

Mapeo del sistema de un pendulo doble acoplado a un pendulo simple*

Jesus Alexis Lopez Luque†

I. RESUMEN:

¿Alguna vez se han imaginado el mapeo de coordenadas de un sistema de péndulos? Siendo esta la incógnita la que se buscara solucionar en este proyecto, se simulara mediante ODEINT/RK4 método numérico con la utilización de Python, además de aprovechar este mismo lenguaje para crear un mapeo del cambio de coordenadas generalizadas de un péndulo doble, un péndulo simple y por ultimo la unión de ambos sistemas por un resorte de constante de elasticidad k (N/m*m) los tres péndulos cuentan con una varilla rígida sin elasticidad se una longitud l , cuentan con la misma masa m , Mientras que el primer péndulo del péndulo doble se encuentra acoplado con un resorte de constante de elasticidad K al péndulo simple.

El cual, esperamos que su comportamiento sea caótico, debido al subsistema existente del péndulo doble, dicho sistema se nombrara Sistema A, mientras que Sistema B se tratara del péndulo simple aislado. Para facilitar imaginarse el comportamiento se analizara de manera independiente el sistema A y el sistema B mediante la teoría del calculo variacional y las ecuaciones derivadas del Lagrangiano, ya que estas facilitaran mucho el procedimiento a desarrollar.

II. FORMULAMIENTO MATEMÁTICO.

A. Formulamiento matemático del péndulo simple

Primeramente estudiaremos el sistema aislado de un péndulo, el cual cuenta con una varilla rígida de longitud L y al final de esta misma se encuentra sujetado una partícula de masa m , despreciaremos la masa de la cuerda L , la resistencia del aire, entre otras cosas, dejamos soltar la partícula creando un ángulo entre la varilla y la perpendicular θ_3 . (por motivos de precocidad en este apartado de utilizara θ_3 debido a la ángulo correspondiente en todo el sistema).

Para el cual procederemos escribiendo las coordenadas cartesianas, estas son fáciles de ver debido a que se trata de los componentes del vector formado con entre el punto de contacto y la masa m .

$$x = \text{sen}(\theta_3)L, y = -\text{Cos}(\theta_3)L \quad (1)$$

Ahora, para calcular nuestra ecuación de lagrange primeramente debemos conocer las velocidades de las componentes, esto es sencillo de hacerse recordando que esta misma se trata de la derivada de la posición, por lo cual:

$$\dot{x} = \cos(\theta_3)L\dot{\theta}_3, \dot{y} = \text{sen}(\theta_3)L\dot{\theta}_3 \quad (2)$$

Con esto podremos escribir ahora nuestra ecuación de lagrangiano, empezando por construir el Lagrangiano de nuestro sistema recordando la definición de energía cinética menos energía potencial.

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_3^2 + mgL\cos(\theta_3) \quad (3)$$

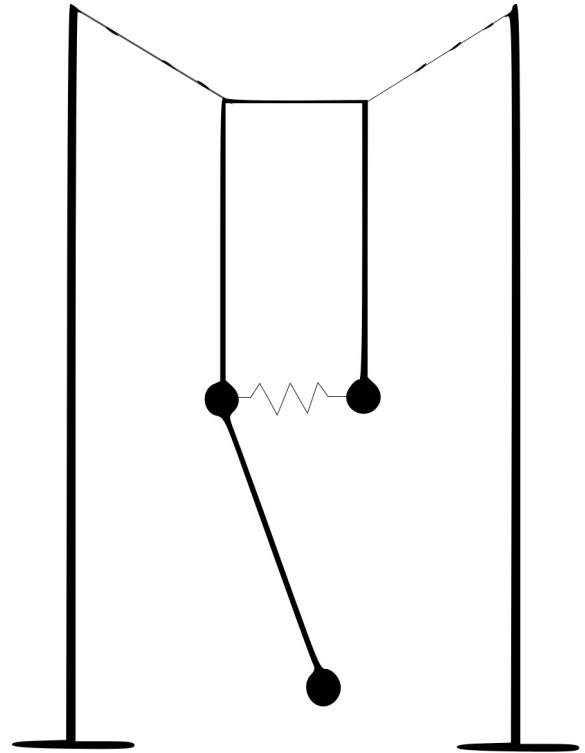


FIG. 1. Sistema completo de pendulos.

