OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Analytické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

- Obyčejná diferenciální rovnice udává vztah mezi funkcí a jejími derivacemi ve tvaru:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots.) = 0$$

- Řešením je každá funkce $g(x)$ vyhovující výše uvedené rovnici
- Volbou počátečních podmínek $[x_0, f_0 = f(x_0)]$ vybíráme z množiny funkcí $g(x)$ jednu konkrétní

- Analytické metody řešení ODE prvního řádu
- Separace proměnných

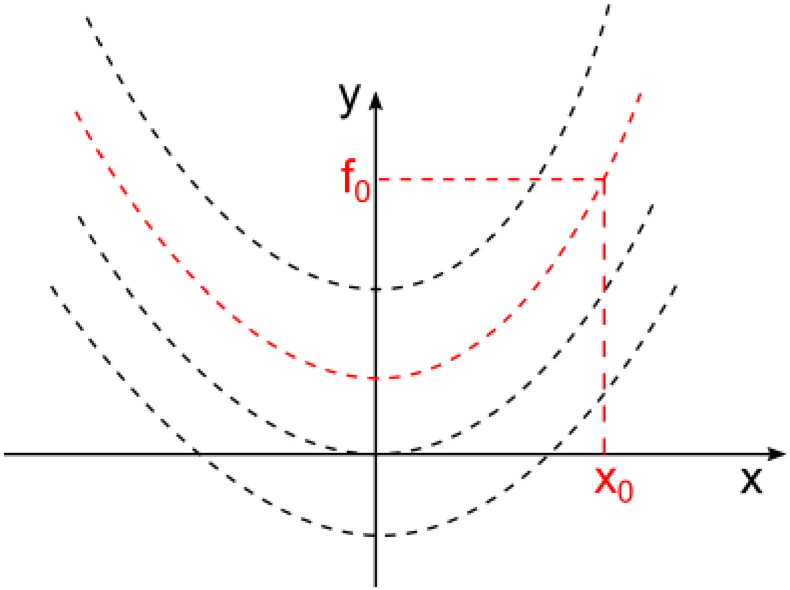
$$y' = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = x\,dx$$

$$\int dy = \int x\,dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$



Analytické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

- Homogenní rovnice.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (x \neq 0)$$

- (Homogenní) Lineární rovnice

$$y' + a(x)y = 0$$

$$y = C\, e^{-\int a(x)\, dx}$$

$$y' + a(x)y = b(x)$$

$$y = C(x)\, e^{-\int a(x)\, dx}$$

$$y = e^{-\int a(x)\, dx} \int b(x)\, e^{\int a(x)\, dx}$$

- Bernoulliova rovnice

$$y' + a(x)y = b(x)y^n$$

substituce $u = y^{1-n}$ převede libovolnou Bernoulliho rovnici na lineární diferenciální rovnici

Použití diferenciálních rovnic

- Děje, které se mění v čase
  - pomocí obyčejné diferenciální rovnice nebo soustavy rovnic

$$\frac{dF(t)}{dt} \neq 0$$

- Příklady použití
  - matematický software
    - využít matematických funkcí softwaru pro řešení problémů z oblasti matematiky a numerické matematiky
    - funkce softwaru nezávislé na verzi
  - počítačové zpracování signálu
    - využití transformací pro analýzu jednoduchých signálů, jejich korelací apod.
  - úvod do strojového učení
    - praktická analýza dat pomocí existujících frameworků
    - např. tensorFlow, Scikit-learn, Kerasd apod.

Použití diferenciálních rovnic

- Fyzikální soustavy (pohybová rovnice)

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad \frac{dv}{dt} = a$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

- Biologické modely

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma R(t)$$
$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma R(t)$$

- Finanční modely

$$dr(t) = \alpha\, r(t)\, dt + \beta\, r(t)\, dW(t)$$

Numerické metody řešení

- Numerické metody pro řešení ODE

$$y^{i+1} = F\left(x^i, y^i, y^{i-1}, \ldots, y^{i-k}\right)$$

  - Jednokrokové metody
    - Euler, Runge-Kutta, Verlet, Leap-Frog

$$y^{i+1} = y^i + hf\left(x^i, y^i\right)$$

  - Vícekrokové metody
    - Prediktor-korektor, Prediktor-modifikátor-korektor, Adams-Bashforth

$$y^{i+1} = y^i + \frac{3}{2}hf\left(x^i, y^i\right) - \frac{1}{2}hf\left(x^{i-1}, y^{i-1}\right)$$

Eulerova metoda

- Řešíme rovnici

$$y' = x \qquad y(x_0) = 2 \qquad x_0 = 0$$

- Analytické řešení rovnice je

$$y(t) = \frac{x^2}{2} + C, \qquad y(0) = \frac{0}{2} + C \quad \to \quad C = 2$$

