# 第二篇 数学物理方程

在物理学、力学、工程技术和社会经济等许多具体问题中，常常需要从数量上来描述研究对象，这就要求我们建立关于这些对象的数学模型，从定量上来刻画各量之间的关系，这样的数学模型可能是一个函数方程，称为数学物理方程。如果它是一个未知函数及其各阶偏导数的方程，就称其为偏微分方程。

数学物理方程是物理学的一个分支——数学物理所涉及的偏微分方程，有时也包括相关的积分方程、微分积分方程。

本篇通过几个不同的物理模型，推导出几个典型的方程，然后介绍三类偏微分方程及其有关定解问题和这些问题的常用解法。

# 第七章 一维有限区间中的波动方程

# §7.1 定解问题的建立

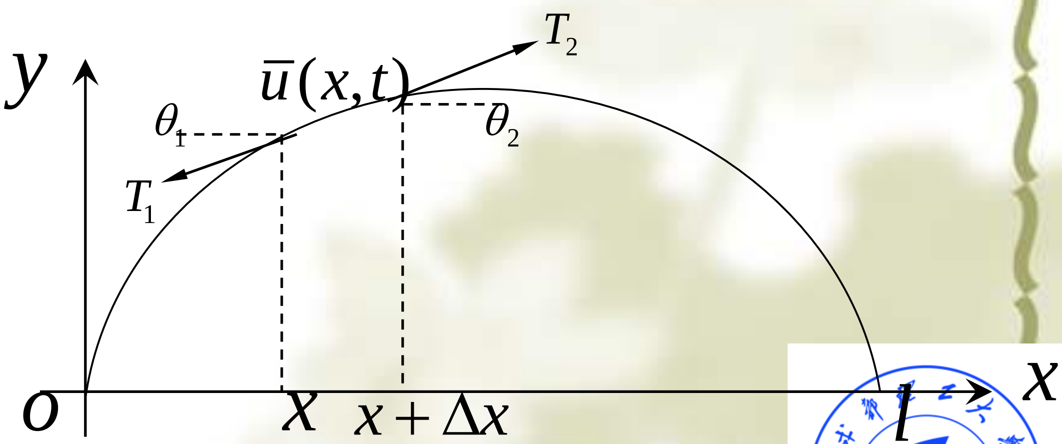
**例7.1** 两端固定弦的自由振动问题

物理模型 一长为 *l* 的柔软、均匀的细弦，拉紧以后，让它离开平衡位置在垂直于弦线的外力作用下作微小横振动，求弦上各点的运动规律。

柔软性：发生于弦中的张力其方向总是沿着弦线的切线方向

均匀细弦：

线密度为常数，弦线可以$\rho l$来代替



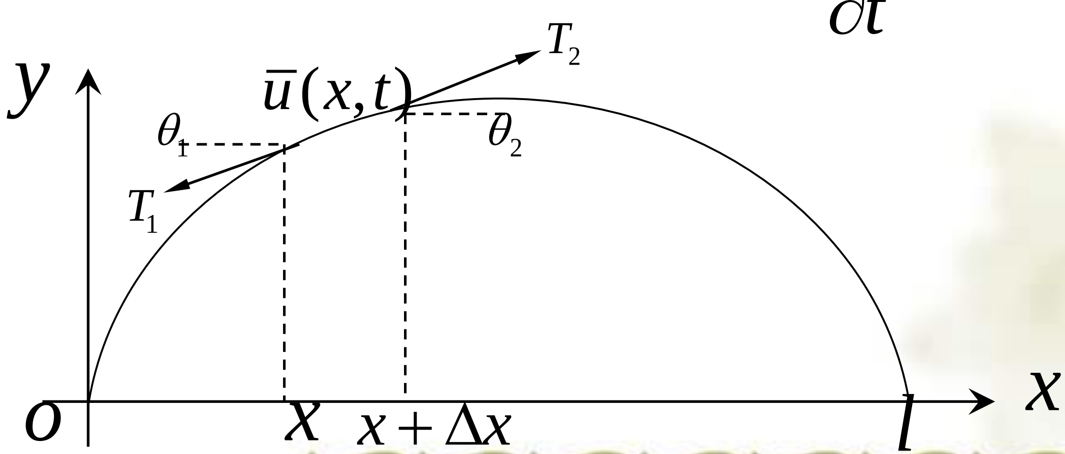
## 数学模型的建立

设： **$u(x,t)$**表示在时刻 $t$ 弦上点 $x$ 处的位移，忽略弦的重力和空气阻力。ρ 表示线密度 (千克/米)，

根据牛顿第二定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

$$T_1\cos\theta_1 - T_2\cos\theta_2 = 0$$ **(x方向)**

$$T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$ **(y方向)**



$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_2\cos\theta_2(\tan\theta_2-\tan\theta_1)$$

$$=T_2\cos\theta_2\left[(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x}-(\frac{\partial u}{\partial x})_x\right]$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_2\cos\theta_2\,\frac{\left[(\partial u/\partial x)_{x+\Delta x}-(\partial u/\partial x)_x\right]}{\Delta x}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$(a=\sqrt{T/\rho}$,是弦中机械波的传播速度。)

# 一维齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

## ❖ 定解条件

边界条件　给定位移函数 **$u(x,t)$** 在边界或端点 **$x=0, l$** 上的限制。一般来有三种类型：

第一类边界条件：

第一类齐次边界条件： $u\big|_{x=0}=0, u\big|_{x=l}=0$

第一类非齐次边界条件：$u\big|_{x=0}=g_1(t), u\big|_{x=l}=g_2(t)$

第二类边界条件：

第三类边界条件：

初始条件　给出弦在初始时刻 **$t=0$** 的位移和速度

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x), u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$$

## 定解问题

由方程与定解条件可以描述一个特定的物理现象，
它构成一个定解问题

例：两端固定弦中的自由振动问题可归结为以下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (a > 0, \text{代表波速}) \\ u\big|_{x=0} = 0; u\big|_{x=l} = 0 & (\text{第一类齐次边界条件}) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$