* A footnote to the article title

† Also at Facultad de ciencias física-matemática.

Una vez encontrada la ecuación 4, procederemos a resolver las ecuaciones de euler lagrange, que en este caso, podemos notar que tenemos una ligadura al tener restringida la varilla rígida, por lo cual contamos únicamente con un grado de libertad, por lo tanto una sola ecuación de euler-lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_3} \mathcal{L} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta_3} \mathcal{L} = 0 \quad (4)$$

$$mL^2 \ddot{\theta}_3 + mgl \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) = 0$$

De donde deducimos la siguiente ecuación diferencial.

$$\ddot{\theta}_3 + \frac{g}{L} \sin(\theta_3) = 0 \quad (5)$$

Siendo esta ecuación aquella a la que se le buscara solución y además se hará un rastreo de las coordenadas del péndulo en la sección numero 3 de este Reporte, por lo cual damos por concluido la sección de fundamentos matemáticos del péndulo simple.

B. Formulamiento matemático del péndulo doble

Dicho sistema esta compuesto por dos péndulos conectados entre ellos, ambos cuentan con varillas rígidas sin elasticidad, en el caso específico de nuestro proyecto estas varillas son de igual dimensión, pero para hacer mas practico esta sección se hará suponiendo que son de diferente dimensión. por lo cual, la varilla del péndulo 1 presenta una longitud l_1 , mientras que la del péndulo 2 tendrá l_2 , claramente se hará esta misma distinción entre sus masas respectivamente m_1 y m_2 .

Primeramente para empezar a trabajar en el sistema A debemos notar que al ver los vectores que tendremos

contaremos con el vector L_1 el cual, conecta el punto de contacto con la masa del primer péndulo, mientras que el vector L_2 conecta el mismo punto con la masa del segundo péndulo, y además este mismo L_2 , dependerá de cierta manera del vector L_1 claramente. Por lo cual procedemos a escribir las coordenadas Tanto del vector L_1 como el vector L_2

$$\vec{L}_1 = (l_1 \sin(\theta_1), l_1 \cos(\theta_1))$$

$$\vec{L}_2 = (l_1 \sin(\theta_1), l_1 \cos(\theta_1)) + (l_2 \sin(\theta_2), l_2 \cos(\theta_2))$$

Ahora, de manera similar a lo realizado con el péndulo simple, vemos las derivadas de dichos vectores para ver la velocidad y a partir de ello construir la ecuación de euler-lagrange, que en este caso notamos que tenemos 4 coordenadas, siendo estos los ángulos θ_1 y θ_2 , y las varillas l_1 y l_2 , aunque estas ultimas presentan una ligadura, por lo cual contamos con 2 grados menos de libertad, y concluyendo así que tendremos dos ecuaciones diferenciales dependiendo de los ángulos.

$$\dot{\vec{L}}_1 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1), -l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1))$$

$$\dot{\vec{L}}_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2), -l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2))$$

$$(V_1)^2 = |\dot{\vec{L}}_1|^2 + |\dot{\vec{L}}_2|^2$$

Procederemos a expresar la energía considerando estas coordenadas del sistema, llegando a las siguientes expresiones:

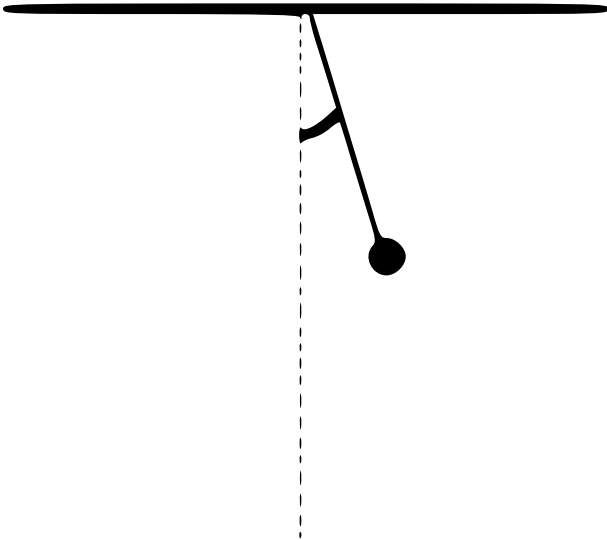


FIG. 2. Sistema B.

