INTERPOLACE A APROXIMACE FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

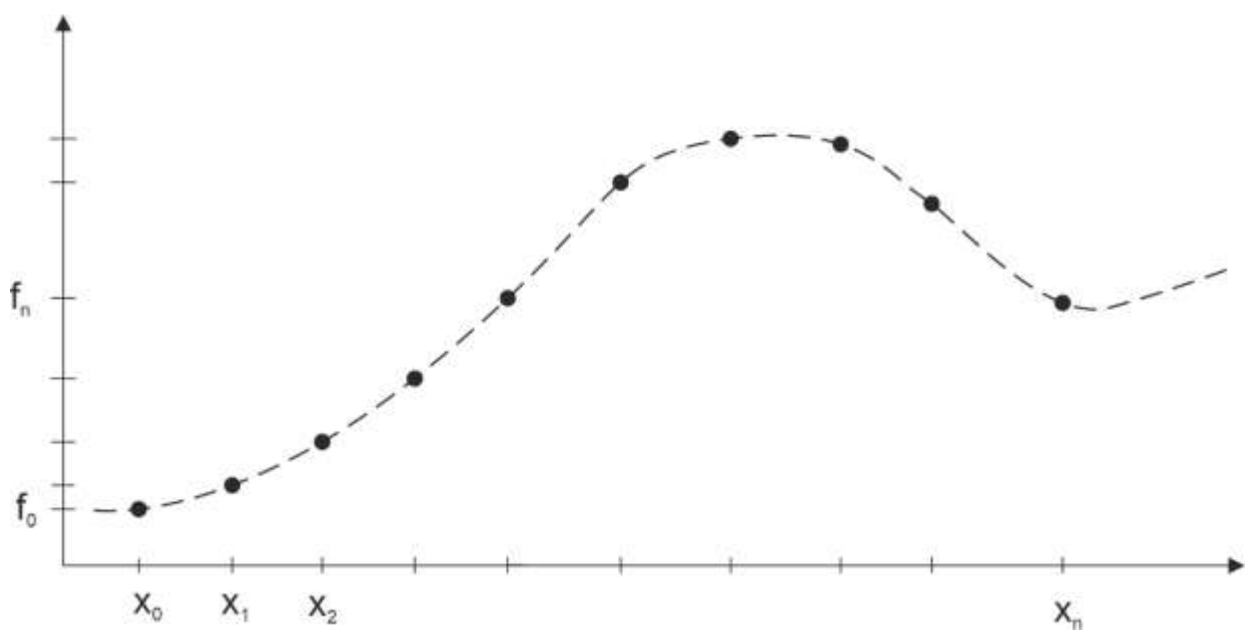
Interpolace – historie a cíle

- Interpolace a aproximace
  - jedna ze základních partií numerické matematiky
  - vznikla jako pomocný nástroj pro získání netabelovaných hodnot funkcí při výpočtech
  - je východiskem pro mnoho dalších partií
    - integrace, derivace aj.
  - s rozvíjející se technikou nutnost interpolovat klesá
    - funkce jsou zadány přímo
  - 17. století - první použití interpolace při tabelování logaritmu
    - pomocí polynomu

- Cíl interpolace a aproximace
  - nahradit stávající předpis funkce funkcí jednodušší
    - složitý vzorec, tabulkové hodnoty z měření, ..
  - tak, aby bylo možné s funkcí dále pracovat
    - např. ve smyslu její analýzy pomocí derivace, integrace
    - či funkci efektivně zobrazit, např. pomocí polygonů.

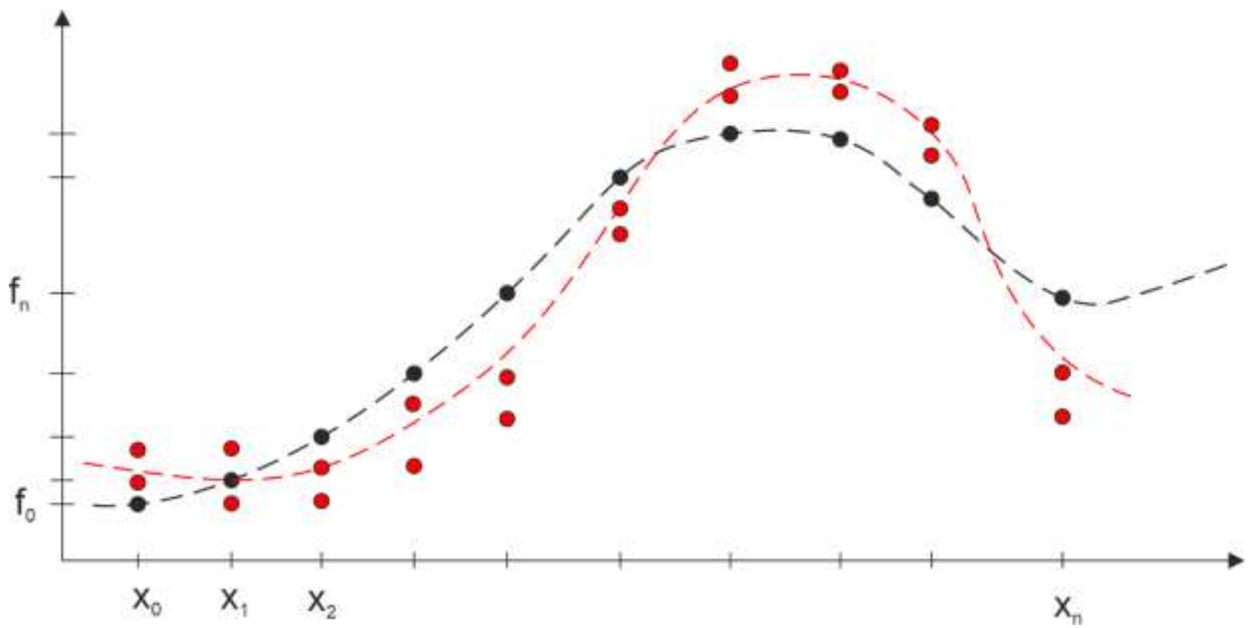
Interpolace

- Mějme $n+1$ navzájem různých bodů $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, které budeme nazývat uzlové body, a funkční hodnoty v těchto uzlových bodech, $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$.
- Potom úlohou interpolace je nalézt funkci $P_n(x)$ takovou, aby platilo, že $P(x_i) = f_i$
  - pro $i = 0,1,\dots,n$
  - nejčastěji polynom
- Kromě rovnosti funkčních hodnot požadujeme někdy také rovnost prvních derivací
  - tedy $P'(x_i) = f_i'$



