数学物理方程 期末总结

*2018年12月



数学物理方法

❖复变函数约25%

*数学物理方程约75%



第一篇 复变函数论

第一章 复数与复变函数

- ❖ § 1.1 复数和复平面的基本概念
- ※ § 1.2 复平面区域与边界的定义 (不考)
- * § 1.3 初等复变函数
- ❖ § 1.4 复变函数的极限和连续性 (不考)



§ 1.1 复数和复平面的基本概念

* 复数的表示

代数表示: z=x+iy

三角表示: $z=\rho$ (cos θ +isin θ)

指数表示: $z=\rho \exp(i \theta)$



* 复数的运算

加减运算

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

乘法运算

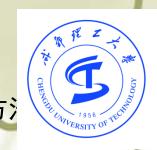
$$z_{1}z_{2} = (x_{1}x_{2} - y_{1}y_{2}) + i(x_{1}y_{2} + x_{2}y_{1})$$

$$= \rho_{1}\rho_{2} \left[\cos(\theta_{1} + \theta_{2}) + i\sin(\theta_{1} + \theta_{2})\right]$$

$$= \rho_{1}\rho_{2} \exp[i(\theta_{1} + \theta_{2})]$$

除法运算

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$



乗方运算
$$z^n = \rho^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

 $= \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$
 $= \rho^n e^{in\theta}$

开方运算

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} (\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

(k=0, 1, 2, ..., n-1, n为自然数)

上式中k每取一值对应一根,共有n个根。



典型例子

设
$$z_1 = 5 - i5, z_2 = -3 + i4, 求 \frac{z_1}{z_2} 和 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)$$

求
$$(1+i)^{100}$$
和 $\sqrt[4]{1+i}$

(习题1-1, 1-2, 1-3, 1-4)



§ 1.3 初等复变函数

幂函数 $z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho^n e^{in\theta}$

指数函数
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

三角函数
$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$
 $\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$

双曲函数
$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})$$
 $\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z})$

根式函数
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

对数函数
$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i\operatorname{Arg} z$$
 (习题1-7)



数学物理方法

第二章 复变函数微积分

- ※ § 2.1 复变函数的极限与连续性(不考)
- ❖ § 2.2 复变函数的解析性
- ❖ § 2.3 复变函数积分的定义和性质
- ❖ § 2.4 柯西定理和柯西积分公式



§ 2. 2 复变函数的解析性

只要函数在 z_0 的某个邻域中可导,则称f(z)在 z_0 处解析。

❖ 柯西一黎曼(C-R)条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

典型例子

(习题2-6, 2-8)



§ 2. 3 复变函数积分的定义和性质

$$\int_{l} f(z)dz = \int_{l} (udx - vdy) + i \int_{l} (vdx + udy)$$

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t) dt$$

参数方程C:z=z(t) ($a \leq t \leq \beta$)

典型例子

(习题2-10)



§ 2. 4 柯西定理和柯西积分公式

柯西定理1
$$\oint_C f(z)dz = 0$$

柯西定理2
$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z)dz$$

柯西定理3
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (C包围z点)$$

典型例子

计算积分:
$$\int_{|z-i|=1}^{1} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$$

计算积分:
$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{(z^2+9)^2} dz$$

(习题2-11)



数学物理方法

第三章 复变函数的幂级数展开

- ※ § 3.1 复变函数项级数及其收敛性
- ❖ § 3.2 泰勒级数展开
- ❖ § 3.3 洛朗级数展开



§ 3. 1复变函数项级数及其收敛性

绝对收敛与条件收敛

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 是收敛的,称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 是绝对收敛的

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 是发散的,而 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 是收敛的,称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 是条件收敛的,

典型例子

(习题3-3,3-4)



§ 3. 2泰勒级数展开

* Taylor定理
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$a_{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{p}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_{0})^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_{0})$$

典型例子

将下列函数在z=0点的Taylor级数展开

$$f(z)=\sin z$$
 $f(z)=\cos z$

$$f(z)=e^{z}$$
 $f(z)=\ln(1+z)$ $f(z)=\frac{1}{1-z}$

(习题3-5)



§ 3. 3洛朗级数展开

* Laurent定理 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

其中
$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

孤立奇点 可去奇点: 主要部分(负幂项)不存在

m阶极点: 主要部分(负幂项)有m项

本性奇点: 主要部分(负幂项)有无穷多项

(习题3-6,3-7)

数学物理方法

第四章 留数定理及其应用

- ❖ § 4. 1留数定理
- ❖ § 4. 2运用留数计算实变积分(不考)



§ 4.1 留数定理

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$
, $\text{Res} f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$

典型例子

例**1** 求函数
$$f(z) = \frac{1}{z^n - 1}$$
 在 $z = 1$ 处的留数

例2 试确定函数
$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$
 的极点,并求 $f(z)$ 在这些极点处的留数

例3 试确定函数
$$f(z) = \frac{z+2i}{z^5+4z^3}$$
的极点,并求 $f(z)$ 在这些极点处的留数

例4 计算积分
$$\int_{|z|=1}^{\epsilon} \frac{dz}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}$$
 (0< ε <1) (习题4-1, 2) 数学物理方法