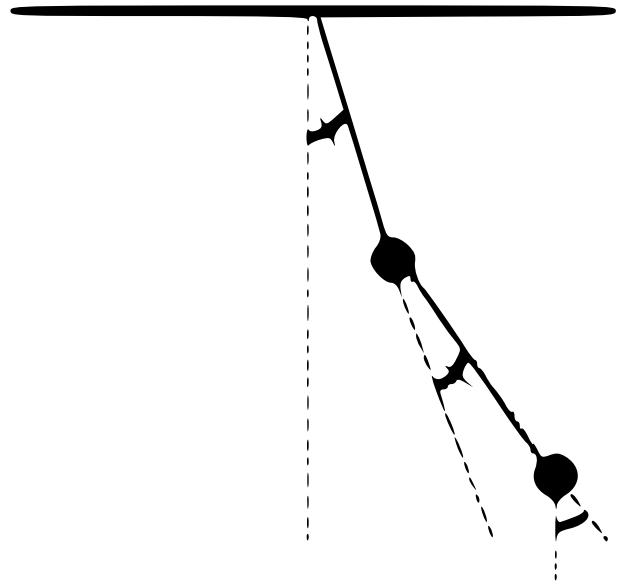


FIG. 3. Sistema A.

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (6)$$

Siendo esta ultima expresi3n nuestra energa cin3tica total del sistema A, mientras que la energa potencial facilita un poco su calculo:

$$U = -(m_1 g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g(l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2))) \quad (7)$$

Ahora, de manera similar a lo realizado con el p3ndulo simple, vemos las derivadas de dichos vectores para ver la velocidad y a partir de ello construir la ecuaci3n de euler-lagrange, que en este caso notamos que tenemos 4 coordenadas, siendo estos los 3ngulos θ_1 y θ_2 , y las varillas l_1 y l_2 , aunque estas ultimas presentan una ligadura, por lo cual contamos con 2 grados menos de libertad, y concluyendo as3 que tendremos dos ecuaciones diferenciales dependiendo de los 3ngulos, las cuales son:

Para θ_1 tenemos la siguiente ecuaci3n de Lagrange:

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \sin(\theta_1) = 0 \quad (8)$$

Para θ_2 tenemos la siguiente ecuaci3n de Lagrange:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 l_3 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$- m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin(\theta_2) = 0 \quad (9)$$

Lo cual, considerando las siguientes aproximaciones, suponiendo antes claro que las variaciones entre los 3ngulos son infinitesimales.

$$\theta_1 - \theta_2 \approx 0 \rightarrow \sin(\theta_1 - \theta_2) \approx 0 \rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$$

$$\sin(\theta_1) = \theta_1, \quad \sin(\theta_2) = \theta_2$$

Por lo cual, nuestras ecuaciones se ven reducidas a:

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g l_1 \theta_1 = 0 \quad (10)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \quad (11)$$

Para θ_1 y θ_2 respectivamente.

C. Formulamiento matemático del sistema Péndulo Acoplado

Gracias a las secciones anteriores de Formulaci3n matemática nos permite introducir esta secci3n de buenas a primeras de una manera mas suave y de menor complicaci3n matemática, esto debido a que ya se conocen las expresiones de la energa de los

sistemas separados, 3nicamente faltando considerar el acoplamiento con el resorte de constante de elasticidad K , por lo cual, procederemos escribiendo las expresiones de la energa del sistema completo.