- Místo derivace budeme využívat diferenci

$$\frac{d}{dt} \sim \frac{\Delta}{\Delta t}$$

- Po dosazení do rovnice $y' = x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x$$

- Dle vztahu $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ přepíšeme rovnici do tvaru jednokrokové metody a upravíme

$$\Delta y = x\Delta x$$

$$y(x + \Delta x) - y(x) = x\Delta x$$

$$y(x + \Delta x) = y(x) + x\Delta x$$

Eulerova metoda

- Vyšlo

$$y(x + \Delta x) = y(x) + x\Delta x$$

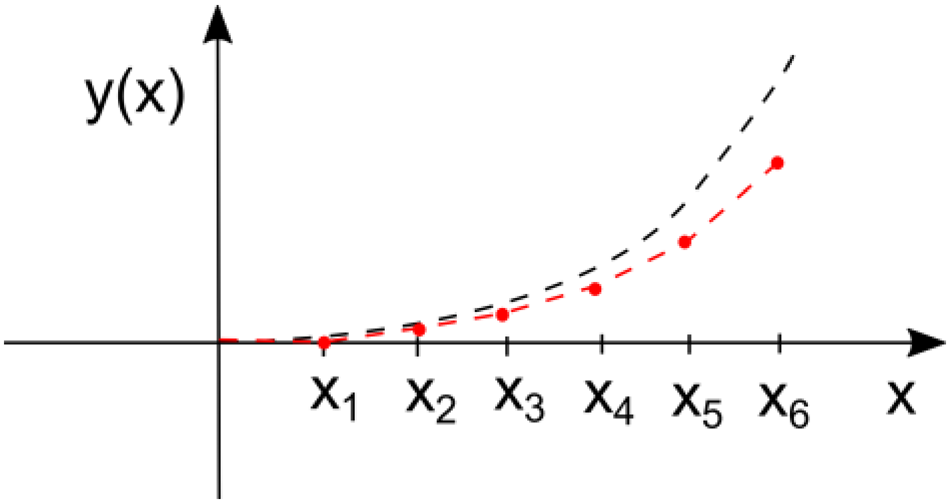
- Obecné schéma jednokrokové iterační metody

$$y^{i+1} = y^i + h\, f\left(x^i, y^i\right)$$

- Naše rovnice přepsaná do iterační podoby

$$y^{i+1} = y^i + hx^i; \qquad\qquad y^0 = 2$$

Přesnost odhadu numerické metody



- Odhad - - nesouhlasí s přesným řešením - -
- Chyba metody
  - krok h je příliš velký.
  - jednokroková metoda odhaduje pouze $y^{i+1} = F\left(y^{i}\right)$
- Zaokrouhlovací chyba $h \rightarrow 0$

Řešení rovnic – cvičení

- Vyřešte rovnici

$$y' = x; \qquad y(x_0) = 2, \qquad\qquad x_0 = 0$$

- pomocí
  - symbolické matematiky,
  - vybrané numerické metody (jednokrokové),
  - vybrané vestavěné funkce softwaru (např. integrate).
- Porovnejte jednotlivá řešení z hlediska implementace, rychlosti a přesnosti řešení.

Řešení Verhulstova populačního modelu

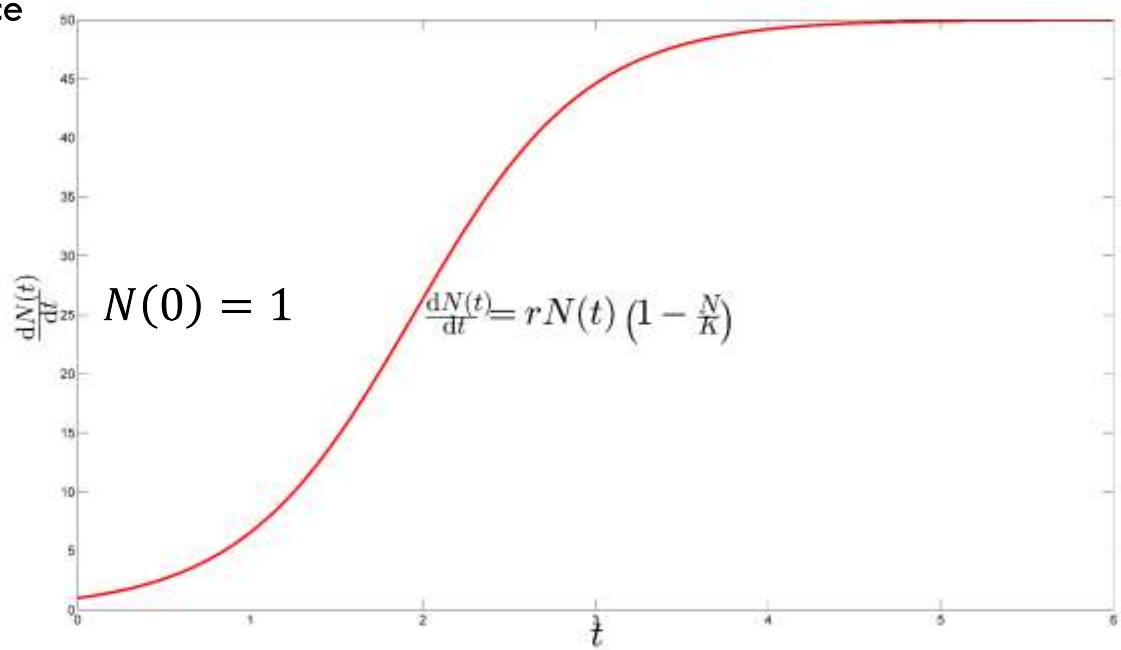
- Verhulstův model růstu populace (1838)
- Vyřešte následující diferenciální rovnici pomocí symbolické a numerické matematiky