Aproximace

- Mějme sadu měření, kdy každému uzlovému bodu $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ může odpovídat sada funkčních hodnot $\{f_{01}, f_{02}, \ldots, f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{n1}, f_{n2}, \ldots\}$.
- Potom úlohou aproximace je nalézt vhodnou funkci, která prochází k zadaným bodům v určitém smyslu nejblíže
  - vhodnost uvažované funkce lze posuzovat například pomocí minimalizace kvadratické odchylky nebo minimalizace největší chyby.



Interpolace – přehled metod

Mezi používané metody interpolace patří

- **Lineární interpolace**
- **Interpolace algebraickými polynomy**
  - Vandermondova matice
  - Lagrangeova interpolace
  - Newtonova interpolace
  - Hermitova interpolace
- **Interpolace trigonometrickými polynomy**
- Splajny
  - Kubické splajny
- Beziérovy křivky
- Extrapolace

Interpolační vzorec

- Definice interpolace
  - Úlohou interpolace je nalézt funkci $P_n(x)$ takovou, aby platilo, že $P(x_i) = f_i$
    - pro $i = 0,1,\ldots,n$
    - nejčastěji polynom
- Vznik nepřesností
  - místo hledané funkce $f(x)$ využíváme pro odhad funkčních hodnot mimo uzlové hodnoty aproximaci $P_n(x)$
  - musíme odhadnout nepřesnost $E_n(x)$,
- Interpolační vzorec
  - rovnice $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$
  - obecný interpolační vzorec
    - pokud nejsou uzlové body rozděleny ekvidistantně

Interpolační vzorec

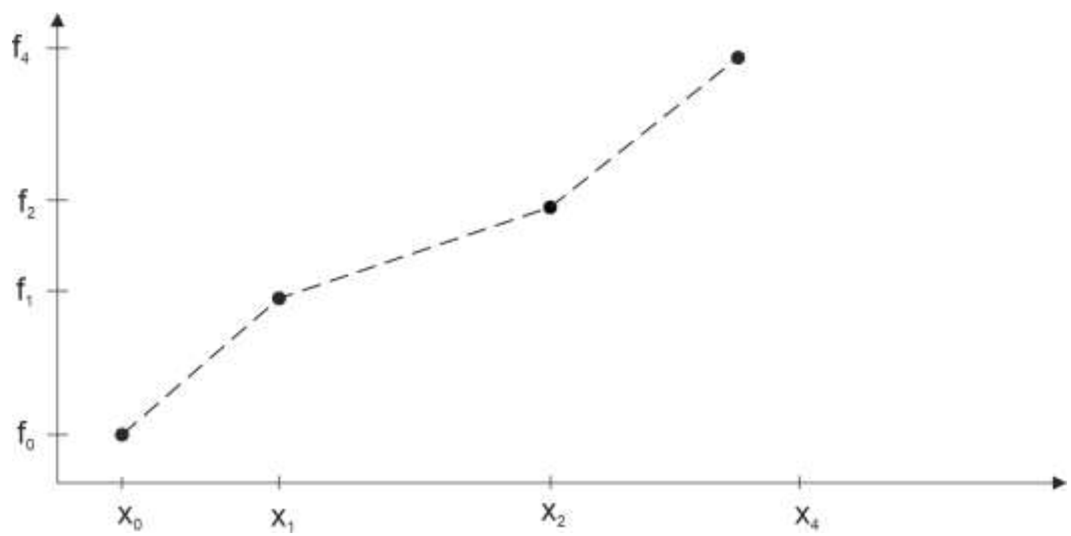
- Weierstrassova věta
  - Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$.
  - Pro tuto funkci existuje na daném intervalu posloupnost polynomiálních funkcí $P_n(x)$ nejvýše stupně n, která aproximuje funkci $f(x)$ tak, že platí
  - $\lim_{n \to \infty} \left(\max_{a \le x \le b} |f(x) - P_n(x)| \right) = 0$

- Důsledky Weierstrassovy věty
  - lze očekávat, že přidáním uzlových bodů dojde ke zpřesnění interpolace
    - a rekonstrukce funkce bude přesnější
  - Runge:
    - řada funkcí $P_n(x)$ může pro rostoucí n divergovat
    - např. formou oscilací mimo uzlové body

Lineární interpolace

- Lineární interpolace (po částech lineární interpolace)
  - nejjednodušší forma interpolace

- Mějme sadu uzlových bodů $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a k nim příslušné hodnoty funkce $f(x)$, $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$
- Poté mezi sousedícími uzlovými body x_i a x_{i+1} aproximujeme funkci $f(x)$ úsečkou $g(x)$ tak, že platí
- $g(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$



Interpolace pomocí algebraických polynomů

- Cíl
  - zkonstruovat interpolační polynom $P_n(x)$
  - který bude vyhovovat definicím
    - uvedeným na předchozích snímcích