Para la energa cin3tica:

$$T = \frac{1}{2}(m L^2 \dot{\theta}_3^2 + (m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)))$$

Mientras que su energa potencial estar3a dado por:

$$U = -mgL \cos(\theta_3) - (m_1 g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g(l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)))$$

$$+ \frac{kL}{2}(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))$$

Por lo cual procederemos a calcular su Lagrangiano, el cual ser3a de la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m L^2 \dot{\theta}_3^2 + (m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))) \quad (12)$$

$$- (-mgL \cos(\theta_3) - (m_1 g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g(l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)))) \quad (13)$$

El cual al tratar mediante la ecuaci3n de Euler-Lagrange (Ec 4) procederemos a llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales las cuales sus soluciones rigen el movimiento de los 3ngulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

Para la coordenada θ_1

$$\ddot{\theta}_1 = -\ddot{\theta}_2 \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{2} + \dot{\theta}_2 \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{2}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{2} + \frac{k}{2mL}(\sin \theta_3 - \sin \theta_1) \cos(\theta_1)$$

Para la coordenada θ_2

$$\ddot{\theta}_2 = -\ddot{\theta}_1 (\cos(\theta_1 - \theta_2) - (\sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 (\theta_1 - \theta_2))$$

$$+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{l} \sin(\theta_2))$$

Para la coordenada θ_3

$$\ddot{\theta}_3 = -\frac{g}{L} \sin(\theta_3) - kL(\sin(\theta_3) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_3)$$

III. PSEUDO-CÓDIGOS UTILIZADOS:

Respecto al algoritmo del método Runge-Kutta de 4to orden:

Considerando la siguiente función:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} = f(x, y)$$

Notamos que su solución podría ser encontrada a través de un algoritmo cíclico, en este caso los mas comunes son el método de Euler o bien el Método de Runge Kutta, siendo este segundo el elegido debido a su alto grado de precisión (presentando un grado de error del orden 4), dicho algoritmo se soluciona a partir del siguiente Pseudo-código.

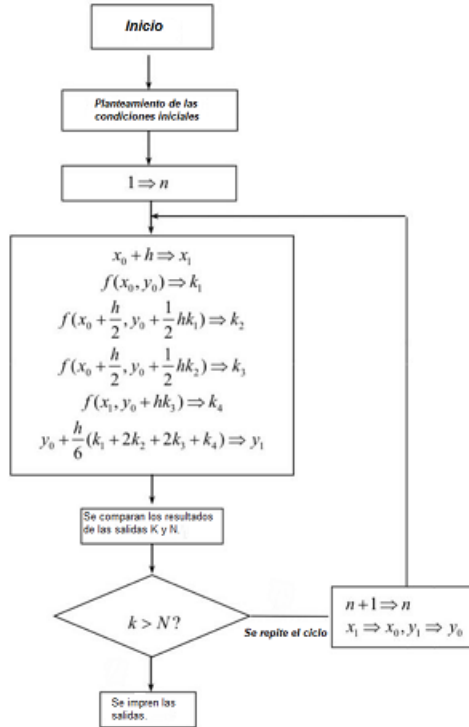


FIG. 4. Pseudo-código del método Runge-kutta

Respecto al método Odeint, el cual viene integrado en la biblioteca scipy.integrate.

Para dicho método utilizado para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, sabemos que como límite de Python, este únicamente resuelve ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo cual es necesario realizar

un cambio de variable a nuestras ecuaciones encontradas en la sección de Formalismo Matemático. Además de requerir siempre de las condiciones iniciales del sistema

IV. RESULTADOS

A. Péndulo Simple

Al resolver la ecuación diferencial encontrada en el apartado II-A referente al péndulo simple, notamos que dicho sistema se puede graficar en el plano cartesiano, para ver la evolución de dicho sistema a través del tiempo, por lo cual se optó por graficar la trayectoria descrita por un péndulo simple, gracias al análisis de Lagrange logramos ver que en este caso, dicha trayectoria depende exclusivamente de la gravedad, la longitud de la cuerda y el tiempo, y las condiciones iniciales permitiéndonos eliminar la masa de nuestra ecuación diferencial.

Además de esto se optó por graficar el avance del ángulo creado con la perpendicular al eje de equilibrio del péndulo simple y de donde se encuentra ligada la cuerda. Obteniendo así los siguientes resultados:

Dicho análisis fue realizado para un péndulo simple, el cual es suspendido por una cuerda de 2 metros de longitud, en el intervalo de tiempo de 0 a 10 segundos.