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

- kde $r = 2$ a $K = 50$ jsou konstanty
  - r – specifická míra růstu populace
  - K – kapacita prostředí (horní hranice populace)

- Uvažujte počáteční podmínku

$N(0) = 1$



Řešení soustavy rovnic – nucené kmitání

- Vyřešte následující soustavu diferenciálních rovnic pomocí symbolické a numerické matematiky

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\delta\frac{dx}{dt} - \omega^2 x + f_0 \sin(\Omega t)$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

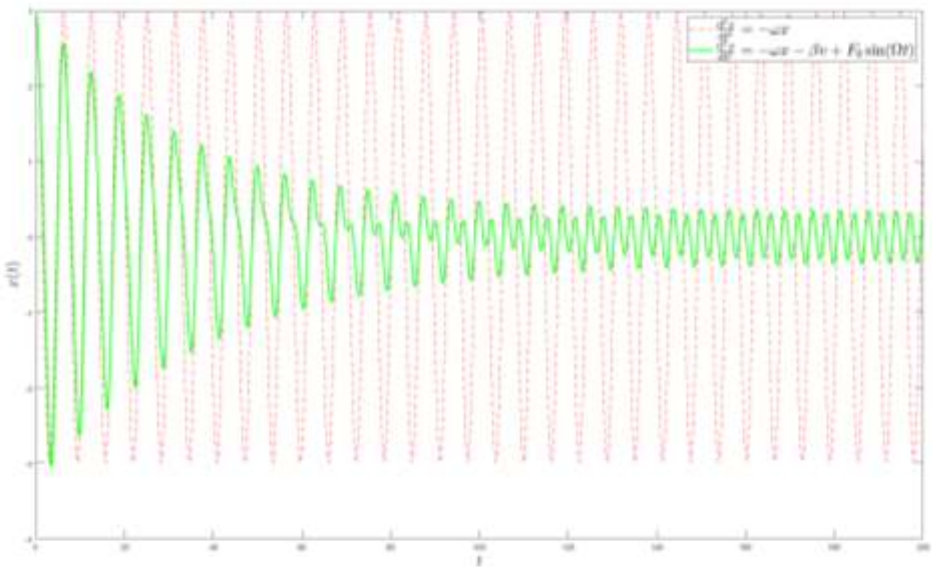
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0 \sin(\Omega t)$$

  - kde $\omega = 1,\ 2\delta = 0.05,\ \ f_0 = 2,\ \ \ \Omega = 0.63$

- Uvažujte počáteční podmínky
  - $x = 3$
  - $v = 0$

- Postupně zkuste měnit parametry ω, β, F_0 a Ω a porovnejte jejich vliv na řešení