第五章 Laplace变换及其应用

- ❖ § 5.1 Laplace变换
- ❖ § 5.2 Laplace变换的反演
- **★*** § 5. 3 Laplace变换的应用(不考)



§ 5.1 Laplace变换

$$\overline{\varphi}(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt$$

典型例子求下列函数的拉氏变换。

$$\varphi(t) = 1$$
 $\varphi(t) = e^{st}(s$ 为实常数)

$$\varphi(t) = \sin \omega t$$
 $\varphi(t) = \cos \omega t$

(习题5-1)



§ 5.2 Laplace变换的反演

$$L^{-1}[\overline{\varphi}(p)] = \varphi(t)$$

典型例子 求下列函数的原函数

$$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2} \qquad \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$$

(习题5-2)



第六章 Fourier变换

- ❖ § 6.1 Fourier级数
- ❖ § 6.2 Four ier积分变换



§ 6.1 Fourier级数

典型例子 将函数 $f(x)=x, x \in (0, l)$ 按下列边界要求展开为Fourier级数。

1)
$$f(0) = f(l) = 0$$

2)
$$f(0) = f'(l) = 0$$

3)
$$f'(0) = f(l) = 0$$

4)
$$f'(0) = f'(l) = 0$$



§ 6.2 Four ier积分变换

$$\overline{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

典型例子 试求如下指数衰减函数的Fourier积分变换

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\beta x}, & x \ge 0, \beta > 0 \end{cases}$$

(习题6-6(1)(3))



第二篇 数学物理方程

第七章一维有限区间中的波动方程

- ❖ § 7.1 定解问题的建立
- * § 7.2 分离变量法
- ❖ § 7.3 傅立叶级数展开法
- ※ § 7.4 非齐次边界条件的处理
- ❖ § 7.5 有阻尼的波动问题 (不考)



§ 7.1 定解问题的建立

典型例子

设均匀细杆一端固定,另一端自由,已知初始条件

$$u\big|_{t=0} = kx \qquad u_t\big|_{t=0} = 0$$

写出定解问题。



§ 7.2 分离变量法

典型例子 1、求解下列本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

2、求解两端自由的杆的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^{2}u_{xx} = 0 & (a > 0) \\ u_{x}|_{x=0} = 0; u_{x}|_{x=l} = 0 & (\exists \mathbf{Z} \mathbf{Z} \mathbf{Z} \mathbf{Z} - \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}) \\ u|_{t=0} = \varphi(x); u_{t}|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$

数学物理方法

§ 7. 3傅立叶级数展开法

典型例子

1、求解如下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^{2}u_{xx} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t \\ u_{x}|_{x=0} = 0; u_{x}|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x); u_{t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$
 (0 \le x \le l)

(习题7-6,7-8)



§ 7.4 非齐次边界条件的处理

典型例子

非齐次边界条件的一般处理方法

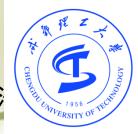
$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

1) 若边界条件为
$$u|_{x=0} = \theta_1(t)$$
 $u|_{x=l} = \theta_2(t)$

2) 若边界条件为
$$u\Big|_{x=0} = \theta_1(t)$$
 $u_x\Big|_{x=l} = \theta_2(t)$

3) 若边界条件为
$$u_x|_{x=0} = \theta_1(t)$$
 $u|_{x=l} = \theta_2(t)$

4) 若边界条件为
$$u_x|_{x=0} = \theta_1(t)$$
 $u_x|_{x=l} = \theta_2(t)$





- ❖ § 8.1 一维输运定解问题的建立
- ❖ §8.2 一维有限区间中输运问题的解法
- ❖ § 8.3 一维无限区间中输运问题的解法(不考)



§ 8.1 一维输运定解问题的建立

典型例子

均匀细杆的热传导问题可归结为以下定解问题:

$$\begin{cases} u_{t} - Ku_{xx} = 0 & (K = \frac{k}{\rho c}, 0 \le x \le l) \\ u|_{x=0} = u_{0}, u_{x}|_{x=l} = \frac{q_{0}}{k} & (q_{0} > 0) \\ u|_{t=0} = u_{0} & \end{cases}$$

(写出定解问题: 习题8-1,8-2,8-3,8-4,8-5,8-6)

数学物理方法

§ 8. 2 一维有限区间中输运问题的解法

典型例子

$$\begin{cases} u_{t} - a^{2}u_{xx} = 0, & x \in (0, l) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \frac{u_{0}}{l}x, \end{cases}$$

(习题8-1,8-2,8-3,8-4)



第九章 二阶线性常微分方程的级数解法

(不考)

- ❖ § 9.1 常微分方程在常点邻域中的级数解法
- ❖ § 9.2 常微分方程在正则奇点邻域中的级数解法



第十章 勒让德多项式

- ❖ § 10.1 勒让德多项式的定义
- ❖ § 10.2 勒让德多项式的重要性质
- ❖ § 10.3 缔合勒让德函数(不考)