- Vandermondova matice
  - Interpolační polynom hledáme ve tvaru
  - $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$
  - a požadujeme, aby procházel $n + 1$ uzlovými body

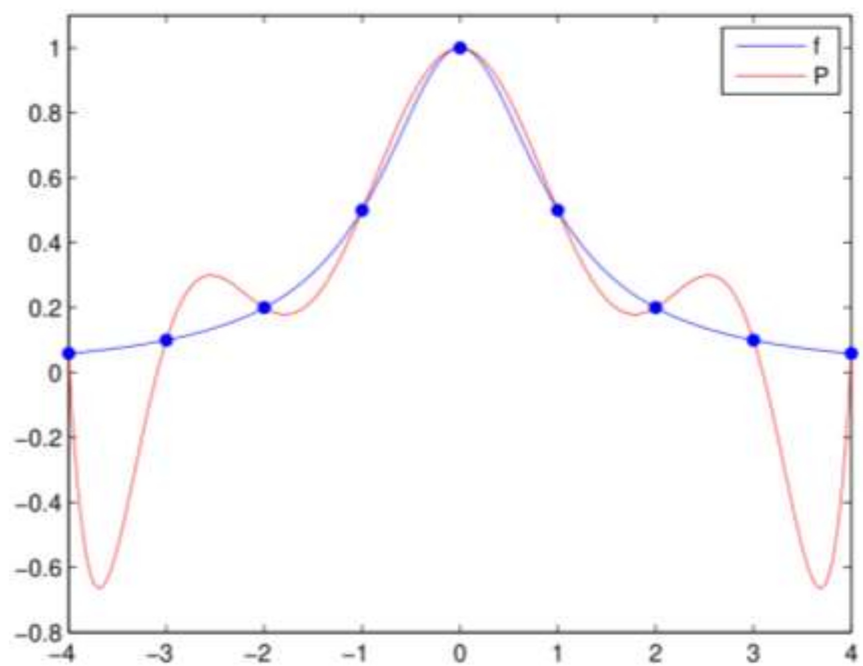
- Úloha se tedy redukuje na hledání řešení soustavy rovnic ve tvaru

$$
\begin{array}{llllll}
a_0 + & a_1 x_0 + & a_2 x_0^2 + & \ldots + & a_n x_0^n & = f(x_0) \\
a_0 + & a_1 x_1 + & a_2 x_1^2 + & \ldots + & a_n x_1^n & = f(x_1) \\
\ldots & & & & & \\
a_0 + & a_1 x_n + & a_2 x_n^2 + & \ldots + & a_n x_n^n & = f(x_n)
\end{array}
$$

Interpolace pomocí algebraických polynomů

- Přepsáním dostaneme rovnici v maticovém tvaru, kde
  - $$\begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & . & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & . & x_1^n \\ . & . & . & . \\ x_n^0 & x_n^1 & . & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ . \\ f(x_\mathrm{n}) \end{pmatrix}$$
  - $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$
  - $\boldsymbol{X}_{ij}$ …… Vandermondova matice

- Nevýhoda
  - časté zákmity polynomu mimo uzlové body
  - způsobené zaokrouhlováním koeficientů a_i



Lagrengeova metoda

- Lagrangeova metoda
  - již r. 1794
  - není nutné počítat koeficienty a_{ij} Vandermondovy matice
    - není tedy zatížena zaokrouhlovací chybou tohoto typu
  - konstruujeme interpolační polynom na základě tzv. poměrné diference

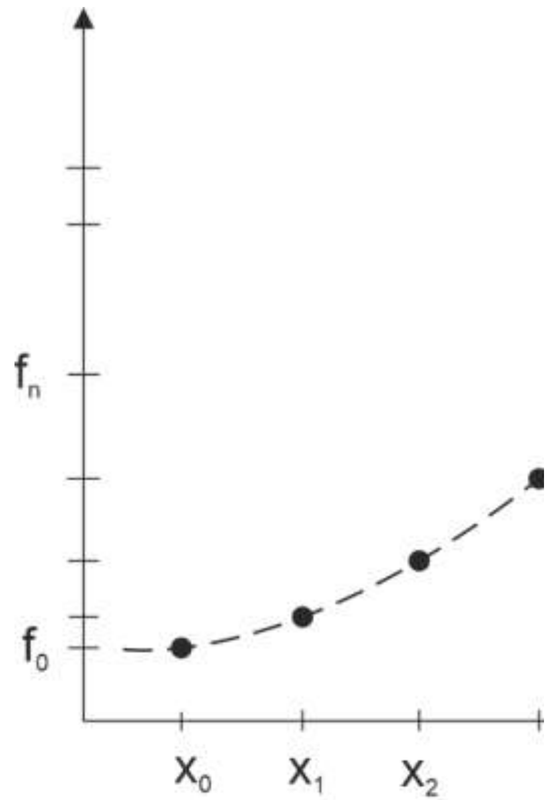
Poměrná diference

- Mějme funkci $f(x)$
  - definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$,
  - $x_i \in \langle a, b \rangle$

- Poměrná diference $f[x_i]$
- 1. řádu

obecně x_i, x_{i+1}

  - $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$
- 2. řádu
  - $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
    $= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$
- n. řádu …
  - $f[x_0, \dots x_n] = \frac{f[x_1,\dots x_n]-f[x_0,\dots x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
- 0. řádu
  - vztah $f[x_0] = f(x)$ (funkční hodnota)



Lagrange – 2 body

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

- Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a,b\rangle$ ve 2 bodech, kde $x_i = \{x_0, x_1\}$ a $f_i = \{f_0, f_1\}$ a platí, že $f(x_i) = f_i$
- Potom odvodíme Lagrangeův interpolační vzorec pomocí poměrné diference 2. řádu

$$f[x,x_0,x_1] = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)} + \frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_0)}$$

$$f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1) = f(x) + \frac{f(x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + \frac{f(x_1)(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

