数学物理方程 期末总结

- 2018年12月

数学物理方法

- 复变函数 约25%
- 数学物理方程 约75%

第一篇 复变函数论

第一章 复数与复变函数

- §1.1 复数和复平面的基本概念
- §1.2 复平面区域与边界的定义（不考）
- §1.3 初等复变函数
- §1.4 复变函数的极限和连续性（不考）

§1.1 复数和复平面的基本概念

- 复数的表示

代数表示： $z=x+\mathrm{i}y$

三角表示： $z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

指数表示： $z=\rho\exp(\mathrm{i}\theta)$

复数的运算

加减运算

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

乘法运算

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 \exp[\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

除法运算

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}\exp[\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)]$$

$\boxed{\text{乘方运算}}$ $$z^n = \rho^n(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$$

$$= \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

$$= \rho^n e^{\mathrm{i}n\theta}$$

$\boxed{\text{开方运算}}$

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

（k＝0，1，2，…，n-1，n为自然数）

上式中k每取一值对应一根，共有n个根。

典型例子

设$z_1=5-i5, z_2=-3+i4$, 求$\dfrac{z_1}{z_2}$和$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$

求$(1+i)^{100}$和$\sqrt[4]{1+i}$

（习题1—1，1—2，1—3，1—4）

§1.3 初等复变函数

幂函数 $z^n=\rho^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=\rho^n e^{\mathrm{i}n\theta}$

指数函数 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

三角函数 $\sin z=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$ $\cos z=\dfrac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$

双曲函数 $\sinh z=\dfrac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$ $\cosh z=\dfrac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$

根式函数 $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

对数函数 $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$ （习题1—7）

第二章 复变函数微积分

- §2.1 复变函数的极限与连续性（不考）
- §2.2 复变函数的解析性
- §2.3 复变函数积分的定义和性质
- §2.4 柯西定理和柯西积分公式

§2.2 复变函数的解析性

只要函数在z_0的某个邻域中可导，则称$f(z)$在z_0处**解析**。

- 柯西—黎曼（C-R）条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

典型例子

（习题2—6，2—8）

§2.3 复变函数积分的定义和性质

$$\int_l f(z)dz = \int_l (udx - vdy) + \mathrm{i}\int_l (vdx + udy)$$

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

参数方程C:z=z(t)（α≤t≤β)

典型例子

（习题2—10）

§2.4 柯西定理和柯西积分公式

柯西定理1 $\oint_C f(z)dz=0$

柯西定理2 $\oint_{C_0} f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\oint_{C_j} f(z)dz$

柯西定理3 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad (C包围z点)$

典型例子

计算积分：$$\oint_{|z-i|=1}\frac{1}{(z^2+1)^2}dz$$

（习题2－11）

计算积分：$$\oint_{|z-2i|=3}\frac{1}{(z^2+9)^2}dz$$

第三章 复变函数的幂级数展开

- §3.1 复变函数项级数及其收敛性
- §3.2 泰勒级数展开
- §3.3 洛朗级数展开

§3.1复变函数项级数及其收敛性

绝对收敛与条件收敛

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$ 是收敛的,称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 是绝对收敛的

如果$\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$是发散的，而$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 是收敛的，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 是条件收敛的，

典型例子

（习题3-3,3-4）

§3.2泰勒级数展开

- **Taylor定理** $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$

$$a_k=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_{C_{R'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$$

典型例子

将下列函数在z=0点的Taylor级数展开

$f(z)=\sin z$ $f(z)=\cos z$

$f(z)=e^z$ $f(z)=\ln(1+z)$ $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$

（习题3—5）

§3.3洛朗级数展开

- **Laurent定理** $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

$$\text{其中}\ a_k=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

孤立奇点　可去奇点：主要部分(负幂项)不存在

m阶极点：主要部分(负幂项)有m项

本性奇点：主要部分(负幂项)有无穷多项

（习题3-6，3-7）

第四章 留数定理及其应用

- §4.1留数定理
- §4.2运用留数计算实变积分（不考）

§4.1 留数定理

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k,\quad \operatorname{Res} f(z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

典型例子

例1　求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^n-1}$ 在 $z=1$ 处的留数

例2　试确定函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的极点，并求 $f(z)$ 在这些极点处的留数

例3　试确定函数 $f(z)=\dfrac{z+2i}{z^5+4z^3}$ 的极点，并求 $f(z)$ 在这些极点处的留数

例4　计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\ (0<\varepsilon<1)$　（习题4－1，2）

