第八章 一维输运问题

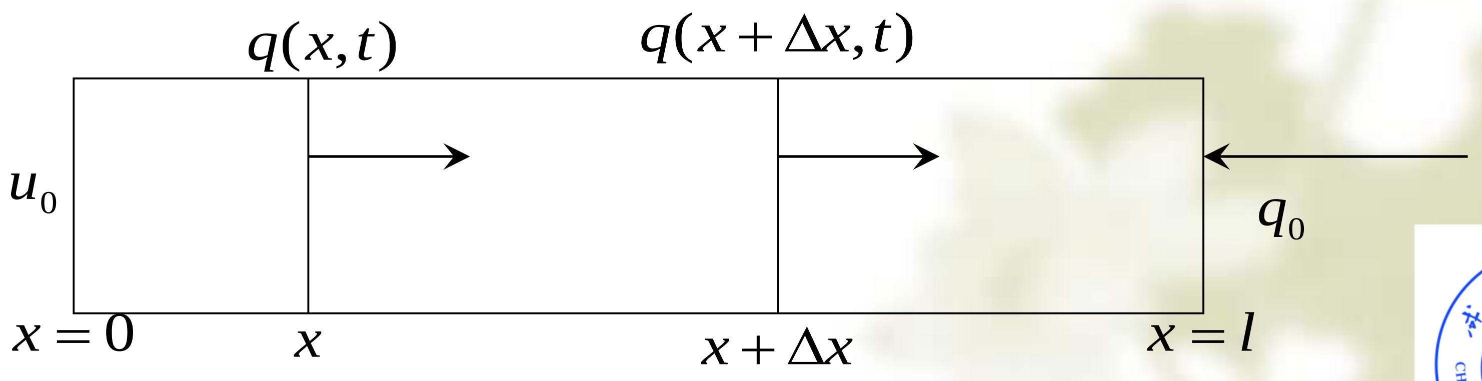
- §8.1 一维输运定解问题的建立
- §8.2 一维有限区间中输运问题的解法
- §8.3 一维无限区间中输运问题的解法

§8.1 一维输运定解问题的建立

例8.1 均匀细杆的热传导问题

物理模型

设有一长为 l 的均匀细杆，初始时刻(t=0)细杆中温度处处为u_0，若细杆一端(x=0)仍保持温度为u_0 ，另一端(x=l)有强度为q_0的热流流进，细杆侧面散热忽略不计。试问经过一段时间后细杆中温度分布如何？



数学模型的建立

根据热传导定律： $$q(x,t) = -k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$ k—热传导系数

根据比热定义：

$$q(x,t)\cdot S\cdot\Delta t - q(x+\Delta x,t)\cdot S\cdot\Delta t = \rho S\Delta x\cdot c\cdot\Delta u$$

$$-\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = \rho c\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

可得： $$\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (K = \frac{k}{\rho c}\text{热导率})$$

一维齐次热传导方程

❖ 定解条件

边界条件 $$u\big|_{x=0}=u_0,\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=l}=\frac{q_0}{k}$$

初始条件 $$u\big|_{t=0}=u_0$$

❖ 定解问题

均匀细杆的热传导问题可归结为以下定解问题:

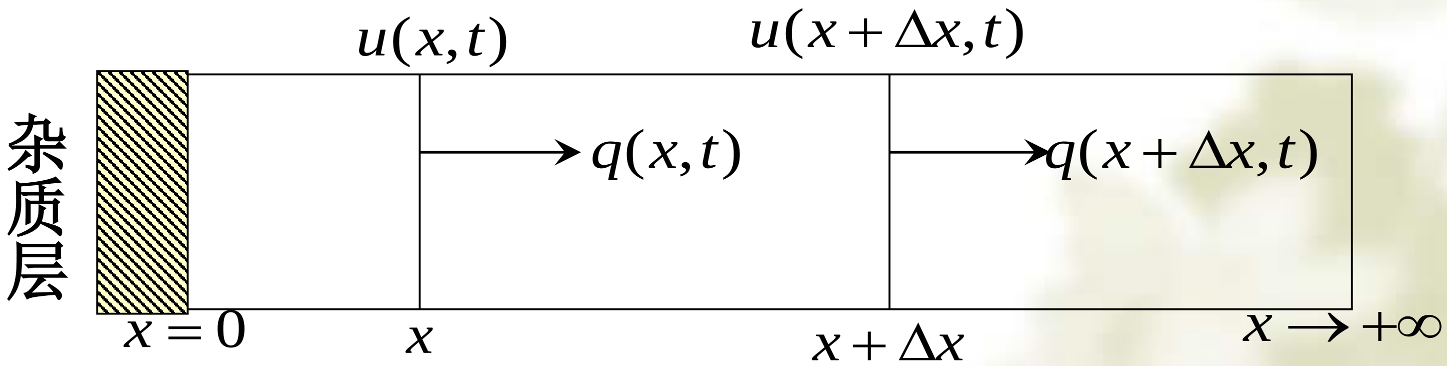
$$\begin{cases} u_t-Ku_{xx}=0 & \left(K=\dfrac{k}{\rho c},0\le x\le l\right) \\ u\big|_{x=0}=u_0,u_x\big|_{x=l}=\dfrac{q_0}{k} & (q_0>0) \\ u\big|_{t=0}=u_0 & \end{cases}$$