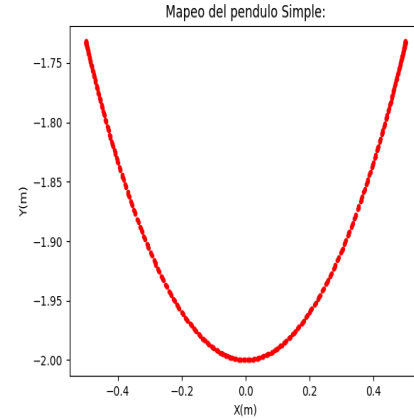
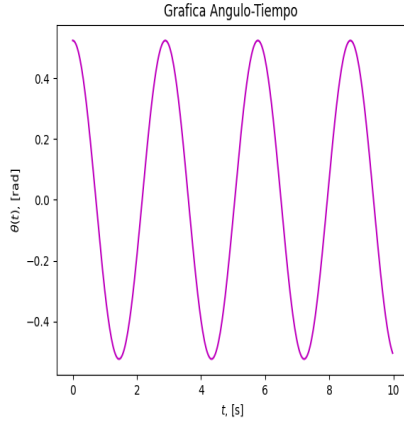


FIG. 5. Mapeo del péndulo simple (x,y)

Al ser nuestro trabajo del péndulo simple, se eliminan muchos factores entre estos la resistencia del aire, la cual nos haría ver algo curioso en nuestra gráfica Posición angular-tiempo, la cual en vez de ser una onda Sinusoidal pura, veríamos como esta va convergiendo al cero, diciéndonos que el péndulo al pasar el tiempo se iría frenando hasta quedar en su estado de mínima energía, el cual sería quieto en lo mas bajo de la curva

FIG. 6. Gráfica péndulo simple (θ_3, t)

dibujada por el péndulo.

Al querer buscar un análisis de las energías de nuestro sistema es necesario ya nuestra masa del péndulo, la cual viene dada por $m=10\text{kg}$, obteniendo así la siguiente gráfica donde se ve la evolución de la energía del sistema a lo largo de nuestro intervalo.

La expresión para el cálculo de nuestra energía total viene descrita por:

$$E = U + K = mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2,$$

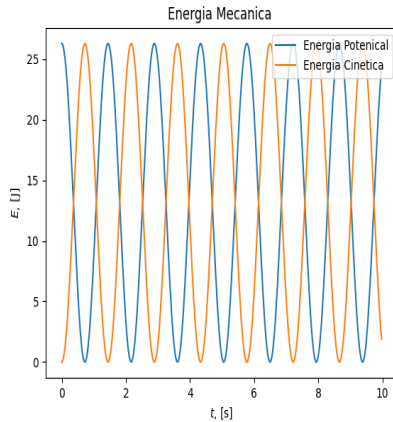


FIG. 7. Análisis de energía (J,t)

B. Péndulo doble

Es sabido que el péndulo doble es un excelente sistema que nos permite familiarizarnos con el concepto de "Caos", el cual en física se refiere a cualquier sistema que sea muy susceptible a las variaciones de las condiciones iniciales. Por lo cual es de suma importancia aclarar dichas condiciones, en nuestro caso ambos péndulos cuelgan con cuerdas de igual longitud (2 metros) y presentando una masa de 10 kg, con las condiciones iniciales de un ángulo inicial de $\frac{\pi}{2}\text{rad}$ para el primer péndulo, sin un impulso extra mas que el ejercido por la fuerza de gravedad, mientras que el segundo péndulo cuenta tanto con un ángulo inicial de 0 como de velocidad inicial.

