INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

Historie

- Egypt (1820 př. Kr.) - výpočet určitých ploch a objemů
- Babylon - Lichoběžníkové pravidlo při pozorování Jupiteru
- Eudoxus (Řecko 408 - 355 př. Kr) a Archimedes (Řecko 287 - 212 př. Kr.) - vyplnění plochy n-úhelníkem.
- Alhazen (Irák, 965 - 1040) - výpočet objemu paraboloidu
- Newton (Principia 1687), Leibniz (Nova Methodus pro Maximis et Minimis 1684)

- Určení plochy S vymezené grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.
- Určení funkce, pokud je známa její derivace

Derivace a diferenciál

- Funkce f definovaná na okolí bodu x_0 má v bodě x_0 derivaci (je derivovatelná), existuje-li konečná limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(c)$$

- Této limitě říkáme derivace funkce f v bodě x_0

- Funkce f má v bodě x_0 diferenciál (je diferencovatelná), existuje-li číslo A a funkce $\omega(h)$ taková, že platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \omega(h) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$$

- Číslo A je (první) derivace funkce f v bodě x_0 a lineární funkci Ah proměnné h říkáme (první) diferenciál funkce f v bodě x_0 a píšeme

$$df(x_0, h) = Ah = f'(x_0)h$$

Neurčitý integrál – primitivní funkce

- Určení funkce, pokud je známa její derivace
- Funkce $F(x)$ je ***primitivní funkcí*** k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, pokud pro všechna x platí

$$F'(x) = f(x)$$

- Ke každé funkci $f(x)$, spojité na $\langle a, b \rangle$, existuje primitivní funkce (nekonečně mnoho) ve tvaru:

$$F(x) + C$$

- kde C je libovolná konstanta. Poté lze zapsat

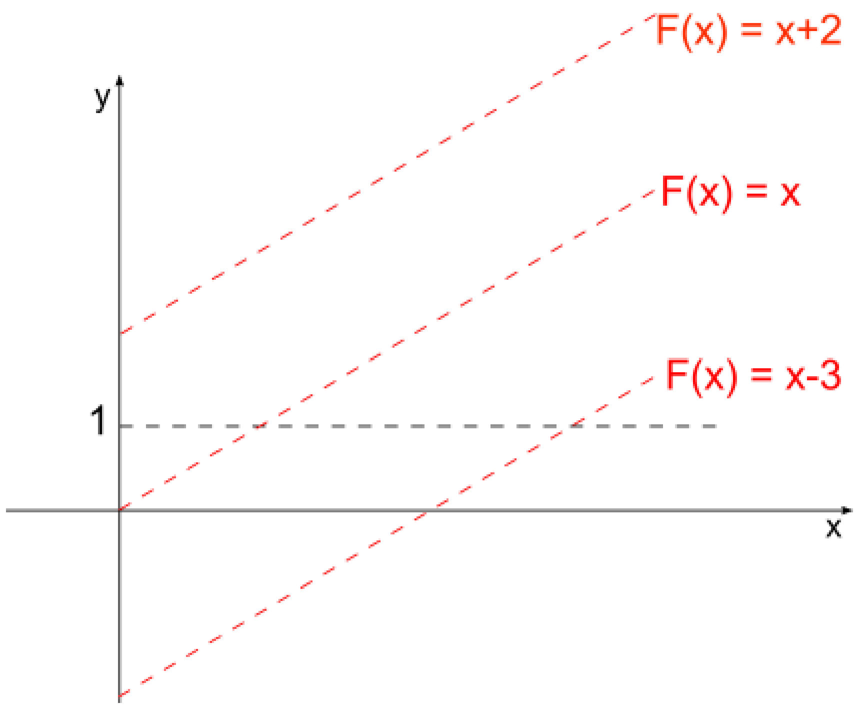
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- Znak $\int$ má význam množiny všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ a nazývá se **neurčitým integrálem funkce** $f(x)$
- Funkce $f(x)$ se nazývá integrand
- Symbol dx (diferenciál x) slouží k označení proměnné, podle které integrujeme

Příklad

- Vezměme jednoduchou funkci $f(x) = 1.$
- Hledejme k ní primitivní funkci $F'(x) = f(x)$
- Podle obr. může vyjít funkcí několik, neboli

$$F(x) = x + C$$



Metody integrace

- Tabulky základních integrálů

$$f(x) = x^n \qquad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad n \in R, \qquad n \neq -1$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{cotg} x + C$$

Substituce

- Funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) tvar $f(x) = g\big(h(x)\big)h'(x)$.
- Poté lze použít substituci ve tvaru $h(x) = t$ a získáme rovnost

$$\int f(x)\,dx = \int g\big(h(x)\big)h'(x)\,dx = \int g(t)\,dt$$

$$\int \sin^2 x \cos x \;dx = \left|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \;dx \end{matrix}\right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Substituce

- Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b).