例8.2　一维扩散问题

物理模型

如图所示，在纯净材料表面涂上一层杂质后，杂质将向纯净材料内部扩散。求经过一段时间后，材料杂质浓度的分布。

取扩散方向为*x*轴向，并规定杂质层处坐标为*x*=0，由于杂质扩散过程极其缓慢，所以可以认为杂质将一直扩散到无穷远处（$x\to+\infty$）



数学模型的建立

根据扩散定律：$$q(x,t) = -D\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$ D—扩散系数

根据扩散流强度和浓度的定义：

$$q(x,t)\cdot S\cdot\Delta t - q(x+\Delta x,t)\cdot S\cdot\Delta t = S\Delta x\cdot\Delta u$$

可得：

$$-\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (D>0, D\text{为扩散系数})$$

一维齐次扩散方程

一维齐次热传导方程

一维齐次扩散方程

一维齐次输运方程

- 定解问题

非完全边界条件定解问题：由于扩散过程非常缓慢，通常只有一个边界条件(x=0处)，或者根本没有边界条件(扩散范围$-\infty<x<+\infty$)

自然边界条件：杂质扩散问题总是要求无穷远处($x\to\pm\infty$)杂质浓度等于有限值，这种约束条件是物理过程的必然结果。

本问题属于半无限区间(0≤x<+∞)中一维扩散问题

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & (D>0, 0<x<+\infty) \\ u\big|_{x=0} = N_0, \text{或} u_x\big|_{x=0} = \dfrac{q_0}{D} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

无限区间(- ∞ <x<+∞)中一维扩散问题

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \quad (D>0, -\infty<x<+\infty) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

补充：

一维情形：$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

二维情形：$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)$$

三维情形：$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

简写为：$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t)$$

§8.2 一维有限区间中输运问题的解法

例8.3 求解以下热传导定解问题

$$
\begin{cases}
u_t - K u_{xx} = 0 & \left(K = \dfrac{k}{\rho c}, 0 \le x \le l\right) \\
u\big|_{x=0} = u_0, u_x\big|_{x=l} = \dfrac{q_0}{k} & (q_0 > 0) \\
u\big|_{t=0} = u_0
\end{cases}
$$

❖ 求解的基本步骤

第一步：

将边界条件齐次化，设$u(x,t)=u_0+\frac{q_0}{k}x+w(x,t)$

则$w(x,t)$满足以下定解条件

$$\begin{cases} w_t-Kw_{xx}=0 \quad \left(K=\dfrac{k}{\rho c},0\le x\le l\right) \\ w\big|_{x=0}=0, w_x\big|_{x=l}=0 \\ w\big|_{t=0}=-\dfrac{q_0}{k}x \quad (q_0>0) \end{cases}$$

第二步：用分离变量法求解$w(x,t)$

设 $w(x,t)=X(x)T(t)$ 代入偏微分方程

则有 $$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{KT(t)}=-\lambda$$

所以，$$T'(t)+\lambda KT(t)=0$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

代入边界条件得

$$X(0)=0,\quad X'(l)=0$$

求解本征值问题，得到本征值和本征函数如下：

$$\begin{cases} \lambda_n = [\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}]^2 \\ X_n(x) = \sin[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x] \end{cases} \quad n = 0,1,2....$$