- Z rovnice vyjádříme $f(x)$ a dostaneme

$$f(x) = -f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} - f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} + f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

Lagrangeův interpolační vzorec

Lagrange – 4 body

- Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b, \rangle$ ve 4 bodech, kde $x_i = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ a $f_i = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ a platí, že $f(x_i) = f_i$
- Potom odvodíme Lagrangeův interpolační vzorec pomocí poměrné diference 4. řádu

$$
\begin{aligned}
f[x, x_0, x_1, x_2, x_3] = \quad & \frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} + \\
+ \quad & \frac{f(x_0)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \\
+ \quad & \frac{f(x_1)}{(x_1 - x)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \\
+ \quad & \frac{f(x_2)}{(x_2 - x)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \\
+ \quad & \frac{f(x_3)}{(x_3 - x)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}
\end{aligned}
$$

Lagrange – 4 body

- Z rovnice vyjádříme $f(x)$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
f(x) = -\quad & f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x)(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} - \\
- \quad & f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x)(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \\
- \quad & f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_2-x)(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} - \\
- \quad & f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_3-x)(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} - \\
+ \quad & f[x,x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)
\end{aligned}
$$

- Rovnice se nazývá ***Lagrangeův interpolační vzorec***
- Poslední člen v rovnici se nazývá ***doplňující člen,*** neboli zbytek a označuje se $E_n(x)$

Lagrangeova metoda

- Jednotlivé členy
  - $f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x)(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$
- Označíme
  - čitatele: $\ell_i(x) = (x-x_0)..(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_n)$
  - jmenovatele: $\ell_i(x_i) = (x_i-x_0)..(x_i-x_{i-1})(x_i-x_i)(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)$,
    - přičemž stejné členy vynecháváme
  - zbytek: $E_n = f[x, x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)..(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_n)$
- Dostaneme obecný Lagrangeův interpolační vzorec ve tvaru

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{\ell_i(x)}{\ell_i(x_i)} + E_n$$

- Vlastnosti
  - v případě přidání dalšího uzlového bodu se musí celý polynom přepočítat znovu
  - je vhodný pro teoretické zkoumání více než pro praktické účely

Lagrangeova metoda

- Lagrangeův interpolační polynom
  - jiné značení

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}$$

$i = 0,1, \dots, n$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$$F(x) = L(x)$$

Lagrangeova metoda – cvičení

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\ell_i(x)}{\ell_i(x_i)} + E_n$$

- Příklad 1
  - Najděte Lagrangeův interpolační polynom zadaný body $x_i = \{-1, 0, 2, 3\}$ a funkčními hodnotami $f_i = \{5, 10, 2, 1\}$.
  - Vykreslete polynom spolu s uzlovými body.
  - Řešení: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10$
- Příklad 2
  - Najděte Lagrangeův interpolační polynom zadaný body $x_i = \{-1, 0, 1, 3\}$ a funkčními hodnotami $f_i = \{2, 1, 2, 0\}$.
  - Vykreslete polynom spolu s uzlovými body.
  - Řešení: $f(x) = \frac{1}{15}(-5x^3 + 12x^2 + 5x + 12)$

Lagrange – body [−1, 9], [1, 1] a [2, 6]

- Najděte $L(x)$ procházející body [−1, 9], [1, 1] a [2, 6]
- Funkční hodnoty zapíšeme do tabulky

i	0	1	2
x_i	−1	1	2
y_i	9	1	6

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_i - x_n)}$$

$i = 0,1, \dots, n$

- Prokládáme třemi body, hledáme tedy polynom stupně 2

$$L(x) = 9L_0(x) + L_1(x) + 6L_2(x)$$

- Určíme pomocné polynomy $L_i(x)$

Lagrange – body [−1, 9], [1, 1] a [2, 6]

i	0	1	2
x_i	−1	1	2
y_i	9	1	6

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)}$$

$i = 0,1,\dots,n$

- Nejprve hledáme pomocný polynom příslušný $x_0 = -1$
- V čitateli $L_0(x)$ jsou kořenové činitele příslušné všem x_i (kromě x_0)
- Do jmenovatele píšeme totéž, jen za x dosazujeme číslo $x_0 = -1$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)$$

- Totéž pro $L_1(x)$ a $L_2(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$$

Lagrange – body [−1, 9], [1, 1] a [2, 6]

- Vyšlo:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$$

- Dosazení do interpolačního vzorce

$$L(x) = 9L_0(x) + L_1(x) + 6L_2(x)$$

$$L(x) = 9\frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2) - \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + 6\frac{1}{3}(x^2 - 1)$$

$$L(x) = x^2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2\right) + x\left(-\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right) + 3 + 1 - 2$$

$$L(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

- Kontrola dosazením hodnot $-1, 1, 2$

Lagrange – body [1, 3], [2, −2], [−1, 0], [0, 1]

- Najděte $L(x)$ procházející body [1, 3], [2, −2], [−1, 0], [0, 1]
- Funkční hodnoty zapíšeme do tabulky

i	0	1	2	3
x_i	1	2	−1	0
y_i	3	−2	0	1

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_i - x_n)}$$

$i = 0,1, \dots, n$

- Prokládáme čtyřmi body, hledáme tedy polynom stupně 3

$$L(x) = 3L_0(x) - 2L_1(x) + 0L_2(x) + 1L_3(x)$$

- Určíme pomocné polynomy $L_i(x)$

Lagrange – body [1, 3], [2, −2], [−1, 0], [0, 1]

i	0	1	2	3
x_i	1	2	−1	0
y_i	3	−2	0	1

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)(x-x_3)}$$

$i = 0,1,\dots,n$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x+1)(x+0)}{(1-2)(1+1)(1+0)} = -\frac{1}{2}(x^3 - x^2 - 2x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x+1)x}{(2-1)(2+1)1} = \frac{1}{6}(x^3 - x)$$