- Funkce $x = \varphi(t)$ je spojitá na odpovídajícím intervalu a existuje k ní inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Poté lze použít substituci $x = \varphi(t)$ a získáme rovnost

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int g(t)\,dt$$

- Zpětně musíme dosadit inverzní funkci $t = \varphi^{-1}(x)$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\ dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\ \ 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int \sqrt{\cos^2 t}\ \ \cos t\,dt = 4\int \cos^2 t = \cdots$$

$$= 2(t + \sin t\cos t) = |t = \varphi^{-1}(x)| = \cdots$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \cos 2x + 1$$

Per partes

- Funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou spojitě diferencovatelné na určeném intervalu J.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)' dx = \int u'v\,dx + \int uv' dx$$

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv' dx$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \left|\begin{matrix} u' = e^x \\ v = \sin x \end{matrix}\right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx =$$

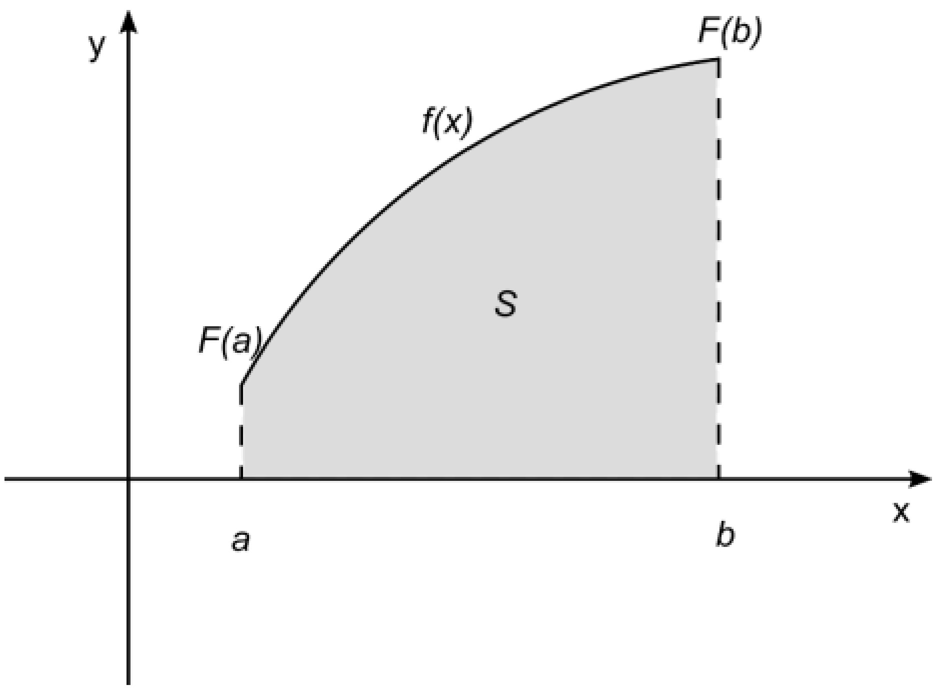
$$= \left|\begin{matrix} u' = e^x \\ v = \cos x \end{matrix}\right| = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx \right) =$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx$$

Určitý integrál

- Určení plochy S vymezené grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.
  - Newtonův integrál

