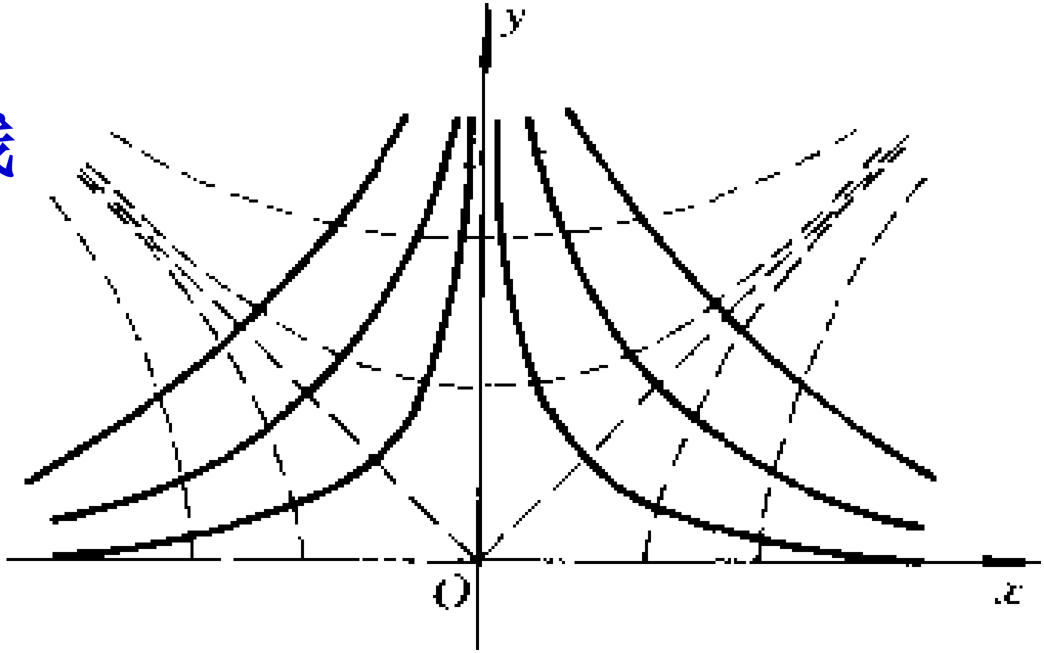
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=2y+\varphi'(x)\end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \varphi'(x)=0 \Longrightarrow \varphi(x)=C$$

$$v(x,y)=2xy+C$$

$$f(z)=x^2-y^2+i(2xy+C)=z^2+iC$$

补充:用虚线描画曲线族$u(x,y)$=常数，实线描画曲线族$v(x,y)$=常数，后者包括实轴和虚轴在内。



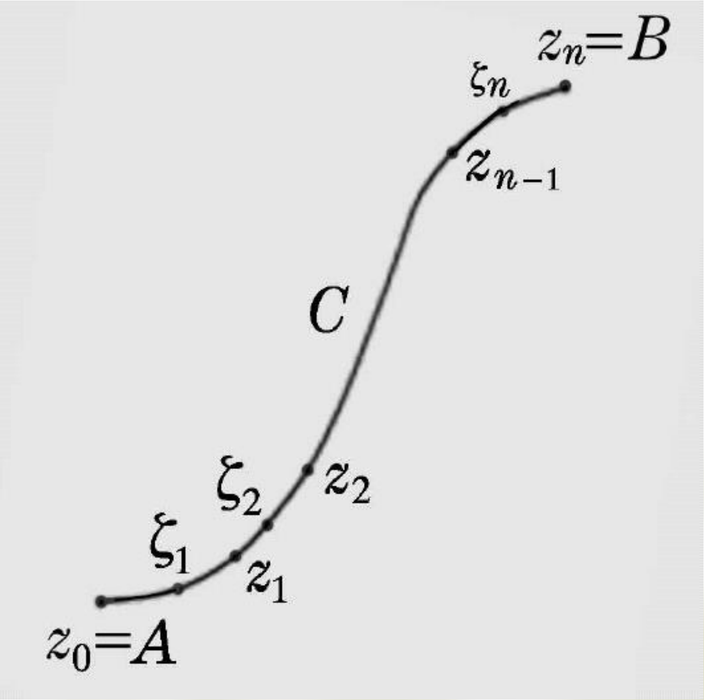
说明：作为平面静电场看，这是两块相互垂直的很大的带电导体平面的静电场，实线是等势线，虚线是电场线。