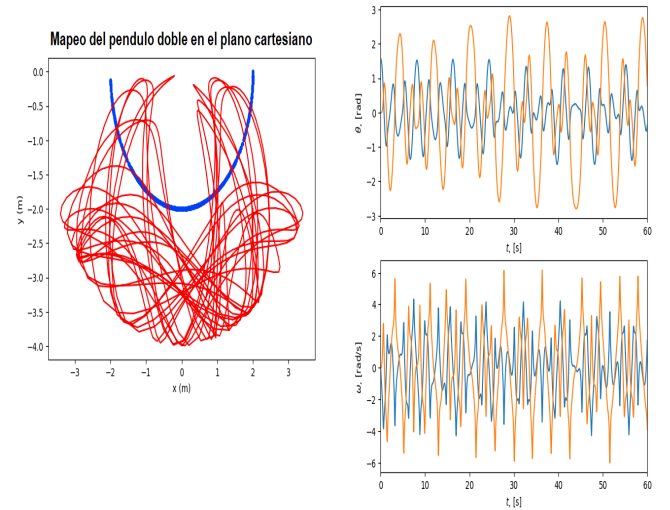


FIG. 8. Análisis y mapeo del sistema del péndulo doble

En dichas gráficas podemos encontrar tanto el análisis de las trayectorias descritas por ambos péndulos acoplados, siendo la trayectoria azul aquella descrita por el primer péndulo, mientras que la trayectoria roja describe el segundo péndulo, el cual convierte dicho sistema en un sistema caótica, además de esto podemos ver las dos gráficas que acompañan dicho mapeo.

La primer gráfica describe la evolución a través del tiempo de la posición de la masa de ambos péndulos (Ángulo formado por la perpendicular al eje de equilibrio estable), la cual podemos ver, evoluciona de una manera caótica aunque si presenta cierto patrón.

En la siguiente gráfica podemos ver la evolución a través del tiempo de la velocidad angular (la velocidad de barrido de x cantidad de radianes), la cual al igual que la gráfica anterior se evidencia lo caótico del sistema, pero siguiendo un patrón complejo.

C. Péndulo doble acoplado al péndulo simple

Solucionando de igual manera para nuestro péndulo doble, utilizado la biblioteca Scipy.Integration "Odeint", Sabemos que dicho sistema completo es por si mismo un claro ejemplo de un sistema caótico, el cual evoluciona de diversas maneras cambiando de manera minúscula nuestras condiciones iniciales, dichas condiciones iniciales pueden variarse y ver el comportamiento tan distinto que conlleva, como se muestra en la siguiente imagen:

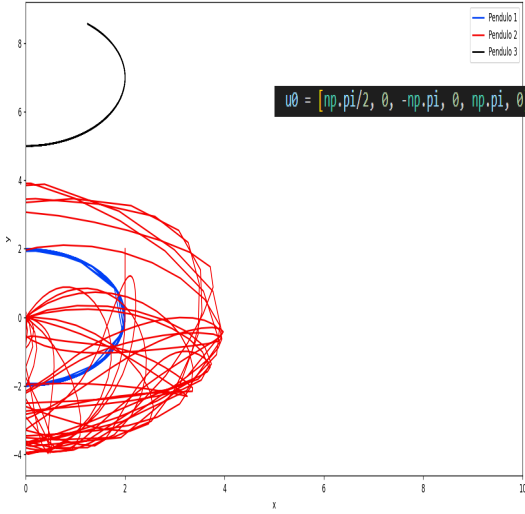


FIG. 9. Mapeo pendulo doble acoplado pendulo simple (y,x), 1er PVI

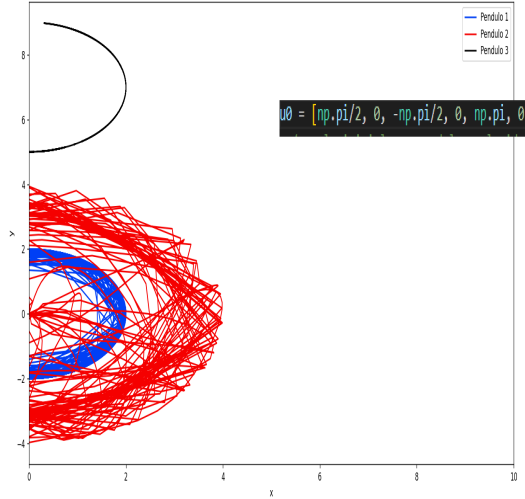


FIG. 10. Mapeo pendulo doble acoplado pendulo simple (y,x), 2do PVI

En dichas imágenes no es posible ver tal cual el com-

portamiento de los péndulos, pero al estar acoplados mediante un resorte de constante k (la cual se puede variar en nuestro código) notamos que existe una transferencia de energía entre ambos sistemas, esta energía transmitida depende principalmente del desplazamiento entre el péndulo 1 y el péndulo 3, eso es debido a que dichos péndulos son los soportes de nuestro resorte, en caso de verse la evolución del sistema completo podría apreciarse como el movimiento caótico del péndulo doble disminuye su intensidad debido a esta perdida de energía, la que hará aumentar el movimiento del péndulo simple (aumentar su velocidad), siendo este proceso reversible debido a la falta de fuerzas de disipación en el sistema (esto debido a que se trabajo simulando un ambiente de vacío), dicho comportamiento se puede observar al analizar la variación de su grado de libertad a lo largo del tiempo t .