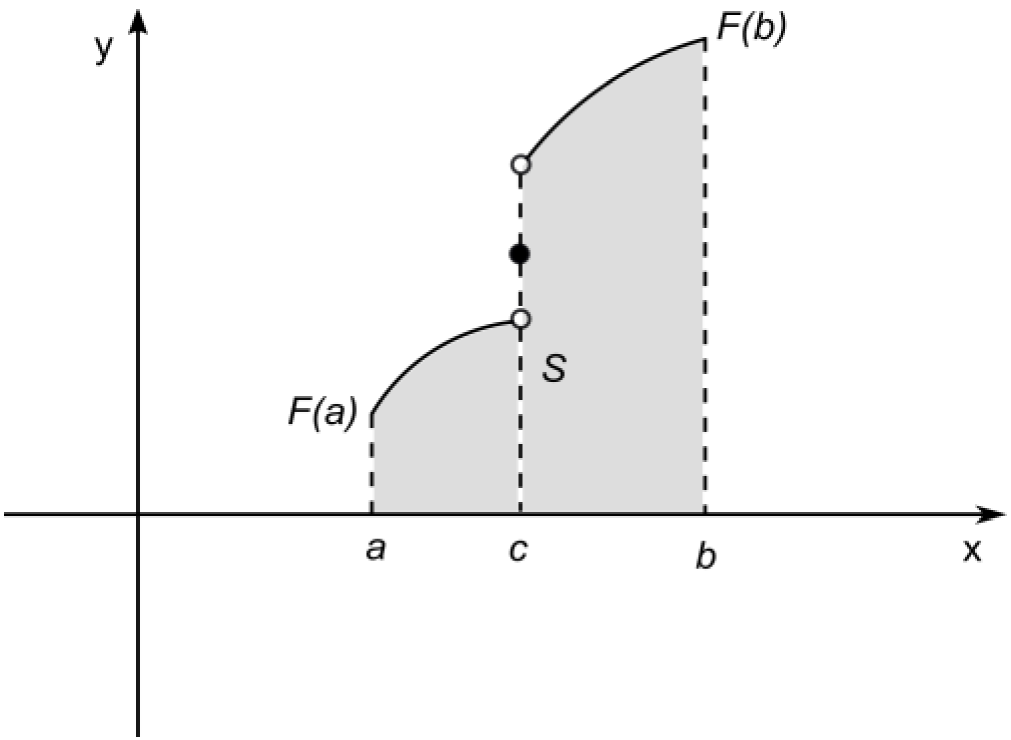
$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$$



- Lze počítat délky křivek, objemy, povrchy …
- Nutná znalost primitivních funkcí
- Nelze počítat funkce, které mají nespojitosti 1. druhu na intervalu (a, b)

Určitý integrál

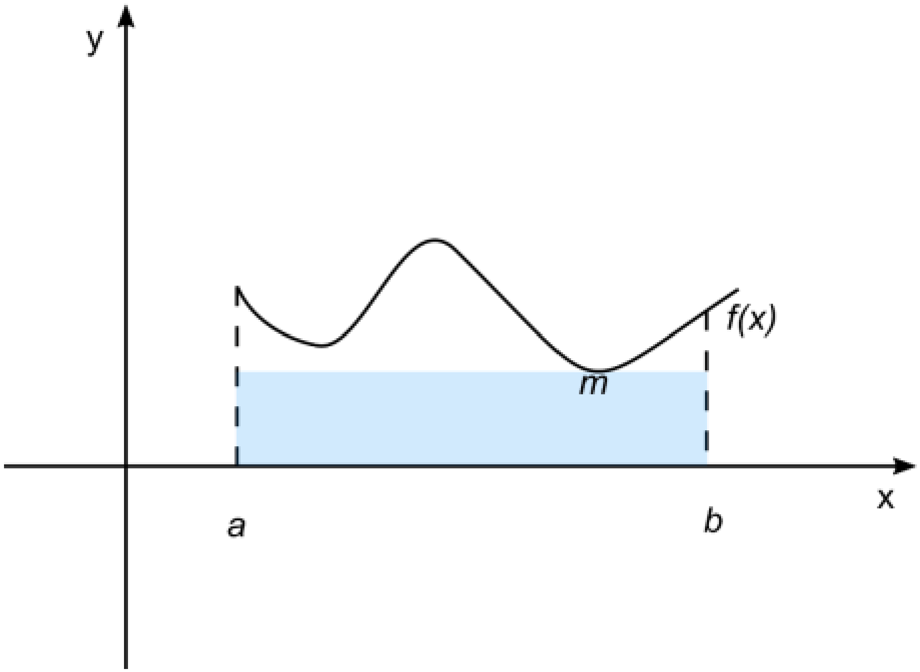
- Bod c je bodem nespojitosti 1. druhu.
  - Fourierova analýza
  - Teorie pravděpodobnosti
- I když $F(c)$ neexistuje, tak obsah lze vypočítat.

