LINEÁRNÍ ALGEBRA

Vektor – intuitivní chápání

- Vektor
  - uspořádaná n-tice objektů
    - $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
    - zpravidla čísla nebo skalární funkce
  - je definována operace sčítání a násobení číslem
  - musí tvořit vhodnou strukturu
    - např. existence neutrálního a opačného prvku

- Dimenze vektoru
  - počet komponent v n-tici

Vektor a vektorový prostor

- Vektorový prostor
  - množina $\boldsymbol{V}_n$ uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \dots, a_n)$
  - s operacemi sčítání a násobení reálným (obecně komplexním) číslem definovanými takto:
  - $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1\ a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
  - $c \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$
- Vektor
  - prvek vektorového prostoru $\boldsymbol{V}_n$
- Dimenze prostoru $\boldsymbol{V}_n$
  - dimenze vektoru n

Soustava vektorů

- Lineární závislost vektorů
  - Vektory
    $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \boldsymbol{V}_n$
    jsou lineárně závislé, existují-li taková komplexní čísla
    $c_1, \dots, c_k$ (z nichž alespoň jedno je různé od nuly),
    pro která platí:
  - $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k = 0$

lineární kombinace

- Hodnost
  - soustava vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ z $\boldsymbol{V}_n$ má hodnost h
    - jestliže mezi vektory existuje h lineárně nezávislých vektorů
    - ale každých $h + 1$ vektorů je již lineárně závislých
  - každá soustava vektorů má $h \leq n$
  - hodnost soustavy se nemění, pokud:
    - zaměníme pořadí vektorů v soustavě
    - provedeme jakoukoli operaci s vektory
      - která vede k lineárně závislému vektoru

Vektory ve fyzice

- Klasická mechanika:
  - polohový vektor $\boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$
- Kvantová teorie:
  - Schrödingerova rovnice ($E = \frac{p^2}{2m} + V$)
  - $i\hbar\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial x^2} + V\boldsymbol{\Psi}$
- Speciální teorie relativity:
  - relativistická kinematika
  - $v' = \frac{v-u}{1+\frac{uv}{c^2}}$ (v soustavě spojené s prvním se druhé bude pohybovat)
- Elektromagnetismus:
  - $div\ \mathrm{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (intenzita pole, hustota volného náboje, permitivita)

Vektory v informatice

- Informační (Shannonova) entropie
  - $S(\mathrm{X}) = -\sum_{x \in \mathrm{M}} p\,(x) \log p(x)$
  - střední hodnota množství informace připadající na jeden symbol generovaný stochastickým zdrojem dat
  - míra informační entropie přiřazená ke každé možné datové hodnotě je záporným logaritmem pravděpodobnostní funkce dané hodnoty

Aplikovaná informatika pracuje většinou s vektory definovanými v jiných oblastech vědy a techniky

- Vektorová grafika:
  - polygon, ray-tracing
- Analýza dat:
  - časové řady, korelace, distribuce, transformace
- Kyberbezpečnost:
  - šifrování, reprezentace dat, komprese atd.

Vektorová algebra

- Algebraické (nediferenciální) operace
  - definovány pro vektorový prostor
  - aplikovány na vektorové pole
- Základní algebraické operace
  - sčítání vektorů
  - násobení skalárem
  - skalární součin
  - vektorový součin
  - tenzorový součin

- Mějme soustavu lineárně nezávislých vektorů $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in \mathbb{R}^3$ takových, že $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Skalární součin

- Skalární součin
  - zobrazení, které dvojici vektorů přiřadí skalár
  - který má vztah k velikosti těchto vektorů
    - k tzv. ortogonalitě a případně k úhlu, který svírají
  - a platí určité podmínky

- Podmínky pro skalární součin
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$
  - $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
  - $(\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = 0$
- Obecná definice