作为平面无旋液流看，这是液体从虚轴的$+\infty$方向流来，被x轴阻拦而分向两方流去的情形，实线是流线，虚线是等速度势线。

§2.3 复变函数积分的定义和性质

❖ 复变函数积分的定义

设l是z平面上一分段光滑的曲线，函数 $f(z)$在C上定义。



分割：

求和：$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

取极限：$\int_l f(z)dz=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta z\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

定理2.4 若复变函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在有向曲线l上各点连续，则$f(z)$沿曲线l可积，并且有：

$$\int_l f(z)dz=\int_l (udx-vdy)+\mathrm{i}\int_l (vdx+udy)$$

- 性质

$$\int_l dz = z_n - z_0$$

(z_0, z_n分别是有向曲线l的起点和终点)

$$\int_l [a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)]dz = a_1 \int_l f_1(z)dz + a_2 \int_l f_2(z)dz$$

$$\int_{l_1+l_2} f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz$$

$$\int_{l^-} f(z)dz = -\int_l f(z)dz, \text{其中} l^- \text{是} l \text{的逆向}$$

$$\left|\int_l f(z)dz\right| \le \int_l |f(z)||dz|$$

$$\left|\int_l f(z)dz\right| \le \int_l |f(z)|ds$$

(ds代表沿曲线l的弧微分，$ds = |dz|$)

❖ 路积分的计算方法

1. 归为二元函数的第二型积分来计算，计算公式为

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \int_l u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_l v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y$$

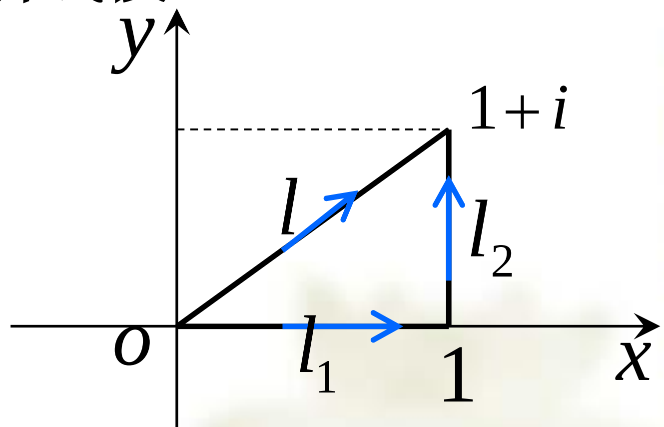
2. 参数方程的表达形式***C*:*z*=z(*t*)** **(** $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ **)**

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

例2.6　计算积分 $\int_l \mathrm{Re}\, z dz$，其中$l$代表如下路径：

（i）l为连接原点O到点1＋i的有向线段；

（ii）l为连接原点O到1再折向点1＋i的折线段。



解：1）设在l_1上$z=(1+i)t \ (0\le t\le 1)$

$$\mathrm{Re}\, z = t, z'(t) = 1+i$$

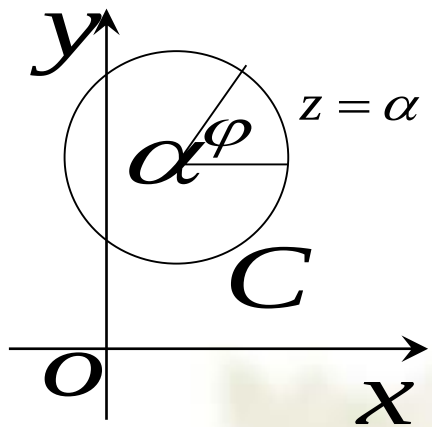
$$\int_l \mathrm{Re}\, z dz = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1}{2}(1+i)$$

2）设在l_1上，$z=t \ (0\le t\le 1)$　　$\mathrm{Re}\, z = t, z'(t) = 1$

设在l_2上，$z=1+it \ (0\le t\le 1)$　　$\mathrm{Re}\, z = 1, z'(t) = i$

$$\int_l \mathrm{Re}\, z dz = \int_{l_1} \mathrm{Re}\, z dz + \int_{l_2} \mathrm{Re}\, z dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 i dt = \frac{1}{2} + i$$

例2.7 试求积分 $\oint_C \frac{1}{(z-\alpha)^n}\mathrm{d}z$（n为整数， α 为常数），其中积分路径C代表圆心为α，半径为r的圆周，逆时针方向，符号 $\oint_C$ 代表积分路径是闭合曲线。