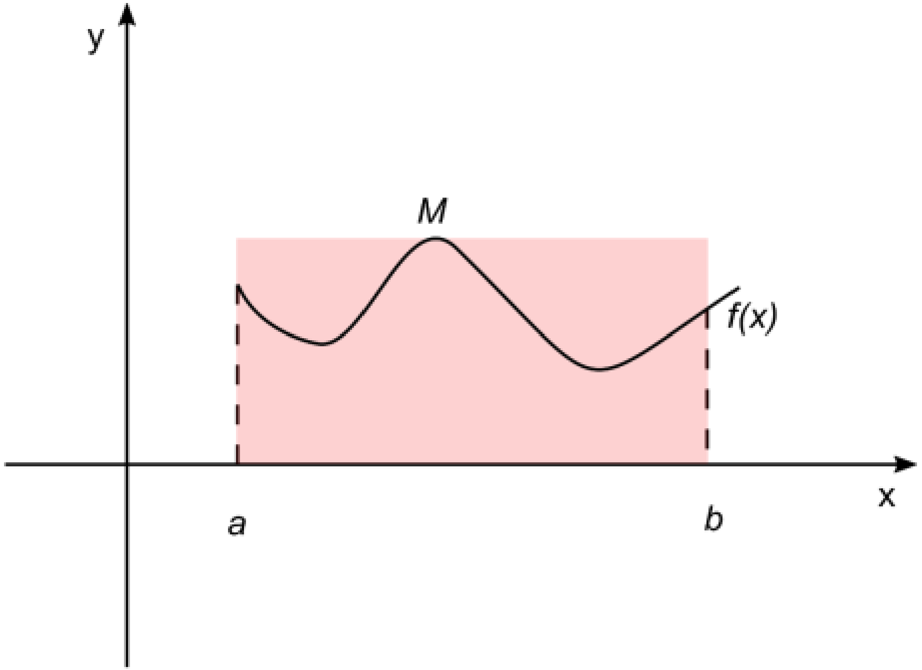


Riemannův integrál

- Na uzavřeném interval $\langle a, b\rangle$ mějme funkci $f(x)$. Číslo m je infimum funkce a M supremum funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo $L(f(x)) = m(b - a)$ nazveme dolním odhadem a číslo $U(f(x)) = M(b - a)$ horním odhadem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$