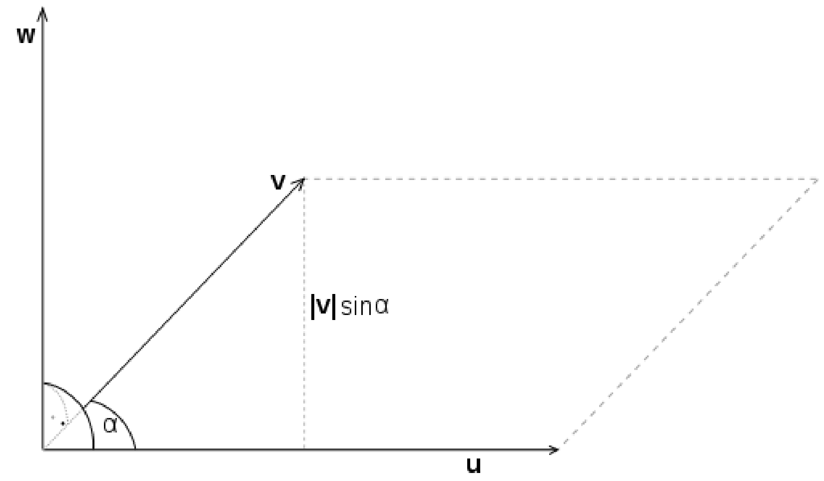
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\; b_i$$

Skalární součin

- Skalární součin v trojrozměrném eukleidovském prostoru
- $\mathrm{S} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\varphi) \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$
- Pro skalární součin v reálném prostoru platí:
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
  - $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
  - $(\alpha\, \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

Vektorový součin

- Vektorový součin
  - binární operace vektorů v trojrozměrném vektorovém prostoru
  - výsledkem je vektor
    - kolmý k oběma původním vektorům
- Vektorový součin
  - definován jako vektor kolmý k vektorům $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$
  - s velikostí rovnou obsahu rovnoběžníka
    - který oba vektory určují
  - $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}\,|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha$
    - $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor k oběma kolmý



  - vektorový součin dvou lineárně závislých vektorů je nulový
    - $(\sin\alpha = 0)$

Vektorový součin

- Definice bez pomoci úhlů

- Vektor $\boldsymbol{c}$ nazýváme *vektorovým součinem* vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$
  - $\boldsymbol{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

- neboli
  - $c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$
  - $c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$
  - $c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Tenzorový součin

- Tenzorový (dyadický) součin
  - $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$
  - má-li prostor $\boldsymbol{V}$ dimenzi m a $\boldsymbol{W}$ dimenzi n, pak $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ má dimenzi mn
  - obecně není komutativní
  - je distributivní a asociativní

- Použití
  - mechanika kontinua, deformace, pevnost, pružnost
  - kvantová mechanika – stavy systémů více částic
  - relativistická fyzika – popis geometrie časoprostoru
  - geometrické objekty vyšších dimenzí
    - např. tenzory 2. řádu popisující plochy a křivky ve 3D

Matice

- koncept k uspořádání a organizaci čísel nebo symbolů do obdélníkové struktury

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Je-li $m = n$, je A čtvercová matice m-tého stupně
- Hodnost matice h je počet lineárně nezávislých řádků
- Hodnost matice lze zjistit pomocí
  - Gaussovy eliminace → horní trojúhelníková matice
  - determinantu matice A → Existuje subdeterminant h-tého stupně různý od nuly a každý subdeterminat stupně vyššího je roven nule

Základní operace s maticemi

- A a B jsou matice typu (m, n) a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom
  - $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
  - $\alpha A = (\alpha a_{ij})$
- je součet matic A a B, resp. součin matice A a čísla α

- Matice A je typu (m, n), matice B je typu (n, p)
- Potom matice C vzniklá jejich součinem bude typu (m, p) a pro její prvky platí

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$\underset{A(m,n)}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \underset{B(n,p)}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}} = \underset{C(m,p)}{\begin{pmatrix} c_{11} & c & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}}$$

Transpozice, stopa

- Transpozice matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Stopa (Trace) čtvercové matice $A(n, n)$
  - je číslo $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Inverzní matice

- Matice A, X a E jsou čtvercové matice typu (n, n) a E je jednotková matice.
- Pokud platí rovnice

$$AX = E$$

- potom X nazýváme **inverzní maticí** k matici A a zapisujeme jako $X = A^{-1}$

- Výpočet např. pomocí Gaussovy eliminace
  - z původní matice a jednotkové matice je nejprve sestavena bloková matice typu $n \times 2n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  - postupnými úpravami převádíme levou část matice na jednotkovou matici
  - pravá část bude odpovídat inverzní matici

Determinant matice

- Determinantem matice A nazýváme číslo

$$d_A = \sum(-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

  - kde se sčítá přes všechny permutace $k_1, k_2, \dots, k_n$ čísel $1,2,\dots,n$ a r udává počet inverzí v permutaci