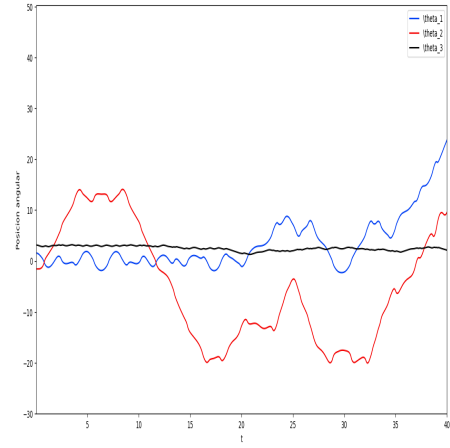


FIG. 11. Péndulo acoplado con las primeras condiciones iniciales

Donde podemos apreciar una transferencia de energía, la cual no es muy significativa y mueve poco al péndulo simple acoplado debido a la constante de nuestro resorte y las masas de los péndulos, aunque aun así es perceptible la transferencias de velocidad, ahora se presentara el punto de vista energético de nuestro sistema:

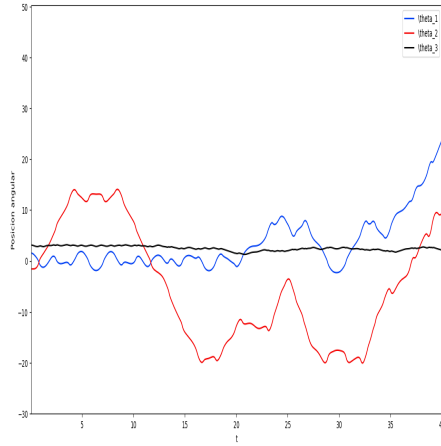


FIG. 12. Péndulo acoplado con las segundas condiciones iniciales

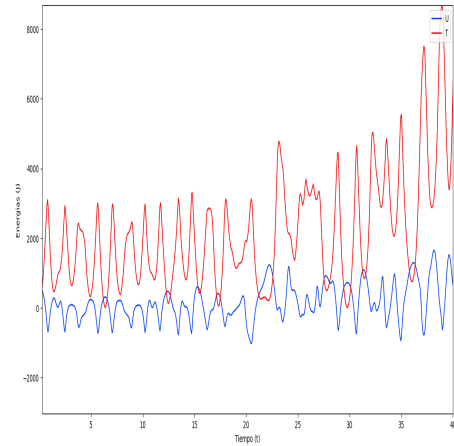


FIG. 14. Péndulo acoplado con las segundas condiciones iniciales

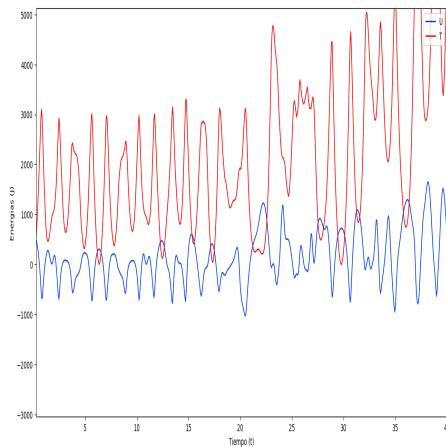


FIG. 13. Péndulo acoplado con las primeras condiciones iniciales

V. CONCLUSIONES

El hecho de tratar los sub-sistemas del sistema acoplado facilitó bastante la comprensión del fenómeno y como debería de evolucionar este a través del tiempo, se logró hacer el mapeo tanto de los subsistemas como del sistema completo gracias a las facilidades brindadas por el cálculo variacional (Euler-Lagrange) permitiéndonos obtener un sistema de 3 ecuaciones diferenciales, el cual por practicidades y como fin de este proyecto se resolvió utilizando métodos numéricos, en esta ocasión se hizo uso de dos métodos distintos, Runge-Kutta de 4to orden, el cual nos permite resolver problemas que no presenten mucha complicación matemática, en esta ocasión se resolvió el péndulo simple, el cual se obtuvo con un grado