supremum je nejmenší prvek množiny
všech horních závor dané množiny

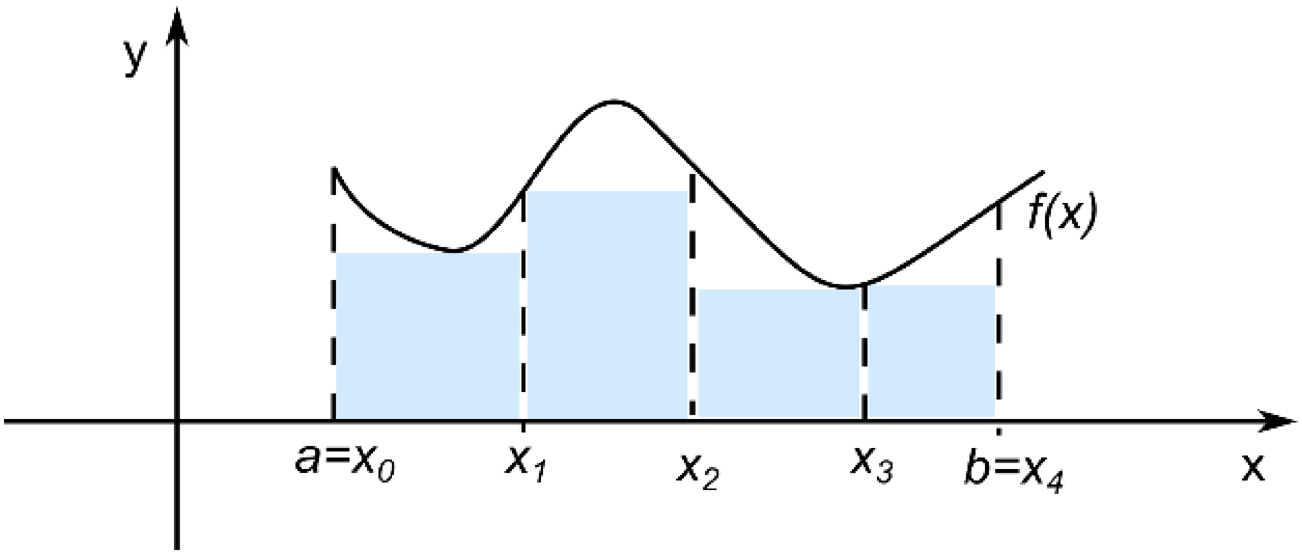




Cílem je získat obsah plochy vymezenou funkcí $f(x)$ a osou x

Riemannův integrál

- Zavedeme dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ $D(n) = (x0 = a, x1, x2, \dots, xn = b)$. Potom m_i a M_i jsou infima a suprema na příslušných podintervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$



- Poté, čísla $L(f(x), D(n))$ a $U(f\,(x), D(n))$ nazveme dolním a horním součtem funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ při dělení $D(n)$.

$$L(f(x), D(n)) = \sum_i m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad U(f(x), D(n)) = \sum_i M_i(x_i - x_{i-1})$$

Riemannův integrál

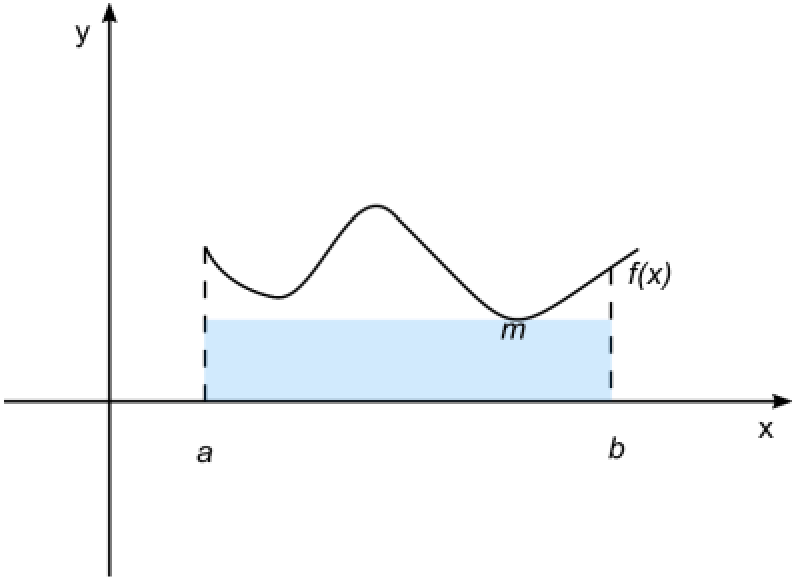
- Pro libovolné dělení platí

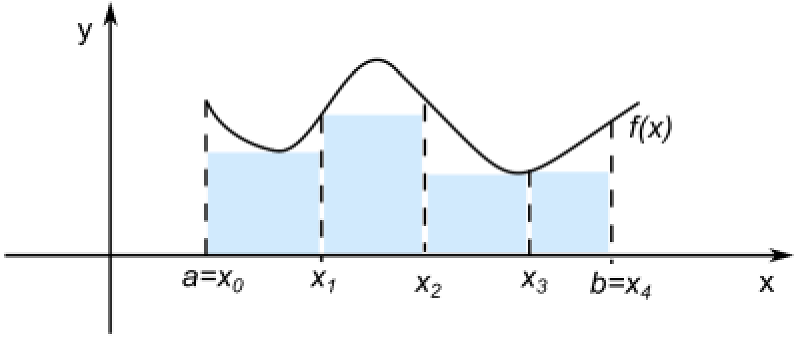
$$m(b-a) \leq L\big(f(x), D(n)\big) \leq U\big(f(x), D(n)\big) \leq M(b-a)$$