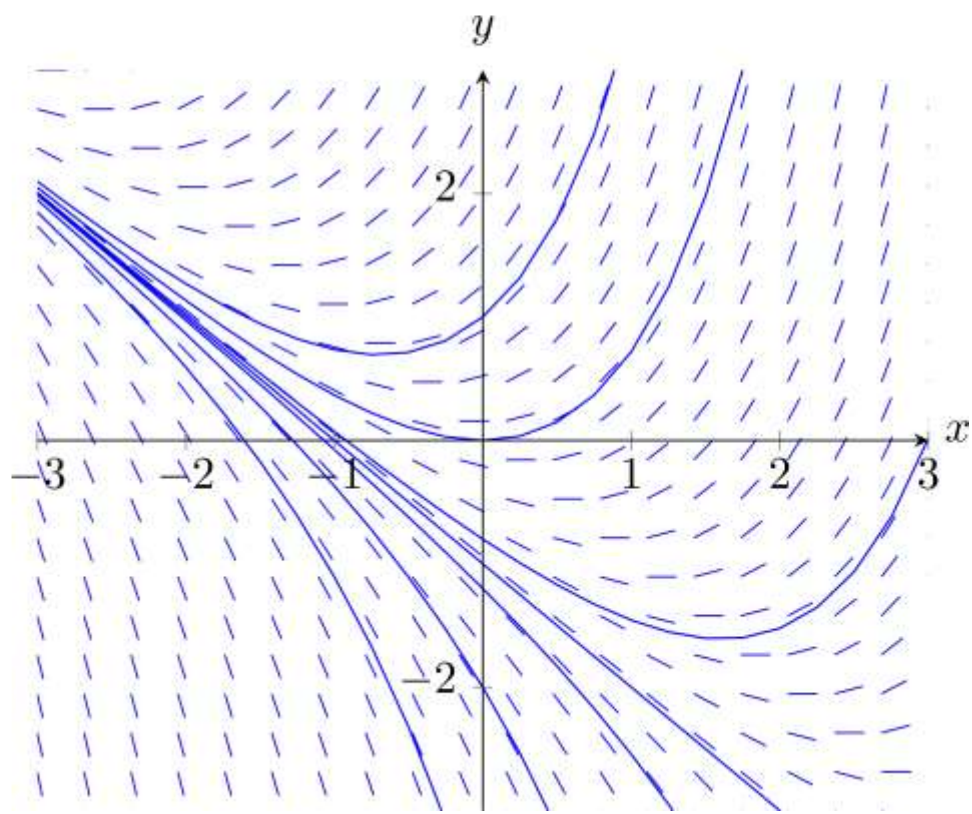


Vizualizace řešení – vektorové pole

- Zobrazte jednotlivá řešení následujících rovnic pomocí vektorového pole.

$$y' = x + y$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$y' = \frac{y^2}{x}$$

- Zvolte řešení (x, y) v rozsahu $(-5{,}5)$
- Použijte numerickou nebo symbolickou matematiku
- Vyznačte řešení, které vyhovuje vámi vybraným počátečním podmínkám



Stiff rovnice a jejich soustavy

- Rovnice se silným tlumením
- 1952 - Klasické numerické metody selhávají při popisu určitých chemických reakcí.
  - Rychle reagující komponenta dosáhla rovnováhy daleko dříve než zbytek systému, který se mění velice pomalu.
- 1963 - Důvodem selhání řešení je špatná stabilita klasických metod pro tyto typy úloh.
- Neexistuje žádná ucelená definice stiff systému.
  - Obecně jde o systém, kde se řešení mění velice pomalu, ale v okolí, kde nás řešení zajímá dochází k velice rychlému ustavení rovnováhy.
- Detekce „tuhosti“ systému pomocí vlastních čísel Jacobiho matice

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Definice tuhosti soustavy
- Soustava obyčejných diferenciálních rovnic je tuhá, jestliže všechna vlastní čísla λ_j matice $\boldsymbol{J}$ mají zápornou reálnou část a koeficient tuhosti S je velký
  - matice $\boldsymbol{J}$ je Jacobiho matice soustavy ODR
- Seřadíme vlastní čísla tak, aby platilo

$$|Re(\lambda_1)| \leq |Re(\lambda_2)| \leq \ \dots \ \leq |Re(\lambda_n)|$$

  - dostaneme $\lambda_{min} = \lambda_1$ a $\lambda_{max} = \lambda_n$

- Koeficient tuhosti je poté dán vztahem

$$S = \frac{|Re(\lambda_{max})|}{|Re(\lambda_{min})|}$$

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Jacobiho matice a jakobián soustavy ODR
- Mějme soustavu n ODR definovaných jako

$$y_j' = f_j(y_1, y_2, .., y_n, x_1, x_2, ..., x_n); \quad j = 1,2, ..., n; \quad y = y(x)$$

- Jacobiho matice soustavy rovnic je definována jako matice parciálních derivací

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Determinant této matice nazýváme jakobiánem.