- Vlastnosti
  - Determinant se rovná nule, pokud je alespoň jeden z jeho řádků lineární kombinací ostatních.
  - Determinant mění znaménko, prohodí-li se dva řádky mezi sebou.
  - Pro výpočet determinantu používáme např. Sarrusovo pravidlo nebo Laplaceův rozvoj

Soustava lineárních rovnic

- Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots x_n$ nazýváme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

  - kde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ a $b_1, b_2, \dots, b_m$ jsou daná reálná, resp. komplexní čísla

- Soustavu lze zapsat v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Frobeniova věta
  - Soustava lineárních rovnic je řešitelná tehdy a jen tehdy, je-li hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice

- Soustava homogenních rovnic má vždy triviální řešení $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0)$

- Metody řešení
  - Eliminační metody (Gaussova eliminace)
  - Cramerovo pravidla
  - metody numerické matematiky (přímé a iterační metody)

Cramerovo pravidlo

- Cramerovo pravidlo
  - Soustavu rovnic o n neznámých s nenulovým determinantem soustavy $d_A \neq 0$ má právě jedno řešení $x_1, \ldots, x_n$, kde

$$x_i = \frac{d_{A_i}}{d_A}$$

  - kde d_{A_i} je determinant soustavy, který vznikne z d_A tak, že nahradíme i-tý sloupec vektorem pravých stran

- Spočítejte pomocí Cramerova pravidla řešení x_1, x_2, x_3 následující soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

Cramerovo pravidlo

$$d_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$d_{A1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24 \qquad x_1 = \frac{d_{A1}}{d_A} = \frac{24}{12} = 2$$

$$d_{A2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24 \qquad x_2 = \frac{d_{A2}}{d_A} = \frac{-24}{12} = -2$$

$$d_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36 \qquad x_3 = \frac{d_{A3}}{d_A} = \frac{36}{12} = 3$$

Numerické metody

- Existuje celá řada metod pro řešení soustav lineárních rovnic $Ax = b$

- Přímé metody
  - Gaussova, Gaussova-Jordanova,…
- Iterační metody
  - Jacobiova, Gaussova-Seidelova, Superrelaxační
- Metody Monte Carlo
  - Sekvenční metoda, Metoda náhodné procházky, …
- Speciální metody
  - Metoda největšího spádu, Metoda sdružených gradientů, …

Numerické metody – iterační

$$Ax = b$$

- Získáme posloupnost přibližných řešení ve tvaru $x^{i+1} = F_i\left(x^i, x^{i-1}, \ldots, x^{i-k}\right)$
- Řešení konverguje k přesnému řešení x, pokud

$$\lim_{i\to\infty} x^i = x$$

- Uvedeme si „pouze“ metody, kde rovnice má speciální tvar:

$$x^{i+1} = Bx^i + Cb$$

- Ukončovací podmínka iteračního procesu:

$$\left\|x^{i+1} - x^i\right\| \leq \epsilon, \text{ kde } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ je dostatečně malé}$$

- Podmínky konvergence iteračních metod:
  - Matice A je symetrická a pozitivně definitní

$$d_{A_k} > 0 \qquad k = 1, \ldots, n$$

  - Matice A je diagonálně dominantní
    - součet prvků v libovolném řádku matice musí být menší než prvek na diagonále:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left|B_{ij}\right| \leq |B_i| \qquad i = 1, \ldots, n$$

Jacobiova iterační metoda

- Matici soustavy A rozložíme na součet tří matic
  - U – horní trojúhelníková matice bez diagonály
  - L – dolní trojúhelníková matice bez diagonály
  - D – diagonální matice
- Soustavu poté upravíme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}(D+L+U)x &= b\\ Dx+(L+U)x &= b\\ Dx &= b-(L+U)x\\ x &= D^{-1}[b-(L+U)x]\end{aligned}$$

$$x^{i+1} = D^{-1}\left[b-(L+U)x^{i}\right]$$

Gaussova-Seidelova iterační metoda

- Použijeme stejný rozklad jako v případě Jacobiovy metody
  - ale vyjádříme x^{i+1} v jiném tvaru

$$
\begin{aligned}
(D + L + U)x &= b \\
(D + L)x + Ux &= b \\
(D + L)x &= b - Ux \\
x &= (D + L)^{-1}[b - Ux]
\end{aligned}
$$