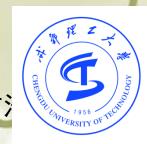
§ 10. 1勒让德多项式的定义

本征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \mu y(x) = 0 & (\mu 为待定参数) \\ x \in [-1,1]时,方程的解取有限值。 (自然边界条件) \end{cases}$$

本征值
$$\mu_l = l(l+1)$$
 $(l=0,1,2...)$

$$P_{l}(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^{r} \frac{(2l-2r)!}{2^{l} r! (l-r)! (l-2r)!} \cdot x^{l-2r}$$



典型例子

证明以下等式

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_{2n+1}(0) = 0$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$P_{l}(-x) = (-1)^{l} P_{l}(x)$$

$$P_l(1) = 1, P_l(-1) = (-1)^l$$



§ 10. 2勒让德多项式的重要性质

递推公式
$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP_l'(x) + P'_{l-1}(x) \quad (l \ge 1)$$

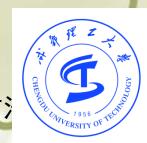
$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)P_l(x) = P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) \quad (l \ge 1)$$

正交完备性
$$\int_{-1}^{+1} P_k(x) P_l(x) dx = 0$$
 $(k \neq l)$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} c_l P_l(x)$$

$$c_{l} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_{l}(x) dx$$



典型例子

1、试推导以下递推公式 (课后习题10-2,10-3)

$$lP_l(x) = xP_l'(x) - P'_{l-1}(x) \quad (l \ge 1)$$

3、以勒让德多项式为基,在[-1,1]上把f(x)=2x³+3x+4展开为 广义Fourier级数。(课后习题10-5(1)(2))



第十一章 柱函数

- ❖ § 11.1 柱函数的定义(了解)
- ❖ § 11.2 柱函数的重要性(不考)



§ 11. 1柱函数的定义

贝赛尔方程
$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx} + (1 - \frac{v^2}{x^2})y(x) = 0$$

第一类柱函数: 贝塞耳函数

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \qquad J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

$$\mathbf{J}_{-m}(x) = (-1)^m \mathbf{J}_m(x)$$

第二类柱函数: 诺伊曼函数

$$N_{\nu}(x) = \frac{\cos(\nu \pi) J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}$$

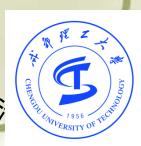
第三类柱函数: 汉克尔函数

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = J_{\nu}(x) + i N_{\nu}(x)$$
 $H_{\nu}^{(2)}(x) = J_{\nu}(x) - i N_{\nu}(x)$ 数学物理方法



第十二章 变形贝塞耳方程

- ❖ § 12.1 虚宗量贝塞耳方程(了解)
- ❖ § 12.2 球贝塞耳方程(不考)



§ 12. 1虚宗量贝塞耳方程

❖虚宗量贝塞耳方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - (1 + \frac{v^2}{x^2})y = 0 \qquad (v \ge 0)$$

通解为:
$$y(x) = CI_{\nu}(x) + DK_{\nu}(x)$$

$$\mathbf{J}_{\nu}(ix) = i^{\nu} \mathbf{I}_{\nu}(x)$$



第十三章 拉普拉斯方程

- ❖ § 13.1 直角坐标系中拉普拉斯方程的解法
- ❖ § 13. 2 球坐标系中拉普拉斯方程的解法
- ❖ § 13.3 柱坐标系中拉普拉斯方程的解法



§ 13. 1直角坐标系中拉普拉斯方 程的解法

典型例子 * 矩形域上的边值问题

散热片的横截面为一矩形 $x \in [0,a], y \in [0,b],$ 它的一边 y=b 处于较高的温度,其它三边保持零度。求横截面上的稳恒的温度分布

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0, u(x, b) = u_0, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \end{cases}$$



§ 13. 2球坐标系中拉普拉斯方程的 解法

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

拉普拉斯方程在球坐标系中的通解为

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{l} \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos\theta) \left(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi \right)$$

典型例子

(课后习题13-1,13-2,13-3,13-4)



§13.3柱坐标系中拉普拉斯方程的解法

柱坐标系下
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(1)
$$\mu < 0 \quad u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} (\alpha_m I_m(\sqrt{-\mu}\rho) + \beta_m K_m(\sqrt{-\mu}\rho))$$
$$(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)(C_m \cos \sqrt{-\mu}z + D_m \sin \sqrt{-\mu}z)$$

(2)
$$\mu = 0$$
 $u(\rho, \varphi, z) = (\alpha_0 + \beta_0 \ln \rho)(C_0 + D_0 z) +$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (\alpha_m \rho^m + \frac{\beta_m}{\rho^m})(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)(C_m + D_m z)$$

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} (\alpha_m J_m(\sqrt{\mu}\rho) + \beta_m N_m(\sqrt{\mu}\rho))$$
(3) $\mu > 0$

(3)
$$\mu > 0$$

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m J_m(\sqrt{\mu \rho}) + \beta_m N_m(\sqrt{\mu \rho}))$$
$$(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)(C_m \cosh \sqrt{\mu z} + D_m \sinh \psi z)$$

典型例子

(课后习题13-9,13-10(1),13-11(1))