- Jestliže platí

$$\sup L\big(f(x), D(n)\big) = \inf U\big(f(x), D(n)\big)$$

- řekneme o funkci $f(x)$, že je tzv. Riemannovsky integrovatelná



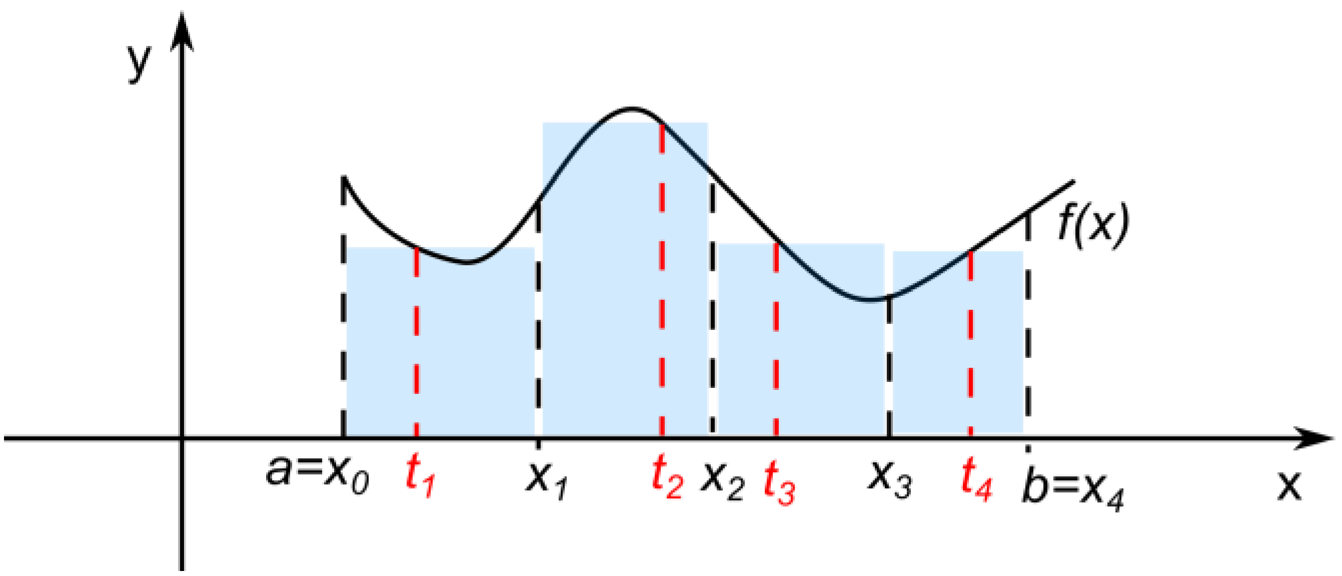


Integrální součet

- Uvažujeme posloupnost $T\big(D(n)\big) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ reálných čísel takových, že platí $t_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Potom číslo

$$S\Big(f(x), D(n), T\big(D(n)\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

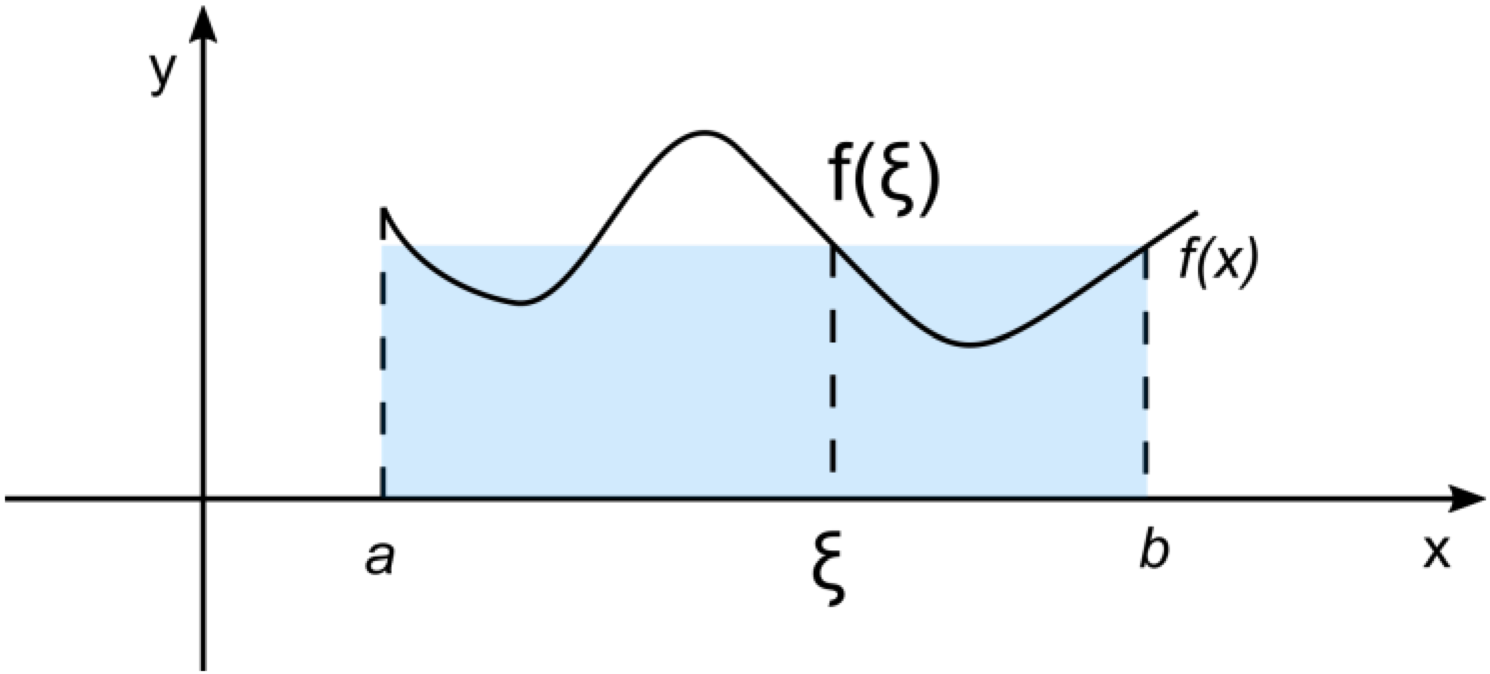
- nazveme integrálním součtem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.