$L_2(x)$ nepotřebujeme

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{(0-1)(0-2)(0+1)} = \frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

- Dosadíme do

$$L(x) = 3L_0(x) - 2L_1(x) + 0L_2(x) + 1L_3(x)$$

$$L(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$$

Newtonova metoda

- Pro flexibilní přidání dalšího interpolačního bodu se ukazuje jako vhodný polynomu ve tvaru:
  - $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$
- pro všechny uzlové body x_i platí
  - $P_n(x_i) = f(x_i) = f_i$
    - požadavek interpolace
- dosazením dostáváme vyjádření pro jednotlivé koeficienty
  - $P(x_0) = a_0 = f_0$
  - $P(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$ $\Rightarrow$ $a_1 = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$
  - $P(x_2) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$
  - ... $\Rightarrow$ $a_2 = \ldots$
- z poměrných diferencí lze vyjádřit koeficienty $a_1, \ldots, a_n$
- polynom zapíšeme následovně:

Newtonova metoda

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \dots x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

- Vlastnosti
  - přidání dalšího členu vyžaduje již výpočet diference vyššího řádu
  - náročnost výpočtu je $O(n^2)$, kde n je počet uzlových bodů
  - náročnost výpočtu se dá zmenšit zohledněním tzv. Hornerova schématu
  - podobnou konstrukci využívá také tzv. Nevillův algoritmus

Newtonova metoda – cvičení

- Pomocí Newtontova polynomu proveďte interpolaci funkce zadané 4 body,
- kde $x_i = \{-3, 0, 1, 2\}$ a $f_i = \{-13, 2, 3, 12\}$.
- Pro realizaci budeme tedy uvažovat poměrné diference $(n+1)$. řádu

- Newtonův polynom zapsaný pomocí diferencí bude vypadat následovně:

$$
\begin{aligned}
P_4(x) = {} & f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\
+ {} & f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\
+ {} & f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)
\end{aligned}
$$

Newtonova metoda – cvičení

- Podle definice

i	0	1	2	3
x_i	−3	0	1	2
y_i	−13	2	3	12

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	…
−3	−13			
		$\frac{2-(-13)}{0-(-3)} = 5$		
0	2		$\frac{1-5}{1-(-3)} = -1$	
		$\frac{3-2}{1-0} = 1$		$\frac{4-(-1)}{2-(-3)} = 1$
1	3		$\frac{9-1}{2-(-3)} = 4$	
		$\frac{12-3}{2-1} = 9$		
2	12			

Newtonova metoda – cvičení

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
−3	−13			
		5		
0	2		-1	
		1		1
1	3		4	
		9		
2	12			

- Dosadíme

$$P_4(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

$$P_4(x) = -13 + 5\big(x - (-3)\big) + (-1)\big(x - (-3)\big)(x - 0) + 1\big(x - (-3)\big)(x - 0)(x - 1)$$

$$P_4(x) = x^3 + x^2 - x + 2$$

Newtonova metoda

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1} \qquad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \qquad f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Pomocí diferencí nižšího řádu dostáváme diference vyšších řádů
- Označíme

$$\begin{aligned} D_0^0 &= f_0 \\ D_1^0 &= f_1 \\ D_2^0 &= f_2 \\ D_3^0 &= f_3 \end{aligned}$$

$$f[x_0,x_1] = D_1^1 = \frac{D_1^0 - D_0^0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1,x_2] = D_2^1 = \frac{D_2^0 - D_1^0}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2,x_3] = D_3^1 = \frac{D_3^0 - D_2^0}{x_3 - x_2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = D_2^2 = \frac{D_2^1 - D_0^1}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = D_3^2 = \frac{D_3^1 - D_2^1}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = D_3^3 = \frac{D_3^2 - D_2^2}{x_3 - x_0}$$

Newtonova metoda

$$D_3^3 = \frac{D_3^2 - D_2^2}{x_3 - x_0}$$

$$D_3^2 = \frac{D_3^1 - D_2^1}{x_3 - x_1} \qquad D_2^2 = \frac{D_2^1 - D_0^1}{x_2 - x_0}$$

$$D_3^1 = \frac{D_3^0 - D_2^0}{x_3 - x_2} \qquad D_2^1 = \frac{D_2^0 - D_1^0}{x_2 - x_1} \qquad D_1^1 = \frac{D_1^0 - D_0^0}{x_1 - x_0}$$

- Dostáváme iterační tvar pro výpočet interpolace pomocí Newtonovy metody
  - lze zobecnit:

$$D_i^j = \frac{D_i^{j-1} - D_{i-1}^{j-1}}{x_i - x_{i-\mathrm{j}}}$$

  - a numericky řešit příklad pomocí následující tabulky

Newtonova metoda

$$D_i^j = \frac{D_i^{j-1} - D_{i-1}^{j-1}}{x_i - x_{i-\mathrm{j}}}$$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{x_i}$	$f_{\boldsymbol{i}}$	$\frac{D_i^0 - D_{i-1}^0}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{D_i^{\mathbf{1}} - D_{i-1}^{\mathbf{1}}}{x_i - x_{i-2}}$	$\frac{D_i^{\mathbf{2}} - D_{i-1}^{\mathbf{2}}}{x_i - x_{i-3}}$
0	x_0	D_0^0			
1	x_1	D_1^0	D_1^1		
2	x_2	D_2^0	D_2^1	D_2^2	
3	x_3	D_3^0	D_3^1	D_3^2	D_3^3