解：$z=\alpha+re^{i\varphi}\qquad z'(\varphi)=ire^{i\varphi}$

$$\frac{1}{(z-\alpha)^n}=\frac{1}{r^n e^{in\varphi}}=r^{-n}e^{-in\varphi}$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-\alpha)^n}dz=\int_0^{2\pi} r^{-n}e^{-in\varphi}\cdot ire^{i\varphi}d\varphi=\int_0^{2\pi} ir^{-n+1}e^{-i(n-1)\varphi}d\varphi$$

$$=\begin{cases} ir^{-n+1}\cdot\left[\dfrac{e^{-i(n-1)\varphi}}{-i(n-1)}\right]_0^{2\pi}=0 & n\neq 1 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} id\varphi=2\pi i & n=1 \end{cases}$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1 \\ 0, & n\neq 1, n\text{为整数} \end{cases}$$

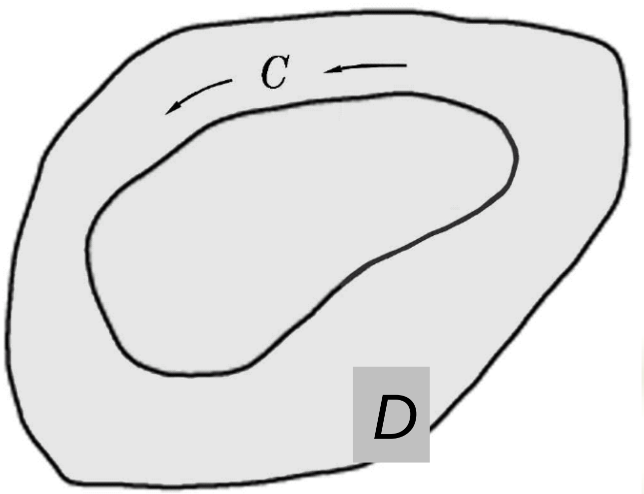
§2.4 柯西定理和柯西积分公式

柯西定理1

若函数*f*(*z*)在单连通区域*D*中解析，

那么*f*(*z*)沿*D*内的任何一条光滑的

闭合曲线*C*有 $\oint_C f(z)dz = 0$



推论

若*f*(*z*)在单连通区域*D*内解析，那么*f*(*z*)沿*D*内任意曲线的积分只与起点和终点有关，与积分路径无关。

$\boxed{\text{证明：}}$

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \int_l u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_l v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y$$

由于**f(z)**在 $\overline{B}$上解析，应用格林公式

$$\oint_l Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

将回路积分化成面积分，有

$$\oint_l f(z)dz = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

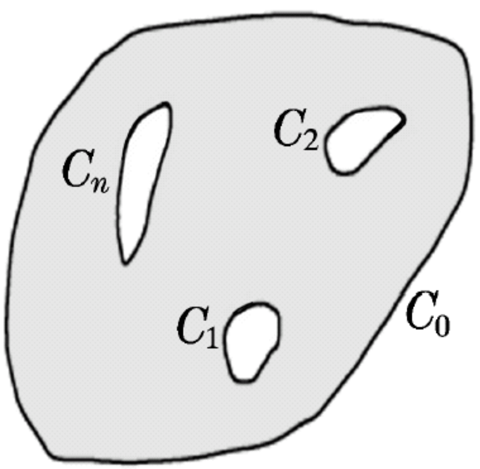
同样，由于**f(z)**在 $\overline{B}$上解析，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