Integrální součet

- Věta o střední hodnotě Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje číslo ξ takové, že platí

$$S = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$



Integrální součet

- Zvolme posloupnost dělení $D_1, D_2, ..., D_k$ a každé posloupnosti přiřadíme posloupnost bodů $T_1, T_2, .., T_k$. Získáme tak posloupnosti $S_1, S_2, ..., S_k$. Jestliže, je funkce $f(x)$ tzv. Riemannovsky integrovatelná, potom každá posloupnost S_i konverguje a platí

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \int_a^b f(x)dx$$

- Čím se liší jednotlivé členy posloupnosti $D_1, D_2, ..., D_k$?

- Proč nelze jednoduše použít pouze Větu o střední hodnotě?

$$S = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

Numerická integrace

- Riemannova integrace pracuje s nekonečně malými intervaly

$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_i) \right]$$

- Věta o střední hodnotě vyžaduje znalost primitivní funkce k funkci $f(x)$

$$S = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad \rightarrow \qquad f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

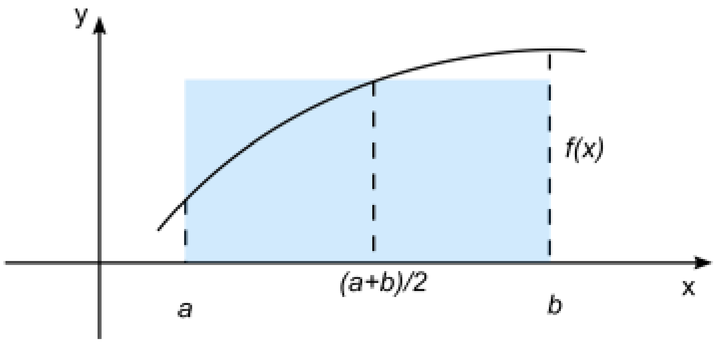
- V numerické matematice pracujeme s konečně malými intervaly a snažíme se funkci $f(x)$ **aproximovat** na intervalu $\langle a, b \rangle$ funkcí jednodušší
- Získáme tak odhad integrálu S