$$x^{i+1} = (D + L)^{-1}\left[b - Ux^{i}\right]$$

Superrelaxační metoda

- Využívá se pro urychlení procesů, resp. konvergence iteračních metod
  - $x^{i+1} = F(x^i)$ např. Gauss-Seidelova metoda
  - $x^{i+1} = x^i + F(x^i) - x^i$ úprava
  - $x^{i+1} = x^i + \Delta x_i$ $\Delta x_i = F(x^i) - x^i$
  - místo opravy Δx^i přičteme opravu zvětšenou: $\omega \Delta x^i$
  - $x^{i+1} = x^i + \omega \Delta x^i$
  - $x^{i+1} = x^i + \omega[F(x^i) - x^i]$

$$x^{i+1} = (1-\omega)x^i + \omega F(x^i)$$

  - Vhodnou volbou parametru ω lze dosáhnout rychlejší konvergence metody
    - ω < 1 zpomalí konvergenci, ale zvýší stabilitu metody

Práce s vektory a maticemi v Pythonu

- Reprezentace vektorů a matic v Pythonu
  - NumPy SciPy, …
- Demonstrace
  - vytváření vektorů, dotazovací příklady, vestavěné funkce
- Příklady(rychlé) pro násobení vektorů
  - různé součiny
- Demonstrace
  - vytváření matic, dotazovací příklady, vestavěné funkce, speciální matice a jejich generování
- Vestavěné funkce/balíky pro práci s maticemi
  - násobení, hodnost, Gauss. eliminace, …
- Využití symbolické matematiky
  - pro práci s vektory, maticemi

Úkoly

- Vektory
  - Vektorový součin pomocí Levi-Civitova symbolu
- Determinant
  - Laplaceův rozvoj
- Soustava rovnic
  - Cramerovo pravidlo
- Soustava rovnic
  - Numerická úloha (dle výběru) a porovnání, generování náhodné matice atd.

Vektorový součin – cvičení

- Napište program pro vektorový součin dvou vektorů
  - $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$
  - pomocí Levi-Civitova symbolu

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \mathbf{e_i} a_j b_k$$

  - kde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & (i,j,k) \in \{(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\} \\ 0 & i = j, j = k, i = k \end{cases}$$

  - Výsledek srovnejte s vestavěnou funkcí pro výpočet vektorového součinu dvou vektorů

Laplaceův rozvoj

- Laplaceův rozvoj pro výpočet determinantu matice
- Dle Laplaceova rozvoje lze determinant čtvercové matice A o rozměrech (N, N) získat následovně:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} \, a_{ij} M_{ij} \\
M_{ij} &= \left|S_{ij}^{A}\right|
\end{aligned}
$$

  - kde S_{ij}^{A} je submatice, která vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce matice A
  - M_{ij} se nazývá minor matice A a spočítá se jako determinant submatice S_{ij}^{A}
  - a_{ij} je prvek matice A

  - Rozvoj lze provádět přes sloupec nebo řádek

Laplaceův rozvoj – cvičení

- Pomocí Laplaceova rozvoje spočítejte determinant matice A

- Nagenerujte čtvercovou matici A o rozměrech (N, N) a pomocí Laplaceova rozvoje spočítejte determinant této matice
  - Nagenerujte náhodnou matici celých čísel o rozměru (N, N)
  - Zkontrolujte, zda je matice čtvercová
  - Spočítejte determinant pomocí Laplaceova rozvoje
  - Zkuste změnit velikost matice A v rozmezí $N \in (5,200)$ a vykreslete časovou náročnost výpočtů
    - dejte pozor na reprezentaci čísel

Cramerovo pravidlo – cvičení

- Pomocí Cramerova pravidla vyřešte následující soustavu rovnic.

$$
\begin{array}{cccccccc}
5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\
3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \\
4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1
\end{array}
$$

- Cramerovo pravidlo:

$$x_i = \frac{d_{A_i}}{d_A}$$

Jacobiova metoda – cvičení

- Pomocí Jacobiovy iterační metody spočítejte následující soustavu rovnic.

$$\begin{array}{ccccccc} 6x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = & -4 \end{array}$$

- Jacobiova metoda:

$$x^{i+1} = D^{-1}\left[b - (L + U)x^i\right]$$