第五章 Laplace变换及其应用

- §5.1 Laplace变换
- §5.2 Laplace变换的反演
- *§5.3 Laplace变换的应用

§5.1 Laplace变换

- **Laplace变换的定义**

设函数 $\varphi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & 0\le t<\infty \\ 0 & t<0\end{cases}$ 则

$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-pt}dt$ 称为 $\varphi(t)$ 的拉普拉斯变换

$\varphi(t)$为 $\overline{\varphi}(p)$的原函数： $L[\varphi(t)]=\overline{\varphi}(p)$

$\overline{\varphi}(p)$ 为 $\varphi(t)$的像函数： $L^{-1}[\overline{\varphi}(p)]=\varphi(t)$

补充:Laplace变换的由来

$$\bar{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

要求: $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ 存在. 这比较苛刻，如: $t,\sin t,\cos t$

设函数 $\varphi(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t<\infty \\ 0 & t<0 \end{cases}$ 令 $g(t)=e^{-\sigma t}\varphi(t),\sigma>0$

$$\bar{g}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}\mathrm{d}t$$

$$\bar{\varphi}(p)=\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)e^{-pt}dt \quad (p=\sigma+i\omega)$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{\varphi}(p)e^{pt}\mathrm{d}p\,(t>0,\sigma>\sigma_0)$$

例5.1 求 $\varphi(t)=1$ 的拉氏变换。

解：原函数应理解为阶跃函数 $H(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{p}\qquad(\operatorname{Re}p>0)\qquad L(1)=\frac{1}{p}$$

例5.2 求 $\varphi(t)=t^n$ (n为正整数) 的拉氏变换。

解：$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{+\infty}t^n\cdot e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}}\qquad(\operatorname{Re}p>0)$$

$$L(t^n)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

例5.3 求 $\varphi(t)=e^{st}$（s为实常数） 的拉氏变换。

解： $$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{+\infty}e^{st}\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{p-s}\qquad (\operatorname{Re}p>s)$$

$$L(e^{st})=\frac{1}{p-s}$$

例5.4 求 $\varphi(t)=t^n e^{st}$（n为正整数, s为实常数）

的拉氏变换。

解: $$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{+\infty}t^n e^{st}\cdot e^{-pt}dt=\frac{n!}{(p-s)^{n+1}}\qquad (\operatorname{Re}p>s)$$

$$L(t^n e^{st})=\frac{n!}{(p-s)^{n+1}}$$

例5.5　求 $\varphi(t)=\sin\omega t$ 的拉氏变换。

解：$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{+\infty}\sin\omega t\cdot e^{-pt}dt=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\qquad(\mathrm{Re}\,p>0)$

$$L(\sin\omega t)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

同理可证明：

$$L(\cos\omega t)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

❖ **Laplace变换的性质** $L[\varphi(t)] = \overline{\varphi}(p)$

性质1（导数性质）

$$L\left[\varphi^{(n)}(t)\right] = p^n\overline{\varphi}(p) - p^{n-1}\varphi(0) - p^{n-2}\varphi'(0) - \dots - p\varphi^{(n-2)}(0) - \varphi^{(n-1)}(0)$$

$$L[\varphi'(t)] = p\overline{\varphi}(p) - \varphi(0)$$

$$L[\varphi''(t)] = p^2\overline{\varphi}(p) - p\varphi(0) - \varphi'(0)$$

性质2（积分性质）

$$L\left[\int_0^t \varphi(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{p}\overline{\varphi}(p)$$

性质3（像函数微分性质）

$$L\left[(-1)^n t^n \varphi(t)\right]=\frac{d^n\overline{\varphi}(p)}{dp^n}$$

§5.2 Laplace变换的反演

$$L^{-1}\left[\overline{\varphi}(p)\right]=\varphi(t)$$

$\boxed{\text{延迟定理}}$ $L^{-1}\left[e^{-\tau p}\overline{\varphi}(p)\right]=\begin{cases}\varphi(t-\tau),(t\geq\tau)\\0, \qquad (t<\tau)\end{cases}$

证明：按定义 $L[\varphi(t-\tau)]=\int_{\tau}^{+\infty}\varphi(t-\tau)e^{-pt}dt$

$$=\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)e^{-p(t+\tau)}dt$$

$$=e^{-\tau p}\overline{\varphi}(p)$$

注意：当t<τ时， ϕ (t−τ)=0

位移定理 $L^{-1}\left[\overline{\varphi}(p+\lambda)\right]=e^{-\lambda t}\varphi(t)$

证明：$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\varphi(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-(p+\lambda)t}dt=\overline{\varphi}(p+\lambda)$

卷积定理

若$L^{-1}[\overline{\varphi}_1(p)]=\varphi_1(t), L^{-1}[\overline{\varphi}_2(p)]=\varphi_2(t)$，则

$$L^{-1}\left[\overline{\varphi}_1(p)\cdot\overline{\varphi}_2(p)\right]=\int_0^t\varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\varphi_1(t)*\varphi_2(t)$$

$$L^{-1}\left[\overline{\varphi}_1(p)\cdot\overline{\varphi}_2(p)\right]=\int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

证明：考虑等式

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\left[\int_\tau^{+\infty}\varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)e^{-pt}dt\right]d\tau$$