$$S \approx \int_a^b f(x)dx$$

Newtonovy-Cotesovy vzorce

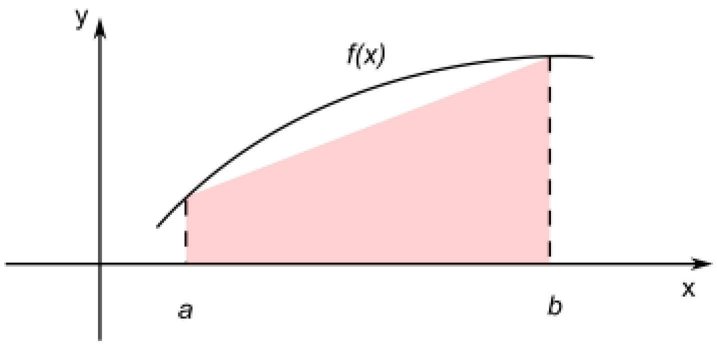
- Obdélníkové pravidlo

$$S = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



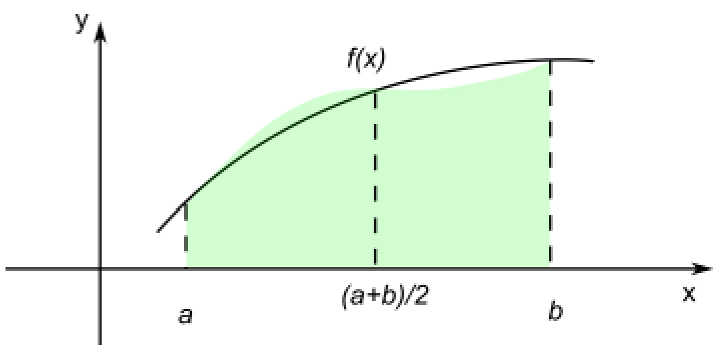
- Lichoběžníkové pravidlo

$$S = \frac{(b-a)}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$



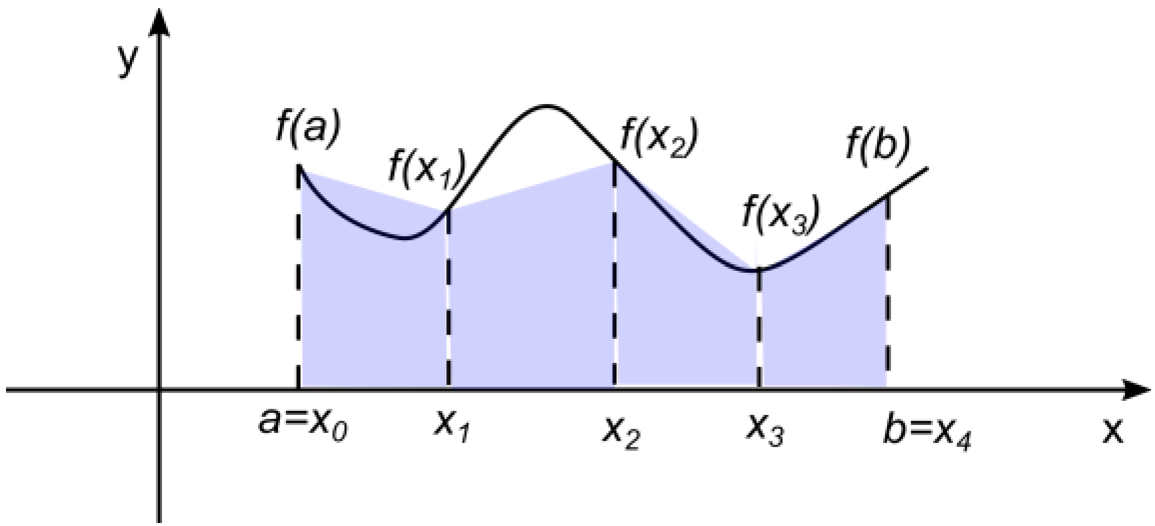
- Simpsonovo pravidlo

$$S = \frac{(b-a)}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)\right)$$



Numerická integrace

- Zvýšení přesnosti odhadu S v Newtonových-Cotesových vzorcích lze dosáhnout dělením intervalu $\langle a, b\rangle$ na n podintervalů.
- Lichoběžníkové pravidlo
- Dělení intervalu $h = \frac{b-a}{n}$



$$S = \frac{b-a}{2n}\left[\frac{f(a)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}+\frac{f(x_3)+f(b)}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] + h\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right)$$

Integrace – cvičení

- Pomocí symbolické matematiky vypočítejte následující integrály

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx$$

$$F(x) = \int x^a\, dx$$

$$F(x) = \int \arccos(\sin x)\, dx$$

$$F(x) = \int \ln(\sin x)\, dx$$

- Zkuste předem odhadnout podmínky integrace a existence primitivní funkce

Numerická integrace – cvičení

- Pomocí built-in funkcí nebo metod numerické matematiky vypočítejte následující určité integrály
- Metody porovnejte mezi sebou z hlediska přesnosti výpočtu

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$\int_0^{1} (x^2 - 2x + 6) dx$$

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin(2x) \, dx$$