Newtonova metoda – cvičení

- Pomocí Newtontova polynomu proveďte interpolaci funkce zadané 4 body,
- kde $x_i = \{-1, 0, 1, 3\}$ a $f_i = \{2, 1, 2, 0\}$.
- Pro realizaci budeme tedy uvažovat poměrné diference $(n+1)$. řádu

i	x_i	f_i	$\frac{D_i^0 - D_{i-1}^0}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{D_i^1 - D_{i-1}^1}{x_i - x_{i-2}}$	$\frac{D_i^2 - D_{i-1}^2}{x_i - x_{i-3}}$
0	x_0	D_0^0			
1	x_1	D_1^0	D_1^1		
2	x_2	D_2^0	D_2^1	D_2^2	
3	x_3	D_3^0	D_3^1	D_3^2	D_3^3

$$D_i^j = \frac{D_i^{j-1} - D_{i-1}^{j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

			D_i^1	D_i^2	D_i^3
i	x_i	f_i	$\frac{D_i^0 - D_{i-1}^0}{x_i - x_{i-1}}$	$\frac{D_i^1 - D_{i-1}^1}{x_i - x_{i-2}}$	$\frac{D_i^2 - D_{i-1}^2}{x_i - x_{i-3}}$
0	-1	2			
1	0	1	$\frac{1-2}{0-(-1)} = -1$		
2	1	2	$\frac{2-1}{1-0} = 1$	$\frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$	
3	3	0	$\frac{0-2}{3-1} = -1$	$\frac{-1-1}{3-0} = -\frac{2}{3}$	$\frac{-\frac{2}{3}-1}{3-(-1)} = -\frac{5}{12}$

Newtonova metoda – cvičení

- Dosazením hodnot z tabulky

i	x_i	f_i	D_i^1	D_i^2	D_i^3
0	-1	2			
1	0	1	-1		
2	1	2	1	1	
3	3	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{12}$

- do vzorce

$$P_4(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

- dostaneme vyjádření pro polynom

$$P_4(x) = 2 + D_1^1(x - x_0) + D_2^2(x - x_0)(x - x_1) + D_3^3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \\ = 2 - (x + 1) + x(x + 1) - \frac{5}{12}\big(x(x + 1)(x - 1)\big) = \\ = -\frac{5}{12}x^3 + x^2 + \frac{5}{12}x + 1$$

Newtonova metoda – cvičení

- Cvičení 1
  - Aproximujte funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ Newtonovým interpolačním polynomem v uzlových bodech $x_i = \{1, 2, 2.5, 3.2, 4\}$.
  - Poté pomocí polynomu vypočtěte hodnoty v bodech $x_j = \{3, 10\}$.
- Cvičení 2
  - Najděte Newtonův a Lagrangeův interpolační polynom
    zadaný body $x_i = \{-1, 0, 2, 3\}$
    a funkčními hodnotami $f_i = \{5, 10, 2, 1\}$.
  - Vykreslete polynom spolu s uzlovými body.
  - Porovnejte jejich výsledné tvary.

Interpolace trigonometrickými polynomy

- Aproximace a interploace periodických funkcí
  - nejsou vhodné algebraické polynomy
- Volíme periodické bázové funkce
  - místo polynomů využijeme trigonometrické polynomy.
- 1759 – poprvé využity trigonometrické polynomy k aproximaci funkce

Interpolace trigonometrickými polynomy

- Mějme periodickou funkci definovanou a spojitou na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$

  s uzlovými body rozdělenými ekvidistantně, $x_i = \{x_0, \ldots, x_N\}$

  a hodnotami funkce $f_i = \{f_0, \ldots, f_N\}$.

- Pak existuje právě jeden trigonometrický interpolační polynom $g(x)$ ve tvaru

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

- máme $2N + 1$ koeficientů
- omezíme se na ekvidistantní body
  - obecně není požadováno
- hledáme koeficienty
  - vynásobením jednotlivými bázovými funkcemi
  - využitím ortogonality a interpolačních podmínek

Interpolace trigonometrickými polynomy

- s koeficienty a_k a b_k určenými vztahy
  - pokud je počet bodů N lichý ($N = 2n + 1$)

$$a_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f_j \cos\frac{2\pi j}{2n+1}k, \quad k = 0,1,\dots,n$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f_j \sin\frac{2\pi j}{2n+1}k, \quad k = 1,\dots,n$$

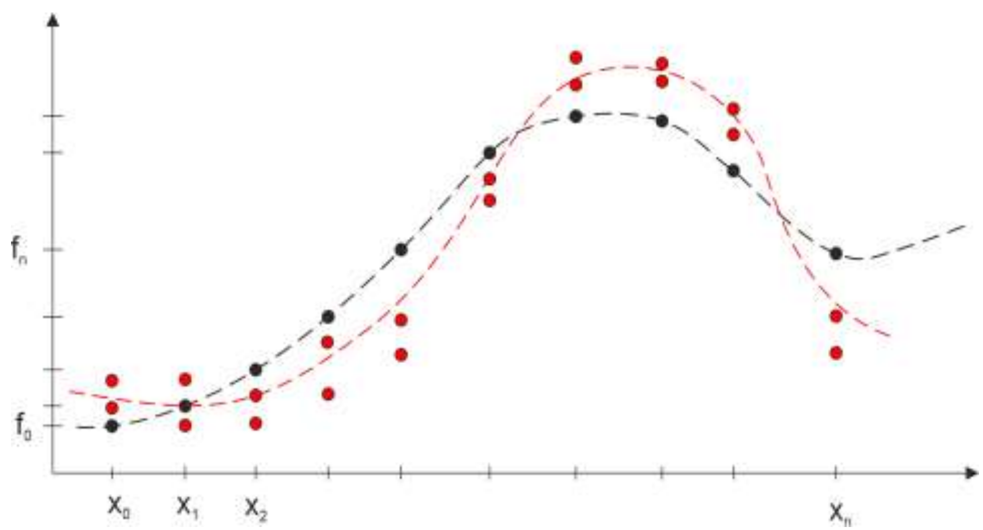
  - pokud je počet bodů N sudý ($N = 2n$)