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Mějme soustavu ODR prvního řádu

$$\begin{aligned} 3y' &= -10y + z \\ z' &= y - 10z \end{aligned}$$

- Jacobiho matice $\boldsymbol{J}$ této soustavy vypadá následovně

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(-10y + z) & \frac{\partial}{\partial z}(-10y + z) \\ \frac{\partial}{\partial y}(y - 10z) & \frac{\partial}{\partial z}(y - 10z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

- Vyřešením rovnice $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ dostaneme vlastní čísla Jacobiho matice $\boldsymbol{J}$

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Vlastní čísla matice J najdeme pomocí výpočtu determinantu rovnice

$$\det(\boldsymbol{J} - \lambda \boldsymbol{E}) = \det\left[\begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \det\left[\begin{pmatrix} -10 - \lambda & 1 \\ 1 & -10 - \lambda \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \lambda^2 + 20\lambda + 99$$

- Vyřešením této kvadratické rovnice dostaneme $\lambda_1 = \lambda_{min} = -9$, $\lambda_2 = \lambda_{max} = -11.$
- Koeficient tuhosti nabývá hodnoty

$$S = \frac{|Re(\lambda_{max})|}{|Re(\lambda_{min})|} = \frac{11}{9} \approx 1.2$$

- Ačkoli nabývají obě vlastní čísla záporných hodnot, je koeficient tuhosti malý a tato soustava není klasifikována jako tuhá

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Soustavu

$$\begin{aligned} 3y' &= -10y + z \\ z' &= y - 10z \end{aligned}$$

- modifikuje následovně

$$\begin{aligned} 3y' &= -100y - 0.01z \\ z' &= y - 0.0001z \end{aligned}$$

- a spočítáme koeficient tuhosti stejným způsobem

$$S = \frac{99.999}{0.0011} = \approx 9 \cdot 10^4$$

- Velká tuhost
  - potřeba zvolit adekvátní metodu
  - nebo adekvátně malý integrační krok
    - v některých případech dostačuje

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Stiff soustavy vyžadují modifikace stávajících numerických metod
  - většinou do tvaru implicitních schémat
- Používané metody
  - **Implicitní** a semiimplicitní **Eulerova metoda**
  - Rosenbrockovy metody
    - semiimplicitní tvar metod Rungeho-Kutty
  - Bulirsch-Stoerovy metody
  - GBS metody,
  - vícekrokové Gearovy metody

Implicitní Eulerova metoda

- Mějme funkci $f(x, y)$, kde $y = y(x)$, definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$, který ekvidistantně rozdělíme na subintervaly s délkou h. Poté bude vztah pro explicitní a implicitní Eulerovu metodu vypadat následovně.
- Explicitní a implicitní Eulerova metoda
- Taylorův rozvoj pro funkci $f\big(x + h, y(x + h)\big)$

$$f\big(x + h, y(x + h)\big) = f\big(x, y(x)\big) + f'\big(x, y(x)\big)h + .. + O(h^2)$$

- Explicitní vyjádření Eulerovy metody:

$$f'\big(x, y(x)\big) = \frac{f\big(x + h, y(x + h)\big) - f\big(x, y(x)\big)}{h} + O(h^2)$$

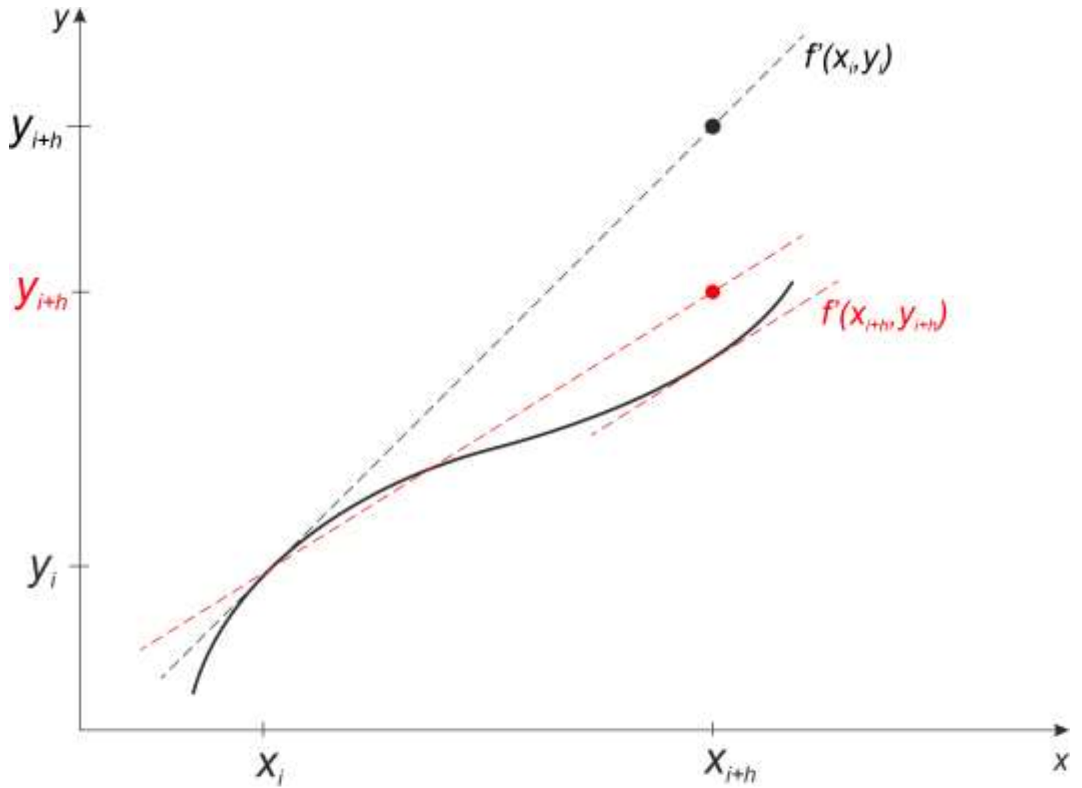
- Implicitní vyjádření Eulerovy metody:

$$f'\big(x + h, y(x + h)\big) = \frac{f\big(x + h, y(x + h)\big) - f\big(x, y(x)\big)}{h} + O(h^2)$$

Implicitní Eulerova metoda

$$f'\big(x, y(x)\big) = \frac{f\big(x+h, y(x+h)\big) - f\big(x, y(x)\big)}{h} + O(h^2)$$

$$f'\big(x+h, y(x+h)\big) = \frac{f\big(x+h, y(x+h)\big) - f\big(x, y(x)\big)}{h} + O(h^2)$$



Stiff rovnice a jejich soustavy – cvičení

- U následující rovnice nejdříve odvoďte a poté aplikujte implicitní i explicitní Eulerovu metodu. Postupně změňte krok h a sledujte přesnost a stabilitu obou metod, např. pomocí globální chyby. Počáteční podmínka je $y(0) = y_0 = 0$.

$$y' = -100y + 100$$

- U následující soustavy rovnic nejdříve vypočítejte její koeficient tuhosti a poté pomocí implicitní a explicitní Eulerovy metody soustavu vyřešte. Počáteční podmínky jsou $y(0) = y_0 = 0$ a $z(0) = z_0 = 0$.

$$\begin{aligned} y' &= \quad 998y + 1998z \\ z' &= -999y - 1999z \end{aligned}$$

APLIKACE ODE 1. ŘÁDU

Aplikace ODE 1. řádu – přehled

- Rovnice 1. řádu nacházejí uplatnění v celé škále aplikací od technických, přes biologické, až po ekonomické a sociální. Cílem těchto aplikací je vytvořit model, který bude věrně popisovat studovaný děj a predikovat jeho vývoj v čase za různých podmínek. Cílem je získat výsledky rychleji a s menším úsilím, než které představuje reálný experiment, který často nelze ani smysluplně provést.

  Níže jsou uvedeny některé oblasti, kde se lze s aplikacemi ODE setkat

  - Fyzikální (Ochlazování tělesa)
  - Chemické (Chemická kinetika)
  - Biologické (Šíření nemocí)
  - Ekonomické (Spotřeba domácností)

Fyzikální model – ochlazování tělesa

- Těleso o teplotě T_t je umístěno do prostředí s teplotou $T_p < T_t$
  - dochází k výměně tepla mezi tělesem a místností
  - do doby, až $T_t = T_p = T_{eq}$, kde T_{eq} je rovnovážná teplota soustavy
- Newtonovův zákon pro ochlazování tělesa:

$$\frac{dT_t}{dt} = -B\left(T_t - T_p\right)$$

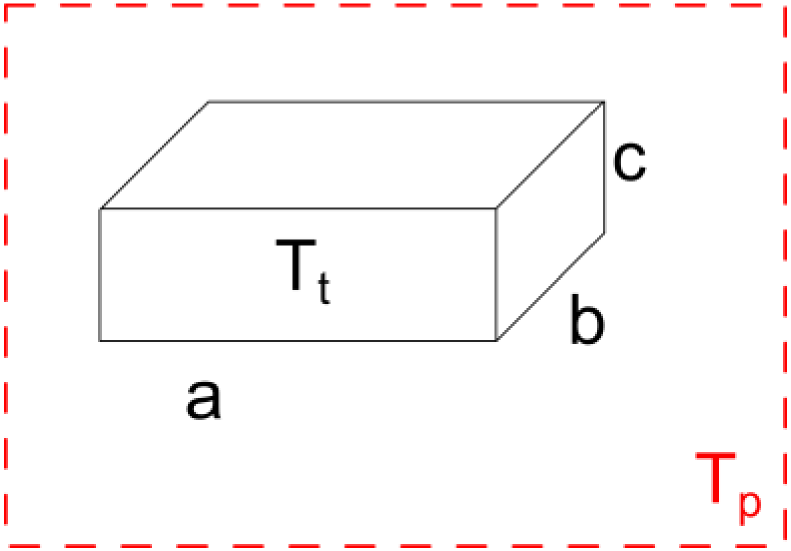
$$\frac{d}{dt}\left(T_t - T_p\right) = -B\left(T_t^0 - T_p\right)$$

$$T_t(t) = T_p + \left(T_t^0 - T_p\right)e^{-kt}$$

- T_t^0 je počáteční teplota tělesa před chladnutím
- $B = \frac{h\,A}{C}$ obsahuje
  - h - koeficient přenosu tepla
  - A - plocha tělesa
  - C - celková tepelná kapacita
- Cílem je zjistit, jaká bude teplota tělesa po čase t