做积分变量代换 $t\to t'+\tau$

$$右边=\int_0^{+\infty}\varphi_1(\tau)d\tau\left[\int_0^{+\infty}\varphi_2(t')e^{-p(t'+\tau)}dt'\right]$$

$$=\int_0^{+\infty}\varphi_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^{+\infty}\varphi_2(t)e^{-pt}dt$$

$$=\overline{\varphi}_1(p)\cdot\overline{\varphi}_2(p)$$

补充（线性定理）

α, β为任意常数，且 $\bar{\varphi}_1(p) = \mathrm{L}[\varphi_1(t)], \bar{\varphi}_2(p) = \mathrm{L}[\varphi_2(t)]$

则 $\mathrm{L}[\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)] = \alpha\mathrm{L}[\varphi_1(t)] + \beta\mathrm{L}[\varphi_2(t)]$

补充（相似定理）

$$L[\varphi(at)] = \frac{1}{a}\bar{\varphi}(\frac{p}{a})$$

补充求 $\mathcal{L}[\sinh at], \mathcal{L}[\cosh at]$

【解】

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \mathcal{L}[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \mathcal{L}[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2 - a^2}$$

$$(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a)$$

例5.6 求 $\dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$ 和 $\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$（λ， ω为已知常数）的原函数。

解：由例5.5知

$$L^{-1}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)=\sin\omega t \quad (t>0) \qquad L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)=\cos\omega t$$

根据位移定理，

$$L^{-1}\left(\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}\right)=e^{-\lambda t}\sin\omega t \quad (t>0)$$

$$L^{-1}\left(\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}\right)=e^{-\lambda t}\cos\omega t \quad (t>0)$$

例5.7

求 $\dfrac{e^{-ap}}{p(p+b)}$ （a，b为常实数，a>0）的原函数。

解：由例5.1知 $L^{-1}(\dfrac{1}{p})=H(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

所以 $L^{-1}(\dfrac{e^{-ap}}{p})=H(t-a)$　　已知 $L^{-1}(\dfrac{1}{p+b})=e^{-bt}$

由卷积定理

$$L^{-1}[\frac{e^{-ap}}{p(p+b)}]=H(t-a)*e^{-bt}=\frac{1}{b}[1-e^{-b(t-a)}]\quad(t>a)$$

反演公式

若 $L^{-1}[\overline{\varphi}(p)] = \varphi(t)(\mathrm{Re}\, p > s_0, s_0$为已知实数$)$

那么$\varphi(t)$在连续点处有：

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \overline{\varphi}(p) e^{pt} \mathrm{d}p \quad (t > 0, a > s_0)$$

黎曼—梅林公式

反演积分展开定理

若当$p\to\infty$ 时，$\overline{\varphi}(p)\to 0$ 并且在p平面中，$\overline{\varphi}(p)$只有有限个孤立奇点$p_1,p_2,\ldots,p_n$，那么必然存在一个实数a，使得这些奇点全部在Re$p<a$的半平面内，而且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\overline{\varphi}(p)e^{pt}\mathrm{d}p=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Resf}\left[\overline{\varphi}(p_k)e^{p_k t}\right]$$

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Resf}\left[\overline{\varphi}(p_k)e^{p_k t}\right]\quad (t>0)$$

例5.8 求 $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$ 的原函数。

解：函数在复平面上有两个二阶极点p_1=i,p_2=-i

$$\mathrm{Res}\, f[\overline{\varphi}(p_1)e^{p_1 t}] = \lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left[(p-i)^2\cdot\frac{1}{(p^2+1)^2}\cdot e^{pt}\right]$$

$$=\lim_{p\to i}\left[\frac{t}{(p+i)^2}-\frac{2}{(p+i)^3}\right]e^{pt} = -\frac{e^{it}}{4}(i+t)$$

$$\mathrm{Res}\, f[\overline{\varphi}(p_2)e^{p_2 t}] = \frac{e^{-it}}{4}(i-t)$$

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}\, f[\overline{\varphi}(p_k)e^{p_k t}] = -\frac{e^{it}}{4}(i+t)+\frac{e^{-it}}{4}(i-t) = -\frac{te^{it}}{2}$$

＊§5.3 Laplace变换的应用

- 本节内容不要求

本章作业

5-1; 5-2;

补充作业：解下列方程

（1）
$$\begin{cases} T_n''(t)+(n\pi a/l)^2 T_n(t)=0 \\ T_n(0)=C, T_n'(0)=D, \end{cases}$$

（2）
$$\begin{cases} T_m''(t)+(m\pi a/l)^2 T_m(t)=A\sin\omega t \\ T_m(0)=0, T_m'(0)=0 \end{cases}$$

（2） $$\begin{cases} T_m''(t)+(m\pi a/l)^2 T_m(t)=A\sin\omega t \\ T_m(0)=0, T_m'(0)=0 \end{cases}$$

解：方程两边同时进行**Laplace**变换，则

$$p^2\bar{T}_m(p)+(m\pi a/l)^2\bar{T}_m(p)=A\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

解得 $$\bar{T}_m(p)=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}\bullet\frac{1}{p^2+(m\pi a/l)^2}$$

$$=\frac{A\omega}{(m\pi a/l)^2-\omega^2}\left[\frac{1}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^2+(m\pi a/l)^2}\right]$$

所以

$$T_m(t)=\frac{A}{(m\pi a/l)^2-\omega^2}\left[\sin\omega t-\frac{\omega l}{m\pi a}\sin\frac{m\pi a t}{l}\right]$$