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f_j \cos\frac{\pi j}{n}k, \quad k = 0,1,\dots,n$$

$$b_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f_j \sin\frac{\pi j}{n}k, \quad k = 1,\dots,n-1$$

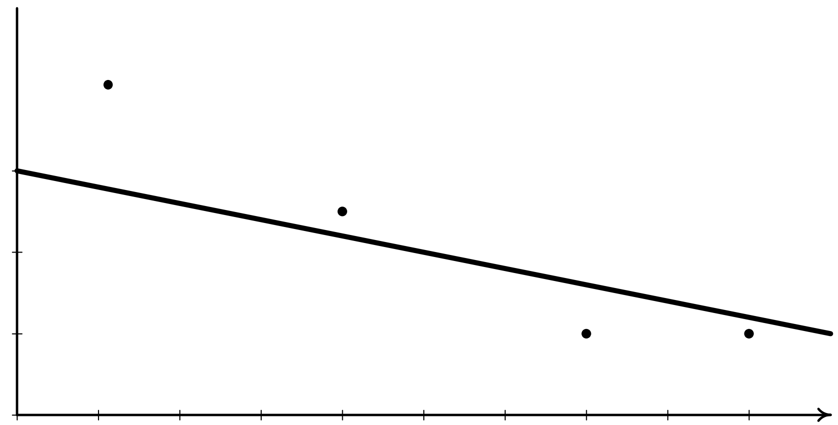
Aproximace funkce

- Aproximujeme většinou funkce, u kterých je interpolace nevýhodná
  - zákmit interpolačního polynomu
  - více funkčních hodnot pro jeden uzlový bod ap.
- Nepožadujeme rovnost podmínky $P(x_i) = f_i$
- Aproximační funkce se co nejvíce blíží k funkční hodnotě f_i
- Minimalizujeme odchylku $|P(x_i) - f_i|$ ve smyslu
  - metody nejmenších čtverců – minimalizace čtverce chyby $|P(x_i) - f_i|^2$
  - Čebyševova aproximace – minimalizace největšího rozdílu mezi $P(x_i)$ a f_i



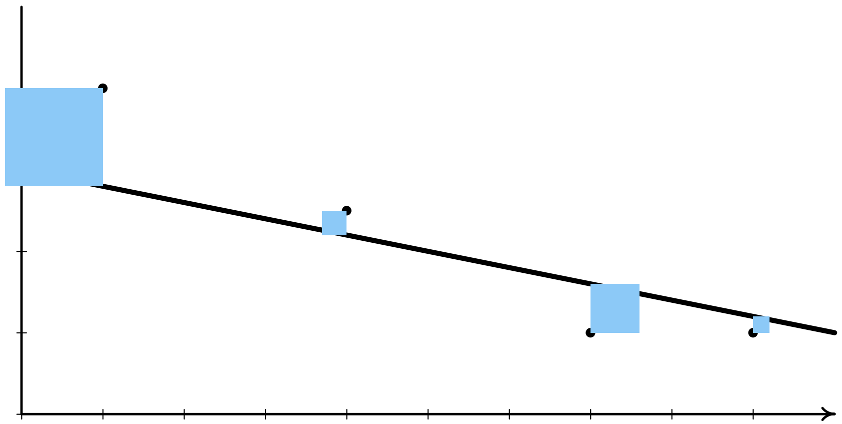
Metoda nejmenších čtverců – přímka

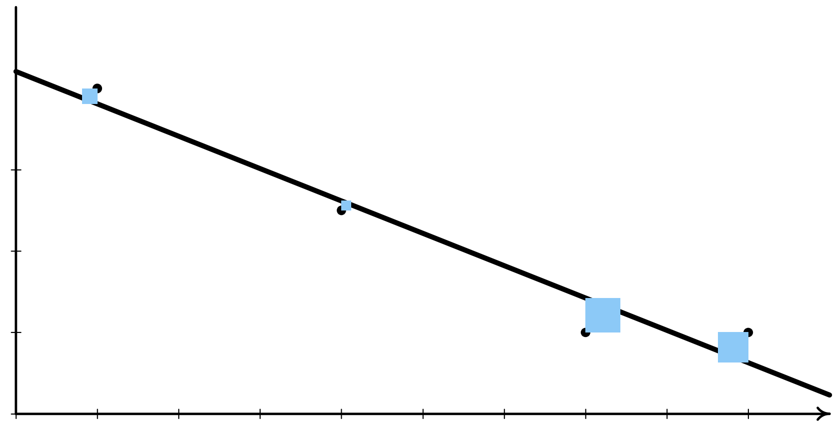
- Máme body v rovině a chceme najít co nejpřesněji proložit přímku
  - stanovit koeficienty a, b tak, aby přímka $y = ax + b$ ležela co nejblíže bodům z měření



Přímka nebude procházet všemi body, ale co nejblíže

Za optimální považujeme tu, která minimalizuje součet ploch čtverců





Metoda nejmenších čtverců – přímka

- Uvažujme tři body
  - $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a $[x_3, y_3]$
- Svislé vzdálenosti těchto bodů od přímky $y = ax + b$ jsou:
  - $s_1 = |ax_1 + b - y_1|$
  - $s_2 = |ax_2 + b - y_2|$
  - $s_3 = |ax_3 + b - y_3|$
- a chceme minimalizovat funkci
  - $S(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2$
- spočítáme derivace
  - $\frac{\partial S}{\partial a} = 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + 2(ax_3 + b - y_3)x_3$
  - $\frac{\partial S}{\partial a} = 2a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2b(x_1 + x_2 + x_3) - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$
  - $\frac{\partial S}{\partial b} = 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + 2(ax_3 + b - y_3)$
  - $\frac{\partial S}{\partial b} = 2a(x_1 + x_2 + x_3) + 6b - 2(y_1 + y_2 + y_3)$