Fyzikální model – ochlazování tělesa

- Za jak dlouho se ochladí kovové těleso z počáteční teploty $T_t^0 = 120°$C na konečnou teplotu $T_f = 30°$C, jestliže je těleso obklopeno vzduchem s $T_p = 20°$C?
- Ohřev okolního vzduchu neuvažujeme
- Rozměry tělesa:
  - $a = 0.1\ m,\ b = 0.05\ m,\ c = 0.01\ m.$
  - $A = 0.013\ m^2.$
  - $V = 5 \cdot 10^{-5}\ m^3.$
- Koeficient přestupu tepla $h = 0.85\ W/(m^2K)$
- Tepelná kapacita $C = 0.175\ J/K$
- Určíme konstantu $B = \frac{hA}{C} = 0.06\ s^1$



Chemický model – chemická kinetika

- Chemická kinetika popisuje rychlost chemické reakce komponent a popisuje závislost rychlosti reakce na parametrech a podmínkách, při kterých probíhá.
- Možné podmínky
  - n počet molekul, které se reakce účastní
  - V objem, ve kterém se reakce odehrává
  - t čas, po který reakce probíhá
- Rychlost reakce v se dá vyjádřit jako změna počtu molů látky Δn v objemu V za čas t

$$v = \frac{|\Delta n|}{V \Delta t} \qquad \rightarrow \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta n|}{V \Delta t} = \left| \frac{dn}{V\, dt} \right|$$

- Pokud je $V = konst$ lze rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{dn}{V\, dt} = \frac{dc}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dn}{V} = dc$$

- kde c je koncentrace látky v čase t

Chemický model – monomolekulární reakce

- V případě, že se reakce účastní pouze jeden typ molekuly (typ A), lze rychlost chemické reakce a vývoj koncentrace látky c_A popsat následujícím způsobem

$$v = -\frac{dc_A}{dt} = k\, c_A$$

$$-\frac{dc_A}{dt} = k\, c_A$$

$$-\frac{dc_A}{c_A} = k\, dt$$

$$-\ln c_A + C = kt \qquad C = \ln c_{A0}$$

$$\ln\frac{c_{A0}}{c_A} = kt$$

$$c_A = c_{A0}\, e^{-kt}$$

- c_A koncentrace látky
- k konstanta určující míru reakce
- c_{A0} výchozí koncentrace před započetím reakce

Chemický model – bimolekulární reakce

- V případě, že se reakce účastní dva typy molekuly (typ A), lze rychlost chemické reakce a vývoj koncentrace látky c_A popsat následujícím způsobem

$$v = -\frac{dc_A}{dt} = k\,c_A^2$$

$$-\frac{dc_A}{c_A^2} = k\,dt$$

$$-\int_{c_{A0}}^{c_A} \frac{dc_A}{c_A^2} = \int_0^t k\,dt$$

$$\left[\frac{1}{c_A}\right]_{c_{A0}}^{c_A} = kt$$

$$c_A = \frac{c_{A0}}{1 + c_{A0}\,kt}$$

- c_A koncentrace látky
- k konstanta určující míru reakce
- c_{A0} výchozí koncentrace před započetím reakce

Biologický model – šíření nemoci

- Modely vývoje nemoci v závislosti na vlivu různých parametrů
  - např. HIV, AIDS, SARS, Ebola aj.
- Nejčastěji uvažované parametry
  - infekčnost nemoci
  - míra kontaktů
  - dynamika populace (narození, úmrtnost)
  - vliv vakcinace
  - vliv karantény
  - vliv migrace
  - ...
- Komplexnější modely obsahují sadu více než deseti rovnic
  - každá s jedním nebo více parametry

Biologický model – šíření nemoci s konstantní infekčností

- Počet nemocných jedinců D roste s konstantní mírou infekce a,
- každá infikovaná osoba má konstantní pravděpodobnost b, že se vyléčí.
- Změnu počtu nakažených osob lze popsat rovnicí

$$\frac{dD}{dt} = a - bD$$

- která má analytické řešení

$$D(t) = \frac{1}{b}\left(a - e^{-b(C+t)}\right)$$

- kde $C = -\ln\left(a - bD(0)\right)/b$ je integrační konstanta. Model má dále rovnovážné řešení ve tvaru

$$\frac{dD}{dt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad D_0 = \frac{a}{b}$$