将本征值代入***T*(*t*)**的方程，求解得到:

$$T_n(t) = C_n e^{-K[(n+\frac{1}{2})\pi/l]^2 t} \quad (t \ge 0, n = 0,1,2...)$$

w***(x,t)***的通解

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n e^{-K[(n+\frac{1}{2})\pi/l]^2 t} \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l (-\frac{q_0}{k})x\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2q_0 l}{k(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$$

第三步：

代入 $u(x,t)=u_0+\dfrac{q_0}{k}x+w(x,t)$

得到最终解：

$$u(x,t)=u_0+\frac{q_0}{k}x+\frac{2q_0 l}{k\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+\frac{1}{2})^2}$$

$$\cdot e^{-K[(n+\frac{1}{2})\pi/l]^2 t}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$$

例8.4 求解以下定解问题

$$\begin{cases} u_t - Ku_{xx} = 0 & \left(K = \dfrac{k}{\rho c}, 0 \le x \le l\right) \\ u\big|_{x=0} = At, u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：设 $u(x,t) = At(1 - x/l) + w(x,t)$

则w**(*x,t*)**满足以下定解问题

$$\begin{cases} w_t - Kw_{xx} = A(\frac{x}{l} - 1) \quad (0 \le x \le l) \\ w\big|_{x=0} = 0, w\big|_{x=l} = 0 \\ w\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

把w**(x,t)**和非齐次项**f(x,t)**展开成相同形式的**Fourier**级数：

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$f(x,t) = A(\frac{x}{l} - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l A(\frac{x}{l} - 1)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = -\frac{2A}{n\pi}$$

代入偏微分方程和初始条件，并比较系数得：

$$\begin{cases} T_n'(t)+K(\dfrac{n\pi}{l})^2T_n(t)=-\dfrac{2A}{n\pi} \\ T_n(0)=0 \end{cases}$$

采用**Laplace**变换求解，两边同时进行**Laplace**变换：

$$p\overline{T}_n(p)+K(\frac{n\pi}{l})^2\overline{T}_n(p)=-\frac{2A}{n\pi}\cdot\frac{1}{p}$$

$$\overline{T}_n(p)=-\frac{2A}{n\pi}\cdot\frac{1}{p}\frac{1}{p+K({}^{n\pi}\!/_{l})^2}=-\frac{2Al^2}{(n\pi)^3K}[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+K({}^{n\pi}\!/_{l})^2}]$$

$$T_n(t)=-\frac{2Al^2}{(n\pi)^3K}[1-e^{-(n\pi/l)^2Kt}]$$

所以，定解问题的解为：

$$u(x,t)=At(1-\frac{x}{l})-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2Al^2}{(n\pi)^3K}[1-e^{-(n\pi/l)^2Kt}]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

课堂练习：

求解定解问题
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax\sin\omega t \\ u\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}\cdot\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^4\pi^4 a^4/l^2+\omega^2}\cdot$$

$$\left\{\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 a^2}{l^2}\sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega\exp[-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 a^2 t}{l^2}]\right\}$$

回顾：设函数$f(x)$为定义在$(-l,+l)$上的函数，

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{i(k\pi x/l)}$$

设函数$f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

§8.3 一维无限区间中输运问题的解法

例8.5 求解一维无界区间中的杂质扩散问题

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \quad (D > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

解：设 $F[u(x,t)] = T(\omega,t)$ 代入方程，则

$$T_t(\omega,t) + D\omega^2 T(\omega,t) = 0$$

解得：$$T(\omega,t) = A(\omega)e^{-\omega^2 Dt} \quad (-\infty < \omega < +\infty)$$

$$T(\omega,t)=A(\omega)e^{-\omega^2 Dt}\quad(-\infty<\omega<+\infty)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\omega)e^{-\omega^2 Dt}\cdot e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

代入初始条件得：

$$u\big|_{t=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega=\varphi(x)$$

所以，

$$A(\omega)=F[\varphi(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

则

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\omega\xi}\mathrm{d}\xi]e^{-\omega^2Dt}\cdot e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2Dt}\cdot e^{i\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\omega]\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)[\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}e^{-(x-\xi)^2/4Dt}]\mathrm{d}\xi$$

积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2a^2}\cdot e^{\beta\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{(\beta/2a)^2}$$

本章作业

8-1;8-2;8-3;8-4;

8-5(只写出定解问题);

8-6(只写出定解问题)

课堂练习：

求解定解问题
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Ax\sin\omega t \\ u\big|_{x=0} = 0; u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$