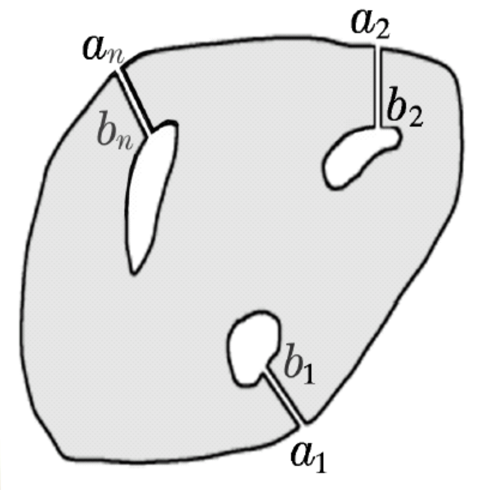
因而 $\quad \oint_l f(z)dz = 0$

柯西定理2

若$f(z)$在复连通闭区域$\overline{D}$内解析，那么$f(z)$沿$\overline{D}$内的所有边界线的积分总和等于0。

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)dz$$





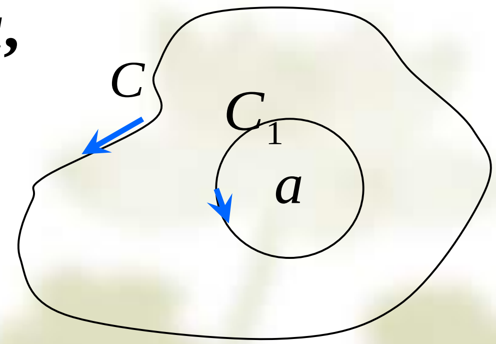
例2.8 试计算积分 $\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z$（n为整数），其中积分路径C为包围点*a*的任意闭合曲线，逆时针方向。

解：1)$n\geq 0$时，被积函数为全复平面上的解析函数

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = 0$$

2)$n<0$时，被积函数在全复平面上的奇点$z_0=a$,

以*a*为圆心，作一圆周C_1(逆时针，处于C中)



$$\oint_{C+C_1^-} (z-a)^n \mathrm{d}z = 0$$

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \oint_{C_1} (z-a)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n\neq -1, n\text{为整数}) \end{cases}$$

例2.9 试计算积分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+4z+3}\mathrm{d}z \quad (C:|z|=2,\text{逆时针方向})$$

解：路径C包围z_1=-1,但不包围z_2=-3

$$\oint_C \frac{1}{z^2+4z+3}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z+3}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i+0=\pi i$$

柯西定理3

若$f(z)$在闭区域$\overline{D}$内解析，z是D内任意一点，C代表$\overline{D}$的正向边界，那么：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad (C\text{包围}z\text{点})$$

上式称为柯西积分公式。

若$\overline{D}$是复连通区域，总正向边界线

$$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\ldots+C_n^-$$

则柯西积分公式为：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_0}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{j=1}^{n}\oint_{C_j^-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

解析函数各阶导数的柯西公式：

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)^2}$$

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)^3}$$

$$f'''(z)=\frac{2\cdot 3}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)^4}$$

…………

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$$

例2.10 求积分 $\oint_C \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z \quad (C:|z|=1,逆时针)$,

并证明: $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$

解：设 $f(z)=e^z$ $\quad \oint_C \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot e^0=2\pi i$

证：设积分路径C的参数方程为 $z=e^{i\theta}(-\pi\le\theta\le\pi)$

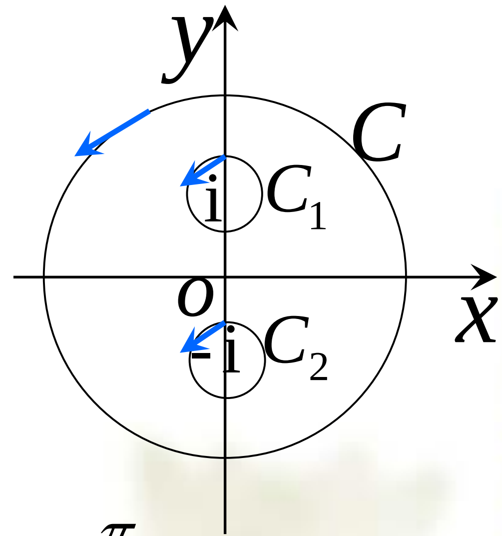
$$\oint_C \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos\theta+i\sin\theta}}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}[i\cos(\sin\theta)-\sin(\sin\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cdot\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta+i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

所以 $\quad \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$

例2.11 计算积分$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz}\quad (C:|z|=2,\text{逆时针}).$

解：在C内作围线C_1和C_2分别包围两个奇点z_1=i，z_2=-i



$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz}=\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz}+\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz}$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz}=\oint_{C_1} \frac{[e^z/(z+i)^2]}{(z-i)^2}\mathrm{dz}=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i$$

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz}=\oint_{C_2} \frac{[e^z/(z-i)^2]}{(z+i)^2}\mathrm{dz}=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'_{z=i}=-\frac{\pi}{2}(1+i)e^{-i}$$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{dz}=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i-\frac{\pi}{2}(1+i)e^{-i}=i\pi(\sin 1-\cos 1)$$

$$=i\sqrt{2}\pi\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

课堂练习：

计算积分：$$\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$$

本章作业

2-6; 2-7(选做);

2-8(1)(3)(5);

2-10(1)(2);

2-11(1)(3)(5);

2-14