Ekonomický model – spotřeba domácností

- Model má za cíl popsat vývoj spotřeby domácností v závislosti na míře růstu k a času, po který k růstu dochází. Růst je ovlivněn zejména výdaji na
- dlouhodobou spotřebu (spotřebiče, nábytek atd.),
- krátkodobou spotřebu (potraviny, oblečení atd.),
- služby (nájem atd.)
- Mějme celkovou spotřebu domácností C, která roste v konstantní míře 3 %, tj. $k = 0.03$, poté následující rovnice popisuje vývoj spotřeby v čase C'.

$$\frac{C'}{C} = k$$

$$\frac{dC}{C} = k\ dt$$

$$\ln|C| = kt$$

$$C = c\ e^{-kt}$$

- kde konstanta c udává míru růstu

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů

- Obyčejná diferenciální rovnice udává vztah mezi funkcí a jejími derivacemi ve tvaru:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots.) = 0$$

- Řešením je každá funkce $g(x)$ vyhovující výše uvedené rovnici
- Volbou počátečních podmínek $[x_0, f_0 = f(x_0)]$ vybíráme z množiny funkcí $g(x)$ jednu konkrétní
- Pro nalezené řešení u rovnic vyšších řádů se využívají například přístupy založené na
  - nalezení substituce derivace (metoda parametru)
  - snížení řádu diferenciální rovnice
  - nalezení charakteristické rovnice
  - variaci konstant

Obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů

- Lineární rovnice řádu n.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x,y)$$

  - Wronského determinant

- Nehomogenní Lineární rovnice.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0$$

  - Variace konstant

- Homogenní Lineární rovnice s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(x,y)$$

  - Charakteristická rovnice

Speciální rovnice

- Besselova rovnice

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0)$$

  - kde $P_0(x), P_1(x) a P_2(x)$ jsou spojité funkce. Řešení pomocí lineární transformace.

- Gaussova rovnice

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta\gamma = 0$$

  - řešení je ve tvaru hyperbolické řady.

- Legendreova rovnice

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1) = 0$$

  - kde n je celé nezáporné číslo. Řešení je ve tvaru Legendreova polynomu stupně n.

Metody řešení ODE 2. řádu – linearizace

- Mějme Obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru

$$y'' = f(x)$$

  - kde $y = y(x)$
  - u $f(x)$ předpokládáme spojitost
    - včetně derivací funkce až do řádu 2

- Můžeme obě strany rovnice dvakrát integrovat:

$$\iint y'' dy\, dy = \iint f(x) dx\, dx$$

  - dostáváme řešení ve tvaru

$$y = \iint f(x) dx\, dx$$

  - provedeme substituci

$$z(x) = \int f(x) dx$$

Metody řešení ODE 2. řádu – linearizace

- Pomocí substituce získáme sadu dvou rovnic, která obsahuje derivace funkcí $y(x)$ a $z(x)$ o řád nižší, než v původní rovnici, tedy provedeme linearizaci

$$y = \int z(x)dx \quad \rightarrow \quad y' = z(x)$$
$$z = \int f(x)dx \quad \rightarrow \quad z' = f(x)$$

- Výsledkem jsou dvě rovnice prvního řádu, které lze již řešit "známými" metodami.

- Linearizace
  - cílem je snížit řád derivace tím, že provedeme substituci
  - aby bylo možno řešit vzniklou soustavu rovnic pomocí známých metod
  - nevýhodou je zvyšování počtu rovnic

Metody řešení ODE 2. řádu – linearizace

- Proveďte linearizaci u následující rovnice a zjistěte analytické řešení $y(x)$.

$$y'' = \ln x$$

$$y = \iint \ln x \, dx \, dx$$

- pomocí následující substituce $z(x) = \int \ln x \, dx$ získáme sadu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, kterou již umíme vyřešit

$$z(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C_1$$

$$y = \int (x \ln x - x) \, dx$$

$$y = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C_2$$

- Počáteční podmínky $y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0$
- x_0 můžeme volit tak, abychom obě integrační konstanty vynulovali

Metody řešení ODE 2. řádu – cvičení

- Porovnejte přesná řešení předchozího příkladu s numerickým odhadem, například pomocí explicitní a implicitní Eulerovy metody.
- Soustava rovnic má tvar

$$
\begin{aligned}
y' &= z(x) \\
z' &= \ln x
\end{aligned}
$$

- a přesná řešení mají pro jednotlivé rovnice tvar

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) \\
z(x) &= x \ln x - x + c
\end{aligned}
$$