第五章 Laplace变换及其应用

- §5.1 Laplace变换
- §5.2 Laplace变换的反演
- *§5.3 Laplace变换的应用（不考）

§5.1 Laplace变换

$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-pt}dt$$

典型例子 求下列函数的拉氏变换。

$\varphi(t)=1$ $\varphi(t)=e^{st}$（s为实常数）

$\varphi(t)=\sin\omega t$ $\varphi(t)=\cos\omega t$

（习题5—1）

§5.2 Laplace变换的反演

$$L^{-1}\left[\overline{\varphi}(p)\right]=\varphi(t)$$

典型例子　　求下列函数的原函数

$$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \qquad \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$$

（习题5—2）

第六章 Fourier变换

- §6.1 Fourier级数
- §6.2 Fourier积分变换
- *§6.3 δ函数及其Fourier积分变换

（不考）

§6.1 Fourier级数

典型例子　将函数$f(x)=x$, $x\in(0, l)$ 按下列边界要求展开为**Fourier**级数。

1）$f(0)=f(l)=0$　　　2）$f(0)=f'(l)=0$

3）$f'(0)=f(l)=0$　　　4）$f'(0)=f'(l)=0$

§6.2 Fourier积分变换

$$\bar{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

典型例子 **试求如下指数衰减函数的Fourier积分变换**

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-\beta x}, & x\geq 0,\beta>0\end{cases}$$

（习题6—6(1)(3)）

第二篇 数学物理方程

第七章 一维有限区间中的波动方程

- §7.1 定解问题的建立
- §7.2 分离变量法
- §7.3 傅立叶级数展开法
- §7.4 非齐次边界条件的处理
- §7.5 有阻尼的波动问题 （不考）

§7.1 定解问题的建立

典型例子

设均匀细杆一端固定，另一端自由，已知初始条件

$$u\big|_{t=0} = kx \qquad u_t\big|_{t=0} = 0$$

写出定解问题。

（习题7—2，7—3，7—4，7—5）

§7.2 分离变量法

典型例子 1、求解下列本征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X'(l)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

2、求解两端自由的杆的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & (a>0) \\ u_x\big|_{x=0}=0; u_x\big|_{x=l}=0 & \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x); u_t\big|_{t=0}=\psi(x) & (0\le x\le l) \end{cases}$$

（习题7—1,2,3,4）

§7.3傅立叶级数展开法

典型例子

1、求解如下定解问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cos\dfrac{\pi x}{l}\sin\omega t \\
u_x\big|_{x=0} = 0;\ u_x\big|_{x=l} = 0 \\
u\big|_{t=0} = \varphi(x);\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \qquad (0 \le x \le l)
\end{cases}
$$

（习题7－6,7-8）

§7.4 非齐次边界条件的处理

典型例子

非齐次边界条件的一般处理方法

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

1）若边界条件为 $u\big|_{x=0}=\theta_1(t)\qquad u\big|_{x=l}=\theta_2(t)$

2）若边界条件为 $u\big|_{x=0}=\theta_1(t)\qquad u_x\big|_{x=l}=\theta_2(t)$

3）若边界条件为 $u_x\big|_{x=0}=\theta_1(t)\qquad u\big|_{x=l}=\theta_2(t)$

4）若边界条件为 $u_x\big|_{x=0}=\theta_1(t)\qquad u_x\big|_{x=l}=\theta_2(t)$

第八章 一维输运问题

- §8.1 一维输运定解问题的建立
- §8.2 一维有限区间中输运问题的解法
- §8.3 一维无限区间中输运问题的解法（不考）

§8.1 一维输运定解问题的建立

典型例子

均匀细杆的热传导问题可归结为以下定解问题:

$$\begin{cases} u_t - Ku_{xx} = 0 & (K = \dfrac{k}{\rho c}, 0 \le x \le l) \\ u\big|_{x=0} = u_0, u_x\big|_{x=l} = \dfrac{q_0}{k} & (q_0 > 0) \\ u\big|_{t=0} = u_0 & \end{cases}$$

（写出定解问题：习题8—1，8—2，8—3，8—4，8—5 ,8—6）

§8.2 一维有限区间中输运问题的解法

典型例子

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, l) \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0, & \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{u_0}{l} x, & \end{cases}$$

（习题8—1，8—2，8—3, 8—4 ）

第九章 二阶线性常微分方程的级数解法

（不考）

- §9.1 常微分方程在常点邻域中的级数解法
- §9.2 常微分方程在正则奇点邻域中的级数解法

第十章 勒让德多项式

- §10.1 勒让德多项式的定义
- §10.2 勒让德多项式的重要性质
- §10.3 缔合勒让德函数（不考）

§ 10. 1勒让德多项式的定义

本征值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\mu y(x)=0 & (\mu\text{为待定参数}) \\ x\in[-1,1]\text{时，方程的解取有限值。} & (\text{自然边界条件}) \end{cases}$$