de error de 4to orden en la serie expansión de Taylor, para el sub sistema B y para el sistema completo se trabajó con la función Odeint incluida en scipy como ya se mencionó, la cual a través de reescribir nuestro sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden nos permite resolver el sistema con la necesidad clara de unas condiciones iniciales, siendo este un problema que genera interés a partir de la particularidad que juega el caos en el estudio de los osciladores.

Además, es importante resaltar que al momento de analizar las energías presentes en el sistema se nota cierta discordancia entre las energías cinética y potencial, el cual se analizó y se encontró que es debido a una falla en las consideraciones de las contribuciones del resorte y la transferencia de energía con el 2do péndulo. Para expandir dicho proyecto se podría estimar los modos de vibración de acuerdo a los diferentes niveles de energía y las frecuencias de oscilaciones de los péndulos, además de una animación donde se pueda ver claramente la evolución del sistema.

VI. BIBLIOGRAFÍA:

- The double pendulum. (z.d.). The double pendulum. Geraadpleegd op 17 juli 2017, van <https://scipython.com/blog/the-double-pendulum/>
- Experimento del método de cálculo (3): método de Runge-Kutta de cuarto orden - programador clic. (s/f). Programmerclick.com. Recuperado el 26 de abril de 2022, de <https://programmerclick.com/article/63021944030/>
- Domínguez, E., Ardila, F., Bustamante, S. (s/f). System-Solver: una herramienta de código abierto para la modelación de sistemas dinámicos. Org.co. Recuperado el 26 de abril de 2022, de <http://www.scielo.org.co/pdf/iei/v30n3/v30n3a15.pdf>
- Función odeint . (s/f). Programmerclick.com. Recuperado el 26 de abril de 2022, de <https://programmerclick.com/article/74001063480/>
- Double Pendulum and Chaotic Motion. (s/f). Nbviewer.Org. Recuperado el 26 de abril de 2022, de https://nbviewer.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/double_pendulum.ipynb
- Simple Pendulum. (s/f-b). Nbviewer.Org. Recuperado el 26 de abril de 2022, de https://nbviewer.org/urls/www.numfys.net/media/notebooks/simple_pendulum.ipynb
- Zaman, M. A. (s/f). Double-pendulum-motion-Animation. de https://github.com/zaman13/Double-Pendulum-Motion-Animation/blob/master/Python20Code/DoublePendulum_v1.py
- Guancho Arevalo Jose Luis. (08/03/2022). Solución Numérica a la Ecuación Diferencial No Lineal que describe las Oscilaciones del Péndulo Simple con Python: REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 1, No. 2 de 2012.
- MARAZ, E, BURGOA, O. (2014). SIMULACION DEL MOVIMIENTO DE UN PÉNDULO DOBLE EN UN MEDIO VISCOOSO. Revista Boliviana de Física, 25(25), 27-30. Recuperado en 08 de marzo de 2022, de http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1562-38232014000200005&lng=es&estlng=es.
- Lee S. M. The double-simple pendulum problem. Am. J. Phys. 38 (1970) pp. 536-537
- García, A. (08/03/2022), Las Ecuaciones de Lagrange: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/lagrange/lagrange.html>
- Teoría del Caos. (08/03/2022). En Wikipedia [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoría del Caos](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoría%20del%20caos)
- SIMULACIÓN DE PENDULOS ACOPLADOS, A. R. Ticona Bustillos, G. M. Ramírez Ávila, Instituto de Investigaciones Físicas
- SIMULACIÓN CON CIRCUITOS ELECTRÓNICOS DE LA PRÁCTICA DE LABORATORIO DE FÍSICA III: PENDULOS ACOPLADOS: Redalyc.org. 2022. [online] Available at: <https://www.redalyc.org/pdf/849/84917316036.pdf> [Accessed 30 May 2022].