物理量仅是时间的函数——常微分方程

物理量是时间和空间的函数——偏微分方程

普遍性

特殊性

特殊性 求解具体问题必须考虑

对象所处的“环境”——边界条件

对象所处的“历史”——初始条件

称为定解条件

普遍性 物理规律的数学表示—数学建模

数学物理方程—物理规律的偏微分方程形式是同类物理现象的共性，与具体条件无关，称为泛定方程。

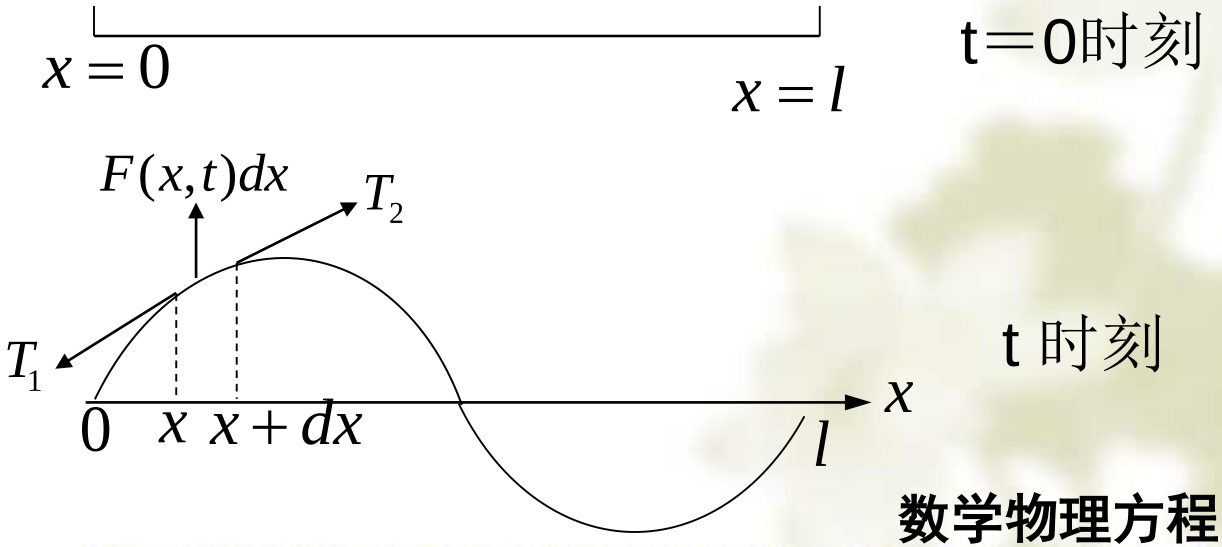
物理问题在数学上的完整提法是：在给定的定解条件下，求解数学物理方程。这叫做数学物理定解问题。

# 例7.2 两端固定弦的受迫振动问题

物理模型

$L$两端固定的弦最初处于静止状态，从$t$=0时刻开始收到策动力$F(x,t)$作用而振动，因此属于受迫振动。假设在$t$时刻，弦的形状如下图所示：

求弦上各点的运动规律。




数学物理方程

## 数学模型的建立

根据牛顿第二定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

$$T_1\cos\theta_1 - T_2\cos\theta_2 = 0 \qquad \text{(x方向)}$$

$$T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 + F(x,t)\Delta x = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{(y方向)}$$

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$$

## 定解问题

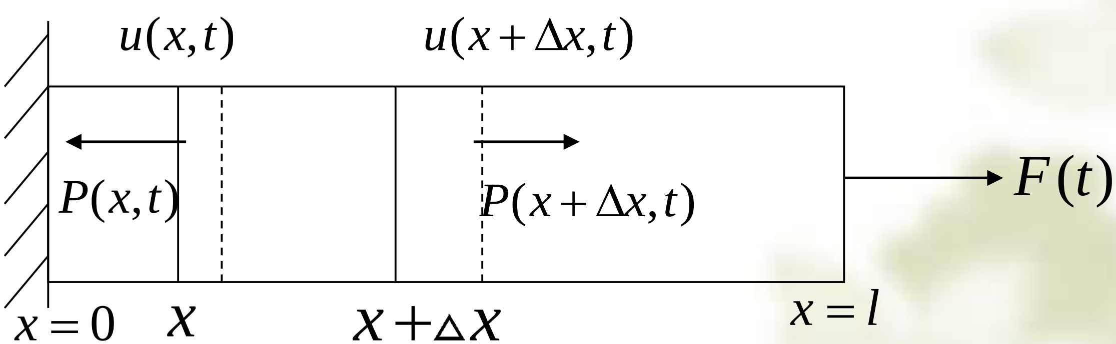
$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (0 \le x \le l, t \ge 0) \\
u\big|_{x=0} = 0; u\big|_{x=l} = 0 & (\text{第一类齐次边界条件}) \\
u\big|_{t=0} = 0; u_t\big|_{t=0} = 0 &
\end{cases}
$$

一维非齐次波动方程

## 例7.3 一端固定另一端受力作用的均匀细杆的纵振动问题。

### 物理模型

如下图所示，假设在$t$时刻，坐标为$x$处的截面的纵向位移为$u(x,t)$，杆中的应力为$P(x,t)$。



## 数学模型的建立

根据牛顿第二定律

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=[P(x+\Delta x,t)-P(x,t)]S$$

又因为：$P(x,t)=Y(\frac{\partial u}{\partial x})$

得到：$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Y[(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x}-(\frac{\partial u}{\partial x})_x]$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad u_{tt}-a^2u_{xx}=0\quad (a=\sqrt{Y/\rho})$$

## 边界条件

在固定端 $u|_{x=0} = 0$ （第一类齐次边界条件）

在受力端 $u_x|_{x=l} = F(t)/Y$ （第二类非齐次边界条件）

## 初始条件

假定 $u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x)$

- **定解问题**

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (a = \sqrt{Y/\rho}) \\ u|_{x=0} = 0; u_x|_{x=l} = F(t)/Y & \\ u|_{t=0} = \varphi(x); u_t|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$