本征值 $\mu_l = l(l+1) \qquad (l=0,1,2\ldots)$

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}\cdot x^{l-2r}$$

典型例子

证明以下等式

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_{2n+1}(0)=0$$

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x)$$

$$P_l(1)=1,\ P_l(-1)=(-1)^l$$

§10.2勒让德多项式的重要性质

递推公式

$$P_l(x)=P'_{l+1}(x)-2xP_l'(x)+P'_{l-1}(x)\quad(l\geq 1)$$

$$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$$

$$(2l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)\quad(l\geq 1)$$

正交完备性

$$\int_{-1}^{+1}P_k(x)P_l(x)dx=0\quad(k\neq l)$$

$$f(x)=\sum_{l=0}^{+\infty}c_lP_l(x)$$

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\mathrm{d}x$$

典型例子

1、试推导以下递推公式 （课后习题10—2，10—3）

$$lP_l(x) = xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) \quad (l \geq 1)$$

3、以勒让德多项式为基，在[-1,1]上把f(x)=2x^3+3x+4展开为广义Fourier级数 。 （课后习题10—5(1)(2)）

第十一章 柱函数

- §11.1 柱函数的定义（了解）
- §11.2 柱函数的重要性（不考）

§11.1柱函数的定义

贝赛尔方程 $$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y(x)=0$$

第一类柱函数：贝塞耳函数

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}\qquad \mathrm{J}_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k-\nu}$$

$$\mathrm{J}_{-m}(x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(x)$$

第二类柱函数：诺伊曼函数 $$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{\cos(\nu\pi)\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

第三类柱函数：汉克尔函数

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{N}_\nu(x)\qquad \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{i}\,\mathrm{N}_\nu(x)$$

第十二章 变形贝塞耳方程

- §12.1 虚宗量贝塞耳方程（了解）
- §12.2 球贝塞耳方程（不考）

§12.1虚宗量贝塞耳方程

- 虚宗量贝塞耳方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(1+\frac{\nu^2}{x^2})y=0 \qquad (\nu\geq 0)$$

通解为：$y(x)=C\mathrm{I}_\nu(x)+D\mathrm{K}_\nu(x)$

$$\boxed{\mathrm{J}_\nu(ix)=i^\nu \mathrm{I}_\nu(x)}$$

第十三章 拉普拉斯方程

- §13.1 直角坐标系中拉普拉斯方程的解法
- §13.2 球坐标系中拉普拉斯方程的解法
- §13.3 柱坐标系中拉普拉斯方程的解法

§13.1直角坐标系中拉普拉斯方程的解法

典型例子 ❖ 矩形域上的边值问题

散热片的横截面为一矩形$x\in[0,a]$，$y\in[0,b]$，它的一边 $y=b$ 处于较高的温度，其它三边保持零度。求横截面上的稳恒的温度分布

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,0<y<b \\ u(x,0)=0,u(x,b)=u_0, \\ u(0,y)=u(a,y)=0, \end{cases}$$

§13. 2球坐标系中拉普拉斯方程的解法

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

拉普拉斯方程在球坐标系中的通解为

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{l}(C_l r^l+\frac{D_l}{r^{l+1}})\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)$$

典型例子

（课后习题**13-1,13-2,13-3,13-4**）

§13.3柱坐标系中拉普拉斯方程的解法

柱坐标系下 $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

（1） μ <0
$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{+\infty}(\alpha_m \mathrm{I}_m(\sqrt{-\mu}\rho)+\beta_m \mathrm{K}_m(\sqrt{-\mu}\rho))$$
$$(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\cos\sqrt{-\mu}z+D_m\sin\sqrt{-\mu}z)$$

（2） μ =0
$$u(\rho,\varphi,z)=(\alpha_0+\beta_0\ln\rho)(C_0+D_0 z)+$$
$$\sum_{m=1}^{+\infty}(\alpha_m\rho^m+\frac{\beta_m}{\rho^m})(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m+D_m z)$$

（3） μ >0
$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{+\infty}(\alpha_m \mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\rho)+\beta_m \mathrm{N}_m(\sqrt{\mu}\rho))$$
$$(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\cosh\sqrt{\mu}z+D_m\sinh\sqrt{\mu}z)$$

典型例子

（课后习题**13-9,13-10(1),13-11(1)**）