Metoda nejmenších čtverců – přímka

- derivace položíme rovny nule a separujeme a, b a x, y
  - $a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b(x_1 + x_2 + x_3) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$
  - $a(x_1 + x_2 + x_3) + 3b = y_1 + y_2 + y_3$
- Soustava 2 lineárních rovnic o neznámých a, b
  - vyřešením získáme přímku
  - $y = ax + b$
- Pro n bodů:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Metoda nejmenších čtverců

- Při aproximaci volíme (hledáme) funkci $P(x)$ ve tvaru

$$P(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j \, P_j(x) \qquad \text{místo } y = ax + b$$

- a hledáme koeficienty $c_j = c_1, \ldots, c_m$ tak, aby číslo

$$E(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{i=0}^{n} [f_i - P(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[f_i - \sum_{j=0}^{m} c_j \, P_j(x) \right]^2$$

- bylo minimální

- Za funkci $P_j(x)$ můžeme dosadit jakoukoli funkci (např. x^j)
  - o které si myslíme, že bude dobře aproximovat námi zkoumanou sadu bodů

Metoda nejmenších čtverců

- Soustava rovnic pro koeficienty c_j (po úpravách)

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) P_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_k(x_i)$$

- kde
  - $j = 0,..,m$ iteruje přes všechny koeficienty c_j funkce $P(x) = \sum_j c_j P_j(x)$
  - $i = 0,..,n$ iteruje přes všechny uzlové body x_i
  - $k = 0,..,m$ iteruje přes všechny rovnice, kde platí $k \geq m$

- Řešení

$$\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & . & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & . & P_{1m} \\ . & . & . & . \\ P_{m0} & P_{m1} & . & P_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ . \\ F_n \end{pmatrix}$$

- kde

$$P_{jk} = \sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) P_k(x_i) \quad F_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_k(x_i)$$

- Řešení pak dostaneme ve tvaru

$$P(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + .. + c_m P_m(x)$$

Aproximace funkce – cvičení

- Mějme funkci zadanou sadou uzlových bodů $x_i = \{1, 2, 3, 5\}$
  a k nim příslušných funkčních hodnot $f_i = \{3, 3, 1, 2\}$
- Metodou nejmenších čtverců aproximujme pomocí polynomiální funkce, tj. $P_j(x) = x^j$

- Obecná rovnice pro generování soustavy rovnic

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) P_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_k(x_i)$$

- přejde dosazením za $P_j(x)$ na tvar

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{n} x_i^j \, x_i^k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

- pokud označíme

$$P_{jk} = \sum_{i=0}^{n} x_i^j \, x_i^k \quad F_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

- dostaneme výsledný tvar rovnice

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \, P_{jk} = F_k, \quad k = 0, \ldots, m$$

Aproximace funkce – cvičení

- výsledný tvar rovnice $$\sum_{j=0}^{m} c_j P_{jk} = F_k, \quad k = 0,..,m \qquad P_{jk} = \sum_{i=0}^{n} x_i^j x_i^k \quad F_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

- Máme celkem 4 body ($n = 0,..,3$),
  předpokládáme $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ ($m = k = 0,..,2$)

$$\begin{array}{llllll} c_0 P_{00} + & c_1 P_{01} + & c_2 P_{02} = & F_0 & , k = 0 \\ c_0 P_{10} + & c_1 P_{11} + & c_2 P_{12} = & F_1 & , k = 1 \\ c_0 P_{20} + & c_1 P_{21} + & c_2 P_{22} = & F_2 & , k = 2 \end{array}$$

- Dosadíme za P_{jk} a F_k a konkrétní body ($x_i = \{1, 2, 3, 5\}$, $f_i = \{3, 3, 1, 2\}$)

$$P_{00} = \sum_{i=0}^{3} x_i^0 x_i^0 = \sum_{i=0}^{3} 1 = 4 \qquad F_0 = \sum_{i=0}^{3} f_i x_i^0 = \sum_{i=0}^{3} f_i = 9$$

$$P_{10} = \sum_{i=0}^{3} x_i^1 x_i^0 = \sum_{i=0}^{3} x_i = 1 \qquad F_1 = \sum_{i=0}^{3} f_i x_i^1 = \sum_{i=0}^{3} f_i x = 22$$

$$P_{20} = P_{02} = P_{11} = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 39 \qquad F_2 = \sum_{i=0}^{3} f_i x_i^2 = 74$$

$$P_{21} = 161, P_{22} = 723$$

Aproximace funkce – cvičení

- Soustavu řešíme (hledáme c_i)
  - pomocí vybrané iterační, přímé aj. metody

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 39 \\ 11 & 39 & 161 \\ 39 & 161 & 723 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 22 \\ 74 \end{pmatrix}$$

  - s řešením ve tvaru

$$c_0 = \frac{49}{10}, \quad c_1 = -\frac{37}{20}, \quad c_0 = \frac{1}{4}$$

  - odtud výsledná aproximační funkce

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = \frac{49}{10} - \frac{37}{20} x + \frac{1}{4} x^2$$

Aproximace funkce – cvičení

- Vyberte si jednu z funkcí, které byly výše řešeny pomocí Lagrangeova nebo Newtonova polynomu a zkuste aproximovat tuto funkci také metodou nejmenších čtverců
- Jako aproximační funkci volte jak lineární funkci, tak polynom vyššího řádu a porovnejte například i přesnost polynomu při aproximaci a interpolaci