## 三类边界条件

$$[\alpha u_x + \beta u]_{\substack{x=0\text{或}\\ x=l}} = f(t) \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

第一类边界条件：$\alpha = 0, \beta \neq 0$

第二类边界条件：$\alpha \neq 0, \beta = 0$

第三类边界条件：$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

齐次边界条件：$f(t) \equiv 0$

非齐次边界条件：$f(t) \neq 0$

# 补充：

1752年，d'Alembert首先建立了弦振动方程

1759年，Euler研究弹性薄膜的微小横振动，建立了如下方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t)$$

- 二维波动方程或膜振动方程

1762年，Beroulli考察声波在空间中的传播时，引出了如下的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t)$$

- 三维波动方程或声波方程

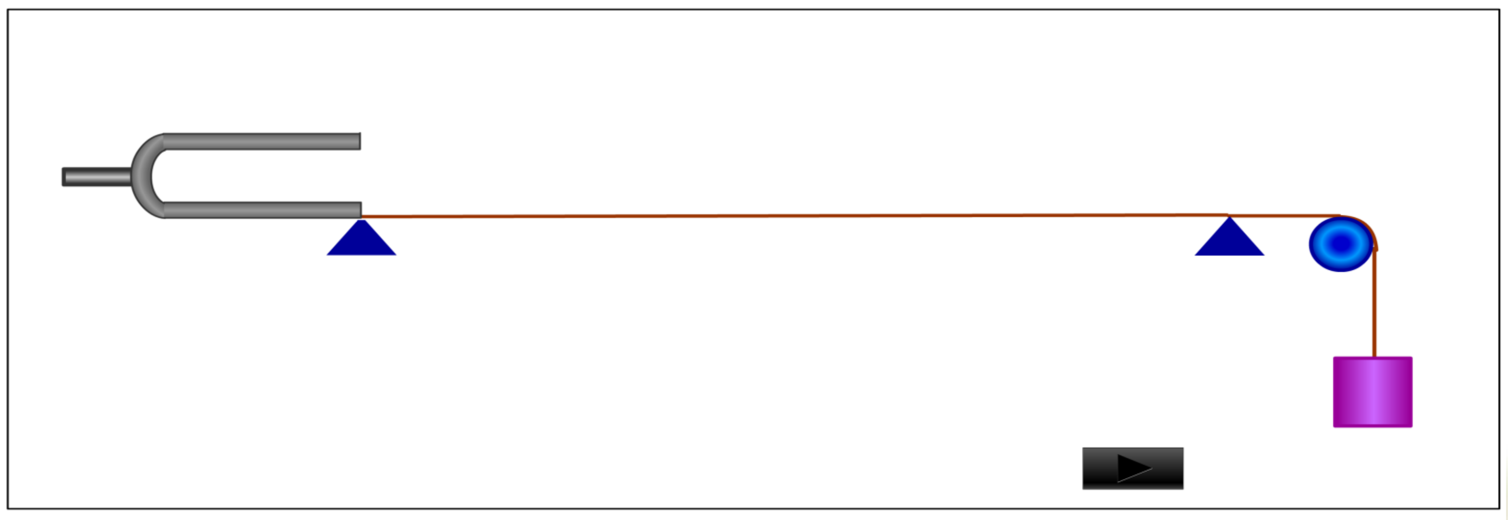
简写为： $u_{tt} = a^2 \Delta u + f$

# §7.2 分离变量法

**例7.4** 求解两端固定弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (a > 0) \\ u\big|_{x=0} = 0; u\big|_{x=l} = 0 & \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$

# 回顾：驻波现象



驻波方程 $y = 2A\cos 2\pi \dfrac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$

## ❖ 求解的基本步骤

**第一步：**

求满足齐次方程和齐次边界条件的变量分离形式的解

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$$

$$X(x): \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

本征值问题

$$T(t): \quad T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$$

# 第二步：求本征值 λ 和本征函数 $X(x)$

1）当λ<0，通解为 $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

代入边界条件得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

2）当λ=0，通解为 $X(x) = C_1 x + C_2$

代入边界条件得 $C_1 = 0, C_2 = 0$

3）当λ>0，通解为 $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

代入边界条件得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l = 0$

解得：$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2 \quad (n=1,2,3...)$

本征值

$$X_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{l}x), \quad (n=1,2,3....)$$

本征函数

**第三步：求解$T(t)$的表达式**

对应于每个本征值$\lambda_n$，$T(t)$满足

$$T''(t)+(n\pi a/l)^2T(t)=0$$

通解为：$T_n(t)=A_n\cos(\frac{an\pi}{l}t)+B_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)$

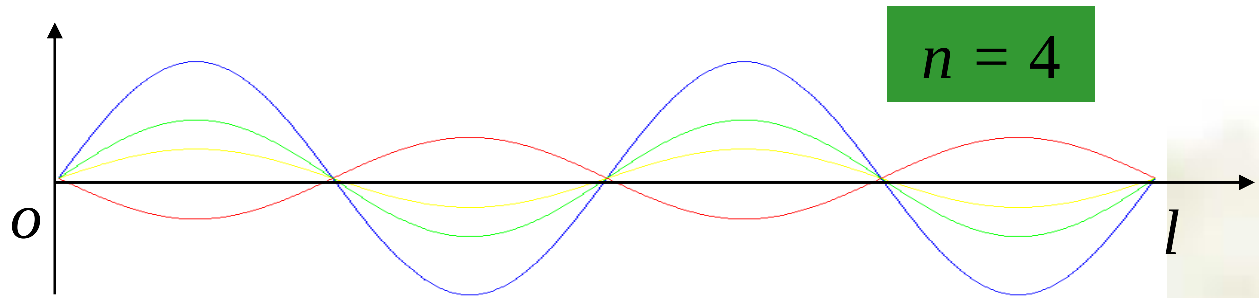
$$(n=1,2,3,...)$$

本征解：

$$u_n(x,t)=\left[A_n\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=N_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{an\pi}{l}t+\varphi_n\right)$$

驻波




其中 $N_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}, \quad \varphi_n=\arctan\dfrac{A_n}{B_n}$

振　幅 $a_n=N_n\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$

频　率 $\omega_n=\dfrac{an\pi}{l}$

初相位 $\varphi_n$

## 第四步：利用初始条件求得定解问题的解

通解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

代入初始条件得

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)d\xi\\ \displaystyle B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)d\xi\end{cases}$$

## 例7.5

管乐器一般是直径均匀的细管，一端封闭，另一端开放，管内空气柱的振动问题可归结为以下数学问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad\qquad (a > 0) \\ u\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

试求出管内空气柱的所有本征振动。

设解为： $u(x,t)=X(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$$

$X(x)$： $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X'(l)=0 \end{cases}$

$T(t)$： $T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$

求本征值 λ 和本征函数 $X(x)$，以及 $T(t)$的表达式

本征值和本征函数

$$\begin{cases} \lambda_n = [\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}]^2 \\ X_n(x) = \sin[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x], \\ n = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

$$T_n(t) = A_n \cos[\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t] + B_n \sin[\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t]$$

$$n = 0,1,2,\ldots$$

$T(t)$的表达式

本征解：

$$u_n(x,t)=[A_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}+B_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}]\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

本征振动频率：

$$\nu_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{(2n+1)a}{4l}\qquad(n=0,1,2\ldots)$$

- 常见边界条件所对应的本征值和本征函数

(1)两端固定的边界条件

$$\begin{cases} u\big|_{x=0} = 0 \\ u\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right) \end{cases} \quad n = 1,2,3....$$

## (2)两端自由的边界条件

$$\begin{cases} u_x\big|_{x=0} = 0 \\ u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \cos\left(\dfrac{n\pi}{l} x\right) \end{cases} \quad n = 0,1,2....$$

(3)左端固定，右端自由的边界条件

$$\begin{cases} u\big|_{x=0} = 0 \\ u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = [\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}]^2 \\ X_n(x) = \sin[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x] \end{cases} \quad n = 0,1,2\ldots.$$

## (4)左端自由，右端固定的边界条件

$$\begin{cases} u_x\big|_{x=0} = 0 \\ u\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = [\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}]^2 \\ X_n(x) = \cos[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l} x] \end{cases} \quad n = 0,1,2....$$

## 课堂练习：

求解两端自由的杆的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (a > 0) \\ u_x\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = 0 & \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$

通解为：

$$u(x,t)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中：

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)d\xi\\ B_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)d\xi\end{cases}\qquad\begin{cases}A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}\xi\right)d\xi\\ B_n=\dfrac{2}{an\pi}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}\xi\right)d\xi\end{cases}$$

# §7.3 Fourier级数展开法

**例7.6** 求解两端固定弦的受迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (a>0) \\ u\big|_{x=0} = 0; u\big|_{x=l} = 0 & \\ u\big|_{t=0} = 0; u_t\big|_{t=0} = 0 & (0 \le x \le l) \end{cases}$$

若仍然假设 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 根据边界条件,

本征函数为: $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x) \quad (n = 1, 2, 3....)$

本征解形式为: $X_n(x)T_n(t) = T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$

通解形式为: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$

## ❖ 求解的基本步骤

**第一步：**

把u(x,t)和非齐次项f(x,t)展开成相同形式的Fourier级数：

通解形式为： $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

将非齐次项f(x,t)展开 $$f(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中： $$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

## 第二步：

代入方程和初始条件，则

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{+\infty} T_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0, \sum_{n=1}^{+\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}T_n''(t)+(\frac{n\pi a}{l})^2 T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=0, T'_n(0)=0\end{cases}$$

采用Laplace变换求解，两边同时进行Laplace变换：

$$p^2\bar{T}_n(p)+(\frac{n\pi a}{l})^2\bar{T}_n(p)=\bar{f}_n(p)$$

$$\bar{T}_n(p)=\frac{\bar{f}_n(p)}{p^2+(n\pi a/l)^2}$$

因为 $$L^{-1}\left[\bar{f}_n(p)\right]=f_n(t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+(n\pi a/l)^2}\right]=\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}$$

$$T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau$$

所以，定解问题的解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^t f_n(\tau)\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中：　$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

例7.7 求解如下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\dfrac{m\pi x}{l}\sin\omega t \qquad (m\text{为已知正整数}) \\ u_x\big|_{x=0}=0; u_x\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=0; u_t\big|_{t=0}=0 \qquad (0\le x\le l) \end{cases}$$

**解：** 满足边界条件的本征函数为：

$$X_n(x)=\cos(\frac{n\pi}{l}x) \quad (n=0,1,2\ldots).$$

通解形式：$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$

代入方程和初始条件，则有

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty}[T_n''(t)+(n\pi a/l)^2 T_n(t)]\cos\dfrac{n\pi x}{l} = A\cos\dfrac{m\pi x}{l}\sin\omega t \\ T_n(0)=0, T_n'(0)=0 \end{cases}$$

比较两边Fourier级数的系数得

$$\begin{cases} T_n''(t)+(n\pi a/l)^2 T_n(t)=0 \qquad (n\neq m) \\ T_m''(t)+(m\pi a/l)^2 T_m(t)=A\sin\omega t \end{cases}$$

所以, $T_n(t)=0 \quad (n\neq m)$

$$\begin{cases} T_m''(t)+(m\pi a/l)^2 T_m(t)=A\sin\omega t \\ T_m(0)=0, T_m'(0)=0 \end{cases}$$

方程两边同时进行Laplace变换，则

$$p^2\bar{T}_m(p)+(m\pi a/l)^2\bar{T}_m(p)=A\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

解得 $$\bar{T}_m(p)=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}\bullet\frac{1}{p^2+(m\pi a/l)^2}$$

$$=\frac{A\omega}{(m\pi a/l)^2-\omega^2}\left[\frac{1}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^2+(m\pi a/l)^2}\right]$$

所以 $$T_m(t)=\frac{A}{(m\pi a/l)^2-\omega^2}\left[\sin\omega t-\frac{\omega l}{m\pi a}\sin\frac{m\pi at}{l}\right]$$

因此 $$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}=T_m(t)\cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$=\frac{A}{(m\pi a/l)^2-\omega^2}\left[\sin\omega t-\frac{\omega l}{m\pi a}\sin\frac{m\pi at}{l}\right]\cos\frac{m\pi x}{l}$$

课堂练习　求解如下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cos\dfrac{\pi x}{l}\sin\omega t \\ u_x\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \qquad (0 \le x \le l) \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{A\omega}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\frac{l}{a\pi}\sin\frac{n\pi t}{l}-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}$$

$$+A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{\pi x}{l}$$

其中：

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)d\xi\\ B_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)d\xi\end{cases}\qquad\begin{cases}A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}\xi\right)d\xi\\ B_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}\xi\right)d\xi\end{cases}$$

# §7.4 非齐次边界条件的处理

例7.8 一端固定，另一端受周期性应力 $P_0 \sin\omega t$ 作用的均匀细杆的纵振动问题可归结为如下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (a > 0) \\ u\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = A\sin\omega t & (A = \dfrac{P_0}{Y}) \\ u\big|_{t=0} = 0; u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：假设解为 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

适当选择 $w(x,t)$，使 $v(x,t)$ 满足齐次边界条件。

令$\begin{cases} w(x,t) = A(t)x + B(t) \\ w(0,t) = 0, \quad w_x(l,t) = A\sin\omega t \end{cases}$

解得， $w(x,t) = Ax\sin\omega t$

所以，$u(x,t) = v(x,t) + Ax\sin\omega t$

代入方程和初始条件，得到关于*v*(*x*,*t*)的定解问题：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = A\omega^2 x\sin\omega t \\ v\big|_{x=0} = 0, v_x\big|_{x=l} = 0 \\ v\big|_{t=0} = 0, v_t\big|_{t=0} = -A\omega x \end{cases}$$

**用Fourier级数展开法求解*v*(*x*,*t*)**

齐次边界条件对应的本征函数为：

$$X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\quad (n=0,1,2\ldots).$$

通解形式：$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$

将方程中非齐次项中的x展开为Fourier级数：

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\qquad 其中，$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\xi\sin[\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}]d\xi=(-1)^n\frac{2l}{[(n+1/2)\pi]^2}$$

将$v(x,t)$和x的Fourier级数代入方程和初始条件，则

$$
\begin{cases}
\sum_{n=1}^{+\infty}\left[T_n''(t)+[(n+1/2)\pi a/l]^2 T_n(t)\right]\sin[(n+1/2)\pi x/l] \\
= A\omega^2 \sin\omega t\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{2l}{[(n+1/2)\pi]^2}\sin[(n+1/2)\pi x/l] \\
\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(0)\sin[(n+1/2)\pi x/l]=0 \\
\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(0)\sin[(n+1/2)\pi x/l] \\
= A\omega\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{2l}{[(n+1/2)\pi]^2}\sin[(n+1/2)\pi x/l]
\end{cases}
$$

比较上式各式两边的系数可得：

$$
\begin{cases}
T_n''(t)+[(n+1/2)\pi a/l]^2 T_n(t)=(-1)^n \dfrac{2lA\omega^2}{[(n+1/2)\pi]^2}\sin\omega t \\
T(0)=0, T'(0)=(-1)^{n+1}\dfrac{2lA\omega}{[(n+1/2)\pi]^2} \qquad (n=0,1,2\ldots)
\end{cases}
$$

采用laplace变换法求解

$$p^2\bar{T}_n(p)+(-1)^n\frac{2lA\omega}{[(n+1/2)\pi]^2}+[(n+1/2)\pi a/l]^2\bar{T}_n(p)=(-1)^n\frac{2lA\omega^2}{[(n+1/2)\pi]^2}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

解得

$$\bar{T}_n(p)=(-1)^{n+1}\frac{2lA\omega}{[(n+1/2)\pi]^2}\bullet\frac{\omega^2}{(p^2+\omega^2)\cdot\left\{p^2+[(n+1/2)\pi a/l]^2\right\}}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2lA\omega}{[(n+1/2)\pi]^2}\bullet\frac{1}{\omega^2-[(n+1/2)\pi a/l]^2}\bullet\left\{\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2}-\frac{[(n+1/2)\pi a/l]^2}{p^2+[(n+1/2)\pi a/l]^2}\right\}$$

所以

$$T_n(t)=(-1)^{n+1}\frac{2lA\omega}{[(n+1/2)\pi]^2}\bullet\frac{\omega\sin\omega t-[(n+1/2)\pi a/l]^2\sin[(n+1/2)\pi at/l]}{\omega^2-[(n+1/2)\pi a/l]^2}$$

所以

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2lA\omega}{[(n+\frac{1}{2})\pi]^2}$$

$$\cdot\frac{\omega\sin\omega t-[(n+\frac{1}{2})\pi a/l]\sin[(n+\frac{1}{2})\pi at/l]}{\omega^2-[(n+\frac{1}{2})\pi a/l]^2}\cdot\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$$

再代入 $u(x,t)=v(x,t)+Ax\sin\omega t$

得到定解问题的解

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2lA\omega}{[(n+\frac{1}{2})\pi]^2}\cdot\frac{\omega\sin\omega t-[(n+\frac{1}{2})\pi a/l]\sin[(n+\frac{1}{2})\pi at/l]}{\omega^2-[(n+\frac{1}{2})\pi a/l]^2}$$

$$\cdot\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}+Ax\sin\omega t$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2aA}{(n+\frac{1}{2})\pi}\cdot\frac{\omega\sin[(n+\frac{1}{2})\pi at/l]-[(n+\frac{1}{2})\pi a/l]\sin\omega t}{\omega^2-[(n+\frac{1}{2})\pi a/l]^2}$$

$$\cdot\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$$

# 补充： 非齐次边界条件的一般处理方法

1.未知函数***u*(*x*,*t*)**满足非齐次边界条件时，作函数代换

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

适当选择***w*(*x*,*t*)**，使***v*(*x*,*t*)**满足齐次边界条件。

1）若边界条件为 $u\big|_{x=0}=\theta_1(t)$ $\quad u\big|_{x=l}=\theta_2(t)$

$$\text{令}\begin{cases} w(x,t)=A(t)x+B(t) \\ w(0,t)=\theta_1(t), \quad w(l,t)=\theta_2(t) \end{cases}$$

$$\text{解得}\ w(x,t)=\theta_1(t)+\frac{x}{l}\left[\theta_2(t)-\theta_1(t)\right]$$

2）若边界条件为 $u\big|_{x=0}=\theta_1(t)\qquad u_x\big|_{x=l}=\theta_2(t)$

令$\begin{cases} w(x,t)=A(t)x+B(t) \\ w(0,t)=\theta_1(t), \quad w_x(l,t)=\theta_2(t) \end{cases}$

解得 $w(x,t)=\theta_2(t)x+\theta_1(t)$

3）若边界条件为 $u_x\big|_{x=0}=\theta_1(t)\qquad u\big|_{x=l}=\theta_2(t)$

令$\begin{cases} w(x,t)=A(t)x+B(t) \\ w_x(0,t)=\theta_1(t), \quad w(l,t)=\theta_2(t) \end{cases}$

解得 $w(x,t)=\theta_2(t)-(l-x)\theta_1(t)$

4）若边界条件为 $u_x\big|_{x=0}=\theta_1(t)\qquad u_x\big|_{x=l}=\theta_2(t)$

令 $$\begin{cases} w_x(x,t)=A(t)x+B(t) \\ w_x(0,t)=\theta_1(t),\quad w_x(l,t)=\theta_2(t) \end{cases}$$

解得 $$w(x,t)=\frac{x^2}{2l}\left[\theta_2(t)-\theta_1(t)\right]+\theta_1(t)x$$

注意：满足条件 $w(x,t)$ 的不唯一，所以选取方法不唯一。

## 例7.9　求解以下定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A & (a > 0) \\ u\big|_{x=0} = 0; u\big|_{x=l} = B & (A, B\text{均为常数}) \\ u\big|_{t=0} = 0; u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

假设解为：　$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$

**适当选择$w(x)$，使$v(x,t)$满足齐次方程，齐次边界条件。**

则$V(x,t)$满足
$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \\ v|_{x=0}=0, v|_{x=l}=0 \\ v|_{t=0}=-\omega(x), v_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$w(x)$满足
$$\begin{cases} -a^2w''(x)=A \\ w(0)=0, w(l)=B \end{cases}$$

求解$w(x)$得到
$$w(x)=-\frac{A}{2a^2}x^2+(\frac{B}{l}+\frac{Al}{2a^2})x$$

运用分离变量法求解$V(x,t)$，得到通解为：

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}[C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=-w(x)=\frac{A}{2a^2}x^2-(\frac{B}{l}+\frac{Al}{2a^2})x$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

解得

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l -w(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\frac{2Al^2}{n^3\pi^3a^2}+(-1)^n\frac{2}{n\pi}\cdot(B+\frac{Al^2}{n^2a^2\pi})$$

$$D_n=0$$

所以，

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}[-\frac{2Al^2}{n^3\pi^3a^2}+(-1)^n\frac{2}{n\pi}\cdot(B+\frac{Al^2}{n^2a^2\pi})]\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$-\frac{A}{2a^2}x^2+(\frac{B}{l}+\frac{Al}{2a^2})x$$

思考，另外解法，设 $u(x,t)=v(x,t)+Bx/l$

则 $V(x,t)$ 满足

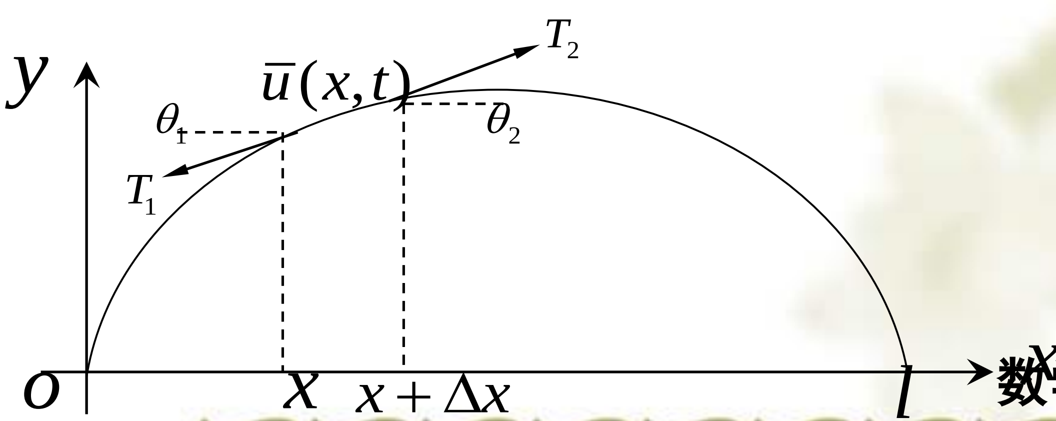
$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=A \\ v\big|_{x=0}=0, v\big|_{x=l}=0 \\ v\big|_{t=0}=-\frac{B}{l}x, v_t\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

数学物理方程

## ❖回顾：

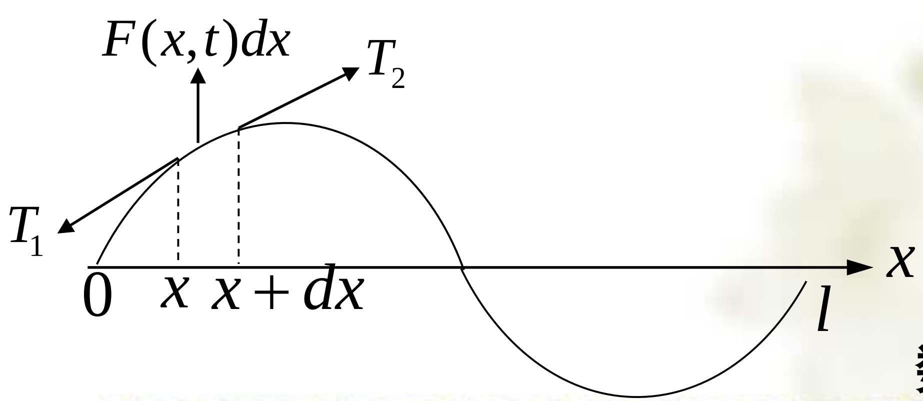
**例7.1**　两端固定弦中的自由振动问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (a > 0,\text{代表波速}) \\
u\big|_{x=0} = 0;\ u\big|_{x=l} = 0 & (\text{第一类齐次边界条件}) \\
u\big|_{t=0} = \varphi(x);\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l)
\end{cases}
$$



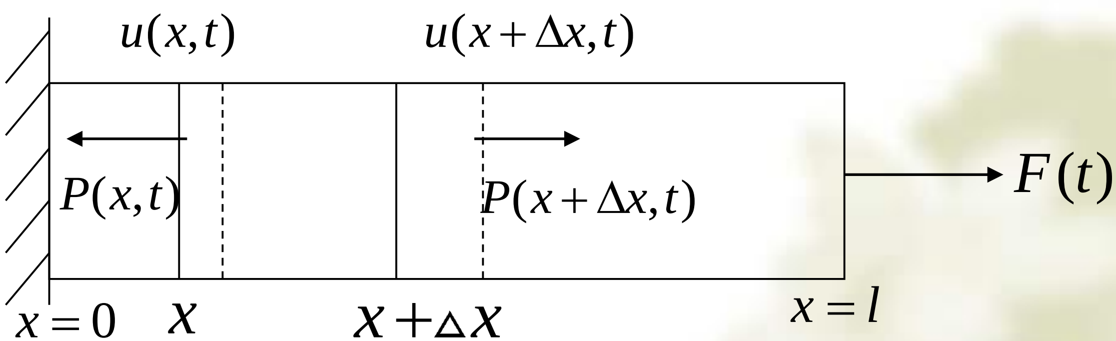
# 例7.2　两端固定弦的受迫振动问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \qquad (0 \le x \le l, t \ge 0) \\
u\big|_{x=0} = 0; u\big|_{x=l} = 0 \quad (\text{第一类齐次边界条件}) \\
u\big|_{t=0} = 0; u_t\big|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$



**例7.3** 一端固定另一端受力作用的均匀细杆的纵振动问题。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (a = \sqrt{Y/\rho}) \\ u\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = F(t)/Y \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l) \end{cases}$$



# §7.5 有阻尼的波动问题

例7.10 两端固定弦的小阻尼振动问题。

设每单位长度弦在振动过程中所受的阻尼力为$f$，那么

$$f=-ku_t \qquad (k>0, k\text{为常数})$$

由牛顿第二定律： $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f=T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-ku_t$

即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (\gamma=\dfrac{k}{2\rho}\text{阻尼因子；}\ a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}})$

有阻尼自由波动方程

所求定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}+2\gamma u_t-a^2u_{xx}=0 \qquad (\gamma=\dfrac{k}{2\rho}\text{,为阻尼因子}) \\ u\big|_{x=0}=0;u\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x);u_t\big|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

用分离变量法求解。假设解为：$u(x,t)=X(x)T(t)$

代入方程得：$T''(t)+2\gamma T'(t)+a^2\lambda T(t)=0$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$$

本征值： $\lambda_n=(n\pi/l)^2$

本征函数： $X_n=\sin(n\pi/l) \quad (n=1,2,3...)$

在$\gamma < n\pi a/l$情况下， $T_n(t) = e^{-\gamma t}(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)$

其中： $\omega_n = \sqrt{(n\pi a/l)^2 - \gamma^2}$ 有阻尼本征振动的角频率

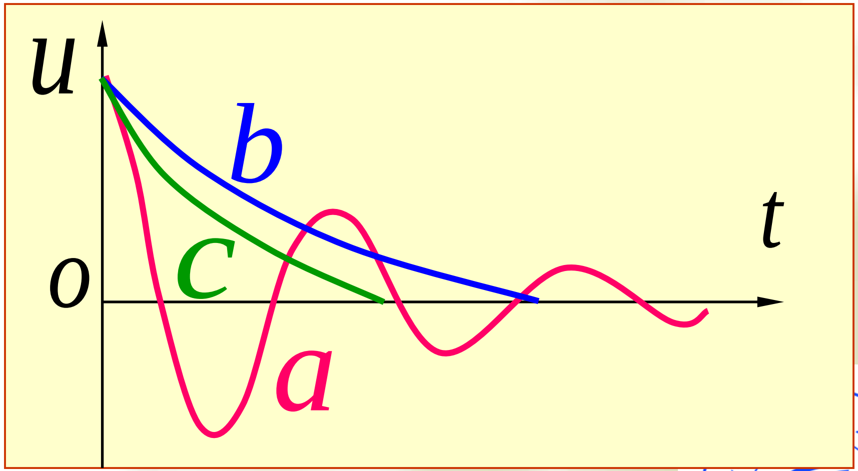
可得 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\gamma t}(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}$

## 补充：三种阻尼的比较

(a) 欠阻尼 $\gamma < \frac{n\pi a}{l}$

(b) 过阻尼 $\gamma > \frac{n\pi a}{l}$

(c) 临界阻尼 $\gamma = \frac{n\pi a}{l}$



通解 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\gamma t}(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}$

代入初始条件 $\begin{cases}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)\\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-\gamma A_n+B_n\omega_n)\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)\end{cases}$

所以，$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$

$$B_n=\frac{2}{\omega_n l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{\gamma A_n}{\omega_n}$$

$$=\frac{2}{\omega_n l}\int_0^l[\psi(x)+\gamma\varphi(x)]\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

**例7.11**

# 一端均匀的高频传输线中的电压波动方程。

假设一端均匀的高频传输线中，每单位长度的电阻、电感和电容分别为R，L和C，初始时刻($t$=0)传输线中电压和电流处处为0，若传输线一端($x$=0)绝缘，另一端($x$=$l$)施加稳恒电压E，试问施加电压后传输线中各处瞬时电压变化情况如何?(忽略电漏)

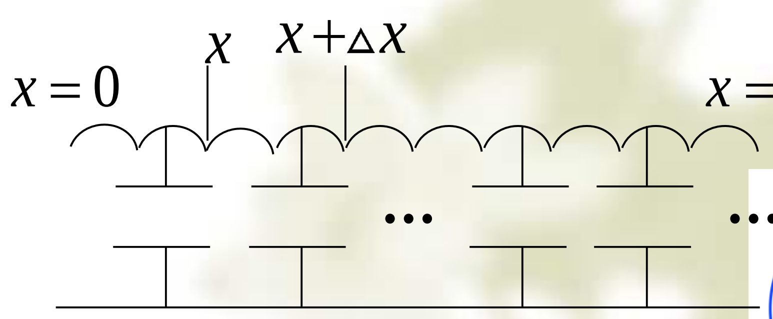
$$\text{解如图所示,}u(x,t)-u(x+\triangle x,t)=\triangle x\cdot L\cdot\frac{\partial I}{\partial t}+\triangle x\cdot R\cdot I$$

$$I(x,t)\triangle t-I(x+\triangle x,t)\triangle t=\triangle Q=\triangle x\cdot C\left[u(x,t+\triangle t)-u(x,t)\right]$$

当$\Delta t\to 0$ ,$\Delta x\to 0$时

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=L\cdot\frac{\partial I}{\partial t}+IR$$

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}=C\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$



因此可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial I}{\partial x} - R\frac{\partial I}{\partial x} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + RC\frac{\partial u}{\partial t}$

即 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\gamma = \frac{R}{2L}, a = \frac{1}{\sqrt{LC}})$

有阻尼自由波动方程

所求定解问题为:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\gamma u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (\gamma = \frac{R}{2L}, a = \frac{1}{\sqrt{LC}}) \\ u_x\big|_{x=0} = 0; u\big|_{x=l} = E \\ u\big|_{t=0} = 0; u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

假设解为:$u(x,t) = w(x,t) + E$

$w(x,t)$满足 $\begin{cases} w_{tt} + 2\gamma w_t - a^2 w_{xx} = 0 \\ w_x\big|_{x=0} = 0, w\big|_{x=l} = 0 \\ w\big|_{t=0} = -E, w_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$

由边界条件可得本征函数 $X_n(x) = \cos\left[(n+1/2)\pi x/l\right]$

$w(x,t)$的通解 $w(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)\cos\left[(n+1/2)\pi x/l\right]$

代入方程，则 $T_n''(t) + 2\gamma T_n'(t) + \left[(n+1/2)\pi a/l\right]^2 T_n(t) = 0$

讨论小阻尼情况$\gamma < \left[(n+1/2)\pi a/l\right]$

有 $T_n(t) = e^{-\gamma t}(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)$

$$\omega_n = \sqrt{[(n+1/2)\pi a/l]^2 - \gamma^2}$$

数学物理方程

得到 $w(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\gamma t}(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$

代入初始条件 $\begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\cos(n+1/2)\pi x/l=-E\\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-\gamma A_n+B_n\omega_n)\cos(n+1/2)\pi x/l=0\end{cases}$

解得 $A_n=-\frac{2}{l}\int_0^l E\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2E}{(n+\frac{1}{2})\pi}$

$b_n=\gamma\frac{A_n}{\omega_n}=(-1)^{n+1}\frac{2\gamma E}{\omega_n(n+\frac{1}{2})\pi}$

因此，原定解问题的解为

$$u(x,t)=E-e^{-\gamma t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2E}{(n+1/2)\pi}\cdot(\cos\omega_n t+\frac{\gamma}{\omega_n}\sin\omega_n t)\cos\frac{(n+1/2)\pi x}{l}$$

当$t\to+\infty$时 $u(x,t)=E$

# 本章作业

7-1(1)、(2)、(3) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X(l)=0 \end{cases}$

7-2;7-3;7-4;7-5;7-6;7-8

补充作业1：

补充作业2：

见下页

## 补充作业1：

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (a > 0) \\
u_x\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = 0 & \\
u\big|_{t=0} = \varphi(x); u_t\big|_{t=0} = \psi(x) & (0 \le x \le l)
\end{cases}
$$

**参考答案：**

$$
u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{an\pi}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{an\pi}{l} t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)
$$

**其中：**

$$
\begin{cases}
A_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(\xi) d\xi \\
B_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(\xi) d\xi
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
A_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(\xi) \cos\left(\dfrac{n\pi}{l} \xi\right) d\xi \\
B_n = \dfrac{2}{an\pi}\displaystyle\int_0^l \psi(\xi) \cos\left(\dfrac{n\pi}{l} \xi\right) d\xi
\end{cases}
$$

**补充作业2：**

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t \\ u_x\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

参考答案：

$$u(x,t) = \frac{A\omega}{\omega^2 - \pi^2 a^2 / l^2}\left(\frac{l}{a\pi}\sin\frac{n\pi t}{l} - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}$$

$$+ A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + \frac{l}{n\pi a}B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\cos\frac{\pi x}{l}$$

其中：

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)d\xi \\ B_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(\xi)d\xi \end{cases} \qquad \begin{cases} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)d\xi \\ B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\cos\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)d\xi